Introducción a las finanzas matemáticas

Carlos Ibarra Valdez, Area de Análisis, UAM Iztapalapa.

ibvc@xanum.uam.mx,
caibva@gmail.com

1. ***Jueves 2.* Panorama general de Finanzas. El modelo básico del mercado a 1 período.** *Conceptos básicos (valuación, arbitraje, cobertura, completez, medidas martingala) en el caso discreto. Pág. 4.*

2. ***Viernes 3.* Elementos de cálculo estocástico. Aplicaciones a Finanzas.**
   Procesos, distribuciones finito dimensionales, esperanza condicional y propiedades. La integral estocástica. Lema de Itô. Ecuaciones diferenciales estocásticas. Aplicaciones a finanzas. Pág. 21.

3. ***Sabádo 4.* Dinámica de mercados financieros. El modelo de Samuelson, Merton & Karatzas (SMK).**
   Conceptos básicos (valuación, arbitraje, cobertura, completez, medidas martingala) en tiempo continuo. El modelo de Black Scholes. Pág. 54.

4. ***Domingo 5*. La fórmula de Black Scholes. Los dos teoremas fundamentales de finanzas matemáticas (***Teoremas fundamentales de valuación de activos***).** *Pág. 68*

5. ***Domingo 5*, plus. Modelos de tasas de interés.** *Pág. 85.*

ADVERTENCIA IMPORTANTE

El material que se presentará es mucho y un tanto difícil. No sólo desde el punto de vista matemático, sino conceptual. Contiene una buena dosis de ***cálculo estocástico*** *e implícitamente también de* ***economía financiera****.*

El nivel general es de fines de la licenciatura en matemáticas, pero avanzado, y en algunos aspectos y temas concretos, el nivel es de posgrado.

El libro de Mikosch (1999) da una buena idea del nivel mínimo. En la UAM Iztapalapa, los cursos más cercanos a este material serían los de 'Cálculo estocástico para finanzas' y 'Métodos matemáticos para finanzas II', que se imparten regularmente en la Maestría en Matemáticas Aplicadas e Industriales.

La herramienta matemática que representa el principal obstáculo para aprender a fondo cálculo estocástico y por ello finanzas matemáticas es la Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue. Sin embargo, se pueden llegar a manejar bastante bien, hasta un cierto punto, los aspectos operativos y conceptuales, tal como lo hacen economistas, financieros o físicos que trabajan en el tema y no conocen la teoría de la medida. Por otra parte, para un matemático profesional, es realmente indispensable que adquiera esa base, si quiere aprender y manejar bien finanzas matemáticas. Una excelente referencia en esta dirección es S. B. Chae (1994).

Sin embargo, en este mini curso no utilizaremos explícitamente teoría de la medida ni integral de Lebesgue*, salvo breves referencias optativas, de vez en cuando.*

Tocaremos también un poco de material adicional y más avanzado : los dos teoremas fundamentales de finanzas matemáticas a un nivel relativamente general, y una muy rápida introducción a modelos de tasas de interés.

Los objetivos básicos de esta presentación, cuyo material realmente no puede ser "aprendido" aquí – excepto, hasta cierto punto, por alguien que ya maneje bien el cálculo estocástico – es dar un panorama general del tema de finanzas matemáticas, así como despertar el interés en estudiarlo con más detalle y más profundamente, ya sea en cursos ó en los textos mencionados. Además, las notas impresas contienen otros materiales extra (como la fórmula *de Feynman – Kac) que no serán mencionadas en las exposiciones, pero que podrían servirle más adelante al lector interesado.*

Dependiendo del tiempo, las preguntas, etc. podría ser que no sigamos estrictamente el temario en los días asignados. Podríamos adelantarnos, ó más probablemente, retrasarnos en algunos puntos.

Será muy conveniente, realmente indispensable, que pregunten y participen lo más posible. Estaré a su disposición fuera de las sesiones, la mayor parte del tiempo, para contestar preguntas, ampliar algunos puntos o simplemente platicar alrededor de estos temas.

Sobre la bibliografía. *Se encuentra al final de las notas* ***en orden cronológico ascendente****. Los textos que más utilizaremos son :*

T. Mikosch (1999) ; S. Shreve (2004); T. Björk (2005); F. Klebaner (2005); B. Oksendal (2005); L. Arnold (1978); Filipovic (2009).
Si se requiere completo rigor matemático, ver : Karatzas (1997), Tudor (1997) o Williams (2006).
Puede ser de utilidad la siguiente tesis de maestría : A. Sánchez-Peralta (2010).

<u>Jueves 2.</u>

A. Panorama general.

B. El modelo de mercado a un período.

A. Panorama general

A.1 La esfera de las Finanzas antes y después de 1973.

Los conocimientos y desarrollos teóricos acerca de cuestiones financieras son tan antiguos como las civilizaciones, por obvias razones económicas y sociológicas. No sólo las cuestiones relacionadas con intercambios, préstamos e interés, sino que versiones no tan rudimentarias de los sofisticados instrumentos denominados actualmente derivados financieros, como las opciones y los futuros, eran conocidos desde hace milenios y se han comerciado a lo largo de la historia. Aparecen mencionados, regulados o criticados en el Código de Hammurabi y en el Antiguo Testamento, entre otras fuentes.

A partir del surgimiento de la banca moderna, aproximadamente al mismo tiempo que el renacimiento italiano, se van desarrollando los elementos básicos de las finanzas, la mayor parte relacionados con cuestiones contables y de intermediación financiera, así como con el importante tema de los seguros. Los aspectos matemáticos de este conocimiento fueron, desde entonces hasta 1973, relativamente elementales. Con la excepción de las aportaciones de Louis Bachelier alrededor de 1900, las cuales pasaron casi desapercibidas hasta fines de los años sesenta del siglo pasado.

En comparación con la matemática utilizada en física e ingeniería e incluso en teoría económica, las matemáticas utilizadas en teoría financiera y finanzas "aplicadas" o "prácticas" era muy elemental : estadística, álgebra lineal, optimización básica y poco más. Hasta 1973. Alrededor de este año desarrollos incipientes comienzan a cristalizar, y en menos de una década, la teoría financiera da un salto cualitativo, especialmente desde el punto de vista técnico, y sus niveles teóricos más avanzados utilizan ya matemáticas muy sofisticadas, a partir de principios de los años ochenta. En los años noventa *la sofisticación matemática de las finanzas teóricas da otro salto y se ubica al nivel de la investigación matemática más demandante técnicamente. Se establecen los dos Teoremas fundamentales de las finanzas, y numerosos matemáticos de primera fila, especialmente probabilistas y analistas funcionales se dedican parcial o completamente a la investigación en lo que ya se denomina Finanzas Matemáticas (en inglés, Mathematical Finance).*

En lo que va del siglo XXI, este desarrollo espectacular ha proseguido aún con más ímpetu : las finanzas matemáticas ya no sólo utilizan algunas de las matemáticas más avanzadas, sino que empiezan a retroalimentar e influir en algunos de los desarrollos matemáticos más recientes. Veremos esto con mayor detalle en la próxima sección.

En lo que resta de la presente sección, comentaremos acerca de lo que ocurrió alrededor de y en 1973, y de los antecedentes financieros, matemáticos y metodológicos que impulsaron el despegue de las finanzas matemáticas, así como el desarrollo mismo de éstas, a grandes rasgos, entre 1973 y 1981.

En 1973 se publica el artículo que todos reconocen como el acta de nacimiento de la moderna teoría de las finanzas y sobre todo de las finanzas matemáticas : el artículo de Fischer Black y Myron Scholes que incluye una fórmula explícta para la valuación de opciones de compra europeas (Black & Scholes (1973)). Ese mismo año, se funda el CBOE (Chicago Board of Options Exchange). Estos dos son los eventos más significativos, pero hay otros varios desarrollos tanto en la academia como en las instituciones financieras, así como en la escena internacional (especialmente las relacionadas con el inicio de las crisis petroleras que ocurrieron en 1973 y en 1979), que abrieron el camino para la consideración e implementación de diversas medidas y decisiones en las esferas política, financiera y académica, orientadas a expandir el comercio de derivados financieros, especialmente opciones y futuros.

