# Teoría de conjuntos y lógica
# Un matrimonio de conveniencia

Luis Miguel Villegas Silva
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Mayo 2014

En esta plática hablaremos sobre el origen de la teoría de conjuntos, sus primeros pasos, y el surgimiento de paradojas. Éstas motivaron el empleo de la lógica matematica, momento a partir del cual, esta interacción se hizo más y más profunda, pues también la lógica matemática recurrió a la teoría de conjuntos en diversos aspectos. Desde entonces, el auxilio mutuo ha sido una constante entre ambas disciplinas. Trataremos de describir esta situación en los minutos que dure esta conferencia.

Son muy pocas las disciplinas científicas cuya creación pueda atribuirse exclusivamente a una persona. Uno de estos casos (tal vez el único) es la teoría de conjuntos y su creador es George Cantor.

Son muy pocas las disciplinas científicas cuya creación pueda atribuirse exclusivamente a una persona. Uno de estos casos (tal vez el único) es la teoría de conjuntos y su creador es George Cantor.
A continuación algunos datos biogáficos de Cantor.

- George Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, Rusia.
- La escuela primaria de Cantor transcurre en San Petersburgo
- en 1856 la familia se traslada a Alemania, a Frankfurt am Main.
- Escuela secundaria y preparatoria en Alemania (Wiesbaden).
- Termina su formación preparatoria en 1860.

Al terminar la preparatoria (Gymnasium) Cantor manifiesta su interés por las matemáticas.

Al terminar la preparatoria (Gymnasium) Cantor manifiesta su interés por las matemáticas.
Su padre considera, sin embargo, que económicamente es más viables el estudio de una ingeniería.

Al terminar la preparatoria (Gymnasium) Cantor manifiesta su interés por las matemáticas.
Su padre considera, sin embargo, que económicamente es más viables el estudio de una ingeniería.
Cantor se inscribe en la escuela superior industrial en Darmstadt en 1860.

Al terminar la preparatoria (Gymnasium) Cantor manifiesta su interés por las matemáticas.
Su padre considera, sin embargo, que económicamente es más viables el estudio de una ingeniería.
Cantor se inscribe en la escuela superior industrial en Darmstadt en 1860.
Ante la insistencia de Cantor de estudiar matemáticas, el padre accede finalmente en 1862.

Al terminar la preparatoria (Gymnasium) Cantor manifiesta su interés por las matemáticas.
Su padre considera, sin embargo, que económicamente es más viables el estudio de una ingeniería.
Cantor se inscribe en la escuela superior industrial en Darmstadt en 1860.
Ante la insistencia de Cantor de estudiar matemáticas, el padre accede finalmente en 1862.
En el otoño de 1862 Cantor inicia sus estudios de matemáticas en la universidad de Zürich.

En el verano de 1863 ante la muerte de su padre, Cantor interrumpe un semestre sus estudios.

En el verano de 1863 ante la muerte de su padre, Cantor interrumpe un semestre sus estudios.
Los retoma en Berlín, adonde se había trasladado su madre, en la Friedrich-Wilhelms-Universität.

En el verano de 1863 ante la muerte de su padre, Cantor interrumpe un semestre sus estudios.
Los retoma en Berlín, adonde se había trasladado su madre, en la Friedrich-Wilhelms-Universität. Docentes activos en Berlín en ese entonces: Weierstrass, Kronecker, Fuchs, Ohm, entre otros.

En el verano de 1863 ante la muerte de su padre, Cantor interrumpe un semestre sus estudios.
Los retoma en Berlín, adonde se había trasladado su madre, en la Friedrich-Wilhelms-Universität. Docentes activos en Berlín en ese entonces: Weierstrass, Kronecker, Fuchs, Ohm, entre otros.
En 1866 Cantor hace una estancia en Göttingen de un semestre.

En 1867 Cantor presenta su tesis doctoral:

En 1867 Cantor presenta su tesis doctoral:
*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*
Sobre ecuaciones indeterminadas de segundo grado.

En 1867 Cantor presenta su tesis doctoral:
*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*
Sobre ecuaciones indeterminadas de segundo grado.
El trabajo versa sobre las investigaciones de Lagrange, Gauß, y Legendre sobre la ecuación diofantina

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

En 1867 Cantor presenta su tesis doctoral:
*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*
Sobre ecuaciones indeterminadas de segundo grado.
El trabajo versa sobre las investigaciones de Lagrange, Gauß, y Legendre sobre la ecuación diofantina

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

Después de doctorarse, Cantor permanece cierto tiempo en Berlín. En 1868 presenta el exament federal para maestros, que le permite impartir clases en preparatorias.

En 1867 Cantor presenta su tesis doctoral:
*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*
Sobre ecuaciones indeterminadas de segundo grado.
El trabajo versa sobre las investigaciones de Lagrange, Gauß, y Legendre sobre la ecuación diofantina

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

Después de doctorarse, Cantor permanece cierto tiempo en Berlín. En 1868 presenta el exament federal para maestros, que le permite impartir clases en preparatorias.

Pero su interés radica en la investigación matemática, por lo que en 1869 se traslada a Halle en Sachsen para iniciar su *Habilitation* (grado superior al de doctorado).

Pero su interés radica en la investigación matemática, por lo que en 1869 se traslada a Halle en Sachsen para iniciar su *Habilitation* (grado superior al de doctorado). En la universidad de Halle trabaja con Eduard Heine (teorema de Heine-Borel).

Pero su interés radica en la investigación matemática, por lo que en 1869 se traslada a Halle en Sachsen para iniciar su *Habilitation* (grado superior al de doctorado). En la universidad de Halle trabaja con Eduard Heine (teorema de Heine-Borel). La tesis de habilitación trata también sobre teoría de números, a saber, determinación de aquellas transformaciones que al aplicarse a una forma cuadrática ternaria producen una de éstas.

Pero su interés radica en la investigación matemática, por lo que en 1869 se traslada a Halle en Sachsen para iniciar su *Habilitation* (grado superior al de doctorado). En la universidad de Halle trabaja con Eduard Heine (teorema de Heine-Borel). La tesis de habilitación trata también sobre teoría de números, a saber, determinación de aquellas transformaciones que al aplicarse a una forma cuadrática ternaria producen una de éstas.

Heine se dedicaba intensamente en 1868-69 a la teoría de las series trigonométricas, en particular al problema de la convergencia uniforme y unicidad de las series de Fourier.

Heine se dedicaba intensamente en 1868-69 a la teoría de las series trigonométricas, en particular al problema de la convergencia uniforme y unicidad de las series de Fourier. Una serie de Fourir tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Heine se dedicaba intensamente en 1868-69 a la teoría de las series trigonométricas, en particular al problema de la convergencia uniforme y unicidad de las series de Fourier. Una serie de Fourir tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

La pregunta es, si la función a la izquierda realmente está representada por la serie infinita a la derecha.

Heine se dedicaba intensamente en 1868-69 a la teoría de las series trigonométricas, en particular al problema de la convergencia uniforme y unicidad de las series de Fourier. Una serie de Fourir tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

La pregunta es, si la función a la izquierda realmente está representada por la serie infinita a la derecha. Una condición necesaria es que la serie infinita converja, de preferencia uniformemente.

