UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

TEORÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Antonio García

IZTAPALAPA, DISTRITO FEDERAL

Versión February 24, 2007

Contenido

Contenido i

Lista de figuras v

Capitulo 1. Primeros ejemplos y definiciones 1

1.1. Introducción 1

1.2. Definición de una ecuación diferencial 3

1.3. Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales 11

1.4. Interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales de primer orden 12

1.5. Estudio geométrico de las ecuaciones diferenciales de orden dos 15

1.6. Problemas 21

1.7. (*) Cálculo en diferencias 28

Capitulo 2. Espacios métricos y normados 31

2.1. Espacios métricos 31

2.2. Teorema de punto fijo de Banach 34

2.3. Subconjuntos compactos y puntos de acumulación 36

2.4. El conjunto de las funciones continuas $C(D, \mathbb{R}^n)$ 38

2.5. Espacios normados y de Banach 41

2.6. El espacio normado de las matrices 41

2.7. Problemas 42

2.8. *Aplicaciones del teorema de punto fijo de Banach 45

Capitulo 3. Los teoremas fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales 51

3.1. Teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales 51

3.2. Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales 55

3.3. Continuación de soluciones 59

3.4. Dependencia continua de las soluciones con respecto a condiciones iniciales y parámetros 63

3.5. Problemas 66

3.6. *Ecuaciones en diferencias 71

Capitulo 4. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales 73

4.1. Introducción 73

4.2. La forma de Jordan de una matriz 82

4.3. La exponencial de una matriz 89

4.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes 95

4.5. Más sobre la forma de Jordan y la matriz exponencial 100

4.6. Retratos fase en el plano 102

4.7. Retratos fase en el espacio 107

4.8. La foliación de Hopf 110

4.9. Ecuación de la primera variación 115

4.10. Álgebra lineal 119

4.11. Problemas 120

4.12. *Ecuaciones lineales en diferencias 123

Bibliografía 127

Índice 129

Lista de figuras

1 Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.7. 6

2 Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.8. 7

3 Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.9. 7

4 Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.10. 8

5 Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.11. 9

6 En el lado izquierdo se encuentran las isoclinas y el campo de pendientes de $x' = -\frac{t}{x}$, en el lado derecho se muestran algunas soluciones y las isoclinas. 14

7 Campo de velocidades y lineas de flujo del ejemplo 1.20. 16

8 Campo vectorial $f(x, y) = (-y, x)$ y soluciones de la correspondiente ecuación diferencial en el ejemplo 1.21. 18

9 Gráfica del potencial $V(x)$ de la ecuación de Duffing. 20

10 Soluciones de la ecuación de Duffing y curvas de nivel de $H(x, y)$. 21

1 Bola con centro en $\mathbf{x}_0$ y radio ϵ contenida en U. 32

2 La sucesión de conjuntos A_k para un rectángulo. 38

1 Construcción de la función $\phi_\epsilon(t)$. 52

1	Conjunto de índices de la matriz $\mathbf{C}$.	91
2	Gráficas de las soluciones de la subsección 4.6.1.	104
3	Gráficas de las soluciones de la subsección 4.6.2.	105
4	Gráficas de las soluciones de la subsección 4.6.3.	107
5	Gráficas de las soluciones de la sección 4.7.	109
6	Construcción de un toro.	111
7	Construcción de la esfera $\mathbb{S}^3$.	112
8	Subconjuntos de la esfera $\mathbb{S}^3$.	113
9	Flujo de la ecuación (8).	114

CAPITULO 1

Primeros ejemplos y definiciones

1.1. Introducción

Leibnitz conocía varias soluciones del *problema inverso a las tangentes* que consistía en determinar las curvas cuyas tangentes cumplían alguna condición dada, en su solución se utilizaban sobre todo métodos geométricos. Él prefirió utilizar las técnicas del recientemente desarrollado cálculo y, finalmente el once de Noviembre de 1675 escribió $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$, resolviendo así la primera ecuación diferencial.

En 1691, el problema inverso a las tangentes condujo a Leibnitz a descubrir simultáneamente el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $y\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$ y el teorema de cambio de variables en las integrales. A Leibnitz se deben también la regla para derivar productos, y los símbolos $\int$ para la integral y $\frac{dy}{dx}$ para la derivada.

Simultáneamente en Inglaterrra, Newton desarrollaba también el cálculo, y resolvía ecuaciones diferenciales y las utilizaba ampliamente en la física. Él desarrolló la idea de estudiar el movimiento de las partículas que tienen una descripción cinemática o dinámica mediante una ecuación diferencial y la usó en la formulación de las tres leyes de la mecánica. Con estas herramientas Newton estudió la mécanica celeste, en donde pudo explicar el movimiento de los planetas descrito por Kepler a partir de principios muy simples. Su siguiente objetivo fue explicar el movimiento de la luna con estos mismos principios; después de grandes esfuerzos y dolores de cabeza Newton reconoció su fracaso en la solución de este problema. Ahora se conoce a este

movimiento como el problema de tres cuerpos y sigue siendo fuente de inspiración en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

En 1696 John Bernoulli desafió a los mejores matemáticos de su tiempo a encontrar la curva sobre la cual se deslice una partícula que esté sólo sujeta a la acción de la gravedad y que pase por dos puntos dados en el menor tiempo posible. Una de las soluciones fue dada por su propio hermano James Bernoulli, quien planteó y resolvió la ecuación diferencial

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

En este trabajo se incluyó la observación de que las integrales de ambos lados deben ser iguales salvo una constante y aparece registrada por primera vez la palabra integral.

En esos años no había ninguna separación entre el cálculo y las ecuaciones diferenciales, ésta ocurrió en algún momento del siglo XIX más de doscientos años después y fue sobre todo por cuestiones didácticas, aunque desde un punto de vista más estructural formen una unidad indivisible y que tiene entre otras fuentes a la física y a la geometría.

Durante los años siguientes los matemáticos y filósofos más importantes continuaron estudiando muchos tipos de ecuaciones diferenciales y los problemas que conducían a éstas. Laplace, Euler y Lagrange, entre otros, hicieron numerosas aportaciones en esta dirección. Sin embargo, a veces hacían afirmaciones imprecisas y sin justificar, por ejemplo que las ecuaciones diferenciales tenían soluciones únicas, o que al variar un poco las condiciones iniciales las soluciones también variarían poco.

En el siglo XIX se hicieron evidentes las dificultades, incluso contradicciones que surgían en el seno del cálculo y de las ecuaciones diferenciales trabajando de esta manera. Las ideas matemáticas sufrieron críticas muy profundas que condujeron a un mayor rigor en el razonamiento

y al surgimiento, entre otras ramas de las matemáticas, del análisis matemático. La teoría de ecuaciones diferenciales que presentamos en este libro forma parte de este cuerpo.

1.2. Definición de una ecuación diferencial

En cursos elementales de ecuaciones diferenciales se dice que una ecuación diferencial es una ecuación en que interviene una función incógnita y sus derivadas. A continuación precisaremos este concepto.

DEFINICIÓN 1.1. Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ una función continua con dominio D, un conjunto abierto no vacío, entonces una *ecuación diferencial ordinaria (EDO)* tiene la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1.2.1}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. También llamaremos EDO a una ecuación que se puede transformar en una que tenga esta forma. El número n se llama el *orden* de la ecuación. La función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ se llama el *campo vectorial* asociado a la EDO. Una *solución* de esta ecuación diferencial es una curva $\mathbf{\Phi} : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto y en donde para cada $t \in I$ se cumple $\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{\Phi}(t))$.

La ecuación diferencial (1.2.1) describe el movimiento de un fluido formado por un gran número de partículas en donde la velocidad instantánea de la partícula que en el tiempo t está en la posición $\mathbf{x}$ es $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Las soluciones son las trayectorias de las diferentes partículas. Es por esto que a veces el campo vectorial también es llamado *campo de velocidades* y las soluciones *lineas de flujo.* Un punto sutil en la definición 1.1 es que en el lado derecho de la ecuación (1.2.1) el símbolo $\mathbf{x}$ representa a un punto en $\mathbb{R}^n$; y el campo vectorial $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es una función con dominio en $\mathbb{R}^{n+1}$ e imagen en $\mathbb{R}^n$. Mientras que en el lado izquierdo el símbolo $\mathbf{x}$ representa a un punto

de una curva, la cual es derivada con respecto a la variable independiente t y luego es evaluada. Puesto que las soluciones son curvas en el espacio $\mathbb{R}^n$, también son llamadas *curvas solución.*

Originalmente el objetivo en el estudio de las ecuaciones diferenciales fue dar explícitamente todas las soluciones de ecuaciones de la forma (1.2.1); o bien de forma implícita dentro de una ecuación algebraica eliminando todas las derivadas e integrales. Muy pronto se comprendió que este objetivo era muy difícil, ahora se sabe que es imposible. Por ejemplo, en el problema de tres cuerpos, ver 1.14, las soluciones existen pero no es posible expresarlas explícita o implícitamente. A continuación daremos algunos ejemplos que ilustran la definición 1.1.

Ejemplo 1.2. La ecuación $\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1$ no es una ecuación diferencial ordinaria sino una identidad válida para todas las funciones diferenciales e invertibles. Esta ecuación es simplemente el teorema de la función inversa. Claramente no tiene la forma (1.2.1).

Ejemplo 1.3. Sea $\epsilon > 0$. La ecuación $x'(t) = x(t) + x(t-\epsilon)$ no tiene la forma (1.2.1) pues la derivada de x en el tiempo t depende no sólo de lo que ocurre en t sino también de lo que pasó en el tiempo $t - \epsilon$. Este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones con retardo.* Similar es la ecuación

$$x'(t) = x(t) + \int_0^t x(s)\, ds, \qquad t > 0.$$

Ahora la derivada de la función $x(t)$ en el punto t depende de los valores de x en todo el intervalo $[0, t]$, este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones de evolución.*

Ejemplo 1.4. La ecuación $xx' = \cos(x)$ tampoco tiene la forma (1.2.1) pues la derivada de la función $x(t)$ no está aislada. Al despejarla obtenemos la ecuación $x' = \cos(x)/x$, que no es continua en $x = 0$. Este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones diferenciales con puntos*

singulares. Sin embargo, la ecuación $xx' = \operatorname{sen}(x)$ si es una EDO pues se expresa como $x' = f(x)$, donde la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ si $x \neq 0$ y $f(x) = 0$ es continua en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 1.5. La ecuación $(x')^2 + 1 = 0$ no tiene la forma (1.2.1). Al despejar la derivada obtenemos $x' = \pm\sqrt{-1}$, que es una ecuación diferencial definida sobre los números complejos.

EJEMPLO 1.6. Sea $f(t) = 1$ si $t > 0$ y $f(t) = -1$ si $t \leq 0$. Entonces la ecuación $x' = f(t)$ tampoco tiene la forma (1.2.1) pues $f(t)$ no es continua en $t = 0$; integrando se obtiene una *ecuación integral,* ver los problemas 1.23 y 3.35 y la proposición 3.1.

Algunas propiedades de las ecuaciones de los ejemplos anteriores son similares a las que tiene la ecuación (1.2.1), pero también presentan diferencias importantes y es necesario tener precaución cuando se hacen analogías entre las EDO's y ellas. En este libro estudiaremos principalmente aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden escribir en la forma (1.2.1). En las secciones marcadas con (*) se trabajan las ecuaciones en diferencias, que son el análogo discreto de las EDO's y con las cuales comparten muchas propiedades. A continuación veremos algunas ecuaciones diferenciales ordinarias con orden $n = 1$. El dominio D será el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ en donde la función $f : D \mapsto \mathbb{R}$ que define a la ecuación diferencial es continua.

