Grandes cardinales en clases elementales abstractas:

hacia regularidad de la independencia.

Andrés Villaveces

Universidad Nacional - Bogotá

Minicurso en la UAM-I, Ciudad de México, Octubre de 2013

Contents

Contents

Contents

Analogías, teoremas, Galois

> Aussi nous savons, nous, ce que cerchait à deviner Lagrange, quand il parlait de métaphysique à propos de ses travaux d'algèbre; c'est la théorie de Galois, qu'il touche presque du doigt, à travers un écran qu'il n'arrive pas à percer. Là où Lagrange voyait des analogies, nous voyons des théorèmes. Mais ceux-ci ne peuvent s'énoncer qu'au moyen de notions et de "structures" qui pour Lagrange n'étaient pas encore des objets mathématiques...

(André Weil en De la métaphysique à la mathématique (1960). Mencionado por Yves André en Ambiguity Theory, Old and New. Bollettino U.M.I. 2008)

Łoś, Morley, Shelah...

- Desde hace 50 años la columna vertebral de la teoría de modelos ha sido la categoricidad y su transferencia: cómo el que una teoría (o una clase) sea categórica en un cardinal λ puede implicar que termine siendo categórica en muchos otros cardinales.
- UNIdimensionalidad de las descripciones
- Versión muy "contundente" de completud.

Teoría de modelos, en medio de varias cosas

La teoría de modelos, las clases elementales abstractas, la categoricidad:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{(m)AEC} \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\text{Repr./Tannaka} \arrow[ddr, dash] & & & & \text{Sh/Sch} \arrow[ddl, dash] \\
 & & \textbf{Teo Mod} \arrow[uu, "\text{conj}"'] \arrow[ull, "\text{cat}"] \arrow[urr, "\text{haces}"'] \arrow[dl, "\text{act}"'] \arrow[dr, "\text{def}"] & & \\
 & G \curvearrowright G(M) \arrow[rr, dash] & & \text{G M Th} &
\end{tikzcd}
$$

Łoś, Morley, Shelah...

Hace 100 años, Steinitz demuestra que "la geometría algebraica es categórica": precisamente, demuestra que todo par de cuerpos algebraicamente cerrados de misma característica y mismo cardinal no numerable deben ser isomorfos.

En los años 1920, 1930 Gödel, Carnap, Skolem, estudian la muy conocida incompletud de estructuras "fijas", la completud de estructuras "flexibles", y en últimas, emerge la categoricidad como una versión muy especial de completud.

A mediados de la década de 1950, basado en muchas otras observaciones Łoś propone su conjetura para la lógica de primer orden: una teoría de primer orden en lenguaje numerable solo puede tener 4 espectros de categoricidad:

$$\emptyset \qquad (\aleph_0) \qquad (> \aleph_0) \qquad (Card_\infty).$$

Łoś, Morley, Shelah...

Hace 100 años, Steinitz demuestra que “la geometría algebraica es categórica”: precisamente, demuestra que todo par de cuerpos algebraicamente cerrados de misma característica y mismo cardinal no numerable deben ser isomorfos.

En los años 1920, 1930 Gödel, Carnap, Skolem, estudian la muy conocida incompletud de estructuras “fijas”, la completud de estructuras “flexibles”, y en últimas, emerge la categoricidad como una versión muy especial de completud.

A mediados de la década de 1950, basado en muchas otras observaciones Łoś propone su conjetura para la lógica de primer orden: una teoría de primer orden en lenguaje numerable solo puede tener 4 espectros de categoricidad:

$$\emptyset \qquad (\aleph_0) \qquad (> \aleph_0) \qquad (Card_\infty).$$

Łoś, Morley, Shelah...

Hace 100 años, Steinitz demuestra que "la geometría algebraica es categórica": precisamente, demuestra que todo par de cuerpos algebraicamente cerrados de misma característica y mismo cardinal no numerable deben ser isomorfos.

En los años 1920, 1930 Gödel, Carnap, Skolem, estudian la muy conocida incompletud de estructuras "fijas", la completud de estructuras "flexibles", y en últimas, emerge la categoricidad como una versión muy especial de completud.

A mediados de la década de 1950, basado en muchas otras observaciones Łoś propone su conjetura para la lógica de primer orden: una teoría de primer orden en lenguaje numerable solo puede tener 4 espectros de categoricidad:

$$\emptyset \qquad (\aleph_0) \qquad (> \aleph_0) \qquad (Card_\infty).$$

Łoś, Morley, Shelah...

Hace 100 años, Steinitz demuestra que "la geometría algebraica es categórica": precisamente, demuestra que todo par de cuerpos algebraicamente cerrados de misma característica y mismo cardinal no numerable deben ser isomorfos.

En los años 1920, 1930 Gödel, Carnap, Skolem, estudian la muy conocida incompletud de estructuras "fijas", la completud de estructuras "flexibles", y en últimas, emerge la categoricidad como una versión muy especial de completud.

A mediados de la década de 1950, basado en muchas otras observaciones Łoś propone su conjetura para la lógica de primer orden: una teoría de primer orden en lenguaje numerable solo puede tener 4 espectros de categoricidad:

$$\emptyset \qquad (\aleph_0) \qquad (>\aleph_0) \qquad (Card_\infty).$$

La conjetura de Shelah clásica

Problema test clave en teoría de modelos de las últimas dos o tres décadas: encontrar versiones del Teorema de Morley y el Teorema de Shelah de Transferencia de categoricidad para contextos más amplios: clases elementales abstractas (extensiones semánticas de teoría de modelos de $L_{\lambda^+,\omega}(Q)$).

Conjetura (Shelah)

Dado λ, existe μ_λ tal que si ψ es una sentencia de $L_{\omega_1,\omega}$ que satisface un "teorema de Löwenheim-Skolem descendente hasta λ" y es categórica en algún cardinal $\geq \mu_\lambda$, entonces es categórica en todo cardinal mayor que μ_λ.

La conjetura de Shelah clásica

Problema test clave en teoría de modelos de las últimas dos o tres décadas: encontrar versiones del Teorema de Morley y el Teorema de Shelah de Transferencia de categoricidad para contextos más amplios: clases elementales abstractas (extensiones semánticas de teoría de modelos de $L_{\lambda^+,\omega}(Q)$).

Conjetura (Shelah)

Dado λ, existe μ_λ tal que si ψ es una sentencia de $L_{\omega_1,\omega}$ que satisface un "teorema de Löwenheim-Skolem descendente hasta λ" y es categórica en algún cardinal $\geq \mu_\lambda$, entonces es categórica en todo cardinal mayor que μ_λ.

Clases Elementales Abstractas

Fijamos un lenguaje de primer orden τ.
Sea $\mathcal{K}$ una clase de τ-estructuras, $\prec = \prec_{\mathcal{K}}$ una relación binaria en $\mathcal{K}$.

Definición

$(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ *es una clase elemental abstracta si*

- $\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}}$ *son* **cerradas bajo isomorfismo**,
- $M, N \in \mathcal{K}, M \prec_{\mathcal{K}} N \Rightarrow M \subset N$,
- $\prec_{\mathcal{K}}$ *es un orden parcial,*
- **(TV)** $M \subset N \prec_{\mathcal{K}} \bar{N}, M \prec_{\mathcal{K}} \bar{N} \Rightarrow M \prec_{\mathcal{K}} N$, *y...*
- **($\searrow$LS)** $\exists \kappa = LS(\mathcal{K}) \geq \aleph_0$ *tq* $\forall M \in \mathcal{K}, \forall A \subset |M|, \exists N \prec_{\mathcal{K}} M$ *con* $A \subset |N|$ *y* $\|N\| \leq |A| + LS(\mathcal{K})$,
- **(Uniones de $\prec_{\mathcal{K}}$-cadenas)** *Una unión de una $\prec_{\mathcal{K}}$-cadena en $\mathcal{K}$ pertenece a $\mathcal{K}$, es una $\prec_{\mathcal{K}}$-extensión de todos los modelos en la cadena y es el* sup *de la cadena.*

Ejemplos de CLEAs

Ejemplo

- $(Mod(T), \prec)$, T *PO*,
- $(\text{Espacios Normados}, \prec^{isom})$, *espacios de Banach (con inmersiones isométricas)* no *son CLEAs.*
- $(Mod(\psi), \prec_{\mathfrak{F}})$, $\psi \in \mathfrak{F}$ *un fragmento de* $L_{\omega_1\omega}$,
- $(Mod^{atom}(T), \prec)$, T *PO*,
- $(\text{Grupos loc. fin.}, \prec)$,
- $(\mathcal{K}_l, \prec_l)$, K_l *anillos noetherianos locales con ideales maximales principales*,
- $(\mathcal{K}_{exp}, \prec_{\mathcal{K}_{exp}})$, *la clase de Zilber (2001).*

El teorema de presentación

Teorema

Toda CLEA es PCΓ.