Heine se dedicaba intensamente en 1868-69 a la teoría de las series trigonométricas, en particular al problema de la convergencia uniforme y unicidad de las series de Fourier. Una serie de Fourir tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

La pregunta es, si la función a la izquierda realmente está representada por la serie infinita a la derecha. Una condición necesaria es que la serie infinita converja, de preferencia uniformemente.

Otra característica relevante, es que la representación de la función mediante la serie infinita sea única.

Es un hecho, quizá único en la historia de las matemáticas, que una teoría, la de las series trigonométricas, haya dada lugar a numerosas nociones de gran relevancia en diversas áreas en matemáticas.

Es un hecho, quizá único en la historia de las matemáticas, que una teoría, la de las series trigonométricas, haya dada lugar a numerosas nociones de gran relevancia en diversas áreas en matemáticas. El caso que no interesa, la teoría de conjuntos, fue también motivado por estas series.

Es un hecho, quizá único en la historia de las matemáticas, que una teoría, la de las series trigonométricas, haya dada lugar a numerosas nociones de gran relevancia en diversas áreas en matemáticas. El caso que no interesa, la teoría de conjuntos, fue también motivado por estas series. Riemann trato en su Habilitación en 1854 la siguiente pregunta: *Si una función se representa mediante una serie trigonométrica, ¿qué le ocurre a sus valores cuando movemos continuamente el argumento?*

Es un hecho, quizá único en la historia de las matemáticas, que una teoría, la de las series trigonométricas, haya dada lugar a numerosas nociones de gran relevancia en diversas áreas en matemáticas. El caso que no interesa, la teoría de conjuntos, fue también motivado por estas series. Riemann trato en su Habilitación en 1854 la siguiente pregunta: *Si una función se representa mediante una serie trigonométrica, ¿qué le ocurre a sus valores cuando movemos continuamente el argumento?* En principio, no se suponía nada sobre la función, por lo que Riemann hubo de definir formalmente que se entendía por una integral determinada.

Esto motivó la introducción de lo que ahora se conoce como la integral de Riemann y de algunos critrios sobre existencia de la integral.

Esto motivó la introducción de lo que ahora se conoce como la integral de Riemann y de algunos critrios sobre existencia de la integral. Así, la series trigonométricas dieron lugar a las nociones fundamentales de función e integral.

Luis Miguel Villegas Silva Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa



El primer resultado de Cantor al respecto (publicado en 1870) trató sobre la unicidad de la representación.

El primer resultado de Cantor al respecto (publicado en 1870) trató sobre la unicidad de la representación. Demostró que de la ecuación

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0$$

válida para cada $x \in (0, 2\pi)$ se desprende que $c_i = 0$ y $d_i = 0$ para toda $i$.

El primer resultado de Cantor al respecto (publicado en 1870) trató sobre la unicidad de la representación. Demostró que de la ecuación

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0$$

válida para cada $x \in (0, 2\pi)$ se desprende que $c_i = 0$ y $d_i = 0$ para toda $i$. Notemos que en este primer resultado se exige que la representación del cero ocurra **para todo valor** de $x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Un año después Cantor publica una pequeña nota que completa el trabajo previo, en la que demuestra que es posible admitir un conjunto **finito** de excepciones, mientras que la representación sigue siendo única.

Un año después Cantor publica una pequeña nota que completa el trabajo previo, en la que demuestra que es posible admitir un conjunto **finito** de excepciones, mientras que la representación sigue siendo única. Por un conjunto de excepciones se entiende un conjunto de puntos en el que la serie puede no converger o converger a algo distinto de cero.

Un año después Cantor publica una pequeña nota que completa el trabajo previo, en la que demuestra que es posible admitir un conjunto **finito** de excepciones, mientras que la representación sigue siendo única. Por un conjunto de excepciones se entiende un conjunto de puntos en el que la serie puede no converger o converger a algo distinto de cero. Esta observación que podría parecer sin mayor importancia desencadenó la creación de la teoría de conjuntos.

Si es admisible un conjunto finito de excepciones, ¿qué ocurrirá con un conjunto infinito de excepciones?

Si es admisible un conjunto finito de excepciones, ¿qué ocurrirá con un conjunto infinito de excepciones? En 1872 Cantor publica en el Mathematische Annalen un teorema de unicidad para la representación mencionada en la que se permite un conjunto infinito de excepciones.

Si es admisible un conjunto finito de excepciones, ¿qué ocurrirá con un conjunto infinito de excepciones? En 1872 Cantor publica en el Mathematische Annalen un teorema de unicidad para la representación mencionada en la que se permite un conjunto infinito de excepciones. Para lograrlo Cantor hubo de desarrollar formalmente muchos de los aspectos que hoy conocemos como la teoría de los númers reales.

Si es admisible un conjunto finito de excepciones, ¿qué ocurrirá con un conjunto infinito de excepciones? En 1872 Cantor publica en el Mathematische Annalen un teorema de unicidad para la representación mencionada en la que se permite un conjunto infinito de excepciones. Para lograrlo Cantor hubo de desarrollar formalmente muchos de los aspectos que hoy conocemos como la teoría de los númers reales. Tan sólo por este desarrollo Cantor ya sería reconocido como uno de los grandes matemáticos de toda la historia.

Cantor parte de los números racionales y constuye los reales como límites de sucesiones (de Cauchy) de racionales (llamadas fundamentales).

Cantor parte de los números racionales y constuye los reales como límites de sucesiones (de Cauchy) de racionales (llamadas fundamentales). Aquellas series fundamentales que no tienen límite racional representan a los números irracionales.

Cantor parte de los números racionales y constuye los reales como límites de sucesiones (de Cauchy) de racionales (llamadas fundamentales). Aquellas series fundamentales que no tienen límite racional representan a los números irracionales. Mediante estas sucesiones fundamentales definió Cantor las operaciones de suma, producto, etc. y que el sistema así construido es completo.

Cantor parte de los números racionales y constuye los reales como límites de sucesiones (de Cauchy) de racionales (llamadas fundamentales). Aquellas series fundamentales que no tienen límite racional representan a los números irracionales. Mediante estas sucesiones fundamentales definió Cantor las operaciones de suma, producto, etc. y que el sistema así construido es completo. Junto con la teoría de los números reales, Cantor introdujo una de las nociones fundamentales de la topología de conjuntos: el concepto de conjunto derivado: si $P$ es un subconjunto del conjunto de los números reales, el conjunto de todos sus puntos de acumulación, $P'$, es el conjunto derivado de $P$.

El número real $x$ es un punto de acumulación de $P$, si cualquier vecindad (intervalo abierto) que contenga a $x$ interseca a $P$ en una cantidad infinita de puntos.

El número real $x$ es un punto de acumulación de $P$, si cualquier vecindad (intervalo abierto) que contenga a $x$ interseca a $P$ en una cantidad infinita de puntos. Si $P'$ no es vacío, podemos considerar también su conjunto derivado $P''$, y así sucesivamente.

El número real $x$ es un punto de acumulación de $P$, si cualquier vecindad (intervalo abierto) que contenga a $x$ interseca a $P$ en una cantidad infinita de puntos. Si $P'$ no es vacío, podemos considerar también su conjunto derivado $P''$, y así sucesivamente. El enésimo conjunto derivado de $P$ se denota según Cantor como $P^{(n)}$, y él llama a un subconjunto de los reales del enésimo tipo cuando $P^{(n+1)}$ es vacío.