En el ámbito académico, inicia un proceso de desarrollo teórico alrededor de la comprensión, uso y extensiones varias del modelo y fórmula de Black Scholes, así como otras cuestiones relacionadas con administración de riesgos, optimización de portafolios y modelos de equilibrio ecónomico en el área financiera. A un ritmo acelerado, durante el intervalo 1973-1981 comienzan a utilizarse herramientas matemáticas antes impensables para los profesionales de las finanzas : optimización avanzada, ecuaciones en derivadas parciales, métodos numéricos sofisticados, y desde luego, cálculo estocástico. La muy importante área probabilística de teoría de martingalas se introduce profunda y definitivamente en las finanzas a partir de los trabajos Harrison-Kreps-Pliska en el intervalo 1979-81. Por otra parte, en el *ámbito del tema académico denominado economia financiera ('Financial Economics') hay notables desarrollos durante los años setenta : los avances teóricos asociados a los conceptos de cobertura y replicación financiera, arbitraje, valuación mediante teoría de arbitraje, valuación neutral al riesgo, completez de mercados, así como a los temas más generales de administración de riesgo y selección óptima de portafolios. Algunos de los nombres importantes asociados con estos desarrollos incluyen a los más destacados economistas financieros de la década : Steve Ross, Steve Myers, Robert Jarrow, Robert Merton, Fischer Black, Peter Carr, Dilip Madan, Mark Rubinstein y varios otros.*

Por último, cabe mencionar que los conceptos de economía financiera mencionados arriba tienen antecedentes en los años sesenta e incluso antes. Y por su parte, las matemáticas "avanzadas" que se inyectaron en la teoría financiera durante los años setenta, distaban mucho de ser nuevas. En particular, el cálculo estocástico surgió en los años cuarenta principalmente en los trabajos del matemático japonés K. Itô, motivado por cuestiones varias de física-matemática. Sin embargo, el cálculo estocástico, especialmente a un nivel riguroso matemáticamente, permaneció durante décadas como un tesoro secreto y celosamente guardado, accesible para relativamente pocos probabilistas, y para algunos matemáticos aplicados que trabajaban en problemas muy específicos de ingeniería o biología. Fue la demanda generada en finanzas, via el modelo de Black Scholes y sus extensiones, la que expandió notablemente la difusión de este tema. En el presente (2013) existen docenas de libros de texto (particularmente de la editorial Springer) sobre cálculo estocástico a nivel graduado y pre-graduado. Y versiones varias del tema (en ocasiones muy poco rigurosas) se enseñan regularmente a lo largo de todo el mundo, no sólo en doctorados de matemáticas o economía financiera, sino en prácticamente todos los MBA ('Master on business administration) y en algunas licenciaturas.

A.2 El área de finanzas matemáticas.

Como se afirmó en la sección anterior, en las finanzas matemáticas (o 'Mathematical Finance' en inglés) se introdujeron, a partir de 1973, el uso de matemáticas cada vez más avanzadas (cálculo estocástico, análisis funcional y ecuaciones en derivadas parciales, entre otras), se produjeron resultados al más alto nivel de investigación matemática (los dos 'Teoremas fundamentales de las finanzas', así como muchos otros avances), y recientemente, las finanzas matemáticas han empezado a retroalimentar e influir en la *investigación matemática 'pura' que se lleva a cabo en algunas áreas bien establecidas de la matemática, sobre todo en la teoría de procesos estocásticos. En esta sección detallamos un poco más estas afirmaciones, pero recomendamos leer o revisar algunas de las referencias, especialmente Delbaen & Schachermayer (2006); Karatzas (1997); Karatzas & Shreve (1998); Schachermayer (1998); Bru & Yor (2002); Jarrow & Protter (2004); Yor et al (2008).*

Enseguida enlistamos a los principales matemáticos que han contribuido al desarrollo del tema, así como a las áreas de la matemática que más han interactuado con finanzas.

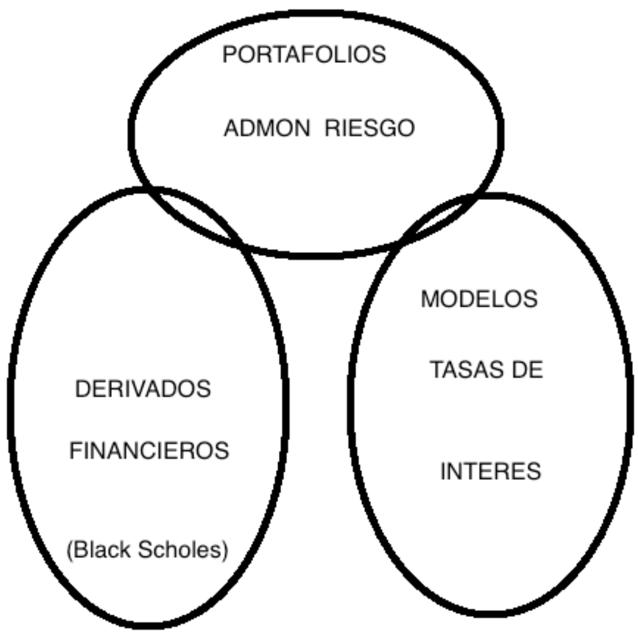
Matemáticos. *A partir de 1981, un número creciente de matemáticos de primera fila, así como muchos otros, han dedicado parcial o completamente sus esfuerzos en investigación al desarrollo de este tema. Entre otros, podemos mencionar a los analistas funcionales Walter Schachermayer y Freddy Delbaen, al analista/probabilista Paul Malliavin, recientemente fallecido, al conocido analista Elias M. Stein, a los especialistas en ecuaciones en derivadas parciales D. Isakov,*
E. Barucci, V. Vespri, y a la mayor parte de los principales probabilistas a nivel internacional, como Marc Yor, Philip Protter, Hans Föllmer, Jean Jacod, A.V. Skorohod, Albert Shiryaev, Ionannis Karatzas, Steve Shreve, Eckhard Platen, Bert Oksendal, Nicole El Karoui. También, los economistas y financieros con más alto 'background' matemático han colaborado intensamente en el tema. Destacan Paul Samuelson, Robert Merton, Robert Jarrow, Darrel Duffie, Peter Carr, Dilip Madan.
La anterior lista incluye o involucra premios nóbel de economía (Samuelson, Merton), profesores de matemáticos al nivel de medallas Fields (F. Delbaen fue maestro de Jean Bourgain y E.M. Stein lo fue de C. Fefferman y T. Tao) y muchos otros importantes reconocimientos. W. Schachermayer recibió el premio 'Ludwig Wittgenstein', la más alta presea científica de Austria y una de las más prestigiadas a nivel internacional, por el que es quizás el resultado más sobresaliente (hasta la fecha) en finanzas matemáticas : la demostración, rigurosa y detallada, en trabajo conjunto con F. Delbaen, de la versión general del Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos (Delbaen & Schachermayer (1994, 1998)). Este trabajo de cerca de 100 páginas de análisis funcional y análisis estocástico coloca las finanzas matemáticas al más alto nivel de investigación. Por último, el hecho de que se le otorgara el premio 'Gauss' de matemáticas aplicadas a Kiyosi Itô, el fundador del cálculo

estocástico, se debe en buena medida a la importancia central del 'Cálculo de Itô' en finanzas matemáticas.

Conexiones con otras áreas. *En el contexto de la matemática misma, y en especial en el de la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, el área de finanzas matemáticas ha influido de manera crucial en la última década. Originalmente motivados por la inyección de Cálculo Estocástico elemental que llevaron a cabo Merton, Black y Scholes en el período 1969-1973, un número cada vez más considerable de matemáticos y economistas matemáticos se fueron involucrando en el tema, y a partir del intervalo 1979-1981, cuando Harrison, Kreps y Pliska introducen la Teoría de Martingalas en el estudio de mercados financieros, comienza un desarrollo matemático verdaderamente notable por la rapidez, profundidad y sofisticación de las herramientas matemáticas involucradas. Más aún, no sólo se aplicaron matemáticas ya conocidas a finanzas, sino que la interacción con éstas renovó el uso y consideración de importantes áreas de la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, e incluso en fechas más recientes, dicha interacción ha promovido y orientado avances centrales. Algunas de las áreas involucradas son : los desarrollos recientes acerca de la teoría del movimiento browniano, incluído el movimiento browniano fraccional; la teoría de semi y sigma-martingalas; los teoremas de representación de martingalas en tiempo continuo; teoría de Cameron-Martin-Girsanov; Procesos de Levy; Expansiones de caos y 'white noise analysis'; Teoría de Kunita-Ikeda-Watanabe sobre flujos generados por ecuaciones diferenciales estocásticas; ecuaciones diferenciales estocásticas con retardos en dimensión infinita; ecuaciones diferenciales parciales estocásticas; teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas backward-forward; integración estocástica general, incluyendo las integrales de Jacod-Meyer, Skorohod y Wick.*
El nivel de dificultad, elegancia y sofisticación del tema puede verse claramente en numerosos libros de editoriales como Springer, Birkhäuser o Kluwer y en decenas de artículos publicados en algunas de las mejores revistas, tales como Matematische Annalen, Journal of Mathematical Analysis and its Applications, Mathematical Finance, Stochastic Processes and their applications y muchas otras. Los autores de tales libros y artículos incluyen, entre muchos otros, a los destacados matemáticos y teóricos mencionados en el inciso anterior.

En conclusión, puede decirse que si bien el modelado matemático y algunas de las aplicaciones de diversas áreas de la matemática a las finanzas 'prácticas' pueden ser discutibles (sobre todo a partir de la crisis financiera *de 2008 – 2010) de lo que no hay duda es que Finanzas matemáticas ('Mathematical finance') es un área sólida y rigurosa de la matemática y se encuentra hoy día en plena efervescencia.*

A.3 Mapa de finanzas matemáticas :



FINANZAS MATEMATICAS

RESUMEN.

- ***Finanzas hasta 1973 : técnica matemática elemental (optimización básica, álgebra lineal, estadística), con la excepción del trabajo de L. Bachelier (1900), casi desconocido hasta los años sesenta.***

- ***1973 : Modelo y fórmula de Black Scholes; fundación del Chicago Board of Options Exchange; etc.***

- ***1973 – 1981 : desarrollos varios, utilizando cálculo estocástico, optimización avanzada y ecuaciones en derivadas parciales.***

- ***1981 – 1992 : introducción de la teoría de martingalas y perfeccionamiento de varios conceptos de economía financiera.***

- ***1992 – 1999 : teoremas fundamentales de finanzas matemáticas; interacción fuerte con teoría de procesos estocásticos; desarrollos conceptuales varios.***

- ***1999 – 2013 : interacción fuerte con varias ramas de la matemática; influencia en desarrollos recientes de procesos estocásticos como el MBf, procesos de Levy, etc.***

- ***1973 – 2013 :*** en cuanto a contenido***, los temas principales han sido valuación y cobertura de derivados financieros, especialmente opciones de muy variada clase. A partir de 1978, modelos estocásticos de tasas de interés.***

B. El modelo de mercado a 1 período.

Referencias : En esta sección seguiremos ***muy de cerca*** *Björk (2005).*
Un texto más riguroso y con un contexto más general es : S. Pliska (2001). También puede utilizarse Shreve (2004) vol. I. Por último, uno de los mejores textos disponibles, que incluye mucho material, así como gran claridad conceptual y matemática es LeRoy & Werner (2001).