Más precisamente,

Teorema

Si $\mathcal{K}$ *es una CLEA en* τ, *y* $|\tau| \leq LS(\mathcal{K})$,
<u>*entonces*</u> *existen un* $\tau' \supset \tau$, *una* τ'*-teoría de primer orden* T' *y un conjunto* Γ *de* τ'*-tipos, con* $|\Gamma| = 2^{LS(\mathcal{K})}$ *tal que*

$$\mathcal{K} = \{M' \upharpoonright L \mid M' \models T' \text{ y } M' \text{ omite } \Gamma\}.$$

Ventajas de $PC\Gamma$

Varias construcciones que a priori no parecerían funcionar con nuestra definición original de CLEAs ahora es posible:

- Modelos de Ehrenfeucht-Mostowski (técnicas de indiscernibles)
- Omisión de tipos (à la Morley)
- Construcción de extensiones no-rompientes
- $\ldots$

Pero hay clases $PC\Gamma$ que no son CLEAs (Silver).

AP - Amalgamación

$$\begin{tikzcd} & M_3 ? & \\ M_1 \arrow[ur] & & M_2 \arrow[ul] \\ & M_0 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

AP - Amalgamación

$$\begin{tikzcd} & ? & \\ M_1 \arrow[ur] & & M_2 \arrow[ul] \\ & M_0 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

AP - Amalgamación

$$
\begin{tikzcd}
 & M_3\,? & \\
M_1 \arrow[ur] & & M_2 \arrow[ul] \\
 & M_0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

AP

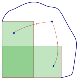
Definition (λ-AP)

Una CLEA $\mathcal{K}$ tiene la λ-AP si para todo $M_0, M_1, M_2 \in \mathcal{K}$ de cardinal λ, con $M_0 \prec_{\mathcal{K}} M_1, M_0 \prec_{\mathcal{K}} M_2$,
existen $M_3 \in \mathcal{K}_\lambda$ y $\mathcal{K}$-inmersiones $f_1 : M_1 \to M_3, f_2 : M_2 \to M_3$ tales que $f_1 \restriction M_0 = f_2 \restriction M_0$.

Definition (AP)

Una CLEA $\mathcal{K}$ tiene la AP si tiene la λ-AP para todo λ.

Nota: amalgamación sobre subconjuntos arbitrarios es mucho más exigente.



AP

Definition (λ-AP)

Una CLEA $\mathcal{K}$ tiene la λ-AP si para todo $M_0, M_1, M_2 \in \mathcal{K}$ de cardinal λ, con $M_0 \prec_{\mathcal{K}} M_1, M_0 \prec_{\mathcal{K}} M_2$,
existen $M_3 \in \mathcal{K}_\lambda$ y $\mathcal{K}$-inmersiones $f_1 : M_1 \to M_3, f_2 : M_2 \to M_3$ tales que $f_1 \restriction M_0 = f_2 \restriction M_0$.

Definition (AP)

Una CLEA $\mathcal{K}$ tiene la AP si tiene la λ-AP para todo λ.

Nota: amalgamación sobre subconjuntos arbitrarios es mucho más exigente.

AP como compacidad débil - Ejemplos

La propiedad de amalgamación es un substituto débil de la compacidad. Junto con la JEP (Joint Embedding Property) permiten obtener resultados más fácilmente que en el caso general.

Example

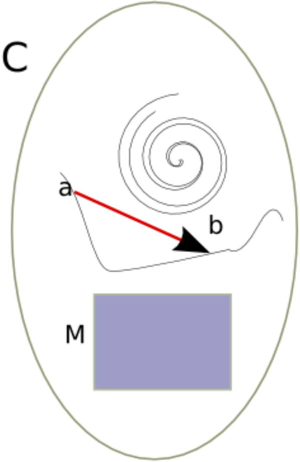
1. Sea T una teoría de PO. La clase $Mod(T)$ con $\prec_{\mathcal{K}}$ entendido como $\prec$ tiene la AP (por el teorema de consistencia de Robinson).
2. Sea T una $\forall\exists$-teoría. La clase de modelos e.c. de T con $\prec_{\mathcal{K}}$ entendida como "submodelo" tiene la AP ssi T es una teoría de Robinson.
3. Las construcciones de Hrushovski producen CLEAs con modelos arbitrariamente grandes y AP.

Más ejemplos

1. El conjunto de los modelos de una teoría de PO T que omitan cierto conjunto fijo de tipo Γ, con $\prec_{\mathcal{K}}$ entendida como $\prec$ puede no tener AP. Cuando tiene AP, tiene modelos homogéneos arbitrariamente grandes (equivalentemente, amalgamación sobre conjuntos). Esta es la teoría de modelos homogénea - Shelah, Lessmann, Hyttinen, Buechler.
2. Dada una $L_{\omega_1\omega}$-sentencia ψ, la clase $Mod(\psi)$, con L_A-submodelo elemental es una CLEA, que puede no satisfacer AP. Si $\mathcal{K}$ es homogénea o excelente, tiene AP.
3. La clase $(\mathcal{K}_{exp}, \prec_{\mathcal{K}_{exp}})$, (clase de Zilber de 2001) es el mejor análisis modelo-teórico de $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, ex)$. Satisface AP. La teoría de modelos enfatiza el rol de una conjetura clásica sobre exponenciales - la conjetura de Schanuel.

Tipos de Galois

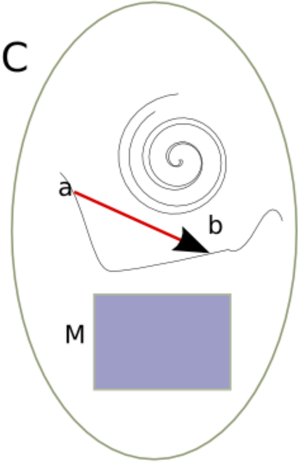
La noción correcta de tipo en una CLEA (con las propiedades de amalgamación AP, propiedad de encajes conjuntos JEP y sin modelos maximales NMM):



1. Primero se construye un modelo "monstruo" (universal y modelo-homogéneo) $\mathbb{C}$ en la clase - el análogo del modelo universal de A. Weil en geometría algebraica.
2. Definimos $ga - tp(a/M) = ga - tp(b/M)$ si y solo si existe $f \in Aut(\mathbb{C}/M)$ tq $f(a) = b$.
3. Por lo tanto, los tipos de Galois sobre M (bajo las tres hipótesis AP, JEP y NMM) son las órbitas bajo la acción del grupo $Aut_M(\mathbb{C})$, los automorfismos del monstruo que fijan puntualmente M.

Tipos de Galois

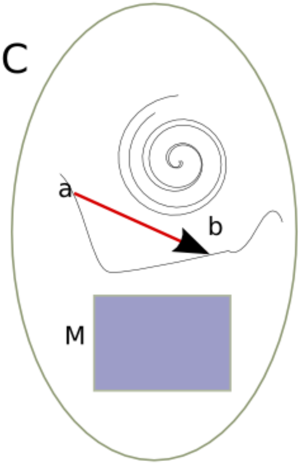
La noción correcta de tipo en una CLEA (con las propiedades de amalgamación AP, propiedad de encajes conjuntos JEP y sin modelos maximales NMM):



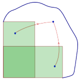
1. Primero se construye un modelo "monstruo" (universal y modelo-homogéneo) $\mathbb{C}$ en la clase - el análogo del modelo universal de A. Weil en geometría algebraica.
2. Definimos $ga - tp(a/M) = ga - tp(b/M)$ si y solo si existe $f \in Aut(\mathbb{C}/M)$ tq $f(a) = b$.
3. Por lo tanto, los tipos de Galois sobre M (bajo las tres hipótesis AP, JEP y NMM) son las órbitas bajo la acción del grupo $Aut_M(\mathbb{C})$, los automorfismos del monstruo que fijan puntualmente M.

Tipos de Galois

La noción correcta de tipo en una CLEA (con las propiedades de amalgamación AP, propiedad de encajes conjuntos JEP y sin modelos maximales NMM):



1. Primero se construye un modelo "monstruo" (universal y modelo-homogéneo) $\mathbb{C}$ en la clase - el análogo del modelo universal de A. Weil en geometría algebraica.
2. Definimos $ga-tp(a/M) = ga-tp(b/M)$ si y solo si existe $f \in Aut(\mathbb{C}/M)$ tq $f(a) = b$.
3. Por lo tanto, los tipos de Galois sobre M (bajo las tres hipótesis AP, JEP y NMM) son las órbitas bajo la acción del grupo $Aut_M(\mathbb{C})$, los automorfismos del monstruo que fijan puntualmente M.