El número real $x$ es un punto de acumulación de $P$, si cualquier vecindad (intervalo abierto) que contenga a $x$ interseca a $P$ en una cantidad infinita de puntos. Si $P'$ no es vacío, podemos considerar también su conjunto derivado $P''$, y así sucesivamente. El enésimo conjunto derivado de $P$ se denota según Cantor como $P^{(n)}$, y él llama a un subconjunto de los reales del enésimo tipo cuando $P^{(n+1)}$ es vacío. El teorema de unicidad de Cantor para series trigonométricas sigue siendo válido, cuando el conjuto de excepciones es de $n$-ésimo tipo, para algún natual $n$.

La formación de los conjuntos derivados sucesivos de un conjunto de reales condujo a Cantor a la noción de número ordinal transfinito.

La formación de los conjuntos derivados sucesivos de un conjunto de reales condujo a Cantor a la noción de número ordinal transfinito. Aquí aparece realmente el origen de la teoría de conjuntos.

La formación de los conjuntos derivados sucesivos de un conjunto de reales condujo a Cantor a la noción de número ordinal transfinito. Aquí aparece realmente el origen de la teoría de conjuntos. Una vez que tenemos los conjuntos derivados $P' \supseteq P'' \supseteq P''' \supseteq \cdots \supseteq P^{(n)} \supseteq \cdots$ Cantor pudo definir el conjunto que consiste en aquellos reales presentes en todos y cada uno de los conjuntos derivados $P^{(n)}$, conjunto que Cantor denota $P^{(\infty)}$ y que no es otra cosa que

$$\bigcap_n P^{(n)}$$

La formación de los conjuntos derivados sucesivos de un conjunto de reales condujo a Cantor a la noción de número ordinal transfinito. Aquí aparece realmente el origen de la teoría de conjuntos. Una vez que tenemos los conjuntos derivados $P' \supseteq P'' \supseteq P''' \supseteq \cdots \supseteq P^{(n)} \supseteq \cdots$ Cantor pudo definir el conjunto que consiste en aquellos reales presentes en todos y cada uno de los conjuntos derivados $P^{(n)}$, conjunto que Cantor denota $P^{(\infty)}$ y que no es otra cosa que

$$\bigcap_n P^{(n)}$$

Así, $\infty$ es el primer ordinal transfinito, que Cantor mismo denotaría después como $\omega$.

Pero si $P^{(\infty)}$ no es vacío, también tiene derecho a que pensemos en su conjunto derivado...., pero ¿cómo representarlo?

Pero si $P^{(\infty)}$ no es vacío, también tiene derecho a que pensemos en su conjunto derivado...., pero ¿cómo representarlo? Vale la pena taratar de ilustrar las ideas de Cantor de otra forma.

Pero si $P^{(\infty)}$ no es vacío, también tiene derecho a que pensemos en su conjunto derivado...., pero ¿cómo representarlo? Vale la pena taratar de ilustrar las ideas de Cantor de otra forma. Cantor notó la importancia de la teoría que estaba surgiendo, supo prescindir de la naturaleza de los conjuntos subyacentes (los conjuntos derivados) y quedarse sólo con los "índices" empleados para distinguirlos.

Pero si $P^{(\infty)}$ no es vacío, también tiene derecho a que pensemos en su conjunto derivado...., pero ¿cómo representarlo? Vale la pena taratar de ilustrar las ideas de Cantor de otra forma. Cantor notó la importancia de la teoría que estaba surgiendo, supo prescindir de la naturaleza de los conjuntos subyacentes (los conjuntos derivados) y quedarse sólo con los "índices" empleados para distinguirlos.

El conjunto $P$ mismo es un conjunto derivado, si consideramos que la operación para obtener un conjunto de derivado se puede aplicar cero veces, esto es, $P = P^{(0)}$.

Notemos entoces que el cero representa un conjunto sin elementos, tenemos un conjunto con un elemento, un conjunto con dos elementos, etc.

Notemos entoces que el cero representa un conjunto sin elementos, tenemos un conjunto con un elemento, un conjunto con dos elementos, etc. Así

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0, 1\} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
n + 1 &= \{0, 1, \ldots, n\} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\omega &= \{0, 1, 2, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Cada número natural no es otra cosa que el conjunto de los números que lo preceden, que para el caso del cero es el conjunto vacío.

Cada número natural no es otra cosa que el conjunto de los números que lo preceden, que para el caso del cero es el conjunto vacío. Mientras que para $\omega$ es el conjunto de todos los números naturales.

Cada número natural no es otra cosa que el conjunto de los números que lo preceden, que para el caso del cero es el conjunto vacío. Mientras que para $\omega$ es el conjunto de todos los números naturales. Siguiendo esta idea, el número que sigue a $\omega$ será el que contenga a los previos, es decir

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$$

y que se denota $\omega + 1$, el sucesor de $\omega$.

Cada número natural no es otra cosa que el conjunto de los números que lo preceden, que para el caso del cero es el conjunto vacío. Mientras que para $\omega$ es el conjunto de todos los números naturales. Siguiendo esta idea, el número que sigue a $\omega$ será el que contenga a los previos, es decir

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$$

y que se denota $\omega + 1$, el sucesor de $\omega$. De igual forma podemos formar $\omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega + n, \ldots, \omega + \omega$,...

Todos estos ordinales transfinitos son *numerables*.

Todos estos ordinales transfinitos son *numerables*. Decimos que un conjunto $P$ es numerable si existe una biyección entre $P$ y el conjunto de los números naturales $\omega$.

Todos estos ordinales transfinitos son *numerables*. Decimos que un conjunto $P$ es numerable si existe una biyección entre $P$ y el conjunto de los números naturales $\omega$. Conociendo la existencia de conjuntos infinitos numerables, era pues más que obvio, preguntarse si existirían conjuntos innumerables.

Todos estos ordinales transfinitos son *numerables*. Decimos que un conjunto $P$ es numerable si existe una biyección entre $P$ y el conjunto de los números naturales $\omega$. Conociendo la existencia de conjuntos infinitos numerables, era pues más que obvio, preguntarse si existirían conjuntos innumerables. El primer conjunto a investigar era, sin duda, el de los números reales $\mathbb{R}$.

Todos estos ordinales transfinitos son *numerables*. Decimos que un conjunto $P$ es numerable si existe una biyección entre $P$ y el conjunto de los números naturales $\omega$. Conociendo la existencia de conjuntos infinitos numerables, era pues más que obvio, preguntarse si existirían conjuntos innumerables. El primer conjunto a investigar era, sin duda, el de los números reales $\mathbb{R}$. Cantor sabía que, por ejemplo, el conjunto de $n$-adas de naturales $\{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \omega\}$ es un conjunto numerable, para cuqluier natural $n$. Poco después demostró que el conjunto de números algebraicos también es numerable; que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el de los enteros $\mathbb{Z}$ son numerables.