El tiempo, denotado por t, toma dos valores : $t = 0$ *("hoy") y* $t = 1$ *("mañana"), por lo que en realidad tenemos sólo* ***un período.*** *El mercado consta de dos activos :* ***bonos****, el activo 'no riesgoso' y el* ***'stock'*** (acervo), *o 'activo riesgoso'. En adelante los llamaremos simplemente "bono" y "activo", respectivamente. El proceso (determinístico) del bono está dado por*

$$B(0) = 1; \quad B(1) = 1 + r$$

donde r es la tasa de interés de contado ('spot') del período. Se puede interpretar como la tasa de un banco o del mercado de dinero, y más adelante como la ***tasa libre de riesgo*** *(CETES, Treasury bills)****.*** *La dinámica del activo riesgoso está dada por*

$$S(0) = s; \qquad S(1) = \begin{cases} s \cdot u, & prob.\ p_u \\ s \cdot d, & prob.\ p_d \end{cases}$$

con p_u *,* $p_d > 0$; $p_u + p_d = 1$, *y desde luego* $d < u$. *Lo escribiremos también como*

$$S(1) = s \cdot Z$$

donde Z es una variable aleatoria que toma los valores u (con probabilidad p_u *) ó d (con probabilidad* p_d *). Implícitamente estamos trabajando sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *en donde* $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$ *(dos "estados del mundo"),* $\mathcal{F}$ *es el conjunto potencia de* Ω *(la sigma álgebra maximal) y*

$$P(\{\omega_u\}) = p_u \quad ; \quad P(\{\omega_d\}) = p_d$$

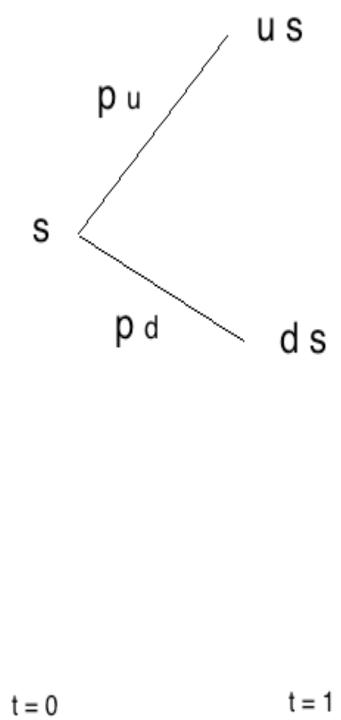
todos los números anteriores son conocidos, incluido el precio actual del activo riesgoso s. La incertidumbre se representa por el hecho de qué no sabemos con certeza cuál de los dos estados del mundo ocurrirá; cada uno de ellos tiene cierta probabilidad positiva de ocurrir.

Un diagrama :

$$1 \quad \longrightarrow \quad 1(1+r) \qquad \textbf{\textit{Bono.}}$$

Inversión: $A\ \$ \quad \rightarrow \quad (1+r)A$

Valor presente : $\frac{1}{(1+r)}\ B \quad \rightarrow \quad B$



ACTIVO

Consideraremos ***portafolios*** *en el mercado (Bono, Activo) dados como vectores bidimensionales* $q = (x, y)$. *La interpretación es que el portafolio q tiene x unidades de bono, así como y unidades de activo. Los valores positivos representan tenencia o posesión (posición 'larga') mientras que los negativos representan deudas, 'ventas en corto' ('short sales') o préstamos (posición 'corta').*

Hipótesis.

1. $x, y \in \mathbb{R}$.
2. *No hay diferencial 'bid – ask' (el precio de venta es igual al de compra).*
3. *No hay 'costos de transacción'.*
4. *El mercado es* ***completamente líquido.*** *Por ejemplo, siempre hay préstamos del banco en cualquier cantidad.*

Definición : *Si* $q = (x, y)$, *el* ***proceso del valor del portafolio es***

$$(Vq)(t) = x\,B(t) + y\,S(t); \qquad t = 0{,}1.$$

Desglosando :

$$(Vq)(0) = x + y\,s$$

$$(Vq)(1) = x(1 + r) + y\,s\,Z$$

Definición : *un portafolio de* ***arbitraje*** *es un portafolio q que satisface :*

i) $(Vq)(0) = 0$;

ii) $P[(Vq)(1) \geq 0] = 1$;

iii) $P[(Vq)(1) > 0] > 0$

El portafolio q es un ***arbitraje fuerte sii***

i) $(Vq)(0) = 0$;

ii) $P[(Vq)(1) > 0] = 1$.

Teorema: *en el modelo de mercado a un período se cumple*

a) ***No hay arbitraje*** *si y sólo si*

$$d < (1 + r) < u \qquad (*)$$

b) ***No hay arbitraje fuerte*** *si y sólo si*

$$d \leq (1 + r) \leq u \qquad (**)$$

Demostración : *ejercicio muy ilustrativo.*

Comentario : *el concepto de arbitraje es uno de los más importantes en finanzas matemáticas, y para algunos autores, el más importante de todos. Muchos enunciados de resultados cruciales en finanzas matemáticas tienen la estructura : "Suponiendo que no hay arbitraje, se sigue que …".*

Comentario : *en realidad hay varios conceptos de arbitraje. En este modelo, el más sencillo posible, hay dos (arbitraje y arbitraje fuerte). A medida que el modelo se complica, sobre todo generalizando la estructura del espacio de probabilidad, surgen más variantes. Ver A. Sánchez – Peralta (2010).*

Medidas martingala equivalentes.

La doble desigualdad (*) equivale a que el número $(1+r)$ *sea una combinación convexa de u, d. Es decir, que existen dos números* $q_u, q_d > 0$ *con* $q_u + q_d = 1$ *tales que*

$$1 + r = q_u \cdot u + q_d \cdot d$$

Estos 'pesos' pueden interpretarse como probabilidades correspondientes a una nueva medida de probabilidad Q en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ *definida por*

$$Q[Z = u] = q_u \,; \quad Q[Z = d] = q_d$$

Si denotamos la esperanza con respecto a Q como E^Q *se tiene que*

$$\frac{1}{(1+r)} E^Q[S(1)] = \frac{1}{(1+r)} \{q_u \cdot u\, s + q_d \cdot d\, s\} = s$$

Tenemos entonces la siguiente ***Fórmula de valuación :***

$$\boxed{S(0) = \frac{1}{(1+r)} E^Q[S(1)]}$$

ésta es la ***fórmula de valuación neutral al riesgo,*** *mediante la cual obtenemos el precio del activo 'hoy' como el valor presente del precio esperado 'mañana'. A Q se le llama* ***medida martingala equivalente ó medida neutra al riesgo.***
Ahora podemos enunciar, en este contexto, el resultado que hasta 1998-1999 fue el resultado central de FM.

Teorema *(Versión 0.0 del 'Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos' (PTFVA) ó 'Primer Teorema Fundamental de Finanzas' (PTFF)) :*

El modelo de mercado a un período es libre de arbitraje si y sólo si existe una medida martingala equivalente.

Proposición : *para este modelo, las probabilidades para la MME* Q *están dadas por*

$$q_u = \frac{(1+r)-d}{u-d} \; ; \qquad q_d = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Demostración : *ejercicio muy sencillo.*

Reclamos contingentes (‘contingent claims’).

Comentario *: derivados financieros.*

Definición : *un reclamo contingente (derivado financiero) en el mercado a 1 período es una variable aleatoria de la forma* $X = \Phi(Z)$*, donde* Z *es la v.a. del mercado definida antes y* Φ *es una función apropiada (Borel medible).*
En términos prácticos, concretos, se trata de un **contrato,** *y* Φ *es la función de contrato.*

Comentario : *contratos.*

Ejemplo importante : opción de compra europea escrita sobre el activo riesgoso (subyacente).
El contrato se realiza entre dos partes : A, quien escribe y vende la opción, y B quien la compra y es el tenedor de la misma. La opción le otorga a B el derecho, pero no la obligación de comprarle a A una determinada cantidad de activo (una unidad) por un precio determinado K, llamado precio de ejercicio (‘strike), cuando $t = 1$*. Aquí la función de contrato es*

$$\Phi(Z) = (Z-K)^+ = max\{Z-K, 0\},$$

O bien :

$$\Phi(u) = s\,u - K \;\; ; \;\; \Phi(d) = 0,$$

Bajo la hipótesis de que $sd < K < su$.

Denotemos el precio 'justo' (el precio de no arbitraje) para X al tiempo t como $\pi(t, X)$.

Proposición : *para que no haya arbitraje se requiere que* $\pi(1, X) = X$.

Prueba *: suponer lo contrario y construir un portafolio de arbitraje.*

El problema principal, y en principio muy difícil es encontrar $\pi(0, X)$.