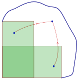
Localizar, recortar, pegar: (1) docilidad

Definición

Una CLEA $\mathcal{K}$ es (κ, λ)-dócil si
$\forall M \in \mathcal{K}_\lambda \forall p \neq q \in S^I(M) \exists N \in \mathcal{K}_\kappa$ *tal que* $N \prec M$ *y* $p \upharpoonright N \neq q \upharpoonright N$.

La definición admite variantes obvias: una clase $\mathcal{K}$ también puede ser

- $(< \kappa, \lambda)$-dócil
- $(< \kappa, \lambda)$-dócil para n-tipos
- $(< \kappa, \lambda)$-dócil para I-tipos
- plenamente $< \kappa$-dócil (i.e. $(< \kappa, \lambda)$-dócil $\forall \lambda \geq \kappa$, $\forall I$, etc.



Localizar, recortar, pegar: (2) tipo-cortitud

Definición

Una CLEA $\mathcal{K}$ es (κ, λ)-tipo corta para modelos de tamaño μ si $\forall M \in \mathcal{K}_\mu \forall p \neq q \in S^\lambda(M) \exists I \subset \lambda$ de tamaño κ tal que $p^I \neq q^I$.

Al igual que antes, la definición admite variantes obvias: una clase $\mathcal{K}$ también puede ser

- $(< \kappa, \lambda)$-tipo corta para modelos de tamaño μ,
- $< \kappa$-tipo corta para modelos de tamaño μ ($(< \kappa, \lambda)$-tipo corta para modelos de tamaño μ, $\forall \lambda \geq \kappa$,
- plenamente $< \kappa$-tipo corta (i.e. $(< \kappa, \lambda)$-dócil $\forall \lambda \geq \kappa$, $\forall \mu$, etc.

Coherencia y exactitud - algo de historia

La propiedad de docilidad (tameness) fue aislada por Grossberg y VanDieren hacia 2002 como parte de su prueba de transferencia de categoricidad a partir de un cardinal sucesor. Había sido usada por Shelah como paso importante en una prueba de transferencia de categoricidad “hacia abajo” - sin embargo, en el artículo de Shelah aparece oculta la noción en medio de construcciones y demostraciones complicadas [Sh394].

Coherencia y exactitud - algo de historia

La noción dual de tipo cortitud fue aislada por Boney en su artículo Tameness from Large Cardinals en 2013. La combinación de las dos nociones resulta mucho más poderosa que cada una de las nociones de manera aislada.
Zalamea observa que la combinación es análoga al paso de prehaz a haz (coherencia y exactitud): una de las construcciones fundamentales de toda la geometría algebraica de los últimos 50 años:

$$\frac{\text{Haces}}{\text{Prehaces}} = \frac{\text{CLEAs dóciles y tipo cortas}}{\text{CLEAs}}$$

Coherencia y exactitud - algo de historia

La noción dual de tipo cortitud fue aislada por Boney en su artículo Tameness from Large Cardinals en 2013. La combinación de las dos nociones resulta mucho más poderosa que cada una de las nociones de manera aislada.
Zalamea observa que la combinación es análoga al paso de prehaz a haz (coherencia y exactitud): una de las construcciones fundamentales de toda la geometría algebraica de los últimos 50 años:

$$\frac{\text{Haces}}{\text{Prehaces}} = \frac{\text{CLEAs dóciles y tipo cortas}}{\text{CLEAs}}$$

Docilidad y tipo cortitud: conexiones sencillas

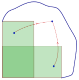
Hay conexiones entre docilidad y tipo cortitud que van más allá de la dualidad obvia:

Proposición (Dualidad bajo categoricidad)

Sea $\mathcal{K}$ una clea (con NMM, AP, JEP) que sea λ-categórica y $(<\kappa,\lambda)$-dócil para tipos de longitud μ. Entonces $\mathcal{K}$ es $(<\kappa,\lambda)$-tipo corta para tipos sobre modelos de tamaño μ.

<u>Demostración:</u>

- Sean $N \in \mathcal{K}$ un modelo de tamaño μ, y $p = gatp(M_1/N) \neq gatp(M_2/N) = q$, donde $|M_1| = |M_2| = \lambda$. Hay que encontrar $I \subset \lambda$ tal que $p^I \neq q^I$.
- Como $\mathcal{K}$ es λ-categórica, existe $f \colon M_1 \xrightarrow{\approx} M_2$ un isomorfismo. Spdg, $f \in Aut(\mathbb{C})$.



Docilidad y tipo cortitud: conexiones sencillas

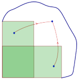
Hay conexiones entre docilidad y tipo cortitud que van más allá de la dualidad obvia:

Proposición (Dualidad bajo categoricidad)

Sea $\mathcal{K}$ una clea (con NMM, AP, JEP) que sea λ-categórica y $(<\kappa,\lambda)$-dócil para tipos de longitud μ. Entonces $\mathcal{K}$ es $(<\kappa,\lambda)$-tipo corta para tipos sobre modelos de tamaño μ.

<u>Demostración:</u>

- Sean $N \in \mathcal{K}$ un modelo de tamaño μ, y $p = gatp(M_1/N) \neq gatp(M_2/N) = q$, donde $|M_1| = |M_2| = \lambda$. Hay que encontrar $I \subset \lambda$ tal que $p^I \neq q^I$.
- Como $\mathcal{K}$ es λ-categórica, existe $f\colon M_1 \xrightarrow{\approx} M_2$ un isomorfismo. Spdg, $f \in Aut(\mathbb{C})$.



Docilidad y tipo cortitud: conexiones sencillas

Hay conexiones entre docilidad y tipo cortitud que van más allá de la dualidad obvia:

Proposición (Dualidad bajo categoricidad)

Sea $\mathcal{K}$ una clea (con NMM, AP, JEP) que sea λ-categórica y $(<\kappa,\lambda)$-dócil para tipos de longitud μ. Entonces $\mathcal{K}$ es $(<\kappa,\lambda)$-tipo corta para tipos sobre modelos de tamaño μ.

Demostración:

- Sean $N \in \mathcal{K}$ un modelo de tamaño μ, y $p = gatp(M_1/N) \neq gatp(M_2/N) = q$, donde $|M_1| = |M_2| = \lambda$. Hay que encontrar $I \subset \lambda$ tal que $p^I \neq q^I$.
- Como $\mathcal{K}$ es λ-categórica, existe $f : M_1 \xleftrightarrow{\approx} M_2$ un isomorfismo. Spdg, $f \in Aut(\mathbb{C})$.

Docilidad y tipo cortitud: conexiones sencillas

Proposición (Dualidad bajo categoricidad)

Sea $\mathcal{K}$ una clea (con NMM, AP, JEP) que sea λ-categórica y $(<\kappa,\lambda)$-dócil para tipos de longitud μ. Entonces $\mathcal{K}$ es $(<\kappa,\lambda)$-tipo corta para tipos sobre modelos de tamaño μ.

Observe que $gatp(f(N)/M_2) \neq gatp(N/M_2)$: si fueran iguales, tendríamos $h \in Aut(\mathbb{C}/M_2)$ tal que $h(f(N)) = N$. Pero entonces $h \circ f \in Aut(\mathbb{C}/N)$, y $(h \circ f)(M_1) = h(f(M_1)) = h(M_2) = M_2$ atestiguaría que $gatp(M_1/N) = gatp(M_2/N)$ - imposible por la hipótesis.

Aplicamos ahora la $(<\kappa,\lambda)$-docilidad: como $gatp(f(N)/M_2) \neq gatp(N/M_2)$ debe existir $M_0 \prec M_2$ con $|M_0| < \kappa$ tal que $gatp(f(N)/M_0) \neq gatp(N/M_0)$.

De nuevo como antes tenemos que $gatp(f^{-1}(M_0)/N) \neq gatp(M_0/N)$: si fueran iguales, digamos mediante $g \in Aut(\mathbb{C}/N)$ tal que $g(f^{-1}(M_0)) = M_0$ - así, $g \circ f^{-1} \in Aut(\mathbb{C}/M_0)$ y como $g \circ f^{-1}(f(N)) = g(N) = N$, $gatp(f(N)/M_0) = gatp(N/M_0)$, contradicción de nuevo. Con todo esto, como $M_0 \subset M_2$, $f^{-1}(M_0) \subset M_1$ (índices I). Pero esto muestra que $p^I \neq q^I$. $\square$

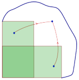
Docilidad y tipo cortitud: conexiones sencillas

Proposición (Dualidad bajo categoricidad)

Sea $\mathcal{K}$ una clea (con NMM, AP, JEP) que sea λ-categórica y $(<\kappa,\lambda)$-dócil para tipos de longitud μ. Entonces $\mathcal{K}$ es $(<\kappa,\lambda)$-tipo corta para tipos sobre modelos de tamaño μ.