En diciembre de 1873 Cantor presenta en Berlín a Weierstraß la demostración de que el conjunto de números reales en el intervalo $(0, 1)$ es innumerable y por consiguiente, el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es innumerable, En diciembre de 1873 Cantor presenta en Berlín a Weierstraß la demostración de que el conjunto de números reales en el intervalo $(0, 1)$ es innumerable y por consiguiente, el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es innumerable, es decir, no puede existir una biyección entre $\omega$ y $(0, 1)$ o $\mathbb{R}$.

En diciembre de 1873 Cantor presenta en Berlín a Weierstraß la demostración de que el conjunto de números reales en el intervalo $(0, 1)$ es innumerable y por consiguiente, el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es innumerable, es decir, no puede existir una biyección entre $\omega$ y $(0, 1)$ o $\mathbb{R}$.
Este resultado aparece publicado en 1874. Como corolario se desprende que existen una cantidad infinita, innumerable, de números trascendentes.

En diciembre de 1873 Cantor presenta en Berlín a Weierstraß la demostración de que el conjunto de números reales en el intervalo $(0,1)$ es innumerable y por consiguiente, el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es innumerable, es decir, no puede existir una biyección entre $\omega$ y $(0,1)$ o $\mathbb{R}$.
Este resultado aparece publicado en 1874. Como corolario se desprende que existen una cantidad infinita, innumerable, de números trascendentes. Por primera vez se ha demostrado la existencia de diversos infinitos.

Ahora nos apartamos del desarrollo histórico para describir más rápidamente la aparición de la lógica matemática en la teoría de conjuntos.

Ahora nos apartamos del desarrollo histórico para describir más rápidamente la aparición de la lógica matemática en la teoría de conjuntos. Cantor desarrolló numerosas nociones fundamentales para la teoría de conjuntos y para la topología de conjuntos; no obstante, nunca proporcionó una definición formal de la noción central: ¿qué es un conjunto? Se pueden decir varias cosas al respecto, pero lo que si es corroborable es que Cantor advirtió en numerosas ocasiones sobre la imposibilidad de considerar como un conjunto a cualquier colección de conjuntos.

Ahora nos apartamos del desarrollo histórico para describir más rápidamente la aparición de la lógica matemática en la teoría de conjuntos. Cantor desarrolló numerosas nociones fundamentales para la teoría de conjuntos y para la topología de conjuntos; no obstante, nunca proporcionó una definición formal de la noción central: ¿qué es un conjunto? Se pueden decir varias cosas al respecto, pero lo que si es corroborable es que Cantor advirtió en numerosas ocasiones sobre la imposibilidad de considerar como un conjunto a cualquier colección de conjuntos. Sin tomar en cuenta esta advertencia, algunos “matemáticos” plantearon la siguiente paradoja.

Dado que cualquier colección de objetos se puede considerar un conjunto, sean $V$ el conjunto de todos los conjuntos y $R$ el conjuntos de aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos,

Dado que cualquier colección de objetos se puede considerar un conjunto, sean $V$ el conjunto de todos los conjuntos y $R$ el conjuntos de aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, es decir,

$$R = \{x \in V : x \notin x\}$$

Dado que cualquier colección de objetos se puede considerar un conjunto, sean $V$ el conjunto de todos los conjuntos y $R$ el conjuntos de aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, es decir,

$$R = \{x \in V : x \notin x\}$$

Puesto que toda colección es un conjunto, $R$ mismo lo es, así que tenemos derecho a preguntarnos si $R$ es miembro de sí mismo o no,

Dado que cualquier colección de objetos se puede considerar un conjunto, sean $V$ el conjunto de todos los conjuntos y $R$ el conjuntos de aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, es decir,

$$R = \{x \in V : x \notin x\}$$

Puesto que toda colección es un conjunto, $R$ mismo lo es, así que tenemos derecho a preguntarnos si $R$ es miembro de sí mismo o no, esto es,

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

una contradicción.

Esta y otras dificultades similares motivaron la necesidad de axiomatizar, es decir, establecer reglas claras, para trabajar la teoría de conjuntos, de la misma manera que, por ejemplo, existen los axiomas de la geometría euclideana.

Esta y otras dificultades similares motivaron la necesidad de axiomatizar, es decir, establecer reglas claras, para trabajar la teoría de conjuntos, de la misma manera que, por ejemplo, existen los axiomas de la geometría euclideana. Cantor introdujo la gran mayoría de las nociones y construcciones de la teoría de conjuntos pero le falto tiempo para axiomatizarla.

Esta y otras dificultades similares motivaron la necesidad de axiomatizar, es decir, establecer reglas claras, para trabajar la teoría de conjuntos, de la misma manera que, por ejemplo, existen los axiomas de la geometría euclideana. Cantor introdujo la gran mayoría de las nociones y construcciones de la teoría de conjuntos pero le falto tiempo para axiomatizarla. La axiomatización más empleada actualmente se debe a Zermelo, Fraenkel, Hausdorff y otros, y se conoce como la teoría ZFE: Zermelo-Fraenkel-axioma de elección.

Esta y otras dificultades similares motivaron la necesidad de axiomatizar, es decir, establecer reglas claras, para trabajar la teoría de conjuntos, de la misma manera que, por ejemplo, existen los axiomas de la geometría euclideana. Cantor introdujo la gran mayoría de las nociones y construcciones de la teoría de conjuntos pero le falto tiempo para axiomatizarla. La axiomatización más empleada actualmente se debe a Zermelo, Fraenkel, Hausdorff y otros, y se conoce como la teoría ZFE: Zermelo-Fraenkel-axioma de elección. De hecho, la primera versión de los axiomas (aun incompleta) no requirió auxilio de la lógica, pero quedaba lejos del formalismo necesario para expresar la teoría que se convirtió en el fundamento de todas las matemáticas.

En la axiomatización propuesta se renuncia a tratar de definir lo que es un conjunto.

En la axiomatización propuesta se renuncia a tratar de definir lo que es un conjunto. En su lugar, se establece la existencia de dos conjuntos: el conjunto vacío y un conjunto infinito (digamos, los números naturales).

En la axiomatización propuesta se renuncia a tratar de definir lo que es un conjunto. En su lugar, se establece la existencia de dos conjuntos: el conjunto vacío y un conjunto infinito (digamos, los números naturales). A su vez, se enuncian reglas claras para la formación de nuevos conjuntos;

En la axiomatización propuesta se renuncia a tratar de definir lo que es un conjunto. En su lugar, se establece la existencia de dos conjuntos: el conjunto vacío y un conjunto infinito (digamos, los números naturales). A su vez, se enuncian reglas claras para la formación de nuevos conjuntos; por ejemplo, la unión de dos conjuntos es un conjunto, la colección de subconjuntos de un conjunto dado es un conjunto y otras aseveraciones similares.

En la axiomatización propuesta se renuncia a tratar de definir lo que es un conjunto. En su lugar, se establece la existencia de dos conjuntos: el conjunto vacío y un conjunto infinito (digamos, los números naturales). A su vez, se enuncian reglas claras para la formación de nuevos conjuntos; por ejemplo, la unión de dos conjuntos es un conjunto, la colección de subconjuntos de un conjunto dado es un conjunto y otras aseveraciones similares. No obstante, dos de los axiomas requieren una estricta formalización para evitar paradojas.

Los axiomas en cuestión se llaman de comprensión y de remplazo.

