<u>Sábado 4.</u>

A. Dinámica de mercados financieros. El modelo de Samuelson, Merton & Karatzas (SMK).

B. El modelo original de Black Scholes.

A. *Consideremos un mercado con n activos cuyos precios están modelados por MBG generalizados. Esto es, sus procesos de precios* $S_1(t), \ldots, S_n(t)$ *están gobernados por el sistema de EDE*

$$dS_1(t) = S_1(t)[\mu_1(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{1j}(t)dW_j(t)]$$

$$\vdots$$

$$dS_n(t) = S_n(t)[\mu_n(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{nj}(t)dW_j(t)]$$

Aquí, n = número de activos ~ "tamaño del mercado"; y

m = número de "fuentes de incertidumbre"

Comentario : *es un modelo muy general. Si se quiere que los precios sean estrictamente positivos y los procesos que los representan sean semi – martingalas, entonces necesariamente tienen la forma de arriba (ver Shreve (2004), vol II).*

Comentario : *el modelo de Bachelier para el proceso de precios :*

$$S(t) = b + \tilde{\sigma}\, W(t)$$

Comentario : otros modelos (a tiempo discreto, procesos de Levy, MBf, rezagos y adelantos).

Metateorema de Björk : *el mercado SMK es, genéricamente*

(i) ***sin arbitraje*** $\Leftrightarrow \; m \geq n$

(ii) ***completo*** $\Leftrightarrow \; n \geq m$

(iii) ***completo y sin arbitraje*** $\Leftrightarrow \; n = m$

Fijemos de ahora en adelante, una 'base estocástica' o 'espacio de probabilidad filtrado'

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, P)$$

donde $\mathcal{F}_t$ *representa el acervo informacional hasta el instante t. Usualmente la filtración es la generada por un MB de dimensión m.*

Hipótesis técnicas del modelo SMK

Los coeficientes son progresivamente medibles y satisfacen :

$$\int_0^T [|\mu(t)| + \|\sigma(t)\|^2] dt < \infty \qquad (*)$$

donde

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n); \quad \sigma = [\sigma_{ik}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}$$

Ver Tudor (1997) o Karatzas (1997).

Definición : *un <u>portafolio</u> es un proceso adaptado* $q: [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *cuyas componentes son las cantidades de activos* $A_1, \ldots, A_n$ *del mercado en consideración.*

Comentario : *para consideraciones técnicas más precisas, ver Karatzas (1997), ó Karatzas & Shreve (1998).*

Definición : El valor del portafolio es

$$(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) S_i(t) = \langle q(t), S(t) \rangle$$

Ejemplos.

1) *Portafolios de inversión : 20 entradas con digamos, oro, divisas, treasuries, CETES, acciones Apple, acciones Telmex, etc. Los de bancos centrales pueden tener varias decenas de componentes.*

2) *Black Scholes :* $q(t) = (a(t), b(t))$ *donde* $a(t)$ *es la cantidad de activo riesgoso y* $b(t)$ *la cantidad de bono o activo no riesgoso. Tenemos*

$$(Vq)(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$$

donde $S(t)$ *es un MBG, y* $dB(t) = rB(t)dt$*, con r la tasa libre de riesgo (CETES o 'Treasury bills').*

Hipótesis de riqueza positiva : para cada $t \in [0, T]$

$$(Vq)(t) \geq 0, \;\; c.s.$$

Comentario : *Ventas al descubierto ó en corto ('short sales').*

Definición : *un portafolio es admisible o auto-financiable sii*

$$d(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) dS_i(t) = \langle q(t), dS(t) \rangle, \text{ i.e.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_i(t) dq_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} d[S_i, q_j](t) = 0$$

Comentario : *interpretación.*

Definición : Un portafolio de arbitraje *es un portafolio $q(t)$ que satisface lo siguiente : existe $\tau \in (0, T]$ tal que*

(i) $P[(Vq)(0) = 0] = 1$

(ii) $P[(Vq)(\tau) \geq 0] = 1$

(iii) $P[(Vq)(\tau) > 0] > 0$

Si en lugar de (iii) se cumple

*(iii)** $P[(Vq)(\tau) > 0] = 1$

a ese portafolio se le llama ***arbitraje fuerte.***

Comentario : *varias definiciones de arbitraje (NFLVR).*
En estas notas sólo utilizaremos la definición de arriba.

Definición : *un mercado es* ***viable*** *o libre de arbitraje sii no existen portafolios de arbitraje. Lo denotamos como NA.*

Definición : una medida martingala equivalente (MME) *es una medida de probabilidad Q en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tal que* $Q \sim P$*, y el proceso de precios descontado resulta ser una* $Q -$ *martingala, i.e.,*

$$E^Q\left[e^{-r(T-t)}S(t)\middle|\mathcal{F}_u\right] = S(u), \quad c.s. \quad (u \leq t)$$

Comentario : *factores de descuento generalizados.*

Definición : *el mercado es* **completo** *si y sólo si para cualquier función borel medible* Φ *en* $\mathbb{R}^n$*, existe un* *<u>portafolio replicante</u>, i.e., un portafolio auto-financiable q tal que*

$$\Phi\big(S(T)\big) = (Vq)(T)$$

Ejemplo 1: *para el modelo binomial a un período se cumple:*

$$NA \iff completez \iff d < (1+r) < u$$

$$\text{No Arbitraje fuerte} \iff d \leq (1+r) \leq u$$

Ejemplo 2 : *el mercado BS* (activo, bono) *es completo.*

Demostración : *esbozo en Björk (2005), pp; caso general y demostración rigurosa en Karatzas (1997) y Williams (2006). En estas últimas referencias se encuentra la prueba del siguiente :*

Criterio de Karatzas & Shreve : *el mercado SMK, bajo la hipótesis* (*) *es completo si y sólo si* $n = m$*, y*

$$\sigma(t) \text{ es invertible c.s. } \forall t \in [0, T]$$

Teoremas auxiliares importantes en finanzas matemáticas y aplicaciones al modelo de Black Scholes.

El Teorema de Girsanov, dimensión uno. *Sea* $W(t)$ *un browniano en un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$, *y* $\Theta(t)$ *un proceso adaptado. Defínase*

$$Z(t) = exp\left\{-\int_0^t \Theta(s)\, dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta(s)^2\, ds\right\}$$

y supongamos que se cumple

$$E\left[\int_0^T \Theta(s)^2\, \mathrm{Z}(s)^2 ds\right] < \infty.$$

Definimos $Z = Z(T)$ *y*

$$Q(A) = \int_A \; ZdP \qquad (A \in \mathcal{F})$$

$$W^Q(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)du.$$

Entonces, $E[Z] = 1$ *;* Q *es una medida de probabilidad en* $(\Omega, \mathcal{F})$ ***equivalente a*** *P, y* $W^Q(t)$ *es un movimiento browniano con respecto a* Q.

Ver demostración en Oksendal (2005).

Comentario : *Teoría de Cameron – Martin – Girsanov.*

Aplicación al mercado de Black Scholes :

$$dB(t) = rB(t)dt\,;$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Ejercicio : *Si* $f(t)$ *es determinística y* C^1, *y el proceso* $X(t)$ *tiene diferencial estocástica* $dX(t)$, *entonces*

$$d\big(f(t)X(t)\big) = X(t)f'(t)dt + f(t)dX(t)$$

Aplicando lo anterior,

$$d\big(e^{-rt}S(t)\big) = -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t)$$

$$= (\mu - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t)$$

$$= \sigma e^{-rt}S(t)\left[\frac{\mu-r}{\sigma}\, dt + dW(t)\right].$$

Def: *el precio del dividendo es* $\Theta(t) \equiv \frac{\mu-r}{\sigma}$.

Ahora aplicamos el T. De Girsanov, cuyas hipótesis se cumplen obviamente para $\Theta(t)$*. Entonces* $Q{\sim}P$*,*

$$W^Q(t) = \frac{\mu-r}{\sigma}t + W(t),$$

es un movimiento browniano c.r a Q*. Tenemos*

$$dW^Q(t) = \frac{\mu-r}{\sigma}dt + dW(t),$$

entonces

$$d\big(e^{-rt}S(t)\big) = \sigma e^{-rt}S(t)dW^Q(t),$$

$$e^{-rt}S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma e^{-ru}S(u)dW^Q(u).$$

Así, el proceso de precios descontado es una Q - martingala. Además, con respecto a Q,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

$$= \mu S(t)dt + \sigma S(t)[-\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW^Q(t)],$$

i.e., el "milagro de BS" ocurre :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t),$$

en vez de que la dinámica del precio dependa del retorno que representa al activo riesgoso, es decir μ*, con respecto a al nueva medida Q, depende del coefiente que representa al activo no riesgoso, i.e., la tasa libre de riesgo r.*

Teorema de Representación de Martingalas. *Sea* $W(t)$ *un browniano en un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$. *Entonces, dada una una* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ *- martingala* $M(t)$*, existe un proceso adaptado* $\Gamma(t)$ *en* $[0, T]$ *tal que*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(s)\, dW(s).$$

Ver demostración en Oksendal (2005).