Comentario importante. *Aún en este contexto tan extremadamente simple, puede verse el esquema general de trabajo en finanzas matemáticas : se trabaja "hacia atrás" ('backwards'). Con base en algunas suposiciones sobre el futuro (aquí,* $t = 1$ *), se obtienen resultados importantes, sobre todo valuaciones, para el presente* $(t = 0)$. ***Es completamente al revés de la idea usual de "predecir el futuro".***

<u>Solución mediante alcanzabilidad y completez.</u>

Definición : *un reclamo contingente X es* ***alcanzable*** *sii existe un portafolio q tal que* $(Vq)(1) = X$. *En ese caso se dice que el portafolio* ***replica*** *a X, y que es un portafolio de* ***cobertura.***

Comentario : *en un sentido puramente financiero, no hay distinción entre tener un reclamo contingente X y tener un portafolio q que lo replica.*

La posibilidad de replicar todos los derivados financieros es una propiedad importante de un mercado, significa que el mercado es suficientemente amplio, rico en cuanto a los activos que se mercadean en él como para poder reproducir prácticamente cualquier tipo de comportamiento financiero.
Esto nos lleva a un concepto sumamente importante, para muchos autores tan importante como el de arbitraje. Se trata de la completez del mercado.

Comentario : *el concepto de 'alcanzabilidad' proviene en términos generales de la teoría de control. En derivados financieros no se ha explotado esta conexión, pero en el tema mucho más profundo y difícil de tasas de interés, T.*

Björk y sus colaboradores han establecido conexiones profundas con teoría de control y con otras áreas clásicas de la matemática.

Ahora presentamos el segundo concepto más importante de FM. Para algunos autores, está a la par, si no es que más arriba en importancia, que el de arbitraje.

Definición : *el mercado a un período es* ***completo sii*** *todo reclamo contingente puede ser replicado dentro del mercado, es decir, para todo derivado financiero X, existe un portafolio q del mercado tal que* $(Vq)(1) = X$.

Teorema : *Si q replica a X,* ***entonces,*** *bajo la hipótesis de* ***no arbitraje,*** *forzosamente se cumple también que*

$$\pi(0, X) = (Vq)(0).$$

Demostración : *ejercicio.*

Los conceptos de arbitraje y completez mantienen una relación compleja cuando el espacio de probabilidad tiene una estructura complicada. En el caso del modelo a 1 período, dicha relación es muy sencilla. Tenemos el siguiente

Teorema : *en este modelo de mercado,* ***no arbitraje*** *implica* ***completez.***

Demostración : es inmediata, dado ***cualquier*** *reclamo X representado por una función contractual* Φ*, los 'pesos' del portafolio vienen dados por*

$$x = \frac{1}{(1+r)} \frac{u\,\Phi(d) - d\,\Phi(u)}{u-d} \;;$$

$$x = \frac{1}{s} \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d} \;;$$

Problema / pregunta : *¿se cumple la implicación recíproca?*

Valuación neutral al riesgo.

Hemos visto que el modelo de mercado a un período es completo (bajo la hipótesis de no arbitraje). Entonces dado cualquier reclamo X tenemos que $\pi(0,X) = (Vq)(0)$ *donde el portafolio q está dado por los pesos de las fórmulas anteriores. Después de un poco de álgebra obtenemos :*

$$\pi(0,X) = x + s\,y$$

$$= \frac{1}{(1+r)}\left\{\frac{(1+r)-d}{u-d}\Phi(u) + \frac{u-(1+r)}{u-d}\Phi(d)\right\}$$

Es decir,

$$\boxed{\pi(0,X) = \frac{1}{(1+r)}\,\{q_u\,\Phi(u) + q_d\,\Phi(d)\}}$$

el lado derecho es el valor esperado del reclamo X bajo la medida de probabilidad Q. Tenemos entonces el siguiente

Teorema : *en el modelo a un período, el precio* **libre de arbitraje** *de un reclamo contingente X está dado por*

$$\boxed{\pi(0,X) = \frac{1}{1+r}\,E^Q[X]}$$

donde la medida martingala Q está unívocamente determinada por la ecuación

$$S(0) = \frac{1}{1+r}\,E^Q[S(1)]$$

de la cual se obtuvieron los valores para las probabilidades q_u, q_d.
La fórmula dentro de la caja es la "valuación neutral al riesgo" y a la MME Q se le llama también "medida neutral al riesgo".

En este sencillísimo ejemplo se encuentran ya los elementos principales de la ***valuación mediante el método de la martingala****. Más adelante veremos la prueba de la fórmula de Black Scholes mediante una expresión completamente similar a la de arriba, sólo que en un contexto matemático mucho más complicado (de hecho infinito – dimensional) :*

$$C(t) = e^{-r(T-t)}E^{Q}[(S(T)-K)^{+}|\mathcal{F}_t]$$

Algunos comentarios adicionales.

1. *El único papel jugado por la probabilidad "real" u "objetiva" P (con los valores* p_u, p_d *) es que ella determina cuáles eventos son posibles y cuáles imposibles. Ella determina la clase de equivalencia de las medidas de probabilidad a considerar.*

2. *Cuando calculamos el precio libre de arbitraje de un derivado financiero, llevamos a cabo los cálculos* ***como si viviéramos en el mundo neutral al riesgo.*** *Otra manera de decirlo es que las valuaciones basadas en la medida neutral al riesgo son las únicas en las que están de acuerdo todos los participantes en el mercado, independientemente de su propensión al riesgo.*

Sugerencia : *estudiar con cuidado el ejemplo numérico al final de la primera sección del capítulo 2 de Björk (2005).*

Comentario importante : generalizaciones.

- *El modelo anterior se generaliza fácilmente a cualquier número de períodos y se conoce como 'El modelo binomial'. Fue introducido por Cox, Rubinstein y Ross en 1979 como una ayuda pedagógica, para entender en el caso discreto el modelo y fórmula de Black Scholes. Sin embargo resulto ser un desarrollo con valor en sí mismo. Ver por ejemplo Shreve (2004) vol I.*
- *El modelo a un período también puede extenderse al caso de* ***varios activos****, lo cual lleva a interesantes consideraciones de álgebra lineal y optimización con el lema de Farkas (la versión finito dimensional del Teorema de Hahn – Banach).*

Ambas generalizaciones pueden verse en Björk (2005), ó en Pliska (2001).

VIERNES 3.

Antecedentes matemáticos (Cálculo estocástico).

REF : Arnold (1978); Karatzas & Shreve (1991); Steele (2001); Oksendal (2005); Klebaner (2006).

Procesos estocásticos.

Definición de proceso estocástico, notaciones.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es un espacio de probabilidad, y* $T > 0$*, un proceso estocástico* X *en* $[0, T]$ *es una función*

$$X: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \in [0, T]$*, la función* $\omega \mapsto X(t, \omega)$ *es una variable aleatoria.*
El proceso estocástico puede verse entonces como una colección o familia de variables aleatorias indizada por $t \in [0, T]$.

Observación : Notaciones.

$$X(t, \omega) = X(t) = X_t = X_t(\omega)$$

Para cada $\omega \in \Omega$ *("estado del mundo"), la función* $t \mapsto X(t, \omega)$ *se llama trayectoria ('path').*

Observación : *el codominio puede ser* $\mathbb{R}^n$ *ó más general, un espacio de Banach.*

Observación : *el conjunto de índices, como se denomina a* $[0, T]$ *puede ser discreto, finito ó infinito y de cualquier dimensión, puede ser un espacio de Banach. Ver Revuz & Yor (1999).*

Distribuciones finito – dimensionales.

Escogemos $N \in \mathbb{N}$; $t_1, \dots, t_N \in [0,T]$ *y borelianos reales* $B_1, \dots, B_N$. *Definimos*

$$\mu_{t_1,\dots,t_N}(B_1 \times \dots \times B_N) = P[X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_1) \in B_1]$$

con lo cual se obtiene una medida sobre la $\sigma -$ *álgebra de los borelianos en* $\mathbb{R}^N$. *A la colección de estas medidas, variando N y los* $t_i{}'s$ *se le llama la colección de las distribuciones finito – dimensionales del proceso X.*

Esperanza condicional.

Si Y *es una v.a. en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* $\mathcal{G}$ *una sub –* σ *– álgebra de* $\mathcal{F}$*, la* ***esperanza condicional*** *de Y dada* $\mathcal{G}$*, la que denotaremos por* $E[Y|\mathcal{G}]$ *es una variable aleatoria Z que satisface lo siguiente :*

i) *Z es* $\mathcal{G}$ *- medible;*

ii) *Para todo* $A \in \mathcal{G}$ *se tiene que*

$$\int_A YdP = \int_A ZdP$$

Observación: *existencia de la esperanza condicional. La prueba requiere algo de herramienta. Ver Oksendal (2005)*

Propiedades :

1) *Linealidad;*

2) $E\big[E[Y|\,\mathcal{G}]\big] = E[Y]$

3) $E[Y|\mathcal{G}] = Y$ *si* Y *es* $\mathcal{G}$ *– medible.*

4) $E[Y|\mathcal{G}] = E[Y]$ *si* Y *es independiente de* $\mathcal{G}$.

5) $E[Z \cdot Y|\mathcal{G}] = Z \cdot E[Y|\mathcal{G}]$ *si Z es* $\mathcal{G}$ *– medible.*

Ejercicio : *probarlas.*

Martingalas.