Observe que $gatp(f(N)/M_2) \neq gatp(N/M_2)$: si fueran iguales, tendríamos $h \in Aut(\mathbb{C}/M_2)$ tal que $h(f(N)) = N$. Pero entonces $h \circ f \in Aut(\mathbb{C}/N)$, y $(h \circ f)(M_1) = h(f(M_1)) = h(M_2) = M_2$ atestiguaría que $gatp(M_1/N) = gatp(M_2/N)$ - imposible por la hipótesis.
Aplicamos ahora la $(<\kappa,\lambda)$-docilidad: como $gatp(f(N)/M_2) \neq gatp(N/M_2)$ debe existir $M_0 \prec M_2$ con $|M_0| < \kappa$ tal que $gatp(f(N)/M_0) \neq gatp(N/M_0)$.

De nuevo como antes tenemos que $gatp(f^{-1}(M_0)/N) \neq gatp(M_0/N)$: si fueran iguales, digamos mediante $g \in Aut(\mathbb{C}/N)$ tal que $g(f^{-1}(M_0)) = M_0$ - así, $g \circ f^{-1} \in Aut(\mathbb{C}/M_0)$ y como $g \circ f^{-1}(f(N)) = g(N) = N$, $gatp(f(N)/M_0) = gatp(N/M_0)$, contradicción de nuevo. Con todo esto, como $M_0 \subset M_2$, $f^{-1}(M_0) \subset M_1$ (índices I). Pero esto muestra que $p^I \neq q^I$. $\square$



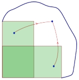
Docilidad y tipo cortitud: conexiones sencillas

Proposición (Dualidad bajo categoricidad)

Sea $\mathcal{K}$ una clea (con NMM, AP, JEP) que sea λ-categórica y $(<\kappa,\lambda)$-dócil para tipos de longitud μ. Entonces $\mathcal{K}$ es $(<\kappa,\lambda)$-tipo corta para tipos sobre modelos de tamaño μ.

Observe que $gatp(f(N)/M_2) \neq gatp(N/M_2)$: si fueran iguales, tendríamos $h \in Aut(\mathbb{C}/M_2)$ tal que $h(f(N)) = N$. Pero entonces $h \circ f \in Aut(\mathbb{C}/N)$, y $(h \circ f)(M_1) = h(f(M_1)) = h(M_2) = M_2$ atestiguaría que $gatp(M_1/N) = gatp(M_2/N)$ - imposible por la hipótesis.
Aplicamos ahora la $(<\kappa,\lambda)$-docilidad: como $gatp(f(N)/M_2) \neq gatp(N/M_2)$ debe existir $M_0 \prec M_2$ con $|M_0| < \kappa$ tal que $gatp(f(N)/M_0) \neq gatp(N/M_0)$.

De nuevo como antes tenemos que $gatp(f^{-1}(M_0)/N) \neq gatp(M_0/N)$: si fueran iguales, digamos mediante $g \in Aut(\mathbb{C}/N)$ tal que $g(f^{-1}(M_0)) = M_0$ - así, $g \circ f^{-1} \in Aut(\mathbb{C}/M_0)$ y como $g \circ f^{-1}(f(N)) = g(N) = N$, $gatp(f(N)/M_0) = gatp(N/M_0)$, contradicción de nuevo. Con todo esto, como $M_0 \subset M_2$, $f^{-1}(M_0) \subset M_1$ (índices I). Pero esto muestra que $p^I \neq q^I$. $\square$



Más dualidad

De tipo cortitud nos podemos devolver también a docilidad, como lo muestra este teorema:

Teorema

Si $\mathcal{K}$ es $(<\kappa, \lambda)$-tipo corta sobre el conjunto vacío, entonces es $(<\kappa, \lambda)$-dócil para tipos de longitud $\leq \lambda$.

La demostración es casi inmediata: si $gatp(a/M) \neq gatp(b/M)$ con $M \in \mathcal{K}_\lambda$ y $\ell(a) = \ell(b) \leq \lambda$, entonces $gatp(aM/\emptyset) \neq gatp(bM/\emptyset)$. Por tipo cortitud, existen $a' \subset a$, $b' \subset b$, $X_0 \subset M$ todos de cardinal $< \kappa$ tales que $gatp(a'X_0/\emptyset) \neq gatp(b'X_0/\emptyset)$. Sea entonces $M_0 \prec M$ con $X_0 \subset M_0$ y $|M_0| < \kappa$. Entonces como $gatp(a'X_0) \neq gatp(b'X_0)$, se debe tener $gatp(aM_0) \neq gatp(bM_0)$, con lo cual $gatp(a/M_0) \neq gatp(b/M_0)$. $\square$

Intentos anteriores

Reformulamos entonces la conjetura original:

Conjetura (Shelah)

Dado λ, existe μ_λ tal que si K es una CLEA con $LS(K) = \lambda$ categórica en un cardinal $\geq \mu_\lambda$, entonces es categórica en todo cardinal mayor que μ_λ.

Recuerde que la conjetura es el problema-test más crucial en CLEAs: encontrar versiones del Teorema de Morley y el Teorema de Shelah de Transferencia de categoricidad para CLEAs (y cubrir muchos casos como $L_{\omega_1,\omega}$, $L_{\kappa^+,\omega}$, etc.)

Intentos anteriores

Reformulamos entonces la conjetura original:

Conjetura (Shelah)

Dado λ, existe μ_λ tal que si K es una CLEA con $LS(K) = \lambda$ categórica en un cardinal $\geq \mu_\lambda$, entonces es categórica en todo cardinal mayor que μ_λ.

Recuerde que la conjetura es el problema-test más crucial en CLEAs: encontrar versiones del Teorema de Morley y el Teorema de Shelah de Transferencia de categoricidad para CLEAs (y cubrir muchos casos como $L_{\omega_1,\omega}$, $L_{\kappa^+,\omega}$, etc.)

Estado de la conjetura a 2013

- Abierto para fragmentos contables de $L_{\omega_1,\omega}$. Conjetura: $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$.
- Avances parciales (Shelah, Jarden, etc.). "Marcos buenos". wGCH usada en muchos lugares.
- Kolman-Shelah (1995): categoricidad descendente bajo un medible.
- Makkai-Shelah (1990): vale la Conjetura para $L_{\kappa,\omega}$ con κ fuertemente compacto.

Estado de la conjetura a 2013

- Abierto para fragmentos contables de $L_{\omega_1,\omega}$. Conjetura: $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$.
- Avances parciales (Shelah, Jarden, etc.). "Marcos buenos". wGCH usada en muchos lugares.
- Kolman-Shelah (1995): categoricidad descendente bajo un medible.
- Makkai-Shelah (1990): vale la Conjetura para $L_{\kappa,\omega}$ con κ fuertemente compacto.

Estado de la conjetura a 2013

- Abierto para fragmentos contables de $L_{\omega_1,\omega}$. Conjetura: $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$.
- Avances parciales (Shelah, Jarden, etc.). "Marcos buenos". wGCH usada en muchos lugares.
- Kolman-Shelah (1995): categoricidad descendente bajo un medible.
- Makkai-Shelah (1990): vale la Conjetura para $L_{\kappa,\omega}$ con κ fuertemente compacto.

Estado de la conjetura a 2013

- Abierto para fragmentos contables de $L_{\omega_1,\omega}$. Conjetura: $\mu_{\aleph_0} = \beth_{\omega_1}$.
- Avances parciales (Shelah, Jarden, etc.). "Marcos buenos". wGCH usada en muchos lugares.
- Kolman-Shelah (1995): categoricidad descendente bajo un medible.
- Makkai-Shelah (1990): vale la Conjetura para $L_{\kappa,\omega}$ con κ fuertemente compacto.

Grossberg y VanDieren: docilidad

Rami Grossberg y Monica VanDieren aíslan en 2001 (BOMMT - artículos aparecen en 2006) la noción de docilidad (tameness) y demuestran su versión de la conjetura para sucesores:

Theorem (Grossberg-VanDieren)

Sea K una CLEA con amalgamación, joint embeddings, sin modelos maximales. Si K es χ-dócil y λ^+-categórica para algún $\lambda \geq LS(K)^+ + \chi$, entonces K es μ-categórica para todo $\mu \geq \lambda$.

La propiedad de docilidad ya tenía una versión débil en [Sh394]: había una propiedad similar para tipos sobre modelos Galois-saturados, y se desprendía de categoricidad en un sucesor mayor que $\beth_{(2^{\beth_{(2^{LS(\mathcal{K})})^+}})^+}$.

Modelos límites: Shelah, Baldwin, Hyttinen, Zambrano, V.