Comentario : *Teoremas de representación. Breve comentario histórico de este teorema.*

Aplicación a BS.

Sea φ_T *una v.a.* $\mathcal{F}_T$ *– medible. Por ejemplo,* $\varphi_T = (S(T) - K)^+$*, el perfil de pago para una opción de compra europea. Considérese la función de valuación*

$$\phi(t) = E^Q\left[e^{-r(T-t)}\varphi_T \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

y sea $M(t) = e^{-rt}\phi(t)$. ***Entonces*** $M(t)$ *es Q- martingala, pues si* $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$E^Q[M(t)|\mathcal{F}_s] = E^Q[E^Q[e^{-rT}\varphi_T|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s]$$

$$= E^Q[e^{-rT}\varphi_T|\mathcal{F}_s] = M(s).$$

Sobre el modelo y la fórmula de Black Scholes

A. *Esta fórmula fue establecida por Fisher Black y Myron Scholes (Black & Scholes, 1973), en colaboración parcial con Robert C. Merton. A los tres se les considera como los iniciadores de las finanzas matemáticas en su época reciente. Black murió en 1995. A Merton y Scholes se les otorgó el premio nóbel de economía 1997, por sus contribuciones relacionadas con la derivación y uso de la fórmula.*

La fórmula responde a una pregunta milenaria : ¿cómo debe valuarse una opción de compra? Este intrumento financiero se ha comercializado desde hace mucho en diversos mercados. Aparecen referencias a las opciones (y/o instrumentos muy similares) en el código de Hammurabi y en el antiguo testamento. Sin embargo el mercadeo de las mismas se hacía sin una "base racional" hasta 1973, pues nadie conocía una fórmula universalmente aceptada para calcular el precio de las opciones.

A partir de la introducción de la fórmula de BS y de la apertura y ampliaciones de los mercados de opciones (especialmente el CBOE, fundado el mismo año de 1973), la consideración de diversos aspectos relacionados con los derivados financieros (no sólo opciones sino también futuros, swaps, quantos, y una verdadera jungla de diversas opciones 'exóticas') ha jugado un papel de primera importancia en los mercados financieros, y el papel central en finanzas matemáticas. Esta activa área matemática, muy desarrollada a lo largo de los últimos cuarenta años, tiene como referencia principal, como 'benchmark' al modelo y la fórmula de BS. Casi todos los desarrollos posteriores son perfeccionamientos, generalizaciones o críticas a ellos. De manera que el modelo de BS es el modelo matemático más *importante de las finanzas, y uno de los más importantes de la economía y las matemáticas aplicadas.*

Un dato curioso : la fórmula de BS es el único resultado conocido de matemáticas aplicadas que tiene una cantidad considerable de demostraciones diferentes (alrededor de 10). Algunos autores consideran que es la fórmula más usada de la historia, pues se ha utilizado, a lo largo de 40 años, en millones y millones de operaciones financieras, ya sea directa o indirectamente o al menos como referencia parcial.

B. Opciones financieras. *Una opción de compra europea ('european call') es un contrato entre dos partes, A (quien vende o escribe la opción) y B (quien compra la opción), tal que le da a B el derecho, pero no la obligación, de comprarle a A un cierto activo ('asset'), por una cierta cantidad de dinero prefijada (que se denomina precio de ejercicio, en inglés 'exercise price' o 'strike') y en una fecha determinada (tiempo de maduración o vencimiento, en inglés 'maturity').*

Denotemos al tiempo presente por $t = 0$, *al precio actual del activo (o activo subyacente) por s, al precio de ejercicio por K, y a la fecha de vencimiento por T. De manera que la opción vive en el intervalo* $[0, T)$ *y madura en el tiempo T. El precio de la opción se denota por* $c = c(t)$, *para* $0 \leq t \leq T$. *Como veremos enseguida,* $c(T)$ *es conocido, y el problema es encontrar* $c(0)$, *y más en general* $c(t)$ *para cualquier t.*

Ejemplo. Una opción de compra europea escrita sobre acciones de Telmex. Da al comprador el derecho de adquirir un paquete de 100 acciones por 20,000 pesos en julio de 2014. Aquí, $s = 150 \times 100 = 15{,}000$, *mientras que* $K = 20{,}000$, *y T = 6 meses. La tasa libre de riesgo puede tomarse como la tasa de los CETES,* $r = 4.1\%$. *El valor histórico de la volatilidad de las acciones principales de Telmex es* $\sigma = 12\%$.

S(0) = 15,000 ;   K = 20,000;   T = 6 meses

A	***B***
Escribe, vende la opción	***Compra la opción***

Tiene la obligación de vender S(T) en T por K \$ si B ejerce	***Tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar S(T) en T por \$ K***
Recibe la prima c(0) por el riesgo que corre.	***Paga la prima c(0)***

El problema :

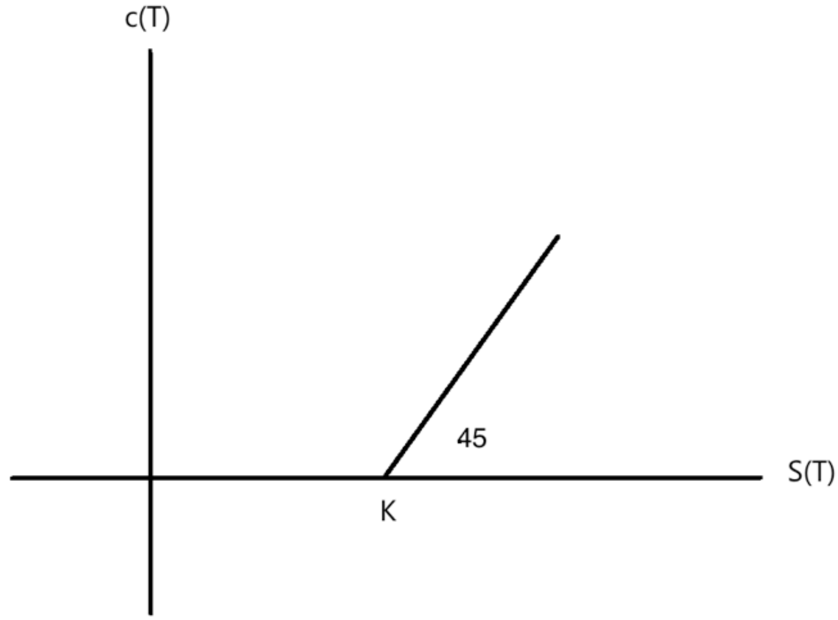
$$¿¿\, c(0) = ??$$

Más en general, ¿cuánto vale $c(t),\ t < T$*?*

El perfil de pago *('pay-off')* ***de una opción de compra europea está dado por***

$$c(T) = (S(T) - K)^{+} = max\{S(T) - K, 0\},$$

donde $S(T)$ *es el precio que tendrá el subyacente cuando* $t = T$.



De manera que al comprador de la opción (B) le conviene ejercer la opción si $S(T) > K$, *pues en ese caso compra el subyacente por K, lo vende en el mercado por* $S(T)$, *y se gana la diferencia* $S(T) - K$. *En caso de que* $S(T) < K$, *entonces el comprador (B) no ejerce la opción.*

Obviamente este contrato es asimétrico en cuanto al riesgo. A puede ganar una cantidad no acotada de antemano y B puede perder la misma cantidad. Por ello, para que el contrato sea justo, B tiene que pagar una cierta cantidad por la opción, que se llama precio o prima, y es lo que hemos denotado con $c(0)$. *De manera que el perfil de pago de la opción, desde el punto de vista de B, es el de la figura de arriba, pero desplazada verticalmente hacia abajo en* $c(0)$ *unidades.*

C. El modelo de Black Scholes. *El objetivo es valuar la opción, es decir encontrar un valor "justo" para* $c(0)$. *Se asumen las siguientes hipótesis :*

1) *El precio del subyacente* $s(t)$ *evoluciona de acuerdo a la dinámica estocástica de un MBG :*

$$dS(t) = \mu\, S(t)dt + \sigma\, S(t)dW(t)$$

En particular el rendimiento y la volatilidad del subyacente son constantes conocidas.