Definición: *Dado un proceso X en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y una* ***filtración*** $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$, *decimos que X es una* ***martingala*** *con respecto a la filtración sii para todos* $s \leq t$ *se cumple que*

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s) \text{ c.s.}$$

Observación : $E[|X(t)|] < \infty$, *para todo t.*

Observación : *importancia de las martingalas. Teoría, dessigualdades, etc. Por ejemplo,*

Teorema : **(**Desigualdad de Doob, Pascucci (2009), # 3.38) : *Sea M martingala continua en* $[0, T]$. *Entonces, para todo todo* $p > 1$ *se cumple*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|M(T)|^p].$$

Además de su utilidad en procesos estocásticos, este tipo de desigualdades tiene conexiones profundas con temas de análisis matemático, como espacios de Hardy y teoría abstracta de interpolación.

Enseguida vamos a presentar un resumen muy apretado del principal ejemplo de proceso estocástico, el movimiento browniano o proceso de Wiener. La teoría de procesos estocásticos es en gran medida el estudio detallado de las propiedades de este proceso, así como de sus extensiones, generalizaciones y aplicaciones. El cálculo estocástico de Itô está basado en las propiedades específicas de este importante proceso.

Movimiento browniano o proceso de Wiener.

1827 Robert Brown ; 1900 Louis Bachelier; 1905 Einstein; 1923 Wiener; alr. 1940 Paul Levy; 1942 y después, K. Itô.

Definición : el MB estándar es un proceso estocástico $\{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ *definido sobre un espacio de probabilidad completo* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *con valores reales que satisface*

i) $W(0) = 0$

ii) Para toda $t > 0$ *se tiene* $W(t) \sim N(0, t)$

iii) Tiene incrementos independientes : para $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, *las v.a.*

$$W(t_1) - W(t_0), \qquad W(t_2) - W(t_1) \ldots W(t_m) - W(t_{m-1})$$

son independientes.

iv) Tiene trayectorias continuas, i.e. para cada $\omega \in \Omega$, *la función* $t \mapsto W(t, \omega)$ *es continua.*

Teorema *: el MB existe. Además, puede ser construido de varias maneras. (Steele (2001), Revuz & Yor (1999)).*

Propiedades que se derivan de la definición.

1. Las funciones de esperanza y covarianza del MB son

$$\mu_W(t) = E[W(t)] \equiv 0 \,;$$

$$c_W(t, s) = E[W(t)W(s)] = min\{s, t\}$$

2. El MB es ***martingala****,* $0 \le s \le t$ *se cumple*

$$E[W(t)|\mathcal{F}_s] = W(s), \quad c.s.$$

Definición. *Sea* $f: [0,T] \to \mathbb{R}$, $p > 0$. *Su variación p-ésima está dada por*

$$V_p(f;T) = \sup_{\substack{\pi=\{0=t_0,t_1,\dots,t_n\} \\ \pi \in \Pi}} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$$

Cuando $p = 2$, *la variación se llama cuadrática.*

***Teorema de Levy** :* $[W,W](T) \coloneqq V_2(W;T) = T$ *c.s.*

Comentario : PROPIEDADES OSCILATORIAS DEL MB.

Teorema : *Casi seguramente, las trayectorias del MB son* ***no diferenciables en ningún punto.***

Teorema : *Casi seguramente, las trayectorias del MB son* ***de variación no acotada,*** *para cualquier intervalo* $[a,b] \subset [0,T]$.

Definición. *Un proceso* $X(t)$ *(*$t \in [0,T]$*) es auto-similar con exponente de Hurst H > 0 sii para todo* $\tau > 0$ *y para todos* $t_1, \dots, t_N \in [0,T]$ *se cumple que*

$$(\tau^H X(t_1), \dots, \tau^H X(t_N) \sim (X(\tau t_1), \dots, X(\tau t_N))$$

***Proposición** :* $W(t)$ *es auto-similar con* $H = \frac{1}{2}$.

Comentario 1 : Fractales.

Comentario 2 : Hurst, MBf.

Comentario 3 : Arbitraje y modelos financieros con MBf.

La integral estocástica o integral de Itô.

Antecedentes de integración de Riemann - Stieltjes.

Def: *la integral de Riemann, si existe es el límite*

$$\Re(f;[a,b]) = lim_{\pi,\xi}\, S(f;\pi;\xi;[a,b])$$

donde $S(f;\pi;\xi;[a,b]) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$, *y* $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ *para* $i = 1, \dots, n$.

Comentario : *particiones, redes y convergencia generalizada.*

Teorema de Lebesgue : *la integral de Riemann de f existe si y sólo si* $\mu\big(Disc(f)\big) = 0$.

Integral de Stieltjes: *f es el* *<u>integrando</u>, g el* *<u>integrador</u>. La integral de Stieltjes de f con respecto a g es el límite, si existe*

$$\int_a^b f dg = I_{RS}(f;g) = lim_{\pi,\xi} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

Ej 1 : *si* $g(x) = x$, $I_{RS}(f;g) = \Re(f)$.

Ej 2 : *Si* f *es continua y* $V_1(g) < \infty$, *entonces existe* $I_{RS}(f;g)$. (Teoría clásica de Stieltjes).

Ej 3 : *Teorema de Young* (Acta Math 1936, vol 67, p 251-282). *Si*

(i) $Disc(f) \cap Disc(g) = \emptyset$,

(ii) *existen* $p, q > 0$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ *tales que* $V_p(f)$, $V_q(g) < \infty$,

entonces *existe* $I_{RS}(f;g)$.

Conclusión para $\int_a^b f dW$: *suponiendo que f es de clase* C^1 *en* $[a,b]$, *para cada trayectoria browniana* ***la integral existe***, *pues en ese caso* $V_p(f) < \infty$ *con* $p = 1$, *y como* $V_2(W) < \infty$, *tenemos* $q = 2$, *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{2} > 1$.

Conclusión para $\int_a^b W dW$. *En este caso* $p = q = 2$ *y no se pueden mejorar* (a la baja), *por lo que no aplica el Teorema de Young.*

LA INTEGRAL ESTOCASTICA.

Ejemplo muy ilustrativo : $\int_a^b W dW$. *Considere una partición*

$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots t_n = t\}$, *y sea*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} W(t_{i-1})\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big)$$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} W(t_{i-1})\Delta_i W = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i W)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}W(t)^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{X}_n(t).$$

Tenemos que

$$E[\mathrm{X}_n(t)] = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = t$$

$$var\big(\mathrm{X}_n(t)\big) = \sum_{i=1}^{n}[E[(\Delta_i W)^4] - (\Delta_i t)^2]$$

como $E[(\Delta_i W)^4] = E\left[\left(W(t_i - t_{i-1})\right)^4\right]$

$$= E\left[\left((\Delta_i t)^{\frac{1}{2}} W(1)\right)^4\right] = 3(\Delta_i t)^2$$

entonces

$$var\left(X_n(t)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} (\Delta_i t)^2 \leq 2t\|\pi\| \to 0,$$

si $\|\pi\| \to 0.$

Como $var\left(X_n(t)\right) = E[(X_n(t) - t)^2]$, *entonces se tiene el siguiente*

Teorema ***:*** **(a)** *para cada* $t \geq 0$, $X_n(t) \to t$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *y consecuentemente,* **(b)** *existe una subsucesión* $Y_k = X_{n_k}$ *tal que* $X_n(t) \to t$, ***c.s.***

Basados en lo anterior, podemos hacer la siguiente interpretación $(\Delta_i W)^2 \sim \Delta_i t$, *pues* $E[\Delta_i W] = 0$, *y* $E[(\Delta_i W)^2] = \Delta_i t$. *En forma simbólica y compacta,*

(1) $(\Delta B)^2 \sim \Delta t$ (2) $(\mathrm{d}B)^2 = \mathrm{d}t$

Entonces, provisionalmente escribimos

$$" \int_0^t W dW = \frac{1}{2}((W(t))^2 - t) "$$

La integral de Itô para procesos simples

Consideremos un espacio de probabilidad filtrado para el browniano estándar $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$*, donde* $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(t): 0 \leq t < \infty\}$ *y restringimos todo a un horizonte temporal finito* $[0, T]$.

Definición: *Un proceso* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *es* ***simple*** *sii existen una partición* $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots t_n = T\}$ *y v.a.* $Y_1, \dots, Y_n$ *tales que para* $i = 1, \dots, n$

(a) Y_i es $\mathcal{F}_{t_{i-1}} -$ *medible* ;

(b) $E[Y_i^2] < \infty$;

(c) Si $0 \leq t < T$, entonces $X(t) = \sum_{i=1}^n Y_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}$;
$X(T) = Y_n$.

Definición : *Si* $X(t)$ *es un proceso simple, su integral de Itô está dada por*

$$\int_0^T X(s)dW(s) := \sum_{i=1}^n X(t_{i-1})\Delta_i W = \sum_{i=1}^n Y_i \Delta_i W,$$

y si $t \in [t_{k-1}, t_k]$ *tenemos que*

$$\int_0^t X(s)dW(s) = \int_0^t X(s)1_{[0,t]}dW(s) = \sum_{i=1}^{k-1} Y_i \Delta_i W + Y_k(W(t) - W(t_{k-1}))$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(***)\ \boldsymbol{Comentario\ muy\ importante}:\ \boldsymbol{Punto\ de\ la\ izquierda}.\\ Itô, Stratonovich, MacShane. Martingalas. Aplicaciones.\end{array}}$$

Propiedades básicas. *Sea* $I(X)(t) = \int_0^t X(s)dW(s)$, *para* $0 \leq t \leq T$. *Entonces*

(1) $E[I(X)(t)] = 0$;

(2) Linealidad ;

(3) $\int_0^T X(s)dW = \int_0^t X(s)dW + \int_t^T X(s)dW$,

(4) $E\left[\left(\int_0^t X(s)dW\right)^2\right] = \int_0^t E[X(s)^2]dW$

(5) $\{I(X)(t)\}_{t\in[0,T]}$ es $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} -$ martingala.