Otra línea divisoria aparece con el estudio de existencia y unicidad de modelos límites ([ShVi 635], [GVV]). Superestabilidad. Frames. Crucial en estabilidad.

Primer teorema de Boney

Teorema (Boney - 2013)

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ fuertemente compacto, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Entonces los tipos están determinados al restringir sus dominios a modelos de tamaño $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ y sus longitudes a conjuntos de tamaño $< \kappa$.

Corolario

Si κ es fuertemente compacto y $\mathcal{K}$ está esencialmente bajo κ y tiene modelo monstruo, entonces $\mathcal{K}$ es plenamente $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$-dócil y plenamente $< \kappa$-tipo corta.

Segundo teorema de Boney

Teorema (Boney - 2013)

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ medible, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Suponga que $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ e $I = \bigcup_{\alpha<\kappa} I_\alpha$ y $p \neq q \in S^I(M)$. Entonces existe algún $\alpha_0 < \kappa$ tal que $p^{I_{\alpha_0}} \restriction M_{\alpha_0} \neq p^{I_{\alpha_0}} \restriction M_{\alpha_0}$.

Corolario

Si κ es medible y $\mathcal{K}$ está esencialmente bajo κ, entonces $\mathcal{K}$ es plenamente $(<\kappa, \kappa)$-dócil y plenamente $(<\lambda, \lambda)$-tipo corta para todo $\lambda > LS(\mathcal{K})$ tal que $cf(\lambda) = \kappa$.

Ultrafiltros, encajes y universo saturado

Definición

Un cardinal no numerable κ es fuertemente compacto medible

- *ssi todo filtro κ-completo se puede extender a un ultrafiltro κ-completo*
- *ssi las lógicas $L_{\kappa,\omega}$ y $L_{\kappa,\kappa}$ satisfacen el teorema de compacidad*
- *ssi $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \to M$ encaje elemental con punto crítico κ tal que $j(\kappa) > \lambda$ y para algún $Y \in M$ de tamaño λ se tiene $j"\lambda \subset Y$*
- *ssi para todo $\lambda \geq \kappa$ existe un ultrafiltro U fino y κ-completo sobre $P_\kappa\lambda$ (esto es, un ultrafiltro κ-completo tal que para todo $\alpha < \kappa$ se tiene $[\alpha] = \{X \in P_\kappa\lambda \mid \alpha \in X\} \in U$.*
- *ssi $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \to M$ encaje elemental con punto crítico κ tal que $j(\kappa) > \lambda$*
- *ssi existe un ultrafiltro U κ-completo sobre κ*

Ultrafiltros, encajes y universo saturado

Definición

Un cardinal no numerable κ es *fuertemente compacto* *medible*

- *ssi todo filtro κ-completo se puede extender a un ultrafiltro κ-completo*
- *ssi las lógicas $L_{\kappa,\omega}$ y $L_{\kappa,\kappa}$ satisfacen el teorema de compacidad*
- *ssi $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \to M$ encaje elemental con punto crítico κ tal que $j(\kappa) > \lambda$ y para algún $Y \in M$ de tamaño λ se tiene $j''\lambda \subset Y$*
- *ssi para todo $\lambda \geq \kappa$ existe un ultrafiltro U fino y κ-completo sobre $P_\kappa\lambda$ (esto es, un ultrafiltro κ-completo tal que para todo $\alpha < \kappa$ se tiene $[\alpha] = \{X \in P_\kappa\lambda \mid \alpha \in X\} \in U$.*
- *ssi $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \to M$ encaje elemental con punto crítico κ tal que $j(\kappa) > \lambda$*
- *ssi existe un ultrafiltro U κ-completo sobre κ*

Ultrafiltros, encajes y universo saturado

Definición

Un cardinal no numerable κ es <u>fuertemente compacto</u> <u>medible</u>

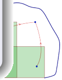
- *ssi todo filtro κ-completo se puede extender a un ultrafiltro κ-completo*
- *ssi las lógicas $L_{\kappa,\omega}$ y $L_{\kappa,\kappa}$ satisfacen el teorema de compacidad*
- *ssi $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \longrightarrow M$ encaje elemental con punto crítico κ tal que $j(\kappa) > \lambda$ y para algún $Y \in M$ de tamaño λ se tiene $j''\lambda \subset Y$*
- *ssi para todo $\lambda \geq \kappa$ existe un ultrafiltro U fino y κ-completo sobre $P_\kappa\lambda$ (esto es, un ultrafiltro κ-completo tal que para todo $\alpha < \kappa$ se tiene $[\alpha] = \{X \in P_\kappa\lambda \mid \alpha \in X\} \in U$.*
- *ssi $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \longrightarrow M$ encaje elemental con punto crítico κ tal que $j(\kappa) > \lambda$*
- *ssi existe un ultrafiltro U κ-completo sobre κ*

Ultrafiltros, encajes y universo saturado

Definición

Un cardinal no numerable κ *es* *fuertemente compacto* *medible*

- *ssi todo filtro* κ*-completo se puede extender a un ultrafiltro* κ*-completo*
- *ssi las lógicas* $L_{\kappa,\omega}$ *y* $L_{\kappa,\kappa}$ *satisfacen el teorema de compacidad*
- *ssi* $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \longrightarrow M$ *encaje elemental con punto crítico* κ *tal que* $j(\kappa) > \lambda$ *y para algún* $Y \in M$ *de tamaño* λ *se tiene* $j''\lambda \subset Y$
- *ssi para todo* $\lambda \geq \kappa$ *existe un ultrafiltro* U *fino y* κ*-completo sobre* $P_\kappa\lambda$ *(esto es, un ultrafiltro* κ*-completo tal que para todo* $\alpha < \kappa$ *se tiene* $[\alpha] = \{X \in P_\kappa\lambda \mid \alpha \in X\} \in U$.
- *ssi* $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \longrightarrow M$ *encaje elemental con punto crítico* κ *tal que* $j(\kappa) > \lambda$
- *ssi existe un ultrafiltro* U κ*-completo sobre* κ



Ultrafiltros, encajes y universo saturado

Definición

Un cardinal no numerable κ *es fuertemente compacto medible*

- *ssi todo filtro* κ*-completo se puede extender a un ultrafiltro* κ*-completo*
- *ssi las lógicas* $L_{\kappa,\omega}$ *y* $L_{\kappa,\kappa}$ *satisfacen el teorema de compacidad*
- *ssi* $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \longrightarrow M$ *encaje elemental con punto crítico* κ *tal que* $j(\kappa) > \lambda$ *y para algún* $Y \in M$ *de tamaño* λ *se tiene* $j"\lambda \subset Y$
- *ssi para todo* $\lambda \geq \kappa$ *existe un ultrafiltro* U *fino y* κ*-completo sobre* $P_\kappa\lambda$ *(esto es, un ultrafiltro* κ*-completo tal que para todo* $\alpha < \kappa$ *se tiene* $[\alpha] = \{X \in P_\kappa\lambda \mid \alpha \in X\} \in U$*.*
- *ssi* $\forall\lambda \geq \kappa, \exists j : V \longrightarrow M$ *encaje elemental con punto crítico* κ *tal que* $j(\kappa) > \lambda$
- *ssi existe un ultrafiltro* U κ*-completo sobre* κ

Más grandes cardinales - versiones de bolsillo

Débilmente compactos < Desdoblables < Fuertemente Desdoblables

...

Medibles < Fuertemente Compactos < Fuertes $\leq$ Supercompactos

Teorema de Łoś, teoremas "de Łoś"

Teorema (Łoś, primer orden)

Sean U ultrafiltro sobre I, L lenguaje, y sean $\langle M_i \rangle_{i \in I}$ L-estructuras. Entonces para cada $[f_1]_U, \cdots, [f_n]_U \in \prod M_i/U$ y $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in L$,

$$\prod M_i/U \models \varphi([f_1]_U, \cdots, [f_n]_U) \quad \textit{ssi}$$

$$\{i \in I \mid M_i \models \varphi(f_1(i), \cdots, f_n(i))\} \in U.$$

Teorema de Łoś, teoremas "de Łoś"

Teorema ("Łoś para CLEAs" - Kolman-Shelah-Boney)

Sean U ultrafiltro sobre I. Si $\mathcal{K}$ una clea de modelos de una $L_{\kappa,\omega}$-teoría, L-estructuras. Entonces

- $\langle M_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$ *implica que* $\prod M_i/U \in \mathcal{K}$,
- $\langle M_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$, $\langle N_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$ *y* $M_i \prec N_i$ *para todo* i *implica que* $\prod M_i/U \prec \prod N_i/U$.
- $\langle M_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$, $\langle N_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$ *y* $h_i : M_i \cong N_i$ *para todo* i, *entonces* $\prod h_i : \prod M_i/U \cong \prod N_i/U$, *con* $\prod h_i$ *envía* $[i \mapsto f(i)]_U$ *a* $[i \mapsto h_i(f(i))]_U$.