EJEMPLO 1.7. Sea $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Como esta función es continua en todo el plano, entonces la ecuación $x' = f(x, t)$ tiene la forma (1.2.1). Las siguientes funciones son todas las soluciones

$$\Phi_{\alpha\beta}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-\alpha)^2, & \text{si } t \leq \alpha; \\ 0, & \text{si } \alpha \leq t \leq \beta; \\ \frac{1}{4}(t-\beta)^2, & \text{if } \beta \leq t, \end{cases}$$

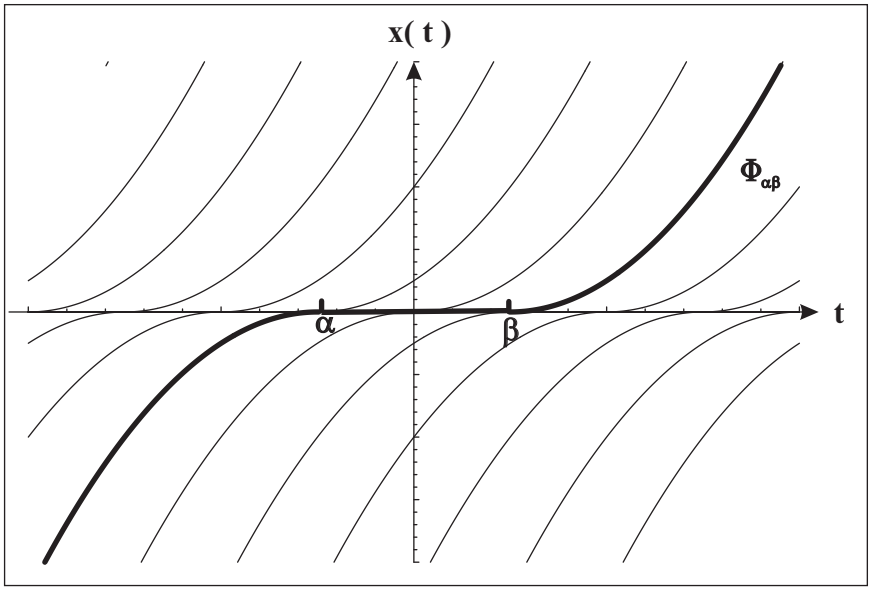

FIGURA 1. Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.7.

donde $\alpha \leq \beta$. Es posible que $\alpha = -\infty$ o bien $\beta = \infty$. Observamos que existe un conjunto infinito de soluciones que satisfacen $\Phi(0) = 0$.

EJEMPLO 1.8. Sea $x' = x - t$. Para cada $c \in \mathbb{R}$ existe la solución dada por $\phi_c(t) = 1 + t + ce^t$, $t \in \mathbb{R}$. Estas son las únicas soluciones, la figura 2 muestra su gráfica. Las soluciones se separan entre si al aumentar el tiempo, por lo que un pequeño cambio en las condiciones iniciales produce un error que va aumentando con el transcurso del tiempo.

EJEMPLO 1.9. Sea $x' = 2xt$. Las soluciones son $\phi(t) = ce^{t^2}$ donde $t \in \mathbb{R}$. Ver la figura 3.

EJEMPLO 1.10. Sea $x' = -x/t$. Las únicas soluciones son las ramas de las hipérbolas $\phi(t) = c/t$ para $t \in I$, donde $I = (-\infty, 0)$ o bien $I = (0, \infty)$. Ver la figura 4.

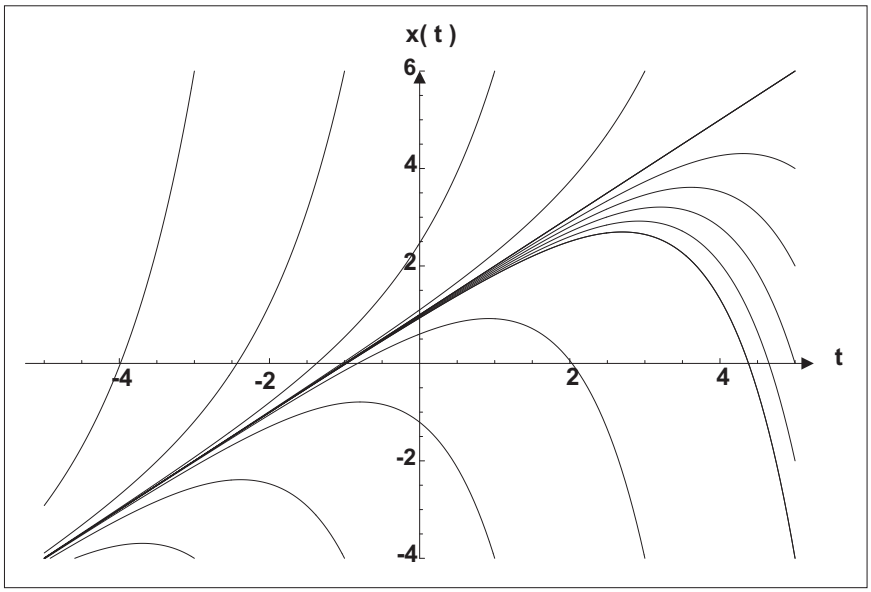

FIGURA 2. Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.8.

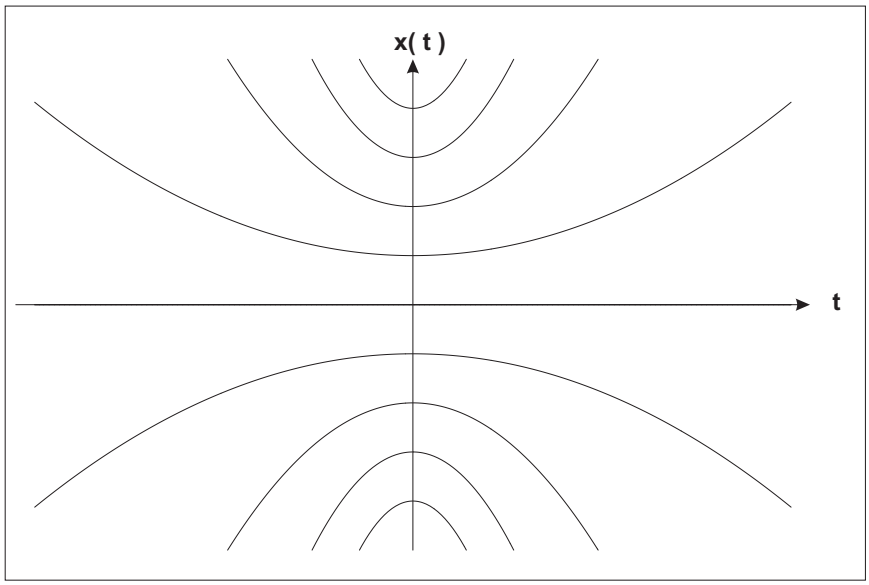

FIGURA 3. Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.9.

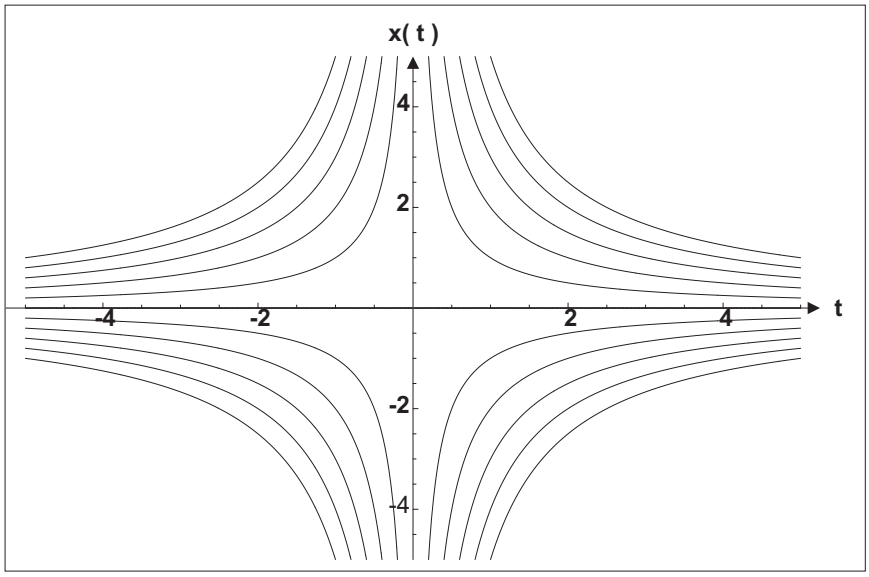

FIGURA 4. Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.10.

EJEMPLO 1.11. Las únicas soluciones de la ecuación diferencial $x' = x^2$ son las ramas de las hipérbolas $\phi(t) = \frac{1}{c-t}$ para todo $t \in I$, con $I = (-\infty, c)$ o bien $I = (c, \infty)$. Ver la Figura 5.

Observemos que las soluciones de los ejemplos 1.10 y 1.11 no están definidas sobre todos los números reales; en el último ejemplo el intervalo de definición de las soluciones no es constante. A continuación daremos ejemplos de EDO's con orden mayor que uno.

EJEMPLO 1.12. Una *ecuación diferencial lineal de segundo orden* tiene la forma

$$x'' + f(t)x' + g(t)x = h(t), \tag{1.2.2}$$

donde las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son continuas en algún intervalo abierto I. Introduciendo la variable $y = x'$ la ecuación diferencial anterior se transforma en

$$x' = y, \qquad y' = h(t) - f(t)y - g(t)x, \tag{1.2.3}$$

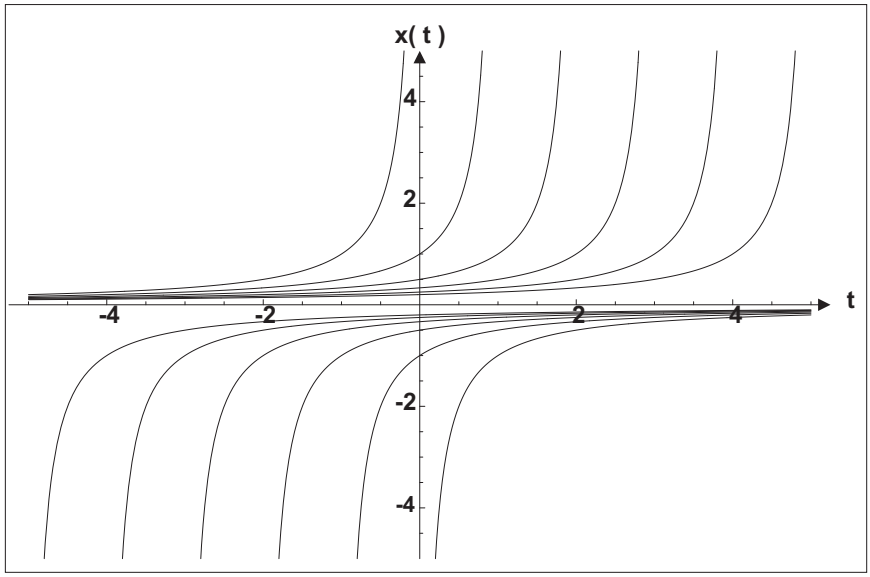

FIGURA 5. Gráfica de las soluciones del ejemplo 1.11.

que son las componentes de una EDO de orden dos.