Prueba de (4) : *que las esperanzas son finitas se sigue de la propiedad* (1), *y la adaptabilidad se sigue de la definición de la filtración y de las propiedades de las v.a.* Y_i. *La igualdad de martingalas se ve separando en dos casos. Primero, si* $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$, *con* $s < t$, *tenemos que*

$$I(X)(t) = I(X)(t_{k-1}) + Y_k\big(W(s) - W(t_{k-1})\big)$$

$$+ Y_k\big(W(t) - W(s)\big)$$

$$= I(X)(s) + Y_k\big(W(t) - W(s)\big)$$

el primer término y Y_k *son* $\mathcal{F}_s -$ *medibles, y el incremento browniano es independiente de* $\mathcal{F}_s$, *luego* $E[I(X)(t)|\mathcal{F}_s] = I(X)(s) + 0 = I(X)(s)$. *El otro caso queda como ejercicio.*

Prueba de (5), **<u>*la isometría de Itô.*</u>** *Considere* $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots t_k = t\}$. *Escribimos* $Z_i = Y_i\Delta_i W$. *Entonces*

$$E[I(X)(t)^2] = E[\sum_i Z_i \sum_j Z_j]$$

$$= E\left[\sum_{i,j} Z_i Z_j\right] = \sum_{i,j} E[Z_i Z_j]$$

$$= \sum_i E[{Z_i}^2]$$

$$= \sum_i E[(Y_i \Delta_i W)^2] = \sum_i E[(Y_i)^2] E[(\Delta_i W)^2]$$

$$= \sum_i E[(Y_i)^2](t_i - t_{i-1}) = \int_0^t E[X(s)^2] dW$$

La integral de Itô en el caso general.

Def : *un proceso* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *es* ***admisible*** *sii*

(A) *está adaptado a la filtración;*

(B) $\int_0^T E[X(s)^2] ds < \infty$.

Ej 1 : *un proceso simple es admisible.*

Ej 2 : $X(t)$ *es determinístico y* $\int_0^T X(s)^2 ds < \infty$. *En este caso la integral de Itô es la de Wiener.*

Ej 3 : $X(t) \equiv W(t)$.

Lema fundamental : *Si* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *es admisible,* ***entonces*** *existe una sucesión de procesos simples* $(\{X_n(t)\}_{t\in[0,T]})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *que cumplen*

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_0^T E\left[\left(X_n(s) - X(s)\right)^2\right] ds = 0;$

(ii) *existe un proceso* $\{I(X)(t)\}_{t\in[0,T]}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} E[sup_{\,t\in[0,T]}\,\{\big(I(X_n)(t) - I(X)(t)\big)\}^2] = 0.$$

<u>Al proceso</u> $\{I(X)(t)\}_{t\in[0,T]}$ *se le llama* ***<u>integral estocástica o integral de Itô, y se denota por</u>***

$$I(X)(t) = \int_0^t X(s)dW\,, \quad 0 \le t \le T.$$

Propiedades básicas. *Sea* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *admisible, entonces*

(1) $E\left[\int_0^t X(s)dW(s)\right] = 0$;

(2) Linealidad ;

(3) Aditividad en el dominio :

$$\int_0^t X(s)dW(s) = \int_0^u X(s)dW(s) + \int_u^t X(s)dW(s)$$

(4) $E\left[\left(\int_0^t X(s)dW(s)\right)^2\right] = \int_0^t E[X(s)^2]ds$ (*isometría de Itô*).

(5) $\left\{\int_0^t X(s)dW(s),\right\}_{t\in[0,T]}$ *es una* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ − martingala.

Teorema (existencia de la integral estocástica) : *la integral de Itô existe para procesos adaptados y que satisfacen la condición*

$$\int_0^T X^2(t)dt < \infty, \quad \underline{\textbf{con probabilidad 1.}}$$

Más aún, se cumple la linealidad. Pero las otras propiedades (media cero, propiedad de martingala e isometría de Itô), *requieren de la condición (B). Ver Klebaner (2006).*

Corolario : *Si f es continua en $[0, T]$, entonces la integral $\int_0^T f(W(t))\, dW(t)$ está bien definida* (existe).

Ejemplos.

1. $I = \int_0^1 t dW(t)$. *La integral está bien definida y se cumple* (B). *Los momentos son :* $E[I] = 0$, $E[I^2] = 1/3$.

3. *¿Para cuáles valores de α está definida la integral* $I = \int_0^1 (1-t)^{-\alpha} dW(t)$? *Se requiere que:*

$$\int_0^1 (1-t)^{-2\alpha} dW(t) < \infty, \quad \textit{i.e.,} \quad \alpha < 1/2.$$

3. $\int_0^1 W(t)dW(t)$. *Aquí*

$$E\left[\int_0^1 W^2(t)dW(t)\right] = E\left[\int_0^1 t dt\right] = \frac{1}{2} < \infty,$$

la integral estocástica existe, tiene media cero y varianza 1/2.

4. $I = \int_0^1 e^{W(t)} dW(t)$. *La integral existe. Más aún,*

$$E\left[\int_0^1 e^{2W(t)}dB(t)\right] = \int_0^1 E[e^{2W(t)}]dB(t) = \int_0^1 e^{2t}dt = \frac{1}{2}(e^2 - 1) < \infty.$$

I tiene media cero y varianza

$$E\left[\left(\int_0^1 e^{W(t)}dW(t)\right)^2\right] = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

5. $J = \int_0^1 e^{W(t)^2}dW(t)$. *Está bien definida, pero*

$$\int_0^1 E[e^{2W(t)^2}]dt = \infty,$$

entonces no podemos asegurar que tenga momentos finitos. De hecho, no los tiene. (Ejercicio)

Proposición. *Sean* $X(t), Y(t)$ *procesos admisibles,* $\Longrightarrow$

$$E\left[\left(\int_0^t X(s)dW(s)\right)\left(\int_0^t Y(s)dW(s)\right)\right] = \int_0^t E[X(s)Y(s)]ds$$

Ejercicio : *probarla usando la isometría de Itô.*

PROCESOS DE VARIACION CUADRATICA

Def : *Para procesos* $X(t), Y(t)$, *sea* $[X, Y](t) =$

$$lim_\pi \sum_{i=1}^{n} (X(t_i) - X(t_{i-1}))(Y(t_i) - Y(t_{i-1}))$$

el límite de la red es en probabilidad. Se llama la **covariación** *de X, Y. Además,*

$$[X,X](t) = \langle X\rangle(t)$$

es la **variación cuadrática de** *X, lo que anteriormente denotamos por* $V_2(X)$ *donde X representa una trayectoria fija del proceso.*

Ejemplo : *Si* $f(t)$ *es determinística y continua, entonces* $\langle\int_0^t f(s)ds\rangle\,(t) = 0$.

Teorema : *Si X es admisible,*

$$\langle\int_0^t X(s)dW(s)\rangle\,(t) = \int_0^t X(s)^2 ds = \int_0^t X(s)^2 d\langle W\rangle(s)$$

Corolario : *Si* $\int_0^T X(s)^2 ds > 0$ *, entonces la integral estocástica* $\int_0^T X(s)dW(s)$ *tiene primera variación infinita, pues en caso contrario, su segunda variación sería cero,* ⇒⇐ *.*

Proposición :

(i) $[X,Y] = [Y,X]$

(ii) $[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z]$

(iii) $[X,Y] = \frac{1}{4}(\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle)$

$$= \frac{1}{2}(\langle X+Y\rangle - \langle X\rangle - \langle Y\rangle)$$

(iv) $|[X,Y]| \leq \langle X\rangle\langle Y\rangle$

Lema de Itô o Regla de la Cadena Estocástica.

Primera versión: $Y(t) = f(W(t))$, *con* $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = C^2(\mathbb{R})$.

A. ***Motivación:*** *al estilo de los físicos,*

$$f\big(W(t) + dW(t)\big) = f'\big(W(t)\big)dW(t)$$

$$+\frac{1}{2}f''\big(W(t)\big)\big(dW(t)\big)^2$$

$$+\frac{1}{3}f'''\big(W(t)\big)\big(dW(t)\big)^3 + \cdots$$

$$\approx f'\big(W(t)\big)dW(t) + \tfrac{1}{2}f''\big(W(t)\big)dt$$

Enunciado: *Sea* $f \in C^2(\mathbb{R})$, *entonces*

$$f\big(W(t)\big) =$$

$$\int_0^t f'\big(W(s)\big)dW(s) + \int_0^t \frac{1}{2}f''\big(W(s)\big)ds$$

o bien decimos que $Y(t) = f(W(t))$ *tiene diferencial estocástica dada por*

$$\boxed{dY(t) = f'\big(W(t)\big)dW(t) + \frac{1}{2}f''\big(W(t)\big)dt}$$

Comentario : *éste es el caso más simple posible de la fórmula de Itô, pero aquí se encuentran ya los elementos básicos del 'fenómeno', el cual es el que le da al cálculo estocástico (de Itô) sus propiedades y "sabor" característicos.*

El cálculo estocástico es el resultado de combinar (esencialmente haciendo composiciones de) funciones ***diferenciables*** *con funciones* ***de variación no acotada, no diferenciables****, y proceder a 'imitar' hasta cierto punto, el cálculo ordinario.*

Los teoremas clásicos del cálculo que se cumplen, algunos con modificaciones, son : ***la regla de la cadena; el desarrollo de Taylor; la regla de Leibniz para diferenciación bajo el signo integral; el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias; el teorema de Fubini.***

No se conocen versiones estocásticas apropiadas para : ***el teorema del valor medio, ni para los teoremas de función inversa e implícita.*** *Esto último constituye un buen problema abierto, quizás muy elusivo, en el cual la parte más difícil es encontrar el enunciado correcto, apropiado.*
Un poco más general,

$$f\big(W(t)\big) - f\big(W(s)\big)$$

$$= \int_s^t f'\big(W(u)\big) dW(u) + \int_s^t \frac{1}{2} f''\big(W(u)\big) du$$

Ejemplos.