Note: hay ejemplos sencillos de CLEAs que no son cerradas bajo ultraproductos: sea $L = \{<, c_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, y sea $\psi \in L_{\kappa^+,\omega}$ la sentencia que dice que "$<$ es orden lineal sin mínimo y $\forall x(\bigvee_{\alpha<\kappa} x < c_\alpha)$". La clase $\mathcal{K} = (Mod(\psi), \prec_{\mathcal{F}})$ es clea, $LS(\mathcal{K}) = \kappa$ y no es cerrada bajo ultraproductos κ-completos no principales.

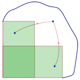
Teorema de Łoś, teoremas "de Łoś"

Teorema ("Łoś para CLEAs" - Kolman-Shelah-Boney)

Sean U ultrafiltro sobre I. Si $\mathcal{K}$ una clea de modelos de una $L_{\kappa,\omega}$-teoría, L-estructuras. Entonces

- $\langle M_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$ *implica que* $\prod M_i/U \in \mathcal{K}$,
- $\langle M_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$, $\langle N_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$ *y* $M_i \prec N_i$ *para todo* i *implica que* $\prod M_i/U \prec \prod N_i/U$.
- $\langle M_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$, $\langle N_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$ *y* $h_i : M_i \cong N_i$ *para todo* i, *entonces* $\prod h_i : \prod M_i/U \cong \prod N_i/U$, *con* $\prod h_i$ *envía* $[i \mapsto f(i)]_U$ *a* $[i \mapsto h_i(f(i))]_U$.

Note: hay ejemplos sencillos de CLEAs que no son cerradas bajo ultraproductos: sea $L = \{<, c_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, y sea $\psi \in L_{\kappa^+,\omega}$ la sentencia que dice que "$<$ es orden lineal sin mínimo y $\forall x(\bigvee_{\alpha<\kappa} x < c_\alpha)$". La clase $\mathcal{K} = (Mod(\psi), \prec_{\mathcal{F}})$ es clea, $LS(\mathcal{K}) = \kappa$ y no es cerrada bajo ultraproductos κ-completos no principales.



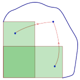
Pegar automorfismos usando f. compactos

Teorema

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ fuertemente compacto, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Entonces los tipos están determinados al restringir sus dominios a modelos de tamaño $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ y sus longitudes a conjuntos de tamaño $< \kappa$.

Demostración: (esquema)

- Sean $p, q \in S^I(M)$, tales que $\forall (I_o, M_o) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$, $p^{I_o} \upharpoonright M_o = q^{I_o} \upharpoonright M_o$. Hay que ver que $p = q$.
- Idea: tome $X = \langle x_i \mid i \in I \rangle \models p$, $Y = \langle y_i \mid i \in I \rangle \models q$. Sean, para cada (I_o, M_o), $f_{(I_o, M_o)} \in Aut(\mathbb{C}/M_o)$ tal que $f_{(I_o, M_o)}(x_i) = y_i$ para cada i.
- Tome U ultrafiltro fino κ-completo sobre $P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$: tal que $[(i, m)] = \{(I_o, M_o) \mid i \in I_o \wedge m \in M_o\} \in U$ para todo i, m.
- Tome el promedio $f \in Aut(\prod \mathbb{C}/U)$. $f[[(I_o, M_o) \mapsto g(I_o, M_o)]_U) = [(I_o, M_o) \mapsto f_{(I_o, M_o)}(g(I_o, M_o))]_U$.
- f fija $h(M)$, $f(h(x_i)) = y_i$ para todo $i \in I$.



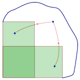
Pegar automorfismos usando f. compactos

Teorema

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ fuertemente compacto, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Entonces los tipos están determinados al restringir sus dominios a modelos de tamaño $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ y sus longitudes a conjuntos de tamaño $< \kappa$.

Demostración: (esquema)

- Sean $p, q \in S^I(M)$, tales que $\forall (I_0, M_0) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$, $p^{I_0} \upharpoonright M_0 = q^{I_0} \upharpoonright M_0$. Hay que ver que $p = q$.
- Idea: tome $X = \langle x_i \mid i \in I \rangle \models p$, $Y = \langle y_i \mid i \in I \rangle \models q$. Sean, para cada (I_0, M_0), $f_{(I_0, M_0)} \in Aut(\mathbb{C}/M_0)$ tal que $f_{(I_0,M_0)}(x_i) = y_i$ para cada i.
- Tome U ultrafiltro fino κ-completo sobre $P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$: tal que $[(i, m)] = \{(I_0, M_0) \mid i \in I_0 \wedge m \in M_0\} \in U$ para todo i, m.
- Tome el promedio $f \in Aut(\prod \mathbb{C}/U)$. $f([(I_0, M_0) \mapsto g(I_0, M_0)]_U) = [(I_0, M_0) \mapsto f_{(I_0,M_0)}(g(I_0, M_0))]_U$.
- f fija $h(M)$, $f(h(x_i)) = y_i$ para todo $i \in I$.



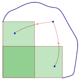
Pegar automorfismos usando f. compactos

Teorema

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ fuertemente compacto, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Entonces los tipos están determinados al restringir sus dominios a modelos de tamaño $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ y sus longitudes a conjuntos de tamaño $< \kappa$.

Demostración: (esquema)

- Sean $p, q \in S^I(M)$, tales que $\forall (I_o, M_o) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$, $p^{I_o} \upharpoonright M_o = q^{I_o} \upharpoonright M_o$. Hay que ver que $p = q$.
- Idea: tome $X = \langle x_i \mid i \in I \rangle \models p$, $Y = \langle y_i \mid i \in I \rangle \models q$. Sean, para cada (I_o, M_o), $f_{(I_o, M_o)} \in Aut(\mathbb{C}/M_o)$ tal que $f_{(I_o,M_o)}(x_i) = y_i$ para cada i.
- Tome U ultrafiltro fino κ-completo sobre $P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$: tal que $[(i, m)] = \{(I_o, M_o) \mid i \in I_o \wedge m \in M_o\} \in U$ para todo i, m.
- Tome el promedio $f \in Aut(\prod \mathbb{C}/U)$. $f([(I_o, M_o) \mapsto g(I_o, M_o)]_U) = [(I_o, M_o) \mapsto f_{(I_o,M_o)}(g(I_o, M_o))]_U$.
- f fija $h(M)$, $f(h(x_i)) = y_i$ para todo $i \in I$.



Pegar automorfismos usando f. compactos

Teorema

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ fuertemente compacto, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Entonces los tipos están determinados al restringir sus dominios a modelos de tamaño $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ y sus longitudes a conjuntos de tamaño $< \kappa$.

Demostración: (esquema)

- Sean $p, q \in S^I(M)$, tales que $\forall (I_o, M_o) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$, $p^{I_o} \upharpoonright M_o = q^{I_o} \upharpoonright M_o$. Hay que ver que $p = q$.
- Idea: tome $X = \langle x_i \mid i \in I \rangle \models p$, $Y = \langle y_i \mid i \in I \rangle \models q$. Sean, para cada (I_o, M_o), $f_{(I_o,M_o)} \in Aut(\mathbb{C}/M_o)$ tal que $f_{(I_o,M_o)}(x_i) = y_i$ para cada i.
- Tome U ultrafiltro fino κ-completo sobre $P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$: tal que $[(i, m)] = \{(I_o, M_o) \mid i \in I_o \wedge m \in M_o\} \in U$ para todo i, m.
- Tome el promedio $f \in Aut(\prod \mathbb{C}/U)$. $f([(I_o, M_o) \mapsto g(I_o, M_o)]_U) = [(I_o, M_o) \mapsto f_{(I_o,M_o)}(g(I_o, M_o))]_U$.
- f fija $h(M)$, $f(h(x_i)) = y_i$ para todo $i \in I$.

Pegar automorfismos usando f. compactos

Teorema

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ fuertemente compacto, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Entonces los tipos están determinados al restringir sus dominios a modelos de tamaño $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ y sus longitudes a conjuntos de tamaño $< \kappa$.