2) *El mercado BS consta del subyacente (mercado de capitales) y del mercado de dinero representado por un bono cuya dinámica*

$$dB(t) = rB(t)dt$$

donde r es la tasa libre de riesgo o neutral al riesgo, y $r < \mu$.

3) *El subyacente y el bono se pueden mercadear continua y divisiblemente, es decir, en cualquier instante del intervalo* $0 \leq t \leq T$ *y en cualesquiera cantidades reales.*

4) *El subyacente no paga dividendos.*

5) *La tasa de interés libre de riesgo es conocida y fija.*

6) *No hay costos de transacción ni impuestos.*

7) *En el mercado BS* ***no hay arbitraje.***

Con base en estas hipótesis y utilizando un poco de cálculo estocástico, incluidas la aplicación de los Teoremas de Girsanov y de representación de martingalas, se deduce la fórmula de BS, mediante el 'método de la martingala'. Lo haremos un poco después.
Sin embargo, la primera prueba de la fórmula, la que aparece en el artículo B&S de 1973 utiliza un enfoque diferente : mediante la hipótesis de no

arbitraje y la fórmula de Itô se deduce una EDP que debe ser satisfecha por la función $C(t,s)$*, es decir, el precio o prima de la opción como función del tiempo y del valor actual del subyacente, i.e.,* $s = S(t)$. *La EDP de BS es*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rs\frac{\partial C}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} - r\,C = 0;$$

$$C\big(T, S(T)\big) = (S(T) - K)^+$$

La solución de esta EDP con la condición de frontera es precisamente la fórmula de BS que deduciremos más adelante, por un método completamente diferente, el 'método de la martingala'.

Comentario sobre las hipótesis. *Como en cualquier modelo, las hipótesis siempre tienen ventajas y desventajas, y en caso de que haya razones para ello, pueden ser sustituidas por otras más apropiadas (de acuerdo a ciertos criterios) y desarrollar el modelo correspondiente a las nuevas hipótesis.*
En el caso del modelo BS, todas las hipótesis pueden mejorarse, pero ninguna ha sido tan criticada como la primera. Se han hecho grandes esfuerzos por sustituir la hipótesis de que el precio del subyacente sigue un MBG.
Se han considerado coeficientes (μ, σ) *determinísticos pero variantes con el tiempo, ó estocásticos, e incluso se han introducido otros procesos realmente diferentes para modelar el precio, como el modelo hiperbólico de Levy.*

Con tales extensiones del modelo se han obtenido avances importantes, tanto teóricos como en lo que respecta al principio de verificación científica, es decir, el cotejar los resultados del modelo con los datos de los mercados (algo completamente ignorado en la mayor parte de la teoría económica). Sin embargo, en no pocas ocasiones el modelo original de BS arroja resultados similares en calidad y cantidad a los de modelos más sofisticados y es mucho más fácil de utilizar.

En resumen, el modelo de BS se ha convertido en un 'benchmark', en la referencia central de toda la subárea de derivados financieros.

Consideraciones generales sobre la fórmula y su impacto global pueden encontrarse en Stewart (2012).

<u>Domingo 5.</u>

A. La fórmula de Black Scholes.

B. Los dos Teoremas Fundamentales de Finanzas (o de Valuación de activos).

A. En lo que sigue completaremos la valuación de una opción de compra europea. El método utilizado (método de la martingala) tiene aplicaciones y alcances que van mucho más allá de este caso particular.

El portafolio BS : $q(t) = (a(t), b(t))$ *donde la primera entrada corresponde a unidades del activo riesgoso, el cual sigue un MBG*

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t); \quad S(0) = S_0$$

y la segunda entrada son unidades del activo no riesgoso, un bono gobernado por

$$dB(t) = rB(t)dt; \;\; B(0) = 1$$

El valor del portafolio es

$$V(t) = (Vq)(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$$

$$= a(t)S(t) + b(t)e^{rt}.$$

Definimos el valor descontado del portafolio como

$$V_D(t) = e^{-rt}V(t) = e^{-rt}a(t)S(t) + b(t)$$

Suponemos que el portafolio es auto-financiable :

$$dV(t) = a(t)dS(t) + re^{rt}b(t)dt.$$

Como

$$dV_D(t) = -re^{-rt}V(t) + e^{-rt}dV(t)$$

se obtiene

$$dV_D(t) = e^{-rt}a(t)[dS(t) - rS(t)dt]$$

$$= \sigma e^{-rt}a(t)S(t)dW^Q(t)$$

o sea

$$V_D(t) = V_D(0) + \int_0^t \sigma e^{-ru}a(u)S(u)dW^Q(u).$$

Entonces, el proceso del valor del portafolio descontado es una $Q-$ *martingala. Luego, para* $t \leq T$,

$$e^{-rt}V(t) = E^Q[e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}_t]$$

de donde obtenemos la importante fórmula general de valuación para portafolios en este mercado BS :

$$\boxed{V(t) = E^Q[e^{-r(T-t)}V(T)\big|\mathcal{F}_t]}$$

Vamos a juntar ahora todas las piezas para valuar una ***opción europea de compra****,* ***escrita sobre un activo subyacente*** $S(t)$ ***gobernado por el MBG con parámetros*** μ, σ*. El precio, prima o costo de la opción al tiempo t, con* $S(t) = s$ *lo denotaremos por* $C(t, s) = C(t, S(t))$*.*

El valor terminal o de maduración de la opción es

$$C\big(T,S(T)\big) = (S(T)-K)^+.$$

Decimos que el portafolio $q(t) = (a(t), b(t))$ ***replica la opción sii***

$$V(T) = (Vq)(T) = C\big(T,S(T)\big) = (S(T)-K)^+.$$

Vimos que por el TRM, si $\varphi_T = (S(T)-K)^+$, *se tiene*

$$E^Q[e^{-rT}(S(T)-K)^+|\mathcal{F}_t] = M(t)$$

$$= M(0) + \int_0^t \Gamma(s)\, dW^Q(s)$$

por otra parte

$$V_D(t) = V_D(0) + \int_0^t \sigma e^{-ru} a(u)S(u)dW^Q(u)$$

De manera que el portafolio replicará a la opción ***y de hecho para todo*** $t \in [0,T]$ *sii* $V(t) \equiv C(t,S(t))$ *y esto último se cumple pues* $V_D(0) = M(0)$, *y si igualamos los dos integrandos en las integrales de arriba :*

$$\Gamma(u) \equiv \sigma e^{-ru} a(u)S(u),$$

o bien

$$a(t) = \frac{e^{rt}\Gamma(t)}{\sigma\, S(t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

Bajo estas circunstancias obtenemos que

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S(T)-K)^+|\mathcal{F}_t] \quad (*)$$

Comentario : *obsérvese que setamos obteniendo el 'peso' del portafolio correspondiente al activo. Se puede obtener el peso correspondiente al bono usando el lema de Itô.*

Ejercicio : *obtener el otro peso.*

Comentario : abusos de notación :

$$C(t) = C(t,s) = C\big(t, S(t)\big) = C(t,r,K,s,\sigma) \quad \textit{etc.}$$

Resta evaluar esta esperanza condicional en (*)*. Para ello se necesita sólo un poco de teoría de probabilidad y calcular algunas integrales complicadas, las cuales todas se reducen a utilizar la integral de Louiville :*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

[*Prueba :*

$$I = \sqrt{I^2} = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)}$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy}$$

$$= \sqrt{\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,rdrd\theta} = \sqrt{\pi} \text{].}$$

Para los detalles, ver el apéndice de abajo. El resultado final es

$$\boxed{C(t) = sN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)}$$

la muy célebre fórmula de Black Scholes, alias "la fórmula más usada en la historia".

En Stewart (2012), en el último capítulo, vienen consideraciones interesantes acerca de la fórmula y del uso de la matemática en finanzas en general.

Comentario : *la herramienta para esta prueba, conocida como 'método de la martingala' empezó a gestarse en el período 1979 – 1981 en los trabajos seminales de Harrison, Kreps & Pliska (ver Harrison & Kreps (1979); Harrison & Pliska (1981)).*

(*) Apéndice : cálculo detallado de la esperanza condicional.