1. $f(t) = \frac{1}{2} t^2$. *Entonces* $f'(t) = t, \quad f''(t) = 1$, *y*

$$\tfrac{1}{2} W(t)^2 - \tfrac{1}{2} W(s)^2 = \int_s^t W(u) dW(u) + \tfrac{1}{2}(t - s),$$

en particular $\int_0^t W(u) dW(u) = \frac{1}{2}(W(t)^2 - t)$. *Por último, en forma diferencial*

$$d(W(t)^2) = 2W(t) dW(t) + dt.$$

2. *Calcularemos* $E[W(t)^4]$. *Consideremos*

$f(x) = x^4$, *y* $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

$$W(t)^4 = \int_0^t 4W(s)^3 dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 12W(s)^2\, ds,$$

$$E[W(t)^4] = 0 + 6\int_0^t E[W(s)^2]ds = 3t^2$$

En particular, $E[W(1)^4] = 3$.

3. *Calcular* $y(t) = E\left[e^{\lambda W(t)}\right]$, $t \geq 0$.

Sea $X(t) = e^{\lambda W(t)}$. *Entonces*

$$dX(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 X(t)dt + \lambda X(t)dW(t),$$

$$X(t) = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t X(s)\, ds + \lambda\int_0^t X(s)dW(s),$$

$$y(t) = E[X(t)] = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t y(s)\, ds,$$

i.e., $y'(t) = \frac{\lambda^2}{2}y(t)$; $y(0) = 1$, $\Longrightarrow y(t) = e^{\frac{\lambda^2}{2}t}$,

así : $E\left[e^{\lambda W(t)}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}t}$.

Lema de Itô, segunda versión.

Motivación : *sea* $X(t) = f(t, W(t))$, *entonces*

$X(t + dt) = f(t + dt, W + dW)$

$$= f(t, W) + f_t(t, W)dt + f_W(t, W)dW$$

$$+\frac{1}{2} f_{tt}(t, W)(dt)^2 + f_{tW}(t, W)dt\, dW$$

$$+\frac{1}{2} f_{ww}(t, W)(dW)^2 + \cdots$$

$$\approx f(t, W) + f_t(t, W)dt + f_W(t, W)dW + \frac{1}{2} f_{ww}(t, W)\, dt$$

Enunciado segunda versión : *si* $f: [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
es de clase $C^{1,2}$*, entonces*

$$f\big(t, W(t)\big) - f\big(s, W(s)\big) = \int_s^t f_1\big(u, W(u)\big)du$$

$$+ \int_s^t f_2\big(u, W(u)\big)dW(u) + \tfrac{1}{2}\int_s^t f_{22}\big(u, W(u)\big)du.$$

En forma diferencial, si $X(t) = f(t, W(t))$,

$$\boxed{dX(t) = \left(f_1\big(t, W(t)\big) + \frac{1}{2} f_{22}\big(t, W(t)\big)\right)dt + f_2\big(t, W(t)\big)\, dW(t)}$$

Ejemplo : MBG. *Sean* $\mu, \sigma > 0$,

$$f(t, x) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\, x\right) = e^{(\alpha t + \mu x)}$$

$$f_1 = \alpha f; \quad f_2 = \sigma f; \quad f_{22} = \sigma^2 f$$

si $X(t) = f(t, W(t))$, *entonces* $X(0) = 1$,

$$X(t) = 1 + \mu \int_0^t X(u)du + \sigma \int_0^t X(u)dW(u)$$

en forma diferencial :

$$\boxed{dX(t) = \mu\, X(t)dt + \sigma\, X(t)dW(t)}$$

Procesos de Itô.

Un proceso de Itô satisface, para $0 \leq t \leq T$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(u)du + \int_0^t \sigma(u)dW(u) \quad \textit{c.s.}$$

o

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

donde X_0 *es una v.a. y* $b(t)$, $\sigma(t)$ *son procesos adaptados a la filtración browniana, tales que*

(i) $E[|X_0|] < \infty$

(ii) $\int_0^T [|b(u)| + \|\sigma(u)\|^2] < \infty$

Covariación y variación cuadrática. *Si* $X(t)$ *es un proceso de Itô, entonces*

$$\langle X\rangle(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du\,; \qquad d\langle X\rangle(t) = \sigma^2(t)dt$$

<u>Demostración completa</u> : Steele 8.6, pp 129-130.

Si tenemos otro proceso de Itô, digamos,

$$dY(t) = a(t)dt + \xi(t)dW(t)$$

entonces

$$[X,Y](t) = \int_0^t \sigma(s)\xi(s)ds$$

Demostración en Klebaner, pp 101-103.

Notación : $d[X,Y](t) = dX(t)dY(t)$

La caja estocástica :

	dt	dW
dt	0	0
dW	0	dt

Así : $dX(t)dY(t) = \sigma(t)\xi(t)dt.$

(*) Integración con respecto a un proceso de Itô :

Si $X(t)$ *es un proceso admisible,* $Y(t)$ *un proceso de Itô, con*

$$dY(t) = a(t)dt + \zeta(t)dW(t),$$

entonces

$$\int_a^b X(t)dY(t) = \int_a^b X(t)a(t)dt + \int_a^b X(t)\xi(t)dW(t)$$

Motivación para el caso general de la fórmula de Itô.

Sean X, Y procesos de Itô, y escribamos

$$Z(t) = f(t, X(t), Y(t)) = f(P(t))$$

Entonces

$dZ(t) =$

$$f_1(P(t))dt + f_2(P(t))dX(t) + f_3(P(t))dY(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\{ f_{22}(P(t))d\langle X\rangle(t) + 2f_{23}(P(t))d[X,Y](t)$$

$$+f_{33}(P(t))d\langle Y\rangle(t) \}$$

Ejemplo: $f = f(x,y) = xy$. *Si* $Z(t) = X(t)Y(t)$,

$$dZ(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d[X,Y](t),$$

o bien en forma integral

$X(t)Y(t) - X(s)Y(s) =$

$$\int_s^t X(u)dY(u) + \int_s^t Y(u)dX(u) + \int_s^t d[X,Y](u)$$

Esta puede interpretarse como la fórmula de ***integración por partes :***

$$\int_s^t X(u)dY(u) = X(u)Y(u)|_s^t - \int_s^t Y(u)dX(u)$$

$$- \int_s^t d[X,Y](u)$$

Consideremos el caso $X(t) = W(t),\ Y(t) = t$. *Aquí* $d[X,Y](u) \equiv 0$. *Obtenemos*

$$\int_0^t W(u)du = t\,W(t) - \int_0^t u\,dW(u)$$

Esta sencilla integral es muy útil. Mediante ella probaremos que $W(t)^3 - 3tW(t)$ ***es martingala****.*

Apliquemos la primera versión del lema de Itô a la función $f(x) = x^3$. *Tenemos que*

$$W(t)^3 = f\big(W(t)\big) = 3\int_0^t W(u)^2\,dW(u) + 3\int_0^t W(u)\,du$$

$$= 3\int_0^t W(u)^2\,dW(u) + 3[t\,W(t) - \int_0^t u\,dW(u)]$$

de donde

$$W(t)^3 - 3t\,W(t) = \int_0^t [3W(u)^2 - u]dW(u)$$

y esta última es martingala por ser una integral estocástica.

Lema de Itô, el caso general. *Sean* $X_1(t), \dots, X_n(t)$ *procesos de Itô dados por*

$$dX_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}(t)dW_k(t)$$

donde los brownianos son independientes, i.e.,

$$W = (W_1, \dots, W_m)$$

es un browniano m – dimensional. Escribimos

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n); \quad \sigma = [\sigma_{ik}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}$$

Al primero se le llama ***vector de los coeficientes de deriva*** *('drift') y a la segunda,* ***matriz de los coeficientes de difusión****. Escribamos*

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$$

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW$$

Teorema (*Fórmula general de Itô*) ***:*** *bajo las condiciones anteriores, si* $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *es de clase* $C^{1,2}$*, entonces* $Y(t)=f(t,X(t))$ *tiene diferencial estocástica*

$$dY(t)=\frac{\partial f}{\partial t}\big(t,X(t)\big)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(t,X(t)\big)\,dX_i(t)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\big(t,X(t)\big)d[X_i,X_j](t)$$

ó bien,

$$\boxed{df\big(t,X(t)\big)=f_t dt+f_X dX+\frac{1}{2}f_{XX}\,d\langle X\rangle(t)}$$

donde $d\langle X\rangle(t)=\big[d[X_i,X_j](t)\big]_{i,j=1,\dots,n}$

Ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema de Picard (existencia y unicidad) : *si* $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es continua y Lipschitz en la segunda variable, entonces el problema*

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

tiene solución única ***<u>local</u>****.*

Esbozo de demostración: *se considera el mapeo* $T: X \to X$ *definido por*

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_0^t f\big(s, x(s)\big)ds$$

en un espacio de funciones adecuado X. Se prueba que T es una contracción y por el principio de contracciones o Teorema de punto fijo de Banach, se concluye.