Demostración: (esquema)

- Sean $p, q \in S^I(M)$, tales que $\forall (I_0, M_0) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$, $p^{I_0} \restriction M_0 = q^{I_0} \restriction M_0$. Hay que ver que $p = q$.
- Idea: tome $X = \langle x_i \mid i \in I \rangle \models p$, $Y = \langle y_i \mid i \in I \rangle \models q$. Sean, para cada (I_0, M_0), $f_{(I_0, M_0)} \in Aut(\mathbb{C}/M_0)$ tal que $f_{(I_0, M_0)}(x_i) = y_i$ para cada i.
- Tome U ultrafiltro fino κ-completo sobre $P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$: tal que $[(i, m)] = \{(I_0, M_0) \mid i \in I_0 \wedge m \in M_0\} \in U$ para todo i, m.
- Tome el promedio $f \in Aut(\prod \mathbb{C}/U)$.
  $f([(I_0, M_0) \mapsto g(I_0, M_0)]_U) = [(I_0, M_0) \mapsto f_{(I_0, M_0)}(g(I_0, M_0))]_U$.
- f fija $h(M)$, $f(h(x_i)) = y_i$ para todo $i \in I$.

Pegar automorfismos usando f. compactos

Teorema

Sea $\mathcal{K}$ una CLEA esencialmente bajo κ, con κ fuertemente compacto, tal que $\mathcal{K}$ tiene un modelo monstruo. Entonces los tipos están determinados al restringir sus dominios a modelos de tamaño $< (\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ y sus longitudes a conjuntos de tamaño $< \kappa$.

Demostración: (esquema)

- Sean $p, q \in S^I(M)$, tales que $\forall (I_0, M_0) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$, $p^{I_0} \upharpoonright M_0 = q^{I_0} \upharpoonright M_0$. Hay que ver que $p = q$.
- Idea: tome $X = \langle x_i \mid i \in I \rangle \models p$, $Y = \langle y_i \mid i \in I \rangle \models q$. Sean, para cada (I_0, M_0), $f_{(I_0,M_0)} \in Aut(\mathbb{C}/M_0)$ tal que $f_{(I_0,M_0)}(x_i) = y_i$ para cada i.
- Tome U ultrafiltro fino κ-completo sobre $P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(\mathcal{K})} M$: tal que $[(i, m)] = \{(I_0, M_0) \mid i \in I_0 \wedge m \in M_0\} \in U$ para todo i, m.
- Tome el promedio $f \in Aut(\prod \mathbb{C}/U)$. $f([(I_0, M_0) \mapsto g(I_0, M_0)]_U) = [(I_0, M_0) \mapsto f_{(I_0,M_0)}(g(I_0, M_0))]_U$.
- f fija $h(M)$, $f(h(x_i)) = y_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[r, dashed, "f \circ h"] & \prod \mathcal{N}/U \\
M \arrow[u, "id"] \arrow[r, "id"'] & \mathcal{N} \arrow[u, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

f fija $h(M)$: sea $m \in M$. Dado algún (o cualquier) $i \in I$, $[(i, m)] = \{(I_0, M_0) \mid i \in I_0 \wedge m \in M_0\} \in U$ y si $(I_0, M_0) \in [(i, m)]$, entonces $m \in M_0$ con lo cual $f_{(I_0,M_0)}(m) = m$. Así,

$$[(i, m)] \subset \{(I_0, M_0) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(K)^+} M \mid f_{(I_0,M_0)}(m) = m\} \in U$$

y $f \circ h(m) = [(I_0, M_0) \to f_{(I_0,M_0)}(m)]_U = [(I_0, M_0) \to m]_U = h(m)$.

Así, se tiene que $p = q$. $\square$

La demostración en versión plena usa modelos monstruos locales (para poder tomar "ultrapotencias del monstruo").

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[rr, dashed, "f \circ h"] & & \prod \mathcal{N}/U \\
M \arrow[u, "id"] \arrow[rr, "id"'] & & \mathcal{N} \arrow[u, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

f fija $h(M)$: sea $m \in M$. Dado algún (o cualquier) $i \in I$, $[(i, m)] = \{(I_o, M_o) \mid i \in I_o \wedge m \in M_o\} \in U$ y si $(I_o, M_o) \in [(i, m)]$, entonces $m \in M_o$ con lo cual $f_{(I_o, M_o)}(m) = m$. Así,

$$[(i, m)] \subset \{(I_o, M_o) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(K)^+} M \mid f_{(I_o, M_o)}(m) = m\} \in U$$

y $f \circ h(m) = [(I_o, M_o) \to f_{(I_o, M_o)}(m)]_U = [(I_o, M_o) \to m]_U = h(m)$.

Así, se tiene que $p = q$. $\square$

La demostración en versión plena usa modelos monstruos locales (para poder tomar "ultrapotencias del monstruo").

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[r, dashed, "f\circ h"] & \prod \mathcal{N}/U \\
M \arrow[u, "id"] \arrow[r, "id"'] & \mathcal{N} \arrow[u, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

f fija $h(M)$: sea $m \in M$. Dado algún (o cualquier) $i \in I$, $[(i, m)] = \{(I_o, M_o) \mid i \in I_o \wedge m \in M_o\} \in U$ y si $(I_o, M_o) \in [(i, m)]$, entonces $m \in M_o$ con lo cual $f_{(I_o,M_o)}(m) = m$. Así,

$$[(i, m)] \subset \{(I_o, M_o) \in P_\kappa I \times P^*_{\kappa+LS(K)^+} M \mid f_{(I_o,M_o)}(m) = m\} \in U$$

y $f \circ h(m) = [(I_o, M_o) \to f_{(I_o,M_o)}(m)]_U = [(I_o, M_o) \to m]_U = h(m)$.

Así, se tiene que $p = q$. $\square$

La demostración en versión plena usa modelos monstruos <u>locales</u> (para poder tomar “ultrapotencias del monstruo”).

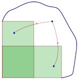
Más Łoś

Teorema (Boney - teorema "de Łoś" para CLEAs, parte 2)

Sea K una CLEA con $LS(K) < \kappa$ fuertemente compacto. Suponga que tenemos $N_0 \leq_K N$ y $p \in ga - S^I(N_0)$, con $|N_0| < \kappa$, $|I| < \kappa$ y un ultrafiltro κ-completo U sobre I. Entonces

$$[h]_U \in \prod N/U \models p \quad ssi \quad \{i \in I | h(i) \models p\} \in U.$$

La compacidad fuerte de κ se usa para "fundir" automorfismos que atestigüen que las órbitas de los $h(i)$ son todas p ... en una sola gran órbita. Los detalles requieren de nuevo monstruos locales.

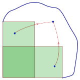


Reducir hipótesis / cosechar un poco menos

- Tenemos hasta ahora resultados bajo f. comp. y medibles.
- Un cardinal no numerable κ es débilmente compacto ssi la lógica $L_{\kappa,\kappa}$ satisface compacidad para conjuntos de tamaño $< \kappa$ ssi es Π^1_1-indescriptible. (Π^1_1 “se refleja”.)
- Es decir, $\forall U \subset V_\kappa$ y dado φ sentencia Π^1_1 en $L = \{\in, U\}$ se tiene

$$\langle V_\kappa, \in, U\rangle \models \varphi \text{ ssi existe } \alpha < \kappa \text{ tq } \langle V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha\rangle \models \varphi.$$

- Se puede codificar una clase elemental abstracta usando predicados (detalles engorrosos).
- Teorema: Si κ es d. comp., y $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ y κ-AP, se tiene que $\mathcal{K}$ es $(<\kappa, \kappa)$-dócil para $<\kappa$-tipos. Usar reflexión.

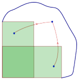


Reducir hipótesis / cosechar un poco menos

- Tenemos hasta ahora resultados bajo f. comp. y medibles.
- Un cardinal no numerable κ es débilmente compacto ssi la lógica $L_{\kappa,\kappa}$ satisface compacidad para conjuntos de tamaño $< \kappa$ ssi es Π^1_1-indescriptible. (Π^1_1 "se refleja".)
- Es decir, $\forall U \subset V_\kappa$ y dado φ sentencia Π^1_1 en $L = \{\in, U\}$ se tiene

$$\langle V_\kappa, \in, U\rangle \models \varphi \text{ ssi existe } \alpha < \kappa \text{ tq } \langle V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha\rangle \models \varphi.$$

- Se puede codificar una clase elemental abstracta usando predicados (detalles engorrosos).
- Teorema: Si κ es d. comp., y $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ y κ-AP, se tiene que $\mathcal{K}$ es $(<\kappa, \kappa)$-dócil para $<\kappa$-tipos. Usar reflexión.



Reducir hipótesis / cosechar un poco menos

- Tenemos hasta ahora resultados bajo f. comp. y medibles.
- Un cardinal no numerable κ es débilmente compacto ssi la lógica $L_{\kappa,\kappa}$ satisface compacidad para conjuntos de tamaño $< \kappa$ ssi es Π^1_1-indescriptible. (Π^1_1 "se refleja".)
- Es decir, $\forall U \subset V_\kappa$ y dado φ sentencia Π^1_1 en $L = \{\in, U\}$ se tiene

$$\langle V_\kappa, \in, U\rangle \models \varphi \text{ ssi existe } \alpha < \kappa \text{ tq } \langle V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha\rangle \models \varphi.$$

- Se puede codificar una clase elemental abstracta usando predicados (detalles engorrosos).
- Teorema: Si κ es d. comp., y $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ y κ-AP, se tiene que $\mathcal{K}$ es $(<\kappa, \kappa)$-dócil para $<\kappa$-tipos. Usar reflexión.