En este ejemplo observamos dos cosas. La primera consiste en que frecuentemente las ecuaciones diferenciales se escriben en términos de sus componentes

$$x_k' = f_k(t, x_1, \ldots, x_n), \text{ para } k = 1, \ldots, n. \tag{1.2.4}$$

Las ecuaciones diferenciales presentadas en esta forma también son llamadas *sistemas de ecuaciones diferenciales.* También se observa que al introducir las variables $x_1 = y$, $x_2 = y'$,..., $x_k = y^{(k-1)}$, las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y^{(k)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$$

se transforman en sistemas de la forma

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \ldots, x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 1.13. La *segunda ley de Newton.* Suponiendo que la posición y la velocidad de una partícula de masa m en el espacio (o bien en una recta o un plano) están dadas por $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}'(t)$, donde t es el tiempo; y que además la partícula está sujeta a una fuerza externa que depende del tiempo, la posición y la velocidad y que es denotada por $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$, entonces la segunda ley de Newton queda descrita por la ecuación diferencial

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'). \tag{1.2.5}$$

Introduciendo una nueva variable $\mathbf{v} = \mathbf{x}'$, la ecuación (1.2.5) se escribe

$$\mathbf{x}' = \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Definiendo otra nueva variable $\mathbf{p} = m\mathbf{x}'$, la ecuación (1.2.5) se transforma en

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{m}\mathbf{p}, \qquad \mathbf{p}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \frac{1}{m}\mathbf{p}).$$

Notemos que ambos sistemas de ecuaciones diferenciales tienen la forma (1.2.1). El orden de ambas es el doble de la dimensión del vector $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 1.14. El *problema de tres cuerpos.* El movimiento de tres cuerpos con masas m_1, m_2 y m_3 sujetos a mutua interacción gravitacional está gobernado por las leyes de Newton según la ecuación diferencial vectorial ordinaria

$$m_i\mathbf{x}_i'' = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}, \qquad \text{para } i = 1, 2, 3, \tag{1.2.6}$$

donde $\mathbf{x}_i$ es la posición de la $i-$ésima partícula, con masa m_i y, G es la constante de gravitación universal. Para escribir este sistema de ecuaciones diferenciales en la forma (1.2.1) se introducen las nuevas variables $\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i'$, donde $i = 1, 2, 3$. Entonces el sistema se convierte en

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{v}_i, \qquad \mathbf{v}_i' = \sum_{j \neq i} \frac{G m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}, \qquad \text{para } i = 1, 2, 3. \tag{1.2.7}$$

Si las partículas se mueven en el plano, entonces con cada una de ellas se introducen otras cuatro ecuaciones, dos por cada variable $\mathbf{x}_i$ y dos por cada variable $\mathbf{v}_i$, y el sistema de ecuaciones diferenciales (1.2.7) tiene orden doce.

El dominio de este sistema es $\mathbb{R}^{12} - \Delta$, donde

$$\Delta = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) : \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \text{ ó } \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 \text{ ó } \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3\}.$$

Similarmente, si las partículas se mueven en la recta o el espacio el sistema de ecuaciones diferenciales (1.2.7) tiene orden seis o dieciocho respectivamente. En general el movimiento de n cuerpos con masas m_1,...,m_n sujetos a interacción gravitacional mutua es un sistema de ecuaciones diferenciales que cumple (1.2.6) ó (1.2.7) pero con el índice i corriendo ahora desde 1 hasta n. En este caso notemos que el orden es $2n$ si las partículas se mueven en la recta, $4n$ si se mueven en un plano y $6n$ si lo hacen en el espacio. El dominio del campo vectorial es ahora el subconjunto abierto $\mathbb{R}^{6n} - \Delta$, donde $\Delta = \{(\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v_n}) : \text{ existen } i \neq j \text{ tales que } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\}$.

1.3. Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

En general una ecuación diferencial ordinaria tiene un número infinito de soluciones. Para tomar una solución particular se puede elegir el valor que tiene en un tiempo dado.

DEFINICIÓN 1.15. Resolver la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *con condiciones iniciales* $(t_0, \mathbf{x_0}) \in D$ es encontrar una solución $\phi(t)$ de la ecuación diferencial tal que $\phi(t_0) = \mathbf{x_0}$. Este problema es denotado por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}. \tag{1.3.1}$$

EJEMPLO 1.16. Consideremos el problema $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0$, donde $f(t, x)$ está definida en el ejemplo 1.7. Si $x_0 > 0$, entonces cada funcion $\Phi_{\alpha\beta}(t)$, donde $\alpha \leq \beta = -2\sqrt{x_0}$ es solución, observemos que todas estas soluciones coinciden en un intervalo abierto alrededor de $t = 0$. La situación es peor si $x_0 = 0$, en este caso las soluciones son las funciones $\Phi_{\alpha\beta}(t)$, donde $\alpha \leq 0 \leq \beta$; en todos los intervalos que contienen al cero existen soluciones diferentes. En el teorema 3.7 daremos condiciones necesarias para garantizar la existencia y la unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 1.17. Continuando con el ejemplo 1.8, la única solución del problema de condiciones iniciales $x' = x - t$, $x(t_0) = x_0$ es $\phi_c(t) = 1 + t + ce^t$, donde $c = e^{-t_0}(x_0 - 1 - t_0)$.

EJEMPLO 1.18. La solución general de la ecuación $x'' + x = 0$ es $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$, donde c_1 y c_2 son constantes. Todas las soluciones tienen período 2π y $x(0) = x(2\pi)$. De donde el problema $x'' + x = 0$, $x(0) = 0$ y $x(2\pi) = 1$ no tiene soluciones. Por otro lado existen muchas soluciones tales que $x(0) = 0 = x(2\pi)$. Este tipo de problemas se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias con valores en la frontera.*

1.4. Interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden usando técnicas geométricas. Dada la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, resolver la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ es encontrar

las curvas del plano cuyas gráficas tienen pendiente igual a $f(t, \phi(t))$ en cada punto $(t, \phi(t))$ del conjunto D. Se puede pensar que $D \subset \mathbb{R}^2$ está cubierto con pequeños segmentos lineales de pendiente igual al valor de $f(t, x)$ y colocados en cada punto (t, x), y entonces las curvas solución son funciones cuyas gráficas son tangentes a cada uno de estos segmentos lineales. La gráfica obtenida al trazar estos pequeños segmentos se llama *campo de pendientes.*

Las curvas de nivel de la función $f(t, x)$ se llaman *isoclinas,* y están dadas por la ecuación $f(t, x) = k$, donde k es una constante. Éstas determinan el lugar geométrico en el que las soluciones tienen la misma inclinación; las soluciones de la ecuación diferencial cruzan estas curvas con la misma pendiente k.

Ejemplo 1.19. A continuación dibujaremos en el plano $t - x$ a las soluciones de la ecuación

$$x' = -\frac{t}{x}. \tag{1.4.1}$$

Una primera observación es que la función $f(t, x) = -t/x$ no está definida si $x = 0$ (el eje t); es positiva en el conjunto $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\frac{t}{x} > 0\}$ (el segundo y cuarto cuadrante); es cero si $t = 0$, $x \neq 0$ (el eje X); y es negativa en el conjunto $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\frac{t}{x} < 0\}$ (el primer y tercer cuadrante). Estos conjuntos determinan las regiones en donde las pendientes de las soluciones de la ecuación diferencial no están definidas, o bien son positivas, negativas o cero.

Por otro lado, $f(t, x) = f(-t, -x) = -f(t, -x) = -f(-t, x)$; estas igualdades implican que si $x(t)$ es una solución definida en el intervalo (a, b), entonces las funciones $-x(t)$, $x(-t)$ y $-x(-t)$ también son soluciones, la primera definida en el intervalo (a, b), y las otras dos en el intervalo $(-b, -a)$. Por lo que los ejes $t = 0$ y $x = 0$ son ejes de simetría en el campo de pendientes y para las soluciones.

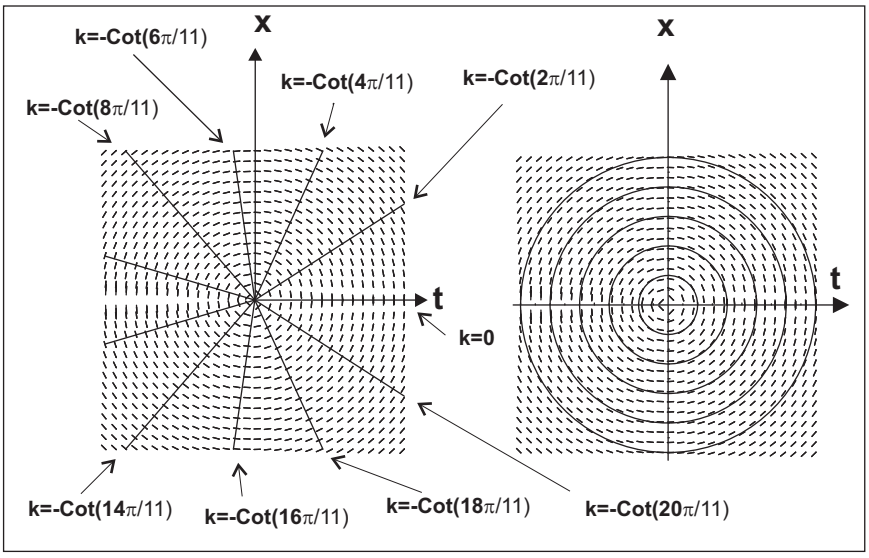

FIGURA 6. En el lado izquierdo se encuentran las isoclinas y el campo de pendientes de $x' = -\frac{t}{x}$, en el lado derecho se muestran algunas soluciones y las isoclinas.

Las isoclinas son $-t/x = k$ o bien $x = -\frac{1}{k}\,t$; que son rectas que pasan por el origen con pendiente $-\frac{1}{k}$, de aquí se sigue que en este ejemplo las isoclinas son ortogonales a las soluciones.

Por otro lado, el signo de x'' determina las regiones de concavidad de las soluciones. Por ejemplo, las regiones en donde $x'' > 0$ las soluciones son concavas hacia arriba.

Escribiendo (1.4.1) como $xx' = -t$ y derivando obtenemos $(x')^2 + xx'' = -1$, o bien $(-t/x)^2 + xx'' = -1$. Despejando x'' obtenemos

$$x'' = -\frac{x^2 + t^2}{x^3}.$$

Entonces la segunda derivada no está definida si $x = 0$, es positiva si $x < 0$ y es negativa si $x > 0$.

Procedamos a hacer la gráfica de las soluciones. En la región $x > 0$ las soluciones son concavas hacia abajo. Empiezan en el eje $x = 0$ en algún punto $t_0 < 0$, en este punto la pendiente

es infinita. Mientras $t < 0$ son crecientes, y deben tocar el eje $t = 0$ en algun punto x_0; en este punto las soluciones satisfacen $x' = 0$ y $x'' < 0$ por lo que es un máximo, además las soluciones deben ser simétricas con respecto a los ejes. En la figura 6 se encuentran el campo de pendientes y algunas soluciones.

Existen otras formas de obtener la gráfica de las soluciones; por ejemplo proceder directamente con el campo de pendientes. O bien observando que la ecuación (1.4.1) es una ecuación de variables separables y que tiene soluciones a los círculos $t^2 + x^2 = c^2$, los cuales se pueden graficar directamente. No siempre es posible proceder por estos métodos, varias de las ecuaciones del problema 1.33 no se pueden integrar directamente, o bien conducen a integrales muy complicadas y puede ser muy difícil dibujar el campo de pendientes.

Dibujar las soluciones por medio del análisis del campo de pendientes es tedioso, actualmente existen varios paquetes computacionales muy eficientes que trazan directamente las soluciones y al campo de pendientes. Las gráficas de este libro fueron generadas usando el programa MATHEMATICA, otras posibilidades son MAPLE y MATLAB.

1.5. Estudio geométrico de las ecuaciones diferenciales de orden dos

En esta sección estudiaremos sistemas con dos ecuaciones diferenciales de primer orden, y supondremos que dichas ecuaciones no dependen del tiempo por lo que sus componentes tienen la forma

$$x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y). \tag{1.5.1}$$

Donde las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ están definidas en un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$. Recordemos que esta ecuación diferencial representa el movimiento de un fluido que se mueve en un plano.