Los axiomas en cuestión se llaman de comprensión y de remplazo. Grosso modo comprensión establece la reglas para decidir cuando una subcolección de un conjunto es un conjunto,

Los axiomas en cuestión se llaman de comprensión y de remplazo. Grosso modo comprensión establece la reglas para decidir cuando una subcolección de un conjunto es un conjunto, mientras que remplazo advierte la posibilidad de formar conjuntos mediante funciones.

Los axiomas en cuestión se llaman de comprensión y de remplazo. Grosso modo comprensión establece la reglas para decidir cuando una subcolección de un conjunto es un conjunto, mientras que remplazo advierte la posibilidad de formar conjuntos mediante funciones.

Así pues, si tenemos un conjunto $a$ y queremos extraer subcolecciones de él, debemos tener claro que no todas ellas resultan en conjuntos.

Los axiomas en cuestión se llaman de comprensión y de remplazo. Grosso modo comprensión establece la reglas para decidir cuando una subcolección de un conjunto es un conjunto, mientras que remplazo advierte la posibilidad de formar conjuntos mediante funciones.

Así pues, si tenemos un conjunto $a$ y queremos extraer subcolecciones de él, debemos tener claro que no todas ellas resultan en conjuntos. El axioma de comprensión establece que sólo aquellas subcolecciones que se pueden obtener mediante una propiedad, tienen derecho a llamarse conjuntos.

Los axiomas en cuestión se llaman de comprensión y de remplazo. Grosso modo comprensión establece la reglas para decidir cuando una subcolección de un conjunto es un conjunto, mientras que remplazo advierte la posibilidad de formar conjuntos mediante funciones.
Así pues, si tenemos un conjunto $a$ y queremos extraer subcolecciones de él, debemos tener claro que no todas ellas resultan en conjuntos. El axioma de comprensión establece que sólo aquellas subcolecciones que se pueden obtener mediante una propiedad, tienen derecho a llamarse conjuntos. A saber, sea $P$ una propiedad aplicable a conjuntos, por ejemplo, $P(x)$ significa $x$ es finito, o $x$ es un número natural. Podemos formar la colección $b = \{x \in a : P(x)\}$.

Los axiomas en cuestión se llaman de comprensión y de remplazo. Grosso modo comprensión establece la reglas para decidir cuando una subcolección de un conjunto es un conjunto, mientras que remplazo advierte la posibilidad de formar conjuntos mediante funciones.

Así pues, si tenemos un conjunto $a$ y queremos extraer subcolecciones de él, debemos tener claro que no todas ellas resultan en conjuntos. El axioma de comprensión establece que sólo aquellas subcolecciones que se pueden obtener mediante una propiedad, tienen derecho a llamarse conjuntos. A saber, sea $P$ una propiedad aplicable a conjuntos, por ejemplo, $P(x)$ significa $x$ es finito, o $x$ es un número natural. Podemos formar la colección $b = \{x \in a : P(x)\}$. $b$ es el conjunto de elementos de $a$ que tiene la propiedad $P$.

En forma similar, si $f$ es una función que cumple una cierta propiedad $P$, y $a$ es un conjunto, entonces

$$b = \{y : \exists x \in a(y = f(x))\}$$

es un conjunto, que se denota $f[a]$.

En forma similar, si $f$ es una función que cumple una cierta propiedad $P$, y $a$ es un conjunto, entonces

$$b = \{y : \exists x \in a(y = f(x))\}$$

es un conjunto, que se denota $f[a]$. El axioma de remplazo es quien garantiza que $b$ es un conjunto. En pocas palabras, remplazo advierte: la imagen de un conjunto respecto a una función adecuada es un conjunto.

En forma similar, si $f$ es una función que cumple una cierta propiedad $P$, y $a$ es un conjunto, entonces

$$b = \{y : \exists x \in a(y = f(x))\}$$

es un conjunto, que se denota $f[a]$. El axioma de remplazo es quien garantiza que $b$ es un conjunto. En pocas palabras, remplazo advierte: la imagen de un conjunto respecto a una función adecuada es un conjunto. En ambos axiomas aparece una pequeña pero muy grave informalidad: ¿que propiedades $P(x)$ son aceptable? o ¿cuál es la definición precisa de ser propiedad?

Ahora viene en nuestro auxilio la lógica matemática.

Ahora viene en nuestro auxilio la lógica matemática. En lógica matemática se establece una fomra precisa de construir lenguajes formales.

Ahora viene en nuestro auxilio la lógica matemática. En lógica matemática se establece una fomra precisa de construir lenguajes formales. Sin entrar en detalles, un lenguaje formal nos sirve para expresar sin ambigüedades situaciones en matemáticas.

Ahora viene en nuestro auxilio la lógica matemática. En lógica matemática se establece una fomra precisa de construir lenguajes formales. Sin entrar en detalles, un lenguaje formal nos sirve para expresar sin ambigüedades situaciones en matemáticas. Por ejemplo, en la teoría de grupos, podemos usar el lenguaje $\{e, *, ^{-1}\}$ que consiste en un símbolo de constante $e$, un símbolo de función de dos variables $*$ y un símbolo de función de una variable $^{-1}$.

Ahora viene en nuestro auxilio la lógica matemática. En lógica matemática se establece una fomra precisa de construir lenguajes formales. Sin entrar en detalles, un lenguaje formal nos sirve para expresar sin ambigüedades situaciones en matemáticas. Por ejemplo, en la teoría de grupos, podemos usar el lenguaje $\{e, *, ^{-1}\}$ que consiste en un símbolo de constante $e$, un símbolo de función de dos variables $*$ y un símbolo de función de una variable $^{-1}$. Con este lenguaje podemos expresar los axiomas de la teoría de grupos:

Ahora viene en nuestro auxilio la lógica matemática. En lógica matemática se establece una fomra precisa de construir lenguajes formales. Sin entrar en detalles, un lenguaje formal nos sirve para expresar sin ambigüedades situaciones en matemáticas. Por ejemplo, en la teoría de grupos, podemos usar el lenguaje $\{e, *, ^{-1}\}$ que consiste en un símbolo de constante $e$, un símbolo de función de dos variables $*$ y un símbolo de función de una variable $^{-1}$. Con este lenguaje podemos expresar los axiomas de la teoría de grupos:

1. $\forall x, y, z((x * y) * z = (x * (y * z))$.
2. $\forall x(x * e = e * x = x)$.
3. $\forall x(x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$.

También tenemos un lenguaje apropiado para trabajar con los números naturales: $\{0, 1, +, -, *, \leq\}$.

También tenemos un lenguaje apropiado para trabajar con los números naturales: $\{0, 1, +, -, *, \leq\}$. Con el podemos expresar, por ejemplo, que la suma es conmutativa:

$$\forall x, y(x + y = y + x)$$

También tenemos un lenguaje apropiado para trabajar con los números naturales: $\{0, 1, +, -, *, \leq\}$. Con el podemos expresar, por ejemplo, que la suma es conmutativa:

$$\forall x, y(x + y = y + x)$$

o que el 1 es la identidad para la multiplicación: $\forall x(x * 1 = x)$.

Para la teoría de conjuntos disponemos de un lenguaje muy sencillo: consiste en tan sólo dos símbolos de relación $\{=, \in\}$ bien conocidos por todos.