Seguiremos muy de cerca Shreve (2004) vol. II. Tenemos que

$$C(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S(T)-K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

para $t \in [0,T]$, *y* $S(t) = s$. *Entonces,*

$$S(t) = S(0)\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W^Q(t)\right],$$

de donde

$$S(T) = S(0)\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W^Q(T)\right]$$

$$= S(t)\exp\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$+ \sigma(W^Q(T) - W^Q(t) y$$

Luego,

$$S(T) = S(t)\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, Y\right],$$

con $\tau = T - t$, *y donde*

$$Y = -(W^Q(T) - W^Q(t))/\sqrt{\tau} \sim N(0,1).$$

Entonces, para cualquier $t \in [0, T]$, *la v.a.* $S(T)$ *es el producto de la variable aleatoria* $S(t)$, *la cual es* $\mathcal{F}_t$- *medible, con la v.a.* $\xi = exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, Y\right]$, *la cual es independiente de* $\mathcal{F}_t$, *pues* $(W^Q(T) - W^Q(t))$ *es independiente de* $W^Q(t)$.

Por lo anterior, la esperanza condicionada a $\mathcal{F}_t$ *es una esperanza usual con respecto a Q :*

$$C(t, s) = e^{-r\tau}\, E^Q[(S(t)\xi - K)^+].$$

Lema *(Th. 1.5.1, Shreve (2004) vol II) : Sea Y una v.a. en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *con fdp continua* $f(y)$, *y* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y no negativa. Entonces*

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy$$

Aplicamos esto a la v.a. Y, para la cual

$$f(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Luego $C(t) =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau}\, (S(t)\xi - K)^+ \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau} \left(s\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, Y\right] - K\right)^+ \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

El integrando es diferente de cero (positivo) sii

$$y < d_2 = \left(\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)/\sqrt{\tau}$$

por lo que $C(t) =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} e^{-r\tau}\left(s\ exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\,Y\right] - K\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} s\ exp\left[-(y^2/2) - \frac{\sigma^2}{2}\tau - \sigma\sqrt{\tau}\,Y\right]\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} e^{-r\tau}\,K\ exp[-(y^2/2)]\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} exp\left[-(\frac{1}{2})(y + \sigma\sqrt{\tau})^2\right]dy \quad - \quad Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

y haciendo $u = y + \sigma\sqrt{\tau}$, $du = dy$ *en la integral :*

$$C(t) = \left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \quad - \quad Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

aquí

$$N(u) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt.$$

Escribiendo $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau} =$

$$\left(\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)/\sqrt{\tau},$$

obtenemos finalmente

$$\boxed{C(t) = s\,N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)}$$

APENDICE : COMPLEMENTOS SOBRE BS

La fórmula de BS, *dada por*

$$f(r, K, \tau, s, \sigma) = sN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

es una función

$$f: \mathbb{R}^5_{++} \to \mathbb{R}_{++},$$

donde $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$. Resulta que f *es una función real – analítica* de cinco variables, definida en el *primer ortante de* $\mathbb{R}^5_{++}$.

UNIDADES. *Este es un tema que todos los economistas y la mayoría de los financieros ignoran olímpicamente. Sin embargo, en varios sentidos importantes es una de las bases de la ciencia e ingenierías, y algo se puede hacer en finanzas. Veamos.*

Claramente, tanto *s* como *K* tienen unidades de dinero, digamos dólares. Así $\log\left(\frac{s}{K}\right)$ es a – dimensional. El tiempo se mide en cualesquiera unidades de tiempo. En finanzas son días, meses ó años. Por otra parte, las tasas de interés tienen unidades 1/ tiempo, ya que :

$$A \;\to\; e^{r\Delta t}A.$$

Como

$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + \frac{r^2(\Delta t)^2}{2!} + \cdots +$$

y éste debe ser a – dimensional, la única denominación conveniente es : $r\Delta t$ sin dimensiones, i.e. $\dim(r) = \frac{1}{\dim(\Delta t)}$. Lo anterior fuerza a que $\sigma^2\tau$ y $\sigma\sqrt{\tau}$ sean también a – dimensionales y por ello,

$$\dim(\sigma) = 1/dim\sqrt{\tau}.$$

Así, la volatilidad está dada en $\sqrt{dia}^{-1}, \sqrt{\text{años}}^{-1}, etc.$

LÍMITES. Los siguientes límites son elementales (en alguno de ellos se ocupa la regla de L'Hôpital) y tienen interpretación financiera :

i) $lim_{s\to\infty}c = \infty;\quad lim_{s\to 0}c = 0.$

ii) $lim_{K\to\infty}c = 0;\quad lim_{K\to 0}c = s.$

iii) $lim_{\sigma\to\infty}c = s;\quad lim_{\sigma\to 0}c = s - Ke^{-r\tau}.$

iv) $lim_{r\to\infty}c = s;\quad lim_{r\to 0}c = sN(d_1|_{r=0}) - Ke^{-r\tau}N(d_2|_{r=0}).$

v) $"lim_{\tau\to\infty}c = s";\quad lim_{\tau\to 0}c = (s-K)^+$

Ejercicio : *probar los límites y hacer la interpretación financiera.*

<u>Problema abierto</u> : Calcular todos los límites <u>multivariados</u> de la función de BS, cuando dos ó más de las variables tienden a cero ó a infinito. Por ejemplo :

$$lim_{s\to 0,\ K\to 0,\ \sigma\to\infty} f(r, K, \tau, s, \sigma) = ¿???$$

DERIVADAS o 'greeks'. Las derivadas de más abajo se calculan con la ayuda del siguiente :

Lema. $s\,N'(d_1) = K\,e^{-r\tau}N'(d_2)$.

Aquí N' es la derivada de la normal acumulativa.

Ejercicio *: demostrarlo.*

Con ayuda del lema se obtienen fácilmente los 'greeks', que también dejamos como ejercicio elemental.

1) Rho : $\varrho = \frac{\partial c}{\partial r} = K\tau e^{-r\tau}N(d_2)$

2) $\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r\tau}N(d_2)$

3) Theta : $\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -[\frac{1}{2\sqrt{\tau}}N'(d_1) + rKe^{-r\tau}N(d_2)]$

4) Delta : $\Delta = \frac{\partial c}{\partial s} = N(d_1)$

5) Vega : $\upsilon = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = s\sqrt{\tau}\,N'(d_1)$

Comentario : *las cantidades anteriores tienen interpretación financiera y se usan bastante en diversas técnicas de ingeniería financiera. Ver por ejemplo Hull (2005).*

Volatilidad implícita, soluciones en forma cerrada y fórmulas aproximadas. Todos los parámetros de los que depende el valor de *c* en la fórmula de BS son observables (medibles), *excepto la volatilidad.* Este es un parámetro tan elusivo, que en ocasiones los 'traders' prefieren estimar u observar los precios de opciones en el mercado, y obtener de allí el valor de la volatilidad. A esto le llaman "invertir la fórmula de BS", y desde el punto de vista matemático consiste en lo siguiente. Consideremos la función $F: \mathbb{R}_{++}^6 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(r, K, \tau, s, c; \sigma) = f(r, K, \tau, s, \sigma) - c$$

y el problema $F(r, K, \tau, s, c; \sigma) = 0$. Se cumple que

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = s\sqrt{\tau}\, N'(d_1) \neq 0$$

en todo su dominio de definición. Entonces, por el TFIM, para todo

$$p^0 = (r_0, K_0, \tau_0, s_0, c_0; \sigma_0) \in \mathbb{R}_{++}^6$$

tal que $F(p^0) = 0$, existe una vecindad $U_0 = V \times W \subset \mathbb{R}_{++}^5 \times \mathbb{R}_{++}$ y una única función analítica $\varphi: V \to W$ tal que para $(r, K, \tau, s, c) \in V$ se tiene

$$F(r, K, \tau, s, c; \varphi(r, K, \tau, s, c)) = 0,$$

es decir,

$$f(r,K,\tau,s,\varphi(r,K,\tau,s,c)) = c, \qquad \text{si } (r,K,\tau,s,c) \in V.$$

A φ se le llama *la volatilidad implícita en la fórmula de BS.*

Soluciones en forma cerrada para la volatilidad implícita. *No se conocen* y se conjetura que no las hay. Más aún en muchos libros y artículos afirman descuidadamente que "es imposible obtener fórmulas explícitas para la volatilidad implícita". El punto importante es que esta afirmación ó la negación de la misma carecen de sentido si no se especifica cuidadosamente *la familia de funciones con las cuales se quiere construir dicha fórmula explícita.* Quien conozca un poco de teoría de Galois y el teorema de imposibilidad para obtener raíces de polinomios en términos de los coeficientes entenderá fácilmente el punto.