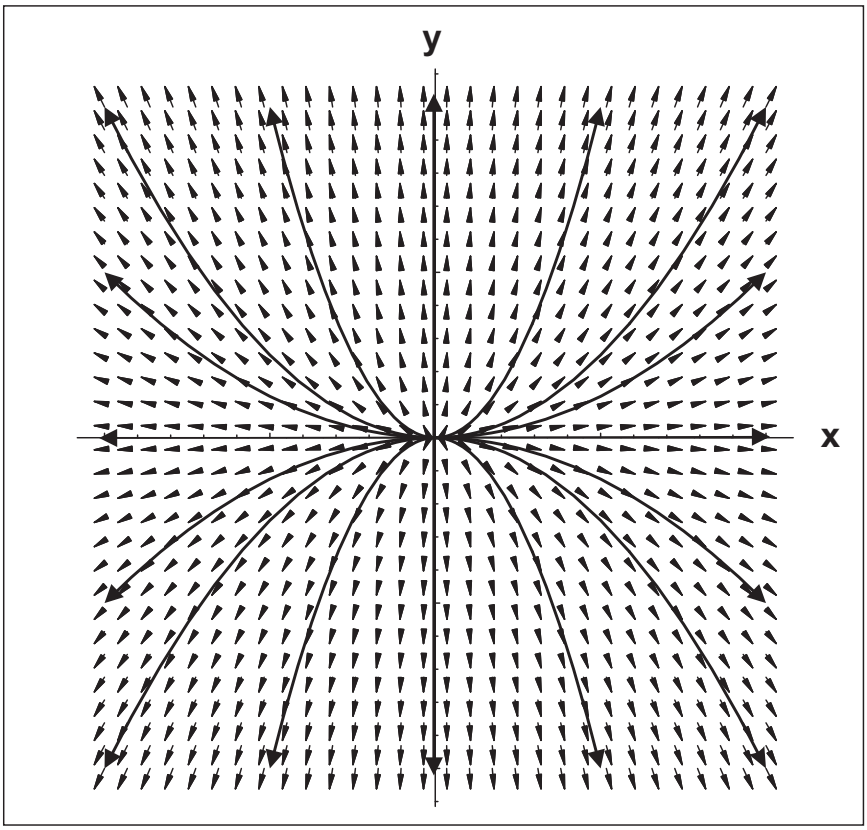

FIGURA 7. Campo de velocidades y lineas de flujo del ejemplo 1.20.

La velocidad de la partícula que se encuentra en el punto (x, y) es $(f(x, y), g(x, y))$ y notemos que esta velocidad es independiente del tiempo. El dibujo de las líneas de flujo con la orientación determinada por la dirección del tiempo se llama *retrato fase.*

EJEMPLO 1.20. El primer ejemplo que trabajaremos es

$$x' = x, \qquad y' = 2y.$$

Observemos que las dos ecuaciones son independientes, las curvas solución son $\alpha(t) = (c_1e^t, c_2e^{2t})$, o bien $x(t) = c_1e^t$, $y(t) = c_2e^{2t}$, donde c_1 y c_2 son constantes. Entonces

$$\lim_{t\mapsto\infty} x(t) = \lim_{t\mapsto\infty} y(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\mapsto-\infty} x(t) = \lim_{t\mapsto-\infty} = 0.$$

Además la pendiente del campo vectorial es $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2c_2}{c_1}e^t$, entonces $\lim_{t\mapsto\infty} m(t) = \pm\infty$ y $\lim_{t\mapsto-\infty} m(t) = 0$. Por lo que casi todas las soluciones salen del origen paralelas al eje X y se escapan al infinito con una dirección paralela al eje Y, las únicas excepciones ocurren cuando $c_1 = 0$ ó $c_2 = 0$. Ver la figura 7.

Ejemplo 1.21. A continuación estudiaremos el retrato fase de la ecuación diferencial

$$x' = -y, \qquad y' = x. \tag{1.5.2}$$

El campo vectorial es $\Phi(x, y) = (-y, x)$. Como $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, entonces la función constante $\alpha(t) = \mathbf{0}$ es una solución. Si $(x, y) \neq \mathbf{0}$ entonces $(x, y) \cdot \Phi(x, y) = (x, y) \cdot (-y, x) = -xy + yx = 0$; y el determinante $\det((x, y), (-y, x)) = x^2 + y^2 > 0$. De donde se sigue que el campo vectorial es perpendicular a la posición y el sistema de vectores $\{(x, y), \Phi(x, y)\}$ es positivamente orientado. En la figura 8 está el campo vectorial y algunas soluciones. Las curvas solución que no pasan por el origen son perpendiculares a la posición. Como el punto (x, y) tiene la misma dirección que la recta $y = kx$ entonces las soluciones también son perpendiculares a estas rectas. Las únicas curvas que cumplen esta condición son los círculos con centro en el origen.

Otra manera de obtener este resultado es escribiendo nuestro problema en coordenadas polares, sean

$$x = r\cos\,\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{1.5.3}$$

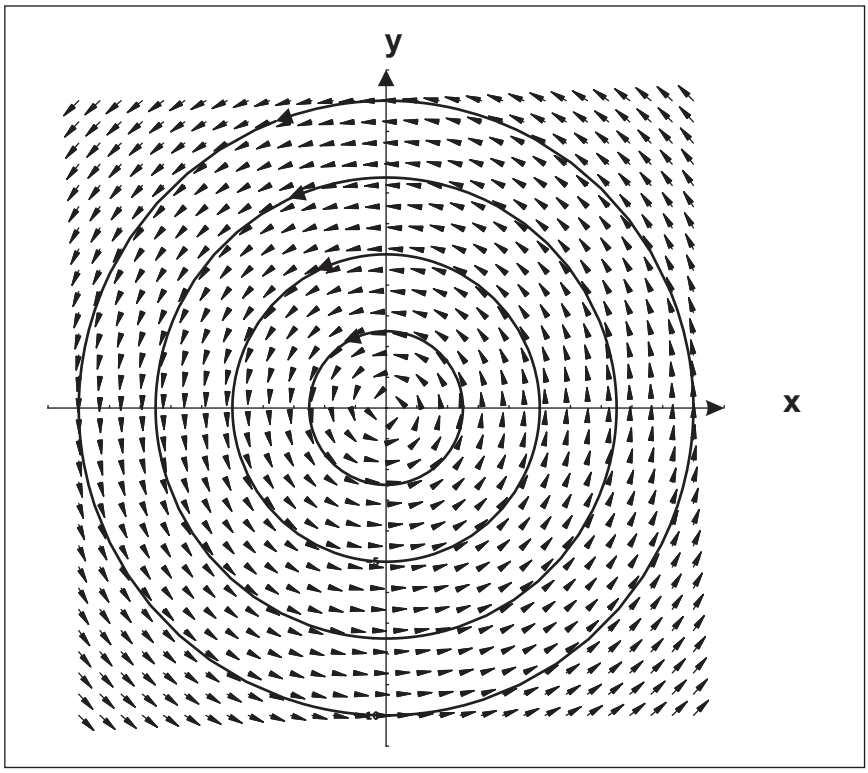

FIGURA 8. Campo vectorial $f(x, y) = (-y, x)$ y soluciones de la correspondiente ecuación diferencial en el ejemplo 1.21.

Entonces $x' = r' \cos\theta - \theta' r \operatorname{sen}\theta$, $y' = r' \operatorname{sen}\theta + \theta' r \cos\theta$. Sustituyendo ahora las ecuaciones (1.5.2) y (1.5.3) obtenemos el sistema $-r \operatorname{sen}\theta = r' \cos\theta - \theta' r \operatorname{sen}\theta$, $r \cos\theta = r' \operatorname{sen}\theta + \theta' r \cos\theta$. Despejando r' y θ' se tiene $r' = 0$, $\theta' = 1$. Como el radio y la velocidad radial son constantes entonces las soluciones se mueven en círculos con centro en el origen y además lo hacen con una velocidad angular igual a uno. Observemos que las figuras 6 y 8 son muy parecidas. ¿Puede el lector explicar la razón?

EJEMPLO 1.22. En este ejemplo construiremos el retrato fase de la ecuación diferencial

$$x' = y, \qquad y' = x - x^3, \tag{1.5.4}$$

conocida como la *ecuación de Duffing.* Esta ecuación es un ejemplo de *ecuación hamiltoniana,* que son ecuaciones que se escriben de la forma

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad y' = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

donde $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ es una función suave, la función H se llama el *hamiltoniano.* En este ejemplo es la función

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x), \qquad V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

la segunda función se llama el *potencial.*

Estas ecuaciones, y su generalización a más dimensiones, modelan sistemas en donde aparece una cantidad que se conserva (la energía); el hamiltoniano es precisamente esta cantidad. En el caso de la ecuación de Duffing el hamiltoniano es la suma de la energía cinética (el término $y^2/2$) y la energía potencial (la función $V(x)$). Además si $(x(t), y(t))$ es una solución de la ecuación de Duffing, entonces

$$\frac{d}{dt} H\left(x(t), y(t)\right) = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' = \left(-x + x^3\right) y + y\left(x - x^3\right) = 0,$$

Lo que significa que el hamiltoniano es constante a lo largo de las soluciones, lo que implica que las soluciones están contenidas en las curvas de nivel de $H(x, y)$.

A continuación construiremos la gráfica de las curvas de nivel de H. Como un primer paso estudiemos la gráfica de $V(x)$. En la figura 9 se observa que $V(x)$ tiene un único máximo local en 0, $V(0) = 0$; tiene dos mínimos locales en -1 y el 1, $V(\pm 1) = -1/4$; $V(x) < 0$ si y

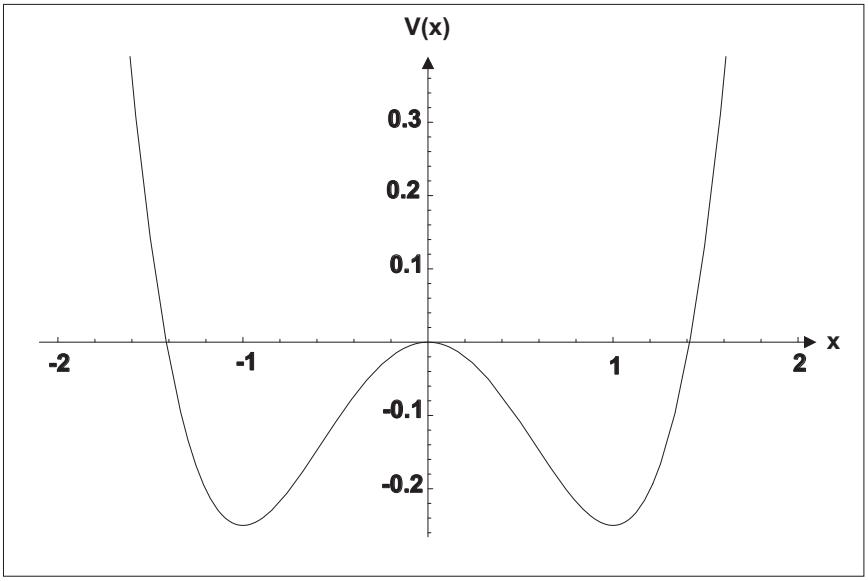

FIGURA 9. Gráfica del potencial $V(x)$ de la ecuación de Duffing.

sólo si $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$; $V(x) = 0$ si y sólo si $x = -\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$; $V(x) > 0$ si y sólo si $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

La curvas de nivel $H(x, y) = y^2/2 + V(x) = c$ se escriben en la forma

$$y = \pm\sqrt{2\,(c - V(x))}. \tag{1.5.5}$$

Si $c < -1/4$, ninguna x cumple la ecuación (1.5.5). Si $c = -1/4$, entonces $x = \pm 1$ cumple la ecuación (1.5.5), estos puntos corresponden a los mínimos de $V(x)$, en este caso $y = 0$. Si $-1/4 < c < 0$ entonces existe dos intervalos en x, uno contenido en el intervalo $(-\sqrt{2}, 0)$ y el otro en el intervalo $(0, \sqrt{2})$ en donde se pueden obtener valor reales de y en la ecuación (1.5.5). En este caso se obtienen dos ovalos simétricos con respecto al eje Y. Si $c = 0$, entonces para todo x en el intervalo $-(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se pueden obtener valores reales de y. En este caso la gráfica de (1.5.5) es una figura en forma de ocho.