Para la teoría de conjuntos disponemos de un lenguaje muy sencillo: consiste en tan sólo dos símbolos de relación $\{=, \in\}$ bien conocidos por todos. Por ejemplo, podemos expresar la existencia del conjunto vacío: $\exists x \forall y (y \notin x)$.

Para la teoría de conjuntos disponemos de un lenguaje muy sencillo: consiste en tan sólo dos símbolos de relación $\{=, \in\}$ bien conocidos por todos. Por ejemplo, podemos expresar la existencia del conjunto vacío: $\exists x \forall y (y \notin x)$. También podemos decir que la subcolección de subconjuntos de un conjunto dado es un conjunto: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$, donde hemos usado la abreviación $z \subseteq x$ que se expresa como $\forall u \in z (u \in x)$.

Estamos en posibilidad de decir que entendemos por propiedad $P$: cualquier propiedad relativa a conjuntos que pueda expresarse en el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Estamos en posibilidad de decir que entendemos por propiedad $P$: cualquier propiedad relativa a conjuntos que pueda expresarse en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Con esto queda totalmente formalizada la teoría de conjuntos, la teoría ZFE.

Estamos en posibilidad de decir que entendemos por propiedad $P$: cualquier propiedad relativa a conjuntos que pueda expresarse en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Con esto queda totalmente formalizada la teoría de conjuntos, la teoría ZFE. En principio, estoy resolvía la problemática sucitada a principios del siglo XX generada por la aparición de las paradojas.

Estamos en posibilidad de decir que entendemos por propiedad $P$: cualquier propiedad relativa a conjuntos que pueda expresarse en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Con esto queda totalmente formalizada la teoría de conjuntos, la teoría ZFE. En principio, estoy resolvía la problemática sucitada a principios del siglo XX generada por la aparición de las paradojas. Pero fue Cantor mismo quien dio pie a otro tipo de problemas que la formalización no resolvió. Problemas asociados a la formalización misma, esto es, al hecho de que el sistema de axiomas propuesto trataba de capturar los fenómenos entonces conocidos en las matemáticas.

Como se mencionó, la axiomatización ZFE postula la existencia de sólo dos conjuntos: el vacío y el de los números naturales, que por supuesto es infinito numerable.

Como se mencionó, la axiomatización ZFE postula la existencia de sólo dos conjuntos: el vacío y el de los números naturales, que por supuesto es infinito numerable. También vimos que existen diversos infinitos: cuando menos existen los naturales y los reales.

Como se mencionó, la axiomatización ZFE postula la existencia de sólo dos conjuntos: el vacío y el de los números naturales, que por supuesto es infinito numerable. También vimos que existen diversos infinitos: cuando menos existen los naturales y los reales. Aunque también podemos hablar de el conjunto de subconjuntos de reales (o de cualquier conjunto).

Como se mencionó, la axiomatización ZFE postula la existencia de sólo dos conjuntos: el vacío y el de los números naturales, que por supuesto es infinito numerable. También vimos que existen diversos infinitos: cuando menos existen los naturales y los reales. Aunque también podemos hablar de el conjunto de subconjuntos de reales (o de cualquier conjunto). Cantor demostró que, por ejemplo, el conjunto potencia de $\mathbb{R}$ tiene más elementos que $\mathbb{R}$ mismo.

ZFE nos permite hablar de diversos infinitos.

ZFE nos permite hablar de diversos infinitos. En presencia de ZFE podemos distinguir entre diversos infinitos.

ZFE nos permite hablar de diversos infinitos. En presencia de ZFE podemos distinguir entre diversos infinitos. Pero no nos permite distinguir entre todos los posibles infinitos.

ZFE nos permite hablar de diversos infinitos. En presencia de ZFE podemos distinguir entre diversos infinitos. Pero no nos permite distinguir entre todos los posibles infinitos. Carencia que se origina en que el único conjunto infinito que se postula es el del conjunto de los números reales.

Además siendo la matemática una ciencia en continua desarrollo, es natural suponer que habrían de aparecer situaciones no contempladas por los axiomas.

Además siendo la matemática una ciencia en continua desarrollo, es natural suponer que habrían de aparecer situaciones no contempladas por los axiomas. Peor aún, la misma teoría de conjuntos naciente, propiciaría resultados inesperados para ZFE, como en seguida veremos.

Ya sabemos que existen ordinales transfinitos, el menor de los cuales se representa como $\omega$, y en ciero sentido se trata del conjunto de los números naturales.

Ya sabemos que existen ordinales transfinitos, el menor de los cuales se representa como $\omega$, y en ciero sentido se trata del conjunto de los números naturales. Hemos mencionado que un conjunto $a$ es numerable si existe una biyección entre $a$ y $\omega$.

Ya sabemos que existen ordinales transfinitos, el menor de los cuales se representa como $\omega$, y en ciero sentido se trata del conjunto de los números naturales. Hemos mencionado que un conjunto $a$ es numerable si existe una biyección entre $a$ y $\omega$. También conocemos la existencia de los ordinales $\omega+1, \omega+2, ..., \omega+\omega, \ldots,$ etc. para los cuales se puede demostrar que existe una biyección entre cualquiera de ellos y $\omega$.

Ya sabemos que existen ordinales transfinitos, el menor de los cuales se representa como $\omega$, y en ciero sentido se trata del conjunto de los números naturales. Hemos mencionado que un conjunto $a$ es numerable si existe una biyección entre $a$ y $\omega$. También conocemos la existencia de los ordinales $\omega + 1, \omega + 2, ..., \omega + \omega, \ldots,$ etc. para los cuales se puede demostrar que existe una biyección entre cualquiera de ellos y $\omega$. Otro hecho relevante es que no exise una biyección entre $\omega$ y algún ordinal menor que él.

Ya sabemos que existen ordinales transfinitos, el menor de los cuales se representa como $\omega$, y en ciero sentido se trata del conjunto de los números naturales. Hemos mencionado que un conjunto $a$ es numerable si existe una biyección entre $a$ y $\omega$. También conocemos la existencia de los ordinales $\omega+1, \omega+2, ..., \omega+\omega, \ldots,$ etc. para los cuales se puede demostrar que existe una biyección entre cualquiera de ellos y $\omega$. Otro hecho relevante es que no exise una biyección entre $\omega$ y algún ordinal menor que él. Ordinales que cumplen esta propiedad se conocen como números iniciales o **cardinales**.

Ya sabemos que existen ordinales transfinitos, el menor de los cuales se representa como $\omega$, y en ciero sentido se trata del conjunto de los números naturales. Hemos mencionado que un conjunto $a$ es numerable si existe una biyección entre $a$ y $\omega$. También conocemos la existencia de los ordinales $\omega + 1, \omega + 2, ..., \omega + \omega, \ldots,$ etc. para los cuales se puede demostrar que existe una biyección entre cualquiera de ellos y $\omega$. Otro hecho relevante es que no exise una biyección entre $\omega$ y algún ordinal menor que él. Ordinales que cumplen esta propiedad se conocen como números iniciales o **cardinales**. Así, los cardinales (que son en particular ordinales) nos ayudan a "contar" los elementos de un conjunto.