Soluciones aproximadas. Para fines prácticos, lo que puede hacerse, mediante diversos procedimientos es obtener 'fórmulas aproximadas' para la volatilidad implícita. Hay muchas de ellas en la literatura, por ejemplo la muy conocida y muy simple :

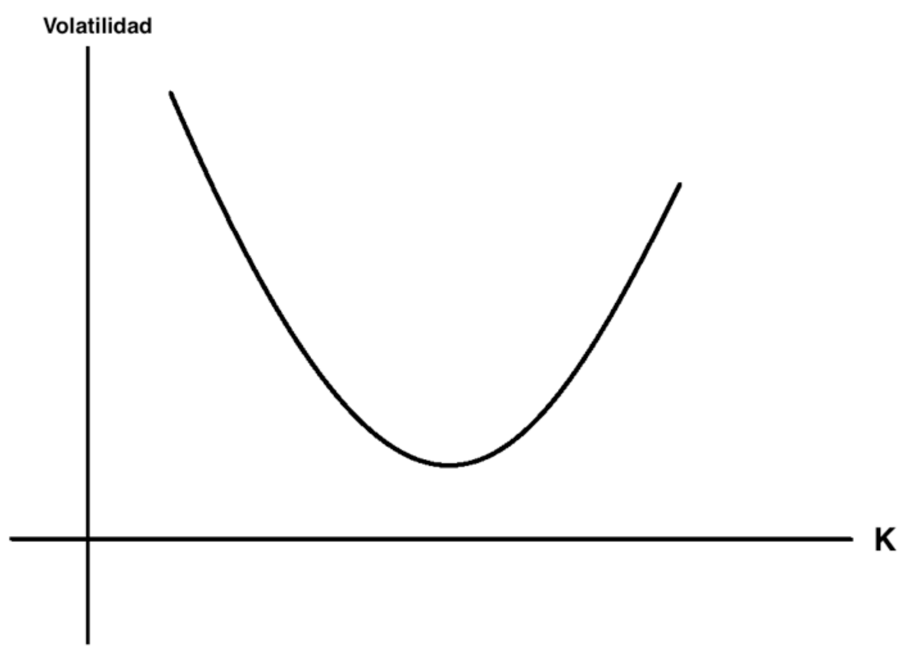
$$\sigma_{app} = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}}\,\frac{c}{s},$$

(ver Brenner & Subrahmanyam 1988). Desafortunadamente, la mayoría de estas fórmulas no estiman el error que se comete al hacer la aproximación. Una excepción es la de Chargoy & Ibarra (2006) :

$$\sigma_{app}^{*} = \frac{2}{\sqrt{\tau}}\, N^{-1}\left(\frac{ce^{r\tau} + K}{2K}\right)$$

en donde se estima cuidadosamente la magnitud del error.

El problema de la sonrisa. Después de la crisis financiera de 1987 se empezó a observar en los mercados un fenómeno curioso : contrariamente a una de las hipótesis del modelo de BS, *la volatilidad obtenida en los mercados de opciones parecía variar al mover el precio de ejercicio.* Más áun, empezaron a obtenerse gráficas en forma de U o parte de una U, con la volatilidad en el eje vertical y el strike en el horizontal. Esto motivó la denominación de 'sonrisa', y el consiguiente problema de explicar por qué se generaba. La mayoría de las propuestas consisten en cambiar el modelo de BS por un modelo más complejo que dé cuenta de este fenómeno. Hasta ahora continúa siendo un problema *teórico y metodológico* abierto.



Actualmente la alumna Liz Arleth Carrasco de la MCMAI se encuentra terminando una tesis de maestría sobre este tema, la cual contendrá mucha información sobre el problema, a varios niveles. Contacto : lizarlet18@hotmail.com

B. Los dos Teoremas Fundamentales de Finanzas

Observación importante : *aquí nos restringiremos al contexto del modelo de mercado SMK, y a un nivel como el de Williams (2006), pero los dos teoremas fundamentales se han establecido en contextos mucho más generales. Ver Delbaen & Schachermayer (1994, 1998, 2006); Bättig & Jarrow (1999). El libro Elliot & Kopp (2005) presenta una sucesión de versiones, con complejidad creciente, de los teoremas fundamentales*

El primer teorema fundamental (PTFVA)

Recordemos, en el modelo SMK, la definición básica.

Definición : Un portafolio de arbitraje *es un portafolio* $q(t)$ *que satisface lo siguiente : existe* $\tau \in (0, T]$ *tal que*

(iv) $P[(Vq)(0) = 0] = 1$
(v) $P[(Vq)(\tau) \geq 0] = 1$
(vi) $P[(Vq)(\tau) > 0] > 0$

Comentario : varias definiciones de arbitraje, NFLVR.

Definición : *un mercado es viable o libre de arbitraje sii no existen portafolios de arbitraje. Lo denotamos como NA.*
Definición : una medida martingala equivalente (MME) *es una medida de probabilidad Q en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tal que* $Q \sim P$, *y el proceso de precios descontado resulta ser una* $Q -$ *martingala, i.e.,*

$$E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}S(t)\middle|\mathcal{F}_u\right] = S(u), \quad c.s. \quad (u \leq t)$$

Comentario : *factores de descuento generalizados.*

<u>Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos</u> **:** *un mercado es viable si y sólo si existe (al menos) una medida martingala equivalente.*

Sea $\mathcal{M}^*$ *la colección de las MME. Podemos reescribir el PTFVA como*

$$NA \iff \mathcal{M}^* \neq \emptyset$$

Ejercicio: *Probar la implicación* $\Leftarrow$.

La implicación recíproca, ***en el caso general****, requiere de una fuerte dosis de análisis funcional y análisis estocástico y cerca de 100 páginas de estimaciones y razonamientos delicados (Delbaen & Schachermayer 1994, 1998).*

Brevísima cronología del PTFVA :

- *Harrison & Pliska (1981, 1982);*
- *Dybvig & Ross (1987);*
- *Delbaen & Schachermayer (1994, 1998).*

Importancia del teorema :

- *Teórica*
- *Valuación*
- *Alcances de los modelos.*

El segundo teorema fundamental (STFVA)

Definición : *el mercado es* ***completo*** *si y sólo si para cualquier función Borel – medible* Φ *en* $\mathbb{R}^n$*, existe un <u>portafolio replicante</u>, i.e., un portafolio auto-financiable q tal que*

$$\Phi(S(T)) = (Vq)(T)$$

Comentario : *como escribimos en el caso del modelo de mercado a 1 período, la completez del mercado representa una especie de 'riqueza de posibilidades' en el mismo, de tal manera que combinando apropiadamente los activos de que consta, puede replicarse casi cualquier comportamiento financiero. Nótese que la familia de funciones Borel medibles es realmente muy grande.*
Por otra parte, en la práctica empieza a ser usado el concepto, de manera no muy precisa pero alrededor de la misma idea básica, relacionado con cuestiones de liquidez, posibilidades de producción de ciertas mercancías, etc.

El resultado básico sobre completez en este contexto matemático es el

Segundo Teorema Fundamental de Valuación de Activos (STFVA, Bättig & Jarrow (1999); Björk (2005); Williams (2006)) : *el mercado es completo si a lo más hay una MME, i.e.,*

$$\textit{Completez} \equiv \#(\mathcal{M}^*) \leq 1$$

Comentarios.

1. *El resultado 'redondo' sería : el mercado es completo y libre de arbitraje si y sólo si existe una única medida martingala equivalente :*

$$\textit{Completez \& No arbitraje} \quad \Leftrightarrow \quad \#(\mathcal{M}^*) = 1$$

2. *Teorema de Jacod y puntos extremos. Un resultado de J. Jacod, logra identificar las MME con los puntos* ***extremos*** *de cierto subconjunto de un espacio infinito dimensional. Esto conecta el STFVA con los teoremas tipo Krein – Milman y Choquet de Análisis Funcional Convexo. Ver Protter (2005).*

<u>Brevísima cronología del STFVA</u> :

- ***Ross, 1976***
- ***Harrison & Pliska, 1981 – 1982***
- ***Müller, 1987***
- ***Jarrow & Bättig 1999***
- ***Jarrow & Madan 2001***

Domingo 5, plus

Modelos de tasas de interés.