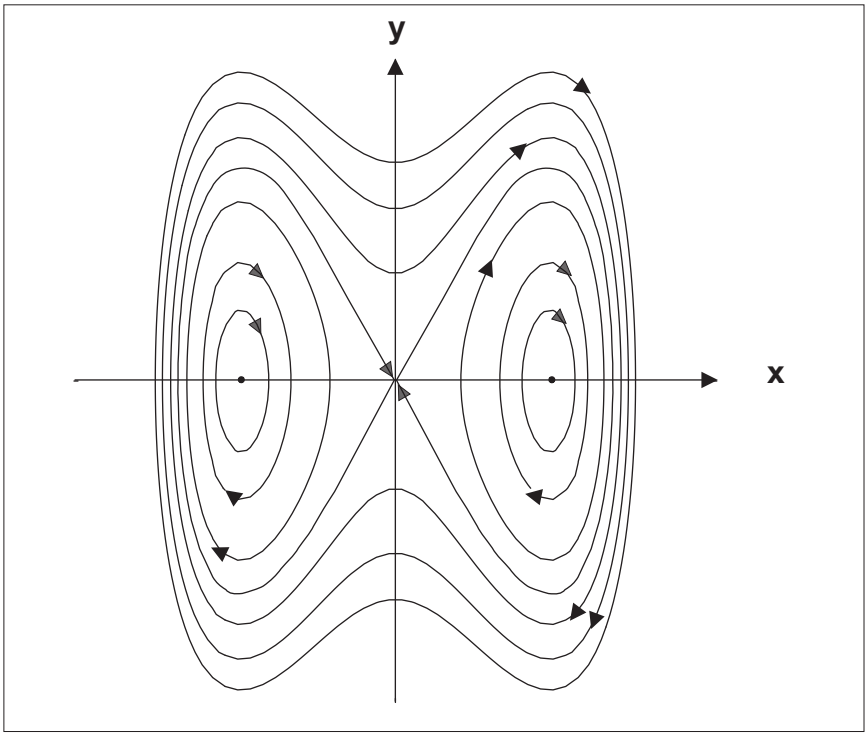

FIGURA 10. Soluciones de la ecuación de Duffing y curvas de nivel de $H(x, y)$.

Finalmente si $c > 0$ existe un intervalo en la variable x que contiene a $-(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ tal que la ecuación (1.5.5) está bien definida, y tiene una gráfica con forma lobular. En la figura 10 se encuentra la gráfica de las curvas de nivel del hamiltoniano y el diagrama de fase.

1.6. Problemas

En estos problemas es muy importante justificar todos los pasos, en algunos se trata de reconstruir los métodos y funciones que han sido enseñados en los cursos elementales de ecuaciones diferenciales. Sea cuidadoso en todos los pasos, especialmente cuando se haga un cambio de variable en una integral o se use el teorema de la función inversa.

1.23. Sea $f(t)$ una función continua, encuentre las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t)$ usando una integral. Dar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1 $x' = te^t$, $x(1) = 1$.

2 $x' = \cos(t)$.

3 $x' = e^{t^2}$, $x(0) = 1$.

4 $x' = f(t)$, $x(0) = 0$, donde $f(t) = -1$ si $t \leq 0$ y $f(t) = 1$ si $t > 0$. Aunque la función $f(t)$ no es continua, esta ecuación puede trabajarse de manera similar a las anteriores.

Observación 1.24. Encontrar las soluciones de este tipo de ecuaciones diferenciales se reduce a calcular integrales. En general, al proceso de encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales también es llamado *integración de una ecuación diferencial.*

1.25. Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones continuas. La ecuación diferencial $x' + p(t)x = q(t)$ se llama *ecuación diferencial lineal de primer orden,* demuestre que puede ser escrita en la forma (1.2.1) y también como

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\, e^{P(t)}\right) = q(t)e^{P(t)}, \text{ donde } P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds. \tag{1.6.1}$$

La función $e^{P(t)}$ se llama *factor integrante.* Transforme esta ecuación en

$$x(t) = e^{P(t_0)-P(t)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{P(s)-P(t)}q(s)\, ds.$$

Use esta observación para resolver

1 $x' - x = -t$, $x(1) = 1$.

2 $x' + x/t = 3t^2 - 1/t$, donde $t > 0$.

3 $x' - x = e^t$.

1.26. Una ecuación diferencial de la forma $x' = f(x)g(t)$ se llama *separable* pues la solución $x(t)$ que pasa por el punto (t_0, x_0) satisface

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{f(u)}\,du$$

si ambas integrales existen. Observe que las variables están separadas en esta relación y use este resultado para encontrar las soluciones de

1 $x' = xt$.

2 $x' = -x/t$, $x(0) = 1$.

3 $x' = -t/x$, $x(0) = 1$.

4 $x' = \frac{e^{t^2}}{\operatorname{sen}(1/x)}$, $x(0) = 1$.

1.27. En este problema se definirán las funciones trigonométricas seno y coseno. Suponiendo que la ecuación diferencial $x'' + x = 0$, $x(t_0) = \alpha$, $x'(t_0) = \beta$ siempre tiene una única solución, demuestre las siguientes propiedades:

1 Si $x(t)$, $y(t)$ son soluciones de $x'' + x = 0$, c_1, c_2, $h \in \mathbb{R}$ son constantes, entonces las funciones $x(t + h)$, $x'(t)$, $c_1x(t) + c_2y(t)$, $x(-t)$ también son soluciones.

2 La función $\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + (x'(t))^2}$ es constante.

3 Si $x(t_0) = 0$ y $x'(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ entonces $x(t) = 0$.

4 Si $x(t_0) = y(t_0)$ y $x'(t_0) = y'(t_0)$ entonces $x(t) = y(t)$.

5 Defina a la función $\operatorname{sen}(x)$ como la solución $x'' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$; y a la función $\cos(x)$ como la solución de $x'' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

6 Demuestre

$$\frac{d\operatorname{sen}(t)}{dt} = \cos t, \qquad \frac{d\cos(t)}{dt} = -\operatorname{sen}(t).$$

7 Pruebe las muy conocidas identidades $\cos(t+s) = \cos(t)\cos(s) - \text{sen}\,(t)\text{sen}\,(s)$, $\text{sen}\,(t+s) = \cos(t)\text{sen}\,(s) + \text{sen}\,(t)\cos(s)$, $\cos(-t) = \cos(t)$, $\text{sen}^{\,2}(t) + \cos^2(t) = 1$.

8 Existe $\alpha > 0$ tal que $\cos(t) > 0$, $\frac{d}{dt}\cos(t) < 0$ para todo $t \in (0, \alpha)$, $\cos(\alpha) = 0$ y $\cos'(\alpha) = -1$.

9 Defina $\pi = 2\alpha$ y demuestre que $\text{sen}\,(\alpha) = 1$.

10 Demuestre que $\text{sen}\,(t)$ y $\cos(t)$ son periódicas de periodo 2π, y que $\text{sen}\,(x)$ es creciente en los intervalos $[0, \pi/2]$ y $[3\pi/2, 2\pi]$ y decreciente en $[\pi/2, 3\pi/2]$.

11 Grafique a las funciones $\text{sen}\,(t)$ y $\cos(t)$.

1.28. La siguiente es una ecuación separable

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}},$$

1 Integrando esta ecuación demuestre que las soluciones están definidas implícitamente por

$$\text{arcsen}x + \text{arcsen}y = c.$$

2 Demuestre que esta ecuación también tiene como soluciones

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C.$$

3 En este inciso se dará la relación entre las dos soluciones obtenidas. Sea $f(c) = C$ esta relación y sean $x = \text{sen}\,(u)$, $y = \cos(v)$ entonces $u + v = c$, y además $\text{sen}\,(u)\cos(v) + \text{sen}\,(v)\cos(u) = f(c) = f(u+v)$. Tome ahora el valor $v = 0$ y obtenga la relación entre c y C dada por la función $f(c)$.

4 Obtenga la identidad $\text{sen}\,(u)\cos(v) + \text{sen}\,(v)\cos(u) = \text{sen}\,(u+v)$.

Definición 1.29. Las funciones que son constantes a lo largo de todas las trayectorias se llaman *integrales* de la ecuación diferencial, la existencia de integrales en una ecuación diferencial reduce la complejidad del problema.

1.30. En este problema se necesita el teorema de Green. Una ecuación diferencial de la forma

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0 \tag{1.6.2}$$

se llama *exacta* si existe una función $F(x,y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisface

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(t,x), \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = N(t,x).$$

1 Demuestre que una condición necesaria para que tal función exista es

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x}, \tag{1.6.3}$$

y en este caso las soluciones satisfacen $F(t,x) = c$. Esto es, la función $F(t,x)$ es una integral de la ecuación.

2 De condiciones sobre el dominio de $F(t,x)$ para que (1.6.3) sea una condición suficiente para que la ecuación (1.6.2) sea exacta.

3 Demuestre que las ecuaciones separables son exactas.

4 Demuestre que la siguiente ecuación es exacta

$$(2x^3 + 2) + 3tx^2\,x' = 0.$$

1.31. Demuestre que la sustitución $y = x^{1-n}$ transforma la *ecuación de Bernoulli*

$$x' + p(t)x = q(t)x^n$$

en una ecuación diferencial lineal, (ver problema 1.25). De la solución general de esta ecuación.

1.32. La ecuación $x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$ se llama *ecuación de Riccati.* Sea $x_1(t)$ una solución de la ecuación de Riccati.

1 Demuestre que la solución general tiene la forma $x(t) = x_1(t) + y(t)$, donde $y(t)$ es la solución general de la siguiente ecuación de Bernoulli $y' - [q(t) + 2r(t)x_1(t)]\, y = r(t)y^2$.

2 Utilizando el problema 1.31 dar la solución general de la ecuación de Riccati cuando se conoce una solución particular $x_1(t)$.

3 Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación de Riccati, entonces la solución general $x(t)$ satisface

$$x(t) - x_1(t) = c\,(x(t) - x_2(t)) \exp\left(\int^t r(s)\,(x_1(s) - x_2(s))\; ds\right).$$

Hint: Defina la función $u = (x - x_1)/(x - x_2)$ y obtenga una ecuación diferencial para u. Observe que no se puede despejar la función $x(t)$ en terminos de las dos funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

4 Si y_1, y_2, y_3, y_4 son cuatro soluciones de la ecuación de Riccati entonces la razón armónica

$$\frac{(y_1 - y_3)\,/\,(y_1 - y_4)}{(y_2 - y_3)\,/\,(y_2 - y_4)}$$

en constante.

5 Si la función $r(t)$ nunca es cero entonces la sucesión de transformaciones $x = v(t)/r(t)$, $v = u'/u$ convierte la ecuación de Riccati en una ecuación lineal de segundo orden.

1.33. Utilizar la técnica de la sección 1.4 para dibujar las soluciones de las ecuaciones:

1 $x' = t^2 + x^2$.

2 $x' = 2 + t^2 - x^2$.

3 $x' = \frac{t+x}{t-x}$.

4 $x' = x(x-1)(x+1)$.

5 $x' = \operatorname{sen} x$.

1.34. Sea $H : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función suave. Entonces el *sistema gradiente* asociado es la ecuación diferencial

$$x' = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad y' = \frac{\partial H}{\partial y};$$

y el *sistema hamiltoniano* asociado es la ecuación diferencial

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

1 Demostrar que si $(x(t), y(t))$ es una solución de un sistema gradiente entonces $H(x(t), y(t))$ es creciente para todo $t \in \mathbb{R}$, o bien $(x(t), y(t)) = \mathbf{a}$ es un punto fijo. Demostrar que un sistema gradiente no tiene soluciones periódicas.