Ya sabemos que existen ordinales transfinitos, el menor de los cuales se representa como $\omega$, y en ciero sentido se trata del conjunto de los números naturales. Hemos mencionado que un conjunto *a* es numerable si existe una biyección entre *a* y $\omega$. También conocemos la existencia de los ordinales $\omega + 1, \omega + 2, ..., \omega + \omega, \ldots$, etc. para los cuales se puede demostrar que existe una biyección entre cualquiera de ellos y $\omega$. Otro hecho relevante es que no exise una biyección entre $\omega$ y algún ordinal menor que él. Ordinales que cumplen esta propiedad se conocen como números iniciales o **cardinales**. Así, los cardinales (que son en particular ordinales) nos ayudan a "contar" los elementos de un conjunto. Vistos como cardinales, los ordinales iniciales se conocen como álef, de acuerdo a la primera letra $\aleph$ del alfabeto hebreo.

En ZFE se puede demostrar que a todo conjunto le podemos asociar una cardinalidad, es decir un cierto álef.

En ZFE se puede demostrar que a todo conjunto le podemos asociar una cardinalidad, es decir un cierto álef. El álef más pequeño es $\aleph_0$ que, recordemos es igual a $\omega$. El siguiente álef, $\aleph_1$, se asocia con conjuntos infinitos innumerables, los menores posibles con estas dos propiedades.

En ZFE se puede demostrar que a todo conjunto le podemos asociar una cardinalidad, es decir un cierto álef. El álef más pequeño es $\aleph_0$ que, recordemos es igual a $\omega$. El siguiente álef, $\aleph_1$, se asocia con conjuntos infinitos innumerables, los menores posibles con estas dos propiedades. En general podemos establecer una sucesión de álef:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega+\omega}, \ldots$$

En ZFE se puede demostrar que a todo conjunto le podemos asociar una cardinalidad, es decir un cierto álef. El álef más pequeño es $\aleph_0$ que, recordemos es igual a $\omega$. El siguiente álef, $\aleph_1$, se asocia con conjuntos infinitos innumerables, los menores posibles con estas dos propiedades. En general podemos establecer una sucesión de álef:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega+\omega}, \ldots$$

Cantor demostró que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es innumerable, y por lo ya mencionado debe corresponderle un álef.

En ZFE se puede demostrar que a todo conjunto le podemos asociar una cardinalidad, es decir un cierto álef. El álef más pequeño es $\aleph_0$ que, recordemos es igual a $\omega$. El siguiente álef, $\aleph_1$, se asocia con conjuntos infinitos innumerables, los menores posibles con estas dos propiedades. En general podemos establecer una sucesión de álef:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega+\omega}, \ldots$$

Cantor demostró que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es innumerable, y por lo ya mencionado debe corresponderle un álef. Pero ¿cuál?

En ZFE se puede demostrar que a todo conjunto le podemos asociar una cardinalidad, es decir un cierto álef. El álef más pequeño es $\aleph_0$ que, recordemos es igual a $\omega$. El siguiente álef, $\aleph_1$, se asocia con conjuntos infinitos innumerables, los menores posibles con estas dos propiedades. En general podemos establecer una sucesión de álef:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega+\omega}, \ldots$$

Cantor demostró que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es innumerable, y por lo ya mencionado debe corresponderle un álef. Pero ¿cuál? Cantor supuso que sería fácil demostrar que tal álef debe ser $\aleph_1$.

En ZFE se puede demostrar que a todo conjunto le podemos asociar una cardinalidad, es decir un cierto álef. El álef más pequeño es $\aleph_0$ que, recordemos es igual a $\omega$. El siguiente álef, $\aleph_1$, se asocia con conjuntos infinitos innumerables, los menores posibles con estas dos propiedades. En general podemos establecer una sucesión de álef:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega+\omega}, \ldots$$

Cantor demostró que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es innumerable, y por lo ya mencionado debe corresponderle un álef. Pero ¿cuál? Cantor supuso que sería fácil demostrar que tal álef debe ser $\aleph_1$. Inviertió muchos años de una de sus etapas más creativas en tratar de probar esta afirmación.

Lo que si pudo demostrar es que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es la misma que la del conjunto potencia de $\omega$, Lo que si pudo demostrar es que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es la misma que la del conjunto potencia de $\omega$, es decir, que existen tantos números reales como subconjuntos de naturales.

Lo que si pudo demostrar es que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es la misma que la del conjunto potencia de $\omega$, es decir, que existen tantos números reales como subconjuntos de naturales. Así, la cardinalidad de $\mathbb{R}$, $|\mathbb{R}| = |Pot(\omega)| = |2^\omega|$.

Lo que si pudo demostrar es que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es la misma que la del conjunto potencia de $\omega$, es decir, que existen tantos números reales como subconjuntos de naturales. Así, la cardinalidad de $\mathbb{R}$, $|\mathbb{R}| = |Pot(\omega)| = |2^\omega|$. La afirmación de Cantor es entonces

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad\qquad \textbf{HC}$$

Lo que si pudo demostrar es que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es la misma que la del conjunto potencia de $\omega$, es decir, que existen tantos números reales como subconjuntos de naturales. Así, la cardinalidad de $\mathbb{R}$, $|\mathbb{R}| = |Pot(\omega)| = |2^{\omega}|$. La afirmación de Cantor es entonces

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad \textbf{HC}$$

que se conoce como la hipótesis del continuo.

Muchos años después, en 1963, se completó la demostración de que es imposible demostrar o refutar la HC en base a los axiomas de ZFE.

Muchos años después, en 1963, se completó la demostración de que es imposible demostrar o refutar la HC en base a los axiomas de ZFE. Esto es tanto como decir que la HC es **independiente** de ZFE.

Muchos años después, en 1963, se completó la demostración de que es imposible demostrar o refutar la HC en base a los axiomas de ZFE. Esto es tanto como decir que la HC es **independiente** de ZFE. Esta prueba se logró, otra vez, con el auxilio de la lógica matemática.

Pero la lógica matemática también tiene sus propios problemas.

Pero la lógica matemática también tiene sus propios problemas. Un conjunto de fórmulas $\Phi$ de algún lenguaje formal se dice consistente, cuando no podemos derivar a partir de él una contradicción, lo cual se representa como

$$\Phi \nvdash \perp$$

Pero la lógica matemática también tiene sus propios problemas. Un conjunto de fórmulas $\Phi$ de algún lenguaje formal se dice consistente, cuando no podemos derivar a partir de él una contradicción, lo cual se representa como

$$\Phi \nvdash \perp$$

Es natural preguntarse si un conjunto dado de enunciados es consistente, pues de no serlo, no sirve de mucho;

Pero la lógica matemática también tiene sus propios problemas. Un conjunto de fórmulas $\Phi$ de algún lenguaje formal se dice consistente, cuando no podemos derivar a partir de él una contradicción, lo cual se representa como

$$\Phi \nvdash \perp$$

Es natural preguntarse si un conjunto dado de enunciados es consistente, pues de no serlo, no sirve de mucho; a partir de un conjunto inconsistente se puede derivar cualquier afirmación. Considere el conjunto $\Phi$ de axiomas de la teoría de grupos mencionado antes.