Introducción. *Como señalábamos en la primera sesión, una de las grandes subáreas de las finanza matemáticas se dedica al estudio de modelos estocásticos dinámicos para tasas de interés.*

Las tasas son uno de los instrumentos más importantes en los mercados financieros y en los mercados en general. En particular constituye una herramienta crucial de política financiera y económica para los bancos centrales de diversos países.

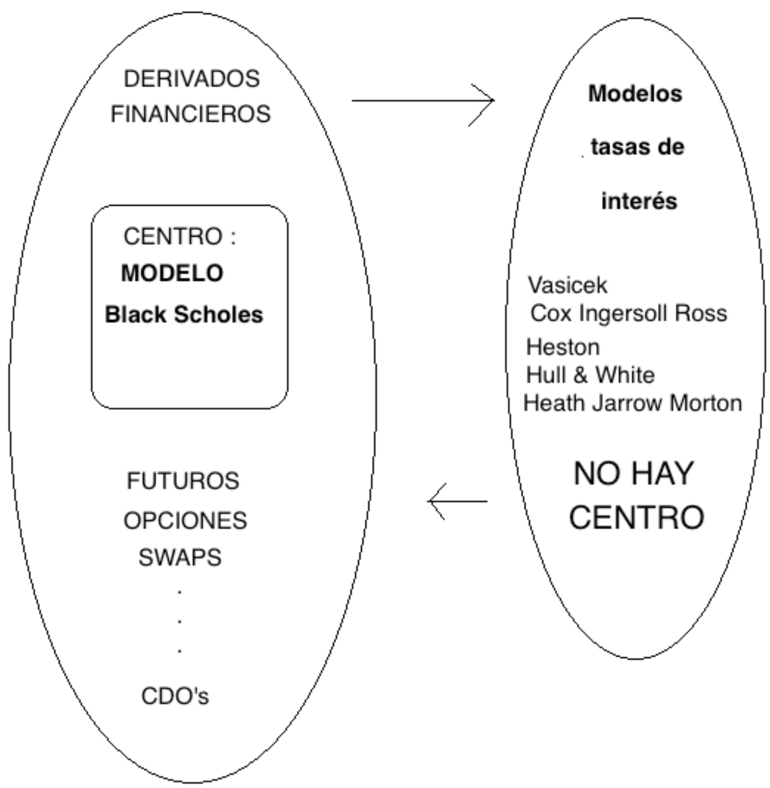
Las tasas de interés se estudiaban usualmente dentro de la teoría macro – económica, y bajo una tradición esencialmente determinística y de modelado muy simple. Esto dio lugar, a lo largo de décadas, a modelos y fórmulas muy sencillos que tenían ciertas virtudes pero también muchos defectos. Estaban muy lejos de poder modelar mínimamente la gran complejidad real que rodea a estos instrumentos financieros.

Una vez que en finanzas matemáticas se estableció el estándar de utilizar ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô para modelar los precios de activos y derivados financieros, este enfoque se llevó de manera natural a las tasas de interés. El primer modelo de este tipo, el de Vasicek, en fecha tan temprana como 1978, despertó un gran interés, y a partir de allí se sucedieron muchos otros, orientados a subsanar las que se consideraban entonces como las principales deficiencias de ese primer modelo, en particular el hecho de que las tasas pudieran ser estrictamente negativas con probabilidad estrictamente positiva. En 1978 esto era inconcebible.

Le siguieron modelos cada vez más sofisticados : Hull & White; Cox, Ingersoll & Ross; Ho & Lee; Heston; y a un nivel todavía más sofisticado, el modelo de Heath – Jarrow – Morton, que muchos consideran más como un marco de referencia muy general, y cuya naturaleza matemática es infinito – dimensional.

La búsqueda, muy recientemente, de una teoría más comprehensiva para enmarcar y generalizar estos modelos de tasas de interés, involucra las ideas y las herramientas matemáticas desarrolladas por investigadores muy *destacados, en especial T. Björk, D. Filipovic, J. Teichmann, D. Carmona, y varios otros. El marco matemático que se ha desarrollado en los últimos años es muy impresionante, bastante difícil e involucra fuertes dosis de análisis infinito – dimensional, así como ideas y herramientas de geometría diferencial, teoría matemática del control y 'cálculo conveniente'.*

Además de la mayor dificultad intrínseca del tema, hay una situación crucial : ***no se tiene un 'benchmark' universalmente aceptado como el caso del modelo de Black Scholes en el área de derivados financieros****. Simplemente, no hay criterios, claros, definitivos, para decidir, dados dos ó más modelos, cuál es mejor. Al final haremos una propuesta tentativa en esta dirección.*



Referencias :

Björk (2005); D. Filipovic (2009); Carmona & Tehranchi (2006).

A continuación presentamos muy brevemente las definiciones básicas, así como algunos de los modelos más importantes. Al final hacemos una propuesta de investigación, dirigida a clasificar la 'bondad' de los diferentes modelos.

Definiciones básicas.

Seguiremos muy de cerca los libros de Björk y de Filipovic.

*Las dinámicas de las tasas de interés son equivalentes a los movimientos financieros del mercado de bonos. Un **bono con cero cupones que paga 1 $ al tiempo de madurez, T, tiene un precio*** $p(t,T)$ *para cada* $t \leq T$. *Las hipótesis básicas sobre este mercado son las siguientes :*

- *Para cada* $T > 0$ *existe un mercado sin fricciones de T – bonos.*
- $p(T,T) = 1$
- $p(t,T)$ *es diferenciable en T.*

*La **estructura de plazo** del mercado de bonos no es muy informativa visualmente. Una mejor medida para ello son las **tasas de interés implicadas.** Hay una gran variedad de ellas.*

A. *La tasa 'forward' simple (o LIBOR) es la solución a la ecuación :*

$$1 + (T - S)L = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$

B. *La tasa 'forward' continuamente compuesta es la solución a la ecuación*

$$e^{R(T-S)} = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$

Esta terminología se usa normalmente en los mercados. Ambas tasas son equivalentes. En términos matemáticos, tenemos la siguiente serie de definiciones.

1. *La tasa 'forward' LIBOR para* $[S,T]$ *se define como*

$$L(t;S,T) = \frac{P(t,T) - P(t,S)}{(T-S)P(t,T)}$$

2. *La tasa de contado simple para [S,T] o tasa LIBOR de contado es*

$$L(S,T) = -\frac{P(S,T) - 1}{(T-S)P(S,T)}$$

3. *La tasa 'forward' continuamente compuesta para [S,T] contratada en t se define como*

$$R(t;S,T) = -\frac{logP(t,T) - logP(t,S)}{(T-S)}$$

4. *La tasa 'de contado' continuamente compuesta para [S,T] se define como*

$$R(S,T) = -\frac{logP(S,T)}{(T-S)}$$

5. *La tasa instantánea 'forward' con madurez T, contratada en t se define como*

$$f(t,T) = -\frac{\partial logP(t,T)}{\partial T}$$

6. La ***tasa corta instantánea al tiempo*** *t está dada por*

$$r(t) = f(t,t)$$

Comentarios : *las tasas 'spot' son tasas 'forward' en las que el tiempo de contrato coincide con el inicio del intervalo sobre el cual la tasa es efectiva, i.e., t = S. La tasa 'forward' instantánea es el límite de la tasa 'forward' continuamente compuesta cuando* $S \to T$. *Entonces puede ser interpretada como la tasa de interés sin riesgo contratada en t, y efectiva sobre el intervalo infinitesimal* $[t, t + dt]$.

Por otra parte, el proceso de la 'cuenta de dinero' se define como

$$B(t) = exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\},$$

este proceso puede ser estocástico, y no sólo variable en el tiempo.
Como podemos ver, ***la tasa neutral al riesgo*** *que utilizamos para valuar derivados financieros, es únicamente* ***una de las varias tasas posibles a considerar,*** *y además bajo hipótesis muy restrictivas.*

Las principales relaciones dinámicas.