Reducir hipótesis / cosechar un poco menos

- Tenemos hasta ahora resultados bajo f. comp. y medibles.
- Un cardinal no numerable κ es débilmente compacto ssi la lógica $L_{\kappa,\kappa}$ satisface compacidad para conjuntos de tamaño $< \kappa$ ssi es Π^1_1-indescriptible. (Π^1_1 "se refleja".)
- Es decir, $\forall U \subset V_\kappa$ y dado φ sentencia Π^1_1 en $L = \{\in, U\}$ se tiene

$$\langle V_\kappa, \in, U \rangle \models \varphi \text{ ssi existe } \alpha < \kappa \text{ tq } \langle V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha \rangle \models \varphi.$$

- Se puede codificar una clase elemental abstracta usando predicados (detalles engorrosos).
- Teorema: Si κ es d. comp., y $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ y κ-AP, se tiene que $\mathcal{K}$ es $(<\kappa, \kappa)$-dócil para $<\kappa$-tipos. Usar reflexión.

Reducir hipótesis / cosechar un poco menos

- Tenemos hasta ahora resultados bajo f. comp. y medibles.
- Un cardinal no numerable κ es débilmente compacto ssi la lógica $L_{\kappa,\kappa}$ satisface compacidad para conjuntos de tamaño $< \kappa$ ssi es Π^1_1-indescriptible. (Π^1_1 "se refleja".)
- Es decir, $\forall U \subset V_\kappa$ y dado φ sentencia Π^1_1 en $L = \{\in, U\}$ se tiene

$$\langle V_\kappa, \in, U\rangle \models \varphi \text{ ssi existe } \alpha < \kappa \text{ tq } \langle V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha\rangle \models \varphi.$$

- Se puede codificar una clase elemental abstracta usando predicados (detalles engorrosos).
- Teorema: Si κ es d. comp., y $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ y κ-AP, se tiene que $\mathcal{K}$ es $(<\kappa, \kappa)$-dócil para $< \kappa$-tipos. Usar reflexión.

La consistencia de la conjetura

Teorema (Boney)

Suponga que κ es fuertemente compacto y K es una CLEA esencialmente bajo κ. Si K es categórica en un sucesor $\lambda^+ > LS(K)^+$ entonces K es categórica en todo $\mu \geq \text{mín}\{\lambda^+, \beth_{(2^{Hanf(LS(K))})^+}\}$.

Teorema (Boney)

Si existe una clase propia de cardinales fuertemente compactos, entonces vale la Conjetura de Shelah para Sucesores.

Variantes

Teorema (Categoricidad descendente para Π^1_2)

Sea κ un cardinal Π^1_2-indescriptible. Si $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$, categórica en κ, entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$ existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que $\mathcal{K}$ es μ-categórica.

- De nuevo, codificar y reflejar.
- ¿Vale arrancando de sucesor? No: los sucesores y límites singulares son descriptibles en primer orden... Otros:

Teorema (AP disyunta no acotada transfiere hacia abajo para Π^1_2)

Sea κ un cardinal Π^1_2-indescriptible. Si $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$, satisface κ-dAP, entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$ existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que $\mathcal{K}$ satisface μ-dAp.

Teorema

Sea κ un cardinal Π^2_1-indescriptible. Suponga que K es una CLEA con $LS(K) < \kappa$ y K_κ tiene un único modelo límite. Entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$, existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que K_μ tiene un único modelo límite.

Variantes

Teorema (Categoricidad descendente para Π^1_2)

Sea κ un cardinal Π^1_2-indescriptible. Si $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$, categórica en κ, entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$ existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que $\mathcal{K}$ es μ-categórica.

- De nuevo, codificar y reflejar.
- ¿Vale arrancando de sucesor? No: los sucesores y límites singulares son descriptibles en primer orden... Otros:

Teorema (AP disyunta no acotada transfiere hacia abajo para Π^1_2)

Sea κ un cardinal Π^1_2-indescriptible. Si $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$, satisface κ-dAP, entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$ existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que $\mathcal{K}$ satisface μ-dAp.

Teorema

Sea κ un cardinal Π^2_1-indescriptible. Suponga que K es una CLEA con $LS(K) < \kappa$ y K_κ tiene un único modelo límite. Entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$, existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que K_μ tiene un único modelo límite.

Variantes

Teorema (Categoricidad descendente para Π^1_2)

Sea κ un cardinal Π^1_2-indescriptible. Si $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$, categórica en κ, entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$ existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que $\mathcal{K}$ es μ-categórica.

- De nuevo, codificar y reflejar.
- ¿Vale arrancando de sucesor? No: los sucesores y límites singulares son descriptibles en primer orden... Otros:

Teorema (AP disyunta no acotada transfiere hacia abajo para Π^1_2)

Sea κ un cardinal Π^1_2-indescriptible. Si $\mathcal{K}$ es una CLEA con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$, satisface κ-dAP, entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$ existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que $\mathcal{K}$ satisface μ-dAp.

Teorema

Sea κ un cardinal Π^2_1-indescriptible. Suponga que K es una CLEA con $LS(K) < \kappa$ y K_κ tiene un único modelo límite. Entonces para todo $\lambda^+ < \kappa$, existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que K_μ tiene un único modelo límite.

A futuro en esta línea

Bajo una clase de cardinales fuertemente compactos, Boney logra demostrar que

$$\text{Toda CLEA } K \text{ con modelos arbitrariamente grandes es dócil.} \tag{1}$$

(Y da versiones más débiles de docilidad, logradas a partir de clases propias de medibles y de débilmente compactos.)

¿Qué tanto se puede reducir la hipótesis de grandes cardinales? ¿A Woodins?

A futuro en esta línea

Note que

$$\text{Toda CLEA } K \text{ con } LS(K) < \kappa \text{ es } (< \kappa, \kappa)\text{-dócil} \tag{2}$$

ya implica que $V \neq L$. Baldwin y Shelah construyeron un contraejemplo a (κ, κ)-docilidad a partir de un grupo casi libre, no libre, no-Whitehead de cardinal κ. En L esto sucede en todo cardinal κ regular no débilmente compacto.
Trabajos de Hart-Shelah muestran que tampoco se puede bajar por debajo de $\aleph_\omega$.

¿Y qué pasa con L?

- ¿Se puede lograr la consistencia en ZFC?
- NO: la $(<\kappa,\kappa)$-docilidad de $\mathcal{K}$ con $LS(\mathcal{K})<\kappa$ implica que $V\neq L$: hay un contraejemplo a partir de un grupo de Whitehead de tamaño κ casi libre, no libre. En L, esto sucede si κ es regular pero no es débilmente compacto (ver Eklof-Mekler).
- Esa demostración requiere conjuntos estacionarios que no reflejan para armar los grupos, y diamantes débiles en estacionarios para ver que los grupos de Whitehead son libres.

¿Y qué pasa con L?

- ¿Se puede lograr la consistencia en ZFC?
- NO: la $(<\kappa, \kappa)$-docilidad de $\mathcal{K}$ con $LS(\mathcal{K}) < \kappa$ implica que $V \neq L$: hay un contraejemplo a partir de un grupo de Whitehead de tamaño κ casi libre, no libre. En L, esto sucede si κ es regular pero no es débilmente compacto (ver Eklof-Mekler).
- Esa demostración requiere conjuntos estacionarios que no reflejan para armar los grupos, y diamantes débiles en estacionarios para ver que los grupos de Whitehead son libres.

¿Y qué pasa con L?

- ¿Se puede lograr la consistencia en ZFC?
- NO: la $(<\kappa,\kappa)$-docilidad de $\mathcal{K}$ con $LS(\mathcal{K})<\kappa$ implica que $V\neq L$: hay un contraejemplo a partir de un grupo de Whitehead de tamaño κ casi libre, no libre. En L, esto sucede si κ es regular pero no es débilmente compacto (ver Eklof-Mekler).
- Esa demostración requiere conjuntos estacionarios que no reflejan para armar los grupos, y diamantes débiles en estacionarios para ver que los grupos de Whitehead son libres.

Describir independencias, bifurcación, ruptura.

Dualidad entre herederos y coherederos: similar a la dualidad entre docilidad y tipo cortitud.

Trabajos de Boney y Grossberg.

¡Fue un placer dar este curso en México!