Según el teroema de **completud** de Gödel, para mostrar que un conjunto de enunciados es consistente, basta encontrar un modelo de $\Phi$,

Según el teroema de **completud** de Gödel, para mostrar que un conjunto de enunciados es consistente, basta encontrar un modelo de $\Phi$, es decir, una estructura donde se cumplan todos los enunciados en el conjunto.

Según el teroema de **completud** de Gödel, para mostrar que un conjunto de enunciados es consistente, basta encontrar un modelo de $\Phi$, es decir, una estructura donde se cumplan todos los enunciados en el conjunto.
En nuestro caso, un modelo de $\Phi$ es cualquier conjunto finito al que dotemos de una operación de grupo y cumpla los axiomas en $\Phi$.

Según el teroema de **completud** de Gödel, para mostrar que un conjunto de enunciados es consistente, basta encontrar un modelo de $\Phi$, es decir, una estructura donde se cumplan todos los enunciados en el conjunto.
En nuestro caso, un modelo de $\Phi$ es cualquier conjunto finito al que dotemos de una operación de grupo y cumpla los axiomas en $\Phi$. Por ejemplo, $\mathbb{Z}_2$ o $\mathbb{Z}_5$, o en general $\mathbb{Z}_n$.

Una pregunta más interesante es, si por ejemplo, los axiomas de Peano (que describen la aritmética de los naturales), son consistentes.

Una pregunta más interesante es, si por ejemplo, los axiomas de Peano (que describen la aritmética de los naturales), son consistentes. Como antes bastaría construir un modelo de estos axiomas.

Una pregunta más interesante es, si por ejemplo, los axiomas de Peano (que describen la aritmética de los naturales), son consistentes. Como antes bastaría construir un modelo de estos axiomas. Por supuesto, el modelo más inmediato sería $\omega$.

Una pregunta más interesante es, si por ejemplo, los axiomas de Peano (que describen la aritmética de los naturales), son consistentes. Como antes bastaría construir un modelo de estos axiomas. Por supuesto, el modelo más inmediato sería $\omega$. Pero la pregunta es: ¿que requerimos (axiomas) para poder construir $\omega$?

Una pregunta más interesante es, si por ejemplo, los axiomas de Peano (que describen la aritmética de los naturales), son consistentes. Como antes bastaría construir un modelo de estos axiomas. Por supuesto, el modelo más inmediato sería $\omega$. Pero la pregunta es: ¿que requerimos (axiomas) para poder construir $\omega$? Resulta ser que requerimos ciertos axiomas $\Psi$ para construir $\omega$.

Una pregunta más interesante es, si por ejemplo, los axiomas de Peano (que describen la aritmética de los naturales), son consistentes. Como antes bastaría construir un modelo de estos axiomas. Por supuesto, el modelo más inmediato sería $\omega$. Pero la pregunta es: ¿que requerimos (axiomas) para poder construir $\omega$? Resulta ser que requerimos ciertos axiomas $\Psi$ para construir $\omega$. Primero debemos cerciorarnos si $\Psi$ es consistente.

Un teorema de **incompletud** de Gödel asegura que, para poder mostrar que $\Psi$ es consistente, debemos emplear un conjunto de axiomas más (o al menos tan) poderoso que $\Psi$, Un teorema de **incompletud** de Gödel asegura que, para poder mostrar que $\Psi$ es consistente, debemos emplear un conjunto de axiomas más (o al menos tan) poderoso que $\Psi$, del cual tampoco sabemos si es consistente.

Un teorema de **incompletud** de Gödel asegura que, para poder mostrar que $\Psi$ es consistente, debemos emplear un conjunto de axiomas más (o al menos tan) poderoso que $\Psi$, del cual tampoco sabemos si es consistente. Un sistema más poderoso es ZFE.

Un teorema de **incompletud** de Gödel asegura que, para poder mostrar que $\Psi$ es consistente, debemos emplear un conjunto de axiomas más (o al menos tan) poderoso que $\Psi$, del cual tampoco sabemos si es consistente. Un sistema más poderoso es ZFE. Tampoco se pude demostrar que ZFE es consistente.

Un teorema de **incompletud** de Gödel asegura que, para poder mostrar que $\Psi$ es consistente, debemos emplear un conjunto de axiomas más (o al menos tan) poderoso que $\Psi$, del cual tampoco sabemos si es consistente. Un sistema más poderoso es ZFE. Tampoco se pude demostrar que ZFE es consistente. La demostración de estos hechos fue posible para Gödel porque se auxilió de un método de codificación que sólo es posible recurriendo a cierta porción de la teoría de conjuntos.

Así, para poder demostrar que la aritmética de Peano es consistente, debemos suponer ZFE.

Así, para poder demostrar que la aritmética de Peano es consistente, debemos suponer ZFE. Para mostrar que con tan sólo la aritmética de Peano no podemos demostrar que ésta es consistente, requerimos una porción generosa de ZFE.

Así, para poder demostrar que la aritmética de Peano es consistente, debemos suponer ZFE. Para mostrar que con tan sólo la aritmética de Peano no podemos demostrar que ésta es consistente, requerimos una porción generosa de ZFE. Este es sólo uno de los muchos ejemplos que ilustran como la lógica matemática se auxilia de la teoría de conjuntos para avanzar.

Así, para poder demostrar que la aritmética de Peano es consistente, debemos suponer ZFE. Para mostrar que con tan sólo la aritmética de Peano no podemos demostrar que ésta es consistente, requerimos una porción generosa de ZFE. Este es sólo uno de los muchos ejemplos que ilustran como la lógica matemática se auxilia de la teoría de conjuntos para avanzar. Como vimos antes, también la teoría de conjuntos requiere de la lógica matemática para desarrollarse.

Podríamos pasarnos un buen rato dando una lista de aquellas situaciones donde la teoría de conjuntos recurre a la lógica matemática y viceversa, problemas insolubles en lógica matemática sin el concurso de la teoría de conjuntos.

Podríamos pasarnos un buen rato dando una lista de aquellas situaciones donde la teoría de conjuntos recurre a la lógica matemática y viceversa, problemas insolubles en lógica matemática sin el concurso de la teoría de conjuntos. En la práctica diaria de estas disciplinas es es tan natural la participación de ambas, que deja de notarse;

Podríamos pasarnos un buen rato dando una lista de aquellas situaciones donde la teoría de conjuntos recurre a la lógica matemática y viceversa, problemas insolubles en lógica matemática sin el concurso de la teoría de conjuntos. En la práctica diaria de estas disciplinas es es tan natural la participación de ambas, que deja de notarse; se convierte en una tarea demandante pero inecesaria clarificar estas interacciones.

Mencionemos simplemente: en teoría de conjuntos las dos principales áreas de investigación, el forcing y la teoría de modelos núcleo, están basadas en la creación de modelos para teoría más fuertes que ZFE.

Mencionemos simplemente: en teoría de conjuntos las dos principales áreas de investigación, el forcing y la teoría de modelos núcleo, están basadas en la creación de modelos para teoría más fuertes que ZFE.
En lógica matemática, por su parte, las lógicas infinitarias o teoría de modelos se desarrollan sólo mediante la incorporación de la aritmética cardinal sofisticada.

# Con esto terminamos la plática

**Gracias.**