Para lo que sigue, así como pruebas heurísticas ver Björk (2005). Más rigurosamente se encuentra este material en Filipovic (2009). Supondremos que :

Dinámica de la tasa corta :

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \qquad (*)$$

Dinámica del precio del bono :

$$dp(t,T) = p(t,T)m(t,T)dt + p(t,T)v(t,T)dW(t) \quad (**)$$

Dinámica de la tasa 'forward' :

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \qquad (***)$$

Observación 1 : *las diferentes magnitudes pueden ser vectores o matrices, en particular el MB puede ser vectorial.*

Observación 2 : *se supone que las diversas funciones involucradas son continuamente diferenciables con respecto a la variable T, y que son suficientemente regulares en esa y en las otras variables para derivar bajo el signo integral e intercambiar los órdenes de diferenciación e integración.*

Bajo las anteriores hipótesis, tenemos el siguiente

Teorema : suponiendo (*), (**), (***), *las relaciones dinámicas básicas son como sigue.*

i) $a(t,T) = \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}\, v(t,T) - \frac{\partial m(t,T)}{\partial T}$;

ii) $\sigma(t,T) - \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}$;

iii) $a(t,T) = \frac{\partial f(t,t)}{\partial T} + \alpha(t,t)$;

iv) $b(t) = \sigma(t,t)$;

v) $dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}$

$+ \; p(t,T)S(t,T)dW(t)$

donde

$$A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)ds \;;$$

$$S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

Comentario : *la demostración rigurosa de las relaciones anteriores es un ejercicio no trivial de cálculo estocástico que involucra, además de las herramientas básicas como la fórmula de Itô, algunos teoremas avanzados como la versión estocástica del Teorema de Fubini. Ver Filipovic (2009), sección 6.1.*

Los principales modelos de tasas de interés.

1. ***El modelo de Vasicek.***

$$dr(t) = \big(b + \beta\, r(t)\big)dt + \sigma\, dW(t)$$

Tiene solución explícita :

$$r(t) = r(0)e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}\big(e^{\beta t} - 1\big) + \sigma e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}\, dW(s)$$

Ejercicio : *verificarlo.*

Se sigue que $r(t)$ *es un proceso gaussiano con media y varianza, respectivamente :*

$$r(0)e^{\beta t} + \tfrac{b}{\beta}\big(e^{\beta t} - 1\big); \qquad \tfrac{\sigma^2}{2\beta}\big(e^{2\beta t} - 1\big)$$

*de donde se sigue (**¿por qué?**) :*

$$P[r(t) < 0] > 0$$

Comentario general importante : *el enfoque que más se ha desarrollado para estudiar los sistemas dinámicos estocásticos que representan los principales modelos de estructura de plazo consiste, via las definiciones y relaciones fundamentales de más arriba, en un interjuego entre dos situaciones : la dinámica de las tasas y la dinámica de los precios de los bonos. En ocasiones se resuelven los problemas en una de ellas, y después se aborda la otra. O si no hay soluciones explícitas, los análisis cualitativos y teóricos se llevan a cabo en una, otra o ambas.*
La dinámica general para los precios de los bonos se supone de la forma :

$$F(t;r;T) = exp(-\rho(t,T) - B(t,T)\,r)$$

2. *El modelo CIR (Cox – Ingersoll – Ross).*

$$dr(t) = \big(b + \beta\, r(t)\big)dt + \sigma\,\sqrt{r(t)}\,dW(t)$$

La ecuación de estructura de plazo se convierte en

$$\frac{\partial B(t,t)}{\partial T} = \frac{\sigma^2}{2}B^2(t,T) - \beta\, B(t,T) - 1; \quad B(T,T) = 0$$

la cual es una ecuación de Riccati, que tiene solución explícita :

$$B(t,T) = \frac{2\big(e^{\gamma(T-t)} - 1\big)}{(\gamma - \beta)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \;\; ;$$

donde $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\gamma^2}$. *E integrando se obtiene el otro factor de los exponentes para el proceso de los precios del bono :*

$$\rho(t,T) = \frac{2b}{\sigma^2} log\left(\frac{2e^{(\gamma-\beta)(T-t)/2}}{(\gamma-\beta)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)$$

Enseguida listamos otros seis modelos famosos, muy utilizados en la literatura y en la práctica. Desarrollos relativamente detallados de los mismos y de sus principales propiedades pueden encontrarse en Filipovic (2009), Björk (2005) y Shreve (2004) vol. II.

3. ***El modelo de Dothan.***

$$dr(t) = \beta\, r(t)dt + \sigma\, r(t)\, dW(t)$$

4. ***Black – Derman – Toy***

$$dr(t) = \beta(t)\, r(t)dt + \sigma\, r(t)\, dW(t)$$

5. ***Black – Karasinski***

$$d\ell(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, \ell(t)\big)dt + \sigma\, dW(t)$$

6. ***El modelo de Ho – Lee***

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma\, dW(t)$$

7. ***El modelo de Hull – White, extensión de Vasicek.***

$$dr(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, r(t)\big)dt + \sigma(t)\, dW(t)$$

8. El modelo de Hull – White, extensión del CIR.

$$dr(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, r(t)\big)dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

La metodología de Heath – Jarrow – Morton.

En principio está basada en las expresiones generales :

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW(s)$$

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)dt + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s)$$

pero la metodología es un enfoque bastante profundo, donde, de acuerdo a muchos autores, aparece claramente la naturaleza infinito – dimensional de los modelos de tasas de interés. El artículo principal Heath, Jarrow & Morton (1992) dio lugar a una respuesta muy entusiasta y a diversos desarrollos, tanto financieros como metodológicos y matemáticos. Por ejemplo, los autores necesitaban para una de las demostraciones una versión específica del Teorema de Fubini estocástico, que en ese momento no estaba disponible en la literatura, y lo incluyeron en un apéndice del mismo artículo. Este tema puede estudiarse apropiadamente en el libro de Filipovic (2009), y a un nivel más profundo, en el de Carmona & Tehranchi (2006), aunque éste último requiere bases matemáticas fuertes en análisis funcional.

(*) Una propuesta de investigación.

Estudiar la ***robustez**** *de estos modelos con respecto a propiedades específicas (estabilidad, algunas cotas superiores para la solución, estimaciones de probabilidades, etc.).*
Digamos que se considera la propiedad P. Si el modelo A es robusto con respecto a P y el modelo B no lo es, decimos que A es un mejor modelo que B (en este sentido preciso).

Un problema en esta dirección :

En el modelo de Vasicek, estimar el orden de magnitud en términos del tiempo de

$$P[r(t) < 0]$$

e investigar si ésta es una propiedad robusta del modelo de Vasicek.

(*) Definición : *una propiedad P de un modelo M es* ***robusta*** *sii se cumple para una familia de modelos 'cercanos' a M y prefijada de antemano.*

(**) El ejemplo más importante, históricamente : Teorema de Kharitonov (1978) acerca de la estabilidad robusta de familias de polinomios. Es como sigue.

Estabilidad robusta de familias de polinomios. Dado un polinomio

$$p(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_0,$$

su estabilidad, equivalente a que todas las raíces tengan *parte real estrictamente negativa,* puede analizarse, por ejemplo, mediante el criterio de Routh – Hurwitz.
Aquí la *familia de modelos* sería la colección $\mathcal{C}$ de polinomios

$$q(x) = b_n\, x^n + \cdots + b_0,$$

donde $b_k \in [l_k, u_k]$, $0 \leq k \leq n$, y desde luego los coeficientes de $p(x)$ se encuentran dentro de esos intervalos : $a_k \in [l_k, u_k]$, $0 \leq k \leq n$.

De hecho cada uno de esos intervalos puede considerarse como un 'entorno' de los respectivos coeficientes a_k, pero no son arbitrariamente pequeños, ni siquiera tienen que ser 'pequeños', están dados por las condiciones reales, prácticas y son *fijos* (por ejemplo, digamos que la condición inicial para una EDO es $x(0) = 10$. Un intervalo del tipo que estamos considerando podría ser $[8.5, 11]$, lo cual puede ser bastante realista).

La familia completa de esos polinomios $\mathcal{C}$ es una "vecindad" del polinomio original $p(x)$. Obsérvese que $\mathcal{C}$ es una *colección infinita de polinomios* (de hecho es no numerable). Entonces, aquí tendríamos que la estabilidad del polinomio $p(x)$ *es una propiedad robusta*, sii todo $q \in \mathcal{C}$ es estable. ¿Cómo dar condiciones necesarias y suficientes? ¿Cómo comprobar simultáneamente la estabilidad de una familia tan grande? [Pregunta matemática : *¿cuál es exactamente la **cardinalidad** de $\mathcal{C}$?*]

Solución al problema de estabilidad robusta. La sorprendente respuesta que encontró Vladimir Kharitonov es que basta con estudiar la estabilidad de 4 polinomios.