El caso estocástico *puede verse como el anterior con perturbaciones aleatorias*

$$\dot{X}(t) = f\big(t, X(t)\big) + g(t, X(t))\xi(t).$$

Aquí $\xi(t)$ *representa un* **ruido blanco.** *En forma diferencial*

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + g\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

e integral

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f\big(s, X(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, X(s)\big)dW(s)$$

donde X_0 *es una v.a. y W un browniano m – dimensional.*

Def : *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, P)$ *un espacio de probabilidad filtrado por el browniano W. Una solución* ***fuerte*** *a la EDE es un proceso* $x(t) \in \mathbb{R}^n$*, definido para* $t \in [0,T]$ *que satisface lo siguiente :*

i) *es adaptado a la filtración browniana;*

ii) *las dos integrales están bien definidas;*

iii) *la igualdad se satisface c.s.* $\forall t \in [0,T]$.

Observación muy importante : *la solución es* **global,** *no sólo local como en Picard.*

Observación : *se tiene el concepto de solución* ***débil,*** *que a grandes rasgos significa que se tienen dados los coeficientes, como funciones determinísticas en* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$*, y se encuentran un espacio de probabilidad y un browniano ad hoc en los que la solución tiene sentido. Ver Steele (2001).*

Teorema (Itô, 1952) : *Sea* X_0 *una v.a. en* $\mathbb{R}^n$ *independiente de la* σ*- álgebra generada por un browniano m – dimensional W y tal que* $E[|X_0|^2] < \infty$. *Supongamos* $f: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*,* $g: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ *son medibles y satisfacen*

$$|f(t,x)| + \|g(t,x)\| \leq C(1 + |x|)$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq D|x - y|$$

para ciertas constantes C, D > 0; $t \in [0,T]$; $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Entonces, la EDE

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + g\big(t, X(t)\big)dW(t); \quad X(0) = X_0$$

tiene una única solución (fuerte) en $[0,T]$*, adaptada y tal que*

$$E\left[\int_0^T |X(t)|^2 \, dt\right] < \infty.$$

ATENCION : revisar el enunciado de este teorema en Mikosch, hay un error allí.

Ejemplo 1: *La condición de crecimiento lineal es necesaria para evitar explosiones, p ej* $X'(t) = X(t)^2$, $X(0) = 1$ *tiene solución única* $X(t) = (1-t)^{-1}$ *en* $0 \leq t < 1$ *y no puede extenderse.*

Ejemplo 2 : $X'(t) = 3X(t)^{2/3}$, $X(0) = 0$ *tiene dos soluciones :* $X_1(t) = t^3$, *para* $t > 0$, $X_1(t) = 0$, *para* $t \leq 0$. *Y por otra parte* $X_2(t) \equiv 0$.

Ejemplo 3 : MBG. $dX(t) = \mu\, X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$.

Busquemos una solución $X(t) > 0$. *Sea* $Z(t) = logX(t)$.

(¿Por qué puedo suponer esto?)

Entonces, por el lema de Itô,

$$dZ(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\, dW(t); \quad Z(0) = logX_0$$

$$Z(t) = logX_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\, W(t)$$

luego,

$$X(t) = expZ(t) = X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\, W(t)}$$

Ejemplo 4 : Ornstein-Uhlenbeck.

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma dW(t)$$

Sea $Y(t) = e^{-\alpha t}X(t)$, $Y_0 = X_0$. *Por el lema de Itô*

$$dY(t) = \sigma e^{-\alpha t} dW(t)$$

Luego,

$$Y(t) = X_0 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha s} dW(s)$$

$$X(t) = e^{\alpha t} X_0 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(s-t)} dW(s)$$

Pregunta : *¿se puede resolver explícitamente la integral estocástica?*

EDE lineales (EDEL). (Arnold, 1974).

$$dX(t) = \big(A(t)X(t) + a(t)\big)dt +$$

$$\sum_{i=1}^{m} (B_i(t)X(t) + b_i(t))dW_i(t)$$

A; $B_1, \dots, B_m$ *son* $n{\times}n$*; a;* $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$*; W es m – dimensional.*

Def. : Homogénea sii *a;* $b_1, \dots, b_m = 0$.

Lineal en sentido restringido : sii $B_1, \dots, B_m = 0$.

Más aún, las EDEL en sentido restringido admiten solución explícita usando matrices fundamentales, como en el caso determinístico.

TEU : *hay solución única bajo la hipótesis de que*

$$A;\, B_1, \dots, B_m;\, a;\, b_1, \dots, b_m$$

son medibles y acotadas en $[0, T]$. *Si lo anterior se cumple para todo T >0, entonces hay solución en todo* $[0, \infty)$.

El caso autónomo : A *es constante, la matriz fundamental es* $\Phi(t) = e^{At} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$, *y la solución a*

$$dX(t) = \big(AX(t) + a(t)\big)dt + B(t)dW(t)$$

es

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}a(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)dW(s)$$

Ejercicio : *verificarlo con la fórmula de Itô.*

Problema abierto : *¿Bajo qué condiciones se pueden obtener soluciones explícitas en el caso* ***no restringido****?*

Apéndice (opcional) :   Representación de Feynman – Kac.

Notación. *Dada una EDE en* $\mathbb{R}^n$

$$dX(t) = \mu\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

definimos

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^t)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

se le llama : ***generador infinitesimal, operador infinitesimal asociado, operador de Dynkin, operador de Itô, operador 'backward' de Kolmogorov.***

Observación : $Dom(\mathcal{A}) \supset C^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo: *para la EDE del MBG,* $dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$

$$\mathcal{A}_X = \mu\, x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Ejercicio : *escribir el generador para el sistema SMK.*

Proposición: *Si* $X(t)$ *satisface la EDE de arriba, y* $F \in C^2([0,\infty)\times \mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$*, entonces* $Y(t) = F(t, X(t))$ *satisface la EDE*

$$dY(t) = (F_t\big(t, X(t)\big) + \mathcal{A}F\big(t, X(t)\big))dt$$

$$+ \Big(F_X\big(t, X(t)\big)\Big)\, \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

Dem.: lema de Itô.

Teorema de representación de Feynman – Kac, 1:
Supongamos que se cumple los siguiente.

a) $F(t, x)$ *es solución de*

$$F_t + \mu F_X + \tfrac{\sigma^2}{2} F_{XX} = 0\ ;\quad 0 \le t \le T;\ \ x \in \mathbb{R};$$

$$F(T,x) = \Phi(x)$$

donde $\Phi(x)$*es continua ,* $\mu(t,x), \sigma(t,x)$ *satisfacen las condiciones del TEU de EDE;*

b) el proceso $X(t)$ *está definido por*

$$dX(s) = \mu\big(s, X(s)\big)ds + \sigma\big(s, X(s)\big)dW(s)$$

para $0 \le s \le t \le T$*, y se cumple* $X(t) = x$*;*

c) el proceso $G(s) = \sigma(s, X(s))F_X(s, X(s))$ *es adaptado y cumple*

$$\int_0^T E[G(s)^2]ds < \infty$$

entonces, *para* $0 \le t \le T$; $x \in \mathbb{R}$*se satisface la representación*

$$F(t,x) = E\big[\Phi\big(X(T)\big)\big|X(t) = x\big] = E^{t,x}[\Phi\big(X(T)\big)].$$

Prueba: *La EDP correspondiente es*

$$F_t + \mathcal{A}F = 0$$

Apliquemos el lema de Itô a $F(s, X(s))$ *:*

$$F\big(T, X(T)\big) - F\big(t, X(t)\big) = \int_t^T (F_t + \mathcal{A}F)(s)ds$$

$$+ \int_t^T \sigma(s, X(s))F_X(s, X(s))dW(s),$$

la integral de Lebesgue tiene integrando nulo. Tomamos $E^{t,x}$ *y la int. Estocástica se anula. Luego,*

$$E^{t,x}\big[F\big(T, X(T)\big)\big] - E^{t,x}\big[F\big(t, X(t)\big)\big] = 0,$$

pero $E^{t,x}\big[F\big(t, X(t)\big)\big] = F(t,x)$*, y*

$$E^{t,x}\big[F\big(T, X(T)\big)\big] = E^{t,x}\big[\Phi\big(X(T)\big)\big].$$

Ejemplo : *Si* $F_t + \frac{\sigma^2}{2} F_{XX} = 0$ *con* $\sigma = cte.$ *y*
$F(T, x) = x^2$, *entonces* $dX(s) = \sigma\, dW(s)$; *y*
$X(t) = x$, *cuya solución es*

$$X(T) = x + \sigma(W(T) - W(t)) \sim N(x, \sigma\sqrt{T - t}),$$

y

$$F(t, x) = E^{t,x}[X(T)^2] = \sigma^2(T - t) + x^2$$