2 Demostrar que el hamiltoniano es una integral del sistema.

3 Demostrar que las órbitas del sistema gradiente y las del sistema hamiltoniano asociado a la misma función $H(x, y)$ son ortogonales.

4 En estos problemas las técnicas del cálculo diferencial de varias variables pueden ser útiles. Dibujar las soluciones de los sistemas hamiltonianos y gradientes asociados a las funciones

- $H(x, y) = y^2/2 + \cos(x)$. (Ecuación del péndulo).
- $H(x, y) = x^2 + y^2$. (Oscilador armónico).
- $H(x, y) = y^2 x + 1/3x^3 + (x^2 + y^2) + x + y$.

- $H(x,y) = y^2x - 1/3x^3 - (x^2+y^2) + x + y.$

1.7. (*) Cálculo en diferencias

En las secciones marcadas con (*) se proponen series de problemas para desarrollar los análogos discretos del cálculo diferencial e integral y de las EDO's llamados el cálculo en diferencias y las ecuaciones en diferencias. Mientras que los primeros se construyen sobre funciones definidas en intervalos, los segundos se construyen sobre sucesiones, sin embargo muchas de sus propiedades son similares. El conjunto de todas las sucesiones en $\mathbb{R}^n$ es denotado por $Suc(\mathbb{R}^n)$. Los problemas de esta sección pueden hacerse por medio de la inducción matemática pero sugerimos intentar las técnicas del cálculo primero.

Recordemos que la derivada y la integral de una función son

$$f'(a) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P| \mapsto 0} \sum f(x_i)\Delta x_i.$$

Donde P es la partición regular $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Tomando $h = 1$ en la definición de la derivada, o bien $b = a + n$ y $\Delta x_i = 1$ en la de la integral obtenemos

$$f'(a) \simeq f(a+1) - f(a), \qquad \int_a^{a+n} f(x)\,dx \simeq \sum_{k=1}^{n} f(a+k).$$

Utilizando estas aproximaciones, se definen sus análogos discretos equivalentes:

DEFINICIÓN 1.35. Sea $\{x_n\}$ una sucesión definida en $\mathbb{R}^n$, entonces la *diferencia* [1] y la *suma* son las sucesiones

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} x_k = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \ldots x_n.$$

[1] Tambien llamada la *variación.*

Otros dos operadores muy importantes y definidos en $Suc(\mathbb{R}^n)$ son el *shift* [2] y el operador *identidad* definidos como

$$E(x_n) = x_{n+1}, \qquad I(x_n) = x_n.$$

A veces es conveniente pensar que el shift es casi el operador identidad.

EJEMPLO 1.36. Para la sucesión $x_n = n$ tenemos

$$\Delta(x_n) = (n+1) - n = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$E(x_n) = n+1, \qquad I(x_n) = n.$$

1.37. Para las sucesiones $x_n = 2^n$, n^3, $n!$ calcular $\Delta(x_n)$, $\sum_{k=1}^{n} x_k$, $E(x_k)$.

1.38. Demostrar las siguientes proposiciones

1 El conjunto $Suc(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial.

2 Los operadores Δ, $\sum$, E y I son lineales.

3 $E^k(x_n) = x_{n+k}$.

4 $\Delta = E - I$.

5 $\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i}$.

6 $E^k(x_n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$.

7 $\Delta(x_n y_n) = E(x_n)\Delta(y_n) + y_n \Delta(x_n)$, (Regla del producto).

8 $\Delta\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{y_n \Delta(x_n) - x_n \Delta(y_n)}{y_n E(y_n)}$, (Regla del cociente).

[2] Este operador se traduce a veces como *corrimiento,* nosotros usaremos la palabra en ingles por ser más corta y ampliamente usada.

1.39. Demostrar las identidades análogas al teorema fundamental del cálculo:

$$\sum_{k=n_0}^{n_1-1} \Delta(x_k) = x_{n_1} - x_{n_0}, \qquad \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n_1-1} x_k\right) = x_{n_1}$$

DEFINICIÓN 1.40. Un operador de *antidiferencia* $\Delta^{-1} : Suc(\mathbb{R}) \mapsto Suc(\mathbb{R})$ es un operador que satisface $\Delta\Delta^{-1} = I$.

1.41. Demostrar

1 Los operadores de antidiferencia Δ^{-1} son lineales.

2 El operador definido por $\Delta^{-1}(x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ es una antidiferencia.

3 Si Δ^{-1} y Δ_1^{-1} son dos antidiferencias entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para toda sucesión $\{x_n\}$ se culmple $\Delta^{-1}x_n = \Delta_1^{-1}x_n + c$.

4 Si Δ^{-1} es una antidiferenciación entonces

$$\sum_{k=n_0}^{n_1-1} x_k = \Delta^{-1}(a_{n_1}) - \Delta^{-1}(a_{n_0}).$$

1.42. Encontrar todas las sucesiones que satisfagan

1 $\Delta x_n = 0$.

2 $\Delta x_n = x_n$ y además $x_0 = 1$.

1.43. Los polinomios factoriales están definidos por $x^{(0)} = 1$, $x^{(n)} = (x + 1 - n)x^{(n-1)}$.

1 Demostrar que $x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

2 Si $k \in \mathbb{N}$ entonces $k^{(n)} = \frac{n!}{(n-k)!}$, $n^{(n)} = n!$.

3 $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$.

4 $\Delta^n x^{(k)} = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{(k-n)}$.

5 $\Delta^n x^{(n)} = n!$.

CAPITULO 2

Espacios métricos y normados

2.1. Espacios métricos

Una de las mayores dificultades en el estudio de la teoría de ecuaciones diferenciales es la necesidad de usar ideas provenientes del análisis matemático como son los espacios métricos y los espacios normados. Con el fin de unificar la notación revisaremos algunos de estos conceptos en este capítulo, esperando que sean estudiados a profundidad en un curso de análisis matemático. Las demostraciones omitidas en este capítulo se localizan en la referencia [**6**]. Las secciones 2.2, 2.4, 2.6 y el teorema 2.21 han sido desarrollados con gran detalle.

DEFINICIÓN 2.1. Una *métrica* en el conjunto X es una función $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ tal que si x, y, $z \in X$ entonces se cumplen las siguientes cuatro propiedades:

1 $d(x, y) \geq 0$.

2 $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3 $d(x, y) = d(y, x)$.

4 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La última propiedad se llama la desigualdad del triángulo. El par $\{X, d\}$ se llama *espacio métrico*. La *distancia* entre x y y es $d(x, y)$.

DEFINICIÓN 2.2. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$ entonces la *bola abierta de radio ϵ y centro en x* es el conjunto $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$. Ver figura 1.

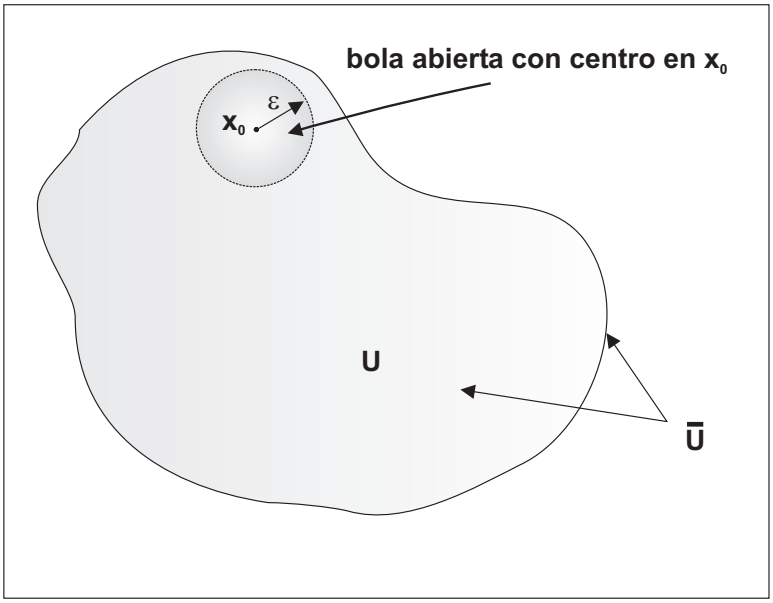

FIGURA 1. Bola con centro en $\mathbf{x}_0$ y radio ϵ contenida en U.

DEFINICIÓN 2.3. Un subconjunto $O \subset X$ es un *conjunto abierto* si para todo $x \in O$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $d(x, y) < \epsilon$ entonces $y \in O$.

Una reformulación de esta definición es que O es abierto si $x \in O$ entonces existe una bola $B_\epsilon(x)$ contenida completamente en O.

DEFINICIÓN 2.4. La sucesión $\{x_n\}$ de puntos del espacio métrico X es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si n, $m \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

DEFINICIÓN 2.5. La sucesión $\{x_n\}$ de puntos del espacio métrico X *converge* a $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. Esto se denota por

$$\lim_{n \mapsto \infty} x_n = x \text{ o bien } x_n \mapsto x.$$

Alternativamente, la sucesión $\{x_n\}$ converge a x si para toda bola abierta $B_\epsilon(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B_\epsilon(x)$.

Definición 2.6. El espacio métrico es *completo* si todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.

Definición 2.7. Un subconjunto $F \subset X$ es un *conjunto cerrado* si para toda sucesión $\{x_n\} \subset F$ tal que $x_n \mapsto x$ se tiene que $x \in F$.

Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto. Además los subconjuntos cerrados de espacios métricos completos son a la vez completos.

Definición 2.8. La *cerradura* del conjunto $A \subset X$ es el conjunto

$$\overline{A} = \bigcap \{F : A \subset F,\ F \text{ es cerrado}\}.$$

La cerradura del conjunto A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A, además A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

Definición 2.9. Un conjunto $F \subset X$ es *acotado* si está contenido completamente en una bola abierta $B_r(x)$.

Definición 2.10. Sean X y Y dos espacios métricos con métricas d_1 y d_2 respectivamente. La función $\Phi : X \mapsto Y$ es *continua* si para todo $x \in X$ y para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(x, y) < \delta$ entonces $d_2(\Phi(x), \Phi(y)) < \epsilon$.

Existen varias equivalencias de la definición anterior, nosotros podemos usar las siguientes: La función $\Phi : X \mapsto Y$ es continua si y sólo si para todo $x \in X$ y para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$

tal que $\Phi(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(\Phi(x))$. O bien, si y sólo si para cada punto $x \in X$ y para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a x se tiene que la sucesión $\{\Phi(x_n)\}$ converge a $\Phi(x)$.

2.2. Teorema de punto fijo de Banach

DEFINICIÓN 2.11. Sea X un espacio completo, y sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado, entonces la función $\Gamma : F \mapsto F$ es una *contracción* si existe $\lambda < 1$ tal que si x y y están en F, entonces

$$d(\Gamma(x), \Gamma(y)) < \lambda d(x, y). \tag{2.2.1}$$

Las contracciones son funciones continuas.

TEOREMA 2.12. *[Del punto fijo de Banach] Sea X un espacio métrico completo. Sea $F \subset X$ un subcojunto cerrado. Si $\Gamma : F \mapsto F$ es una contracción entonces existe un único punto fijo $\overline{x}$, esto es, que cumple $\Gamma(\overline{x}) = \overline{x}$.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba que daremos consta de dos pasos. El primero es mostrar la existencia del punto fijo, aquí se construye una sucesión de Cauchy. Como el espacio F es completo, entonces existe el límite de esta sucesión y éste será el punto fijo. En el segundo paso obtendremos la unicidad de este punto fijo. En ambos pasos usaremos fuertemente que la función $\Gamma(x)$ es una contracción.

Sea $x_0 \in F$ y definamos la sucesión $\{x_n\}$ de forma recursiva por $x_{n+1} = \Gamma(x_n)$; esto es $x_1 = \Gamma(x_0)$, $x_2 = \Gamma(x_1)$, $x_3 = \Gamma(x_2)$, etcétera.

AFIRMACIÓN 1. *La sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN: Usando varias veces la propiedad (2.2.1) observamos que

$$d(x_{n+1},x_n)=d(\Gamma(x_n),\Gamma(x_{n-1}))\leq\lambda d(x_n,x_{n-1})=\lambda d(\Gamma(x_{n-1}),\Gamma(x_{n-2})) \tag{2.2.2}$$

$$\leq\lambda^2 d(x_{n-1},x_{n-2})\leq\cdots\leq\lambda^n d(x_1,x_0).$$

Utilizando la ecuación previa reiteradamente y la desigualdad del triángulo obtemos que para $m\geq n$ se cumple

$$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_{m-2})+\ldots d(x_{n+1},x_n) \tag{2.2.3}$$

$$\leq\left(\lambda^{m-1}+\lambda^{m-2}+\cdots+\lambda^n\right)d(x_1,x_0)$$

$$=\lambda^n\left(\lambda^{m-n-1}+\lambda^{m-2}+\cdots+\lambda+1\right)d(x_1,x_0)$$

$$=\lambda^n\frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda}d(x_1,x_0)\leq\frac{\lambda^n}{1-\lambda}d(x_1,x_0)\mapsto 0.$$

De donde se sigue la afirmación. □

Como F es un espacio métrico completo, entonces esta sucesión es convergente y su límite $\overline{x}$ está en F.

AFIRMACIÓN 2. *El punto $\overline{x}$ satisface $\Gamma(\overline{x})=\overline{x}$.*

DEMOSTRACIÓN: Como la contracción $\Gamma(x)$ es continua entonces

$$\Gamma(\overline{x})=\Gamma\left(\lim_{n\mapsto\infty}x_n\right)=\lim_{n\mapsto\infty}\Gamma(x_n)=\lim_{n\mapsto\infty}x_{n+1}=\overline{x}.$$

□

Probemos ahora la unicidad. Si $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son dos puntos fijos entonces $d\left(\overline{x},\overline{y}\right)=d\left(\Gamma(\overline{x}),\Gamma(\overline{y})\right)\leq\lambda d\left(\overline{x},\overline{y}\right)$. Por tanto, $0\leq(\lambda-1)d(\overline{x},\overline{y})$. Como $\lambda<1$ entonces $d(\overline{x},\overline{y})=0$ y por tanto $\overline{x}=\overline{y}$. □

OBSERVACIÓN 2.13. La demostración de este teorema puede ser usada para obtener una aproximación del punto fijo mediante aproximaciones sucesivas. De hecho, al hacer tender m a infinito en la ecuación (2.2.3) se obtiene la desigualdad

$$d(\overline{x}, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$$

que da una estimación del error al reemplazar $\overline{x}$ por x_m. En los problemas se dan algunas aplicaciones del teorema de punto de Banach en varias áreas de las matemáticas.

2.3. Subconjuntos compactos y puntos de acumulación

En esta sección se darán varios de los más importantes conceptos del análisis y la topología.

DEFINICIÓN 2.14. Sea $F \subset X$, entonces $x \in X$ es un *punto de acumulación* de F si para todo $\epsilon > 0$ existe $y \in F$ tal que $0 < d(x, y) \leq \epsilon$.

Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de F si toda bola $B_\epsilon(x)$ tiene un número infinito de puntos de F.

DEFINICIÓN 2.15. Sea $F \subset X$, entonces una *cubierta abierta* de F es una familia $\{O_\alpha\}$ de conjuntos abiertos de X tales que $F \subset \bigcup O_\alpha$. Una subcubierta es un suconjunto de $\{O_\alpha\}$ que también es cubierta.

DEFINICIÓN 2.16. Sea $F \subset X$, entonces F es un *conjunto compacto* si toda cubierta abierta tiene subcubierta finita.

En otros cursos se estudian estos conceptos y se demuestra el siguiente teorema:

TEOREMA 2.17. *Sea $F \subset X$ y sean las siguientes proposiciones*

1 *El conjunto F es compacto.*

2 *Todo conjunto infinito de F tiene un punto de acumulación.*

3 *Toda sucesión de F tiene una subsucesión convergente.*

4 *El conjunto F es cerrado y acotado.*

entonces son equivalentes 1, 2, 3, y además implican 4. Si $X = \mathbb{R}^n$ entonces también esta última es equivalente a las otras.

DEFINICIÓN 2.18. La distancia entre el punto $\mathbf{y}$ y el conjunto B es $d(\mathbf{y}, B) = \inf_{\mathbf{x}\in B} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

PROPOSICIÓN 2.19. *$d(\mathbf{y}, B) \geq 0$ y además $d(\mathbf{y}, B) = 0$ si y sólo si $\mathbf{y}$ es un punto de acumulación de B.*

DEFINICIÓN 2.20. La frontera del conjunto B es el conjunto $\partial B = \overline{B} \cap \overline{\mathbb{R}^n - B}$.

La frontera de un conjunto es la capa que separa a este conjunto de su complemento. El conjunto B es abierto si para cada $x \in B$ se tiene que $d(x, \partial B) > 0$.

TEOREMA 2.21. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y no vacio, entonces existe una familia de conjuntos compactos $\{A_k\}$ tales que*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots, \qquad \text{y además} \qquad \cup_{k=1}^{\infty} A_k = U.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbf{x}_0 \in U$. Definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$A_k = \Big\{\mathbf{x} \in U : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq k, d(\mathbf{x}, \partial U) \geq \frac{1}{k}\Big\},$$

ver la figura 2. Entonces A_k es acotado, pues la primera desigualdad implica que $A_k \subset B(\mathbf{x}_0, k)$.

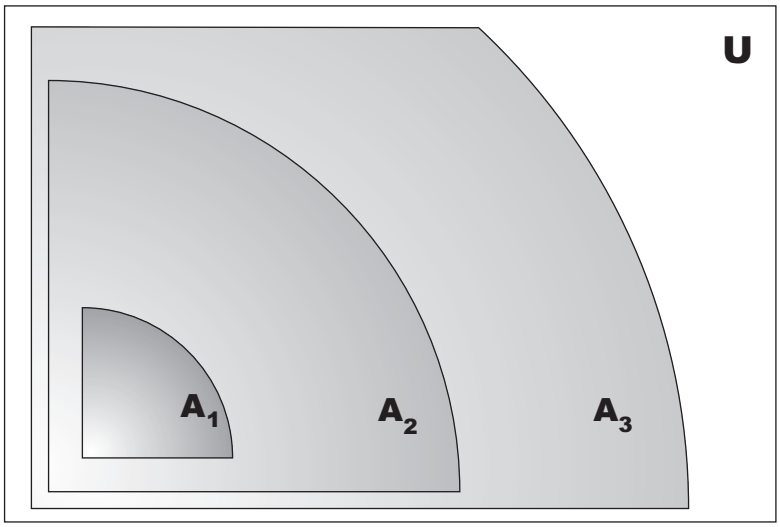

FIGURA 2. La sucesión de conjuntos A_k para un rectángulo.

Si $\{\mathbf{x}_i\} \subseteq A_k$ entonces $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0| \leq k$ y $d(\mathbf{x}_i, \partial U) \geq \frac{1}{k}$. Si además $\mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}$ entonces $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq k$ y $d(\mathbf{x}, \partial U) \geq \frac{1}{k}$, lo que implica que $\mathbf{x} \in A_k$. Por lo tanto cada conjunto A_k es cerrado. Usando el teorema 2.17 tenemos que cada A_k es compacto, y además $A_k \subset A_{k+1}$.

Para terminar probemos la siguiente igualdad $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = U$. Esta igualdad se prueba con dos contenciones. Claramente $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset U$. Por otro lado si $\mathbf{x} \in U$ entonces existe un número natural k_1 tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq k_1$. Como U es un conjunto abierto, entonces existe otro número natural k_2 tal que $d(\mathbf{x}, \partial U) \geq \frac{1}{k_2}$. Sea $k = \max\{k_1, k_2\}$, entonces $\mathbf{x} \in A_k$. De donde se sigue la otra contención. □

2.4. El conjunto de las funciones continuas $C(D, \mathbb{R}^n)$

En esta sección se estudiará al conjunto

$$C(D, \mathbb{R}^n) = \{f : D \mapsto \mathbb{R}^n : f \text{ es continua}\},$$

donde el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es compacto. En el problema 2.35 se estudian varias propiedades de este conjunto, entre ellas que es un espacio métrico completo con la métrica $d(f,g) = \max_{x\in D} |f(x) - g(x)|$. Esta métrica se le conoce como la *métrica uniforme.*

Necesitamos primero discutir la diferencia entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme. A continuación damos las dos definiciones.

DEFINICIÓN 2.22. La sucesión de funciones continuas $\{f_n : D \mapsto \mathbb{R}^n\}$ *converge puntualmente* a la función $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ si para todo $x \in D$ se sigue que $\lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = f(x)$. La sucesión $\{f_n : D \mapsto \mathbb{R}^n\}$ *converge uniformemente* a la función $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ y para todo $x \in D$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Esto lo denotaremos por $f_n \mapsto f$.

Es necesario notar que en la convergencia puntual se calcula el límite en cada punto, mientras que en la convergencia uniforme el límite se calcula globalmente, por lo ésta es más regular. Por ejemplo, si $f_n \mapsto f$ y todas las f_n son continuas entonces f es continua y además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\mapsto\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{2.4.1}$$

EJEMPLO 2.23. Sea $f_n(x) = (n+1)(n+2)x^n(1-x)$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Además, si $0 < x < 1$ entonces

$$\lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = \lim_{n\mapsto\infty} (n^2+3n+2)x^n(1-x) = (1-x)(\lim_{n\mapsto\infty} n^2x^n + 3\lim_{n\mapsto\infty} nx^n + 2\lim_{n\mapsto\infty} x^n)$$
$$=(1-x)(\lim_{n\mapsto\infty} \frac{n^2}{(1+p)^n} + 3\lim_{n\mapsto\infty} \frac{n}{(1+p)^n} + 2\lim_{n\mapsto\infty} \frac{n^0}{(1+p)^n}) = 0,$$

donde $p = (1-x)/x > 0$. En este límite usamos que $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$ si $p > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, cuya demostración está en [**6**]. Entonces

$$\int_0^1 \lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = 0.$$

Por otro lado

$$\lim_{n\mapsto\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\mapsto\infty} \int_0^1 (n+1)(n+2)x^n(1-x)\,dx = 1.$$

Esto no contradice (2.4.1), pues la convergencia de la sucesión $f_n(x)$ no es uniforme.

La convergencia uniforme es la convergencia de sucesiones en el espacio $C(D, \mathbb{R}^n)$. También en el problema 2.35 se estudian las propiedades de la convergencia uniforme.

DEFINICIÓN 2.24. Sea F una familia de funciones continuas definidas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^k$, entonces

1 La familia F es *uniformemente acotada* si existe $M > 0$ tal que para todo $x \in D$ y para toda función f en F se tiene $|f(x)| < M$.

2 La familia F es *equicontinua* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x, $y \in D$ y para toda $f \in F$ se sigue que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Nuestros principales ejemplos de familias de funciones equicontinuas y uniformemente acotadas se encuentran en el capítulo 3.

TEOREMA 2.25. *[Arzela-Ascoli] Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua contenida en $C(D, \mathbb{R}^n)$, entonces existe una subsucesión $\{m_k\}$ y una función $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ tal que la sucesión $\{f_{m_k}\}$ converge a f uniformemente.*

La siguiente versión de este teorema caracteriza los compactos del conjunto $C(D, \mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 2.26. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $F \subset C(D, \mathbb{R}^n)$ entonces el conjunto F es compacto si y solo si F es cerrado, equicontinuo y uniformemente acotado.*

En el problema 2.35 se pide demostrar este teorema.

2.5. Espacios normados y de Banach

DEFINICIÓN 2.27. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{C}$), entonces la función $\| \| : X \mapsto \mathbb{R}$ es una *norma* sobre X si cumple las siguientes cuatro propiedades:

1 Para todo $x \in X$: $\|x\| \geq 0$.

2 $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

3 Para todo x, $y \in X$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4 Para todo $x \in X$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

Un espacio vectorial con una norma se llama un *espacio normado.*

EJEMPLO 2.28. El espacio $\mathbb{R}^n$ es normado con la norma $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

PROPOSICIÓN 2.29. *Sea X un espacio normado entonces $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica en X.*

DEFINICIÓN 2.30. El espacio normado X tal que la métrica asociada es completa se llama *espacio de Banach.*

2.6. El espacio normado de las matrices

Sea $\mathbb{M}_n$ el conjunto de las matrices cuadradas definidas en $\mathbb{R}$ de orden n.

PROPOSICIÓN 2.31. *El espacio M_n con la norma*

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

es un espacio normado.

Este espacio normado es estudiado en los problemas 2.34, 2.40, 2.41, 2.42 y 2.43.

2.7. Problemas

2.32. La métrica del rio en $\mathbb{R}^2$ es:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |x_1-x_2|+|y_1|+|y_2| & \text{si } x_1 \neq x_2, \\ |y_1-y_2| & \text{si } x_1 = x_2. \end{cases} \tag{2.7.1}$$

1 Dibujar la bola de radio 1 y centro en $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$.

2 Demostrar que $\mathbb{R}^2$ con esta métrica es un espacio métrico completo.

3 Determinar si es un espacio normado.

4 Determinar cuales de las siguientes sucesiones son convergentes en este espacio: $\{(1/n,0)\}$, $\{(0,1/n)\}$, $\{(1/n,1)\}$, $\{(1,1/n)\}$.

2.33. 1 Demostrar que el conjunto $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo con cualquiera de las siguientes métricas:

$$d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\},$$

$$d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

$$d_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|.$$

Donde $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ y $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$.

2 Dar las normas $|\,|_i$ a las que están asociadas estas distancias.

3 Demostrar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach con cualquiera de estas normas.

Cuando la norma no tenga subíndice nos referiremos a la norma $|\,|_2$.

2.34. 1 Demostrar que el conjunto $\mathbb{M}_n$ de las matrices cuadradas de orden n es un espacio métrico con cualquiera de las métricas

$$d_1(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sup_{|\mathbf{x}|=1} \frac{|(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|},$$
$$d_2(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} (a_{ij}-b_{ij})^2},$$
$$d_3(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sup_{1\le i,j\le n} |a_{ij}-b_{ij}|\,.$$

2 Demostrar que $\mathbb{M}_n$ con cualquiera de las métricas anteriores es completo.

3 Dar las normas $\|\,\|_i$ a las que están asociadas estas distancias.

4 Demostrar que $\mathbb{M}_n$ con cualquiera de las normas $\|\,\|_i$ es de Banach.

5 Demostrar que $\|\mathbf{AB}\|_1 \le \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{B}\|_1$.

2.35. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, demostrar

1 Las siguientes son métricas definidas en el conjunto $C(D,\mathbb{R}^n)$.

(2.7.2)
$$d_1(f,g) = \max_{x\in D} |f(x)-g(x)|\,,$$
$$d_2(f,g) = \max_{x\in D} |f(x)-g(x)|\, e^{\alpha(x-a)},$$

en este último caso se supone $n=1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $D=[a,b]$. La distancia d_1 se llama la métrica uniforme.

2 Dar las normas $|\,|_i$ a las que están asociadas estas distancias. Cuando la norma no tenga subíndice nos referiremos a la norma $|\,|_1$.

3 Demuestre que si $\{f_k : D \mapsto \mathbb{R}^n\}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a la función $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$, entonces f es continua.

4 Dar un ejemplo de una sucesión de funciones continuas que converjan puntualmente a una función que no sea continua.

5 Demuestre que la sucesión de funciones continuas $\{f_k : D \mapsto \mathbb{R}^n\}$ converge uniformemente a la función $\{f : D \mapsto \mathbb{R}^n\}$ si y sólo si convergen en la métrica (2.7.2).

6 Demuestre que $C(D, \mathbb{R}^n)$ es un espacio métrico completo. Esto es, que toda sucesión de funciones $\{f_k : D \mapsto \mathbb{R}^n\}$ que sea de Cauchy con respecto a la métrica (2.7.2) converge a una función continua.

7 Demuestre que $C(D, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.

8 Suponiendo el teorema 2.25, demuestre el teorema 2.26.

2.36. Demuestre que $X_\alpha = \{f \in C([a, \infty), \mathbb{R}) : e^{\alpha t} f(t)$ es acotado en $[a, \infty)\}$ con la distancia

$$d(f, g) = \sup_{a \leq t} \{|f(t) - g(t)|\, e^{\alpha t}\},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ constante es un espacio métrico. Determinar si es completo o no.

2.37. Demostrar la proposición 2.31.

2.38. Siga la demostración del teorema 2.21, determine en donde falla esta demostración si

1 $U = [0, 1)$, $x_0 = 1/2$. (A pesar de que U es una unión numerable de compactos).

2 $U = \mathbb{Q}$, $x_0 = 0$.

2.39. Demostrar que el teorema de punto fijo de Banach es falso si

1 El espacio $\mathbf{X}$ no es completo.

2 El subconjunto $\mathbf{F}$ no es cerrado.

3 La constante $\lambda = 1$.

2.8. *Aplicaciones del teorema de punto fijo de Banach

El objetivo de los siguientes problemas es usar el teorema de punto fijo de Banach para mostrar algunas formas iterativas de resolver sistemas de ecuaciones lineales, los cuales pueden ser escritos como

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.8.1}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_n$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

2.40 (Método clásico). Demostrar los siguientes incisos

1 Resolver la ecuación (2.8.1) es equivalente a resolver

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{2.8.2}$$

2 Considere la función $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Entonces resolver la ecuación (2.8.1) es equivalente a encontrar un punto fijo de $\mathbf{T}$.

3 Por medio del teorema de punto fijo de Banach, dar una condición suficiente para la existencia de un único punto fijo.

4 Calcular mediante la iteración de la función $\mathbf{T}$ la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -26 \end{pmatrix}. \tag{2.8.3}$$

5 Dividir todo el sistema entre 30 y tratar de nuevo de calcular las soluciones del sistema mediante la nueva función asociada **T**.

6 Explicar la diferencia.

2.41 (Método clásico mejorado). Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

y sean los vectores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = (x_1^*, \dots, x_n^*) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b}$, entonces las componentes del vector $\mathbf{x}^*$ son

$$\begin{aligned} x_1^* &= (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2^* &= -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2, \\ x_3^* &= -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (1 - a_{33})x_3 - \cdots - a_{3n}x_n + b_3, \\ &\dots \\ x_n^* &= -a_{nn}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n + b_n. \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Si se cumple la condición del inciso d) del problema anterior, entonces $\mathbf{x}^*$ está más cercana de la solución que $\mathbf{x}$. Es de esperarse que el vector $(x_1^*, x_2, \ldots, x_n)$, en donde hemos cambiado la primera componente de $\mathbf{x}$ con la primera componente de $\mathbf{x}^*$, estará un poco más cerca que $\mathbf{x}$. Esto sugiere la siguiente forma de variar el método clásico: primero calculemos x_1^* por medio de la ecuación (2.8.4). En el cálculo de x_2^* utilizaremos el nuevo valor de x_1^* en lugar de x_1 en la segunda ecuación de (2.8.4). Depués, x_1^* y x_2^* pueden ser utilizados en vez de x_1 y x_2 para calcular x_3^* y así sucesivamente. Este es el método clásico mejorado.

1 Escribir el método clásico mejorado en una forma similar a la ecuación (2.8.4).

2 Probar que el algoritmo propuesto está dado por la función

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_-)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A_0} - \mathbf{A}_+) \mathbf{x} + (\mathbf{I} + \mathbf{A}_-) \mathbf{b}.$$

3 Demostrar que las soluciones de (2.8.1) son puntos fijos de la función $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.

4 Repetir las mismas preguntas realizadas en el problema 2.40 para este método.

.

2.42 (Método de Jacobi). Suponiendo que $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, ..., $a_{nn} \neq 0$ el sistema (2.8.1) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (\qquad\qquad -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + c_1), \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (-a_{21}x_1 \qquad\qquad -_{23}\, x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + c_2), \\
&\cdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}} (-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \ldots \qquad\qquad + c_n).
\end{aligned}$$

Lo que sugiere el siguiente método iterativo para resolver el sistema (2.8.1):

$$\begin{aligned}
x_1^* =& \frac{1}{a_{11}} \left(\qquad\qquad -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + c_1 \right), \\
x_2^* =& \frac{1}{a_{22}} \left(-a_{21}x_1 \qquad\qquad -_{23}\, x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + c_2 \right), \\
& \cdots \\
x_n^* =& \frac{1}{a_{nn}} \left(-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \ldots \qquad\qquad + c_n \right).
\end{aligned}$$

Este método se llama el método de Jacobi.

1 Demostrar que el método de Jacobi es descrito por la ecuación

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{A_0}^{-1} \left(\mathbf{A}_- + \mathbf{A}_+ \right) \mathbf{x} + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{b}.$$

2 Repetir las preguntas del problema 2.40 para este método.

2.43 (Método de Gauss-Seidel). Mejorar el método de Jacobi usando la discusión dada en el método clásico mejorado. En este caso la función es

$$\mathbf{x}^* = -\left(\mathbf{A}_- + \mathbf{A}_0 \right)^{-1} \mathbf{A}_+ \mathbf{x} + \left(\mathbf{A}_- + \mathbf{A}_0 \right)^{-1} \mathbf{b}$$

Después repetir las mismas preguntas realizadas en el problema 2.40 para este método.

2.44. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función suave, y tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < 1$, usando el teorema de punto fijo de Banach, demostrar que existe una única función $\alpha : [a, b] \mapsto [c, d]$ tal que $f(x, \alpha(x)) = \alpha(x)$. Demostrar que la función α es suave. Usando el teorema de la función implícita encontrar una ecuación diferencial satisfecha por esta ecuación. La aplicación del teorema de punto fijo de Banach en este problema se conoce como el *método de transformación de gráficas.*

2.45. Sea $\alpha > 0$, definamos la siguiente sucesión mediante recursión:

$$x_1 > \sqrt{\alpha}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right). \tag{2.8.5}$$

1 Demuestre que $\lim_{n\mapsto\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.

2 Si $\epsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$, demuestre que $\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\epsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$.

3 Si $\beta = 2\sqrt{\alpha}$, entonces $\epsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\epsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}$.

4 Si $\alpha = 3$ y $x_1 = 2$, observe que $\epsilon_5 < 4\,(10^{-16})$ y $\epsilon_6 < 4\,(10^{-32})$.

2.46. Reemplace la fórmula (2.8.5) por

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{\alpha}{p}x_n^{-p+1},$$

donde p es un entero positivo fijo, siguiendo el ejemplo anterior describa el comportamiento de la sucesión resultante $\{x_n\}$.

2.47. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, donde $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) \geq \delta > 0$ y $0 \leq f''(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Complete los detalles del siguiente desarrollo del *método de Newton* para encontrar las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

1 Demuestre que existe un único punto ξ en el intervalo (a, b) tal que $f(\xi) = 0$.

2 Elija $x_