Teorema de Kharitonov, 1978 **:** $p(x)$ *es robustamente estable, con respecto a* $\mathcal{C}$, *si y sólo si los siguientes **cuatro** polinomios son estables:*

$$\mathcal{K}_1(x) = l_0 + l_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + l_4 x^4 + l_5 x^5 + \cdots$$
$$\mathcal{K}_2(x) = u_0 + u_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + u_4 x^4 + u_5 x^5 + \cdots$$
$$\mathcal{K}_3(x) = l_0 + u_1 x + u_2 x^2 + l_3 x^3 + l_4 x^4 + u_5 x^5 + \cdots$$
$$\mathcal{K}_4(x) = u_0 + l_1 x + l_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4 + l_5 x^5 + \cdots$$

Observación importante : *sólo debe verificarse la estabilidad de CUATRO polinomios, no importa qué tan grande sea n.*

Breve epílogo

A pesar de que la teoría económica tiene tantos defectos y problemas, como es patente todos los días con los constantes ajustes de cifras y figuras, con las predicciones fallidas y con las explicaciones contradictorias dentro de la misma disciplina, algunas áreas de la misma (ó quizás deberíamos pensar en 'disciplinas muy relacionadas con ella') como las finanzas matemáticas tienen bases mucho más sólidas y se desenvuelven dentro de tradiciones más cercanas a las ciencias 'duras' como la física.

*De hecho en finanzas se tiene una gran oportunidad para intentar hacer "ciencia de verdad" e "ingeniería de verdad", debido a varias razones. Las dos principales son el alto nivel de sistematización y desarrollo técnico que han alcanzado las herramientas matemáticas involucradas, y por otro lado, en las 'finanzas prácticas' se dispone de datos de gran calidad y confiabilidad, a diferencia de lo que ocurre en el resto de la economía. Más aún, exceptuando los 'indices' y 'estimaciones', los precios básicos de los activos financieros son 'exactos'. No sólo muy aproximados como en física, sino **exactos.***

*Por otra parte, los mercados financieros, incluidos los mercados de derivados, en los cuales se gestó en buena medida la crisis financiera de 2008 – 2010, **no van a desaparecer**. Muy al contrario, crecerán e irán incorporando instrumentos cada vez más complejos. De manera que para poder entenderlos, estudiarlos y usarlos adecuadamente se necesitan **más matemáticas y más enfoque científico**, y de ninguna manera **menos matemáticas**, como afirman los economistas que irresponsablemente achacan la culpa de la crisis financiera a los modelos matemáticos sofisticados. De acuerdo a Ian Stewart (2012) esto es casi como culpar a las computadoras y los lápices utilizados. La culpa debe buscarse en las **decisiones que tomaron los economistas asociados al poder político, los cuales tienen nombre y apellido : Alan Greenspan, Larry Summers, Robert Rubin, Harry Poulson, Tim Geithner, Ben Bernanke,** y decenas de economistas asociados a ellos.*

Las finanzas requieren de un desarrollo más amplio, sofisticado y cercano a las ciencias duras y a la ingeniería. Y para ello se necesitan matemáticas sofisticadas. Es el precio que hay que pagar. Por esto, se necesita formar muchos más matemáticos y otros profesionales que entiendan y manejen las herramientas básicas del tema, de las cuales se ha intentado mostrar un poquito en este mini curso.

Pero hay que advertir que lo que se ha construido, 'descubierto' o 'inventado' en el área de finanzas matemáticas es muchísimo más y que se necesita *estudiar bastante y muy seriamente para poder dominar aunque sea una parte del mismo.*

Bibliografía.

1. *F. Black & M. Scholes (1973) :* ***The pricing of options and corporate liabilities.*** *J. of Political Economy **81**, pp 637 – 659.*

2. *L. Arnold (1978) :* ***Stochastic differential equations.*** *John Wiley.*

3. *J.M. Harrison & D.M. Kreps (1979) :* ***Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets.*** *J of Economic Theory **11**, pp 418 – 443.*

4. *M. Harrison & S. Pliska (1981) :* ***Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading.*** *Stochastic Processes and Applications **11**, pp 215 – 260.*

5. *P.H. Dybvig & S. Ross (1989) :* ***Arbitrage.*** *In The New Palgrave. Finance. W.W. Norton.*

6. *M. Brenner & M.G. Subrahmanyam (1988) :* ***A simple formula to compute the implied standard deviation.*** *Financial Analysts Journal 44.5 pp 80 – 83.*

7. *D. Heath, R. Jarrow & A. Morton (1992) :* ***Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation.*** *Econometrica **60**, pp 77 – 105.*

8. *S. B. Chae (1994) :* ***Lebesgue Integration.*** *Springer Universitext.*

9. *F. Delbaen & W. Schachermayer (1994) :* ***A general version of the fundamental theorem of asset pricing****. Math. Annalen 300, pp 463-520.*

10. *I.Karatzas (1997) :* ***Lectures on the Mathematics of Finance.*** *American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.*

11. *C. Tudor (1997) :* ***Procesos estocásticos.*** *Segunda edición. Sociedad Matemática Mexicana.*

12. *F. Delbaen & W. Schachermayer (1998) :* ***The fundamental theorem of asset pricing for unbounded processes.*** *Math. Annalen 312, pp 215-250.*

13. *I. Karatzas & S. Shreve (1998) :* ***Mathematical Methods in Finance.*** *Springer.*

14. *W. Schachermayer (1998) :* ***The Wittgenstein prize.*** *Notices of the AMS 46, n 7, pp 792.*

15. *D. Revuz & M. Yor (1999) :* ***Continuous martingales and Brownian Motion.*** *Springer.*

16. *R. Bättig & R. Jarrow (1999) :* ***The second fundamental theorem of asset pricing. A new approach.*** *The Review of financial studies, vol 12 no 5, pp 1219 – 1235.*

17. *T. Mikosch (1999) :* ***Elementary stochastic calculus.*** *World Scientific.*

18. *F. LeRoy & J. Werner (2001) :* ***Principles of financial economics.*** *Cambridge University Press.*

19. *M.R. Steele (2001) :* ***Stochastic calculus and financial applications.*** *Springer.*

20. *S. Pliska (2001) :* ***Introduction to mathematical finance. Discrete time models.*** *Blackwell Publishers.*

21. *S. Shreve (2004) :* ***Stochastic calculus for finance vol I, II***. *Springer.*

22. *R. Jarrow & P. Protter (2004) :* ***A short history of stochastic integration and mathematical finance.*** *IMS Lecture Notes Monograph 45, pp 1-17.*

23. *R. Elliot & E. Kopp (2005) :* ***Mathematics of Financial Markets.*** *Springer.*

24. *T. Björk (2005) :* ***Arbitrage in continuous time.*** *Oxford University Press.*

25. *B. Oksendal (2005) :* ***Stochastic differential equations.*** *Springer.*

26. *F. Klebaner (2005) :* ***Introduction to stochastic calculus with applications.*** *Imperial College Press.*

27. *J.W. Hull (2005) :* ***Options, futures and other derivatives.*** *Prentice Hall.*

28. *P. Protter (2005) :* ***Stochastic Integration and Differential Equations****. Springer.*

29. *F. Delbaen & W. Schachermayer (2006) :* ***The mathematics of arbitrage****. Springer.*

30. *R. Williams (2006) :* ***Introduction to the Mathematics of Finance.*** *Springer.*

31. *R.A. Carmona & M.R. Tehranchi (2006) :* ***Interest rate models. An infinite dimensional stochastic analysis perspective.*** *Springer.*

32. *J. Chargoy-Corona & C. Ibarra-Valdez (2006) :* ***A note on Black Scholes implied volatility.*** *Physica A 370, no 2, pp 681 – 688.*

33. *M. Yor et al (2008) :* ***Mathematics and finance.*** *En : M. Yor Ed., Aspects of Mathematical Finance. Springer.*

34. *D. Filipovic (2009) :* ***Term structure models. A graduate course.*** *Springer.*

35. *A. Sánchez – Peralta (2010) : El primer teorema fundamental de Finanzas. Tesis de Maestría, MCMAI, UAM Iztapalapa.*

36. *I. Stewart (2012) :* ***Seventeen equations that changed the world****. Basic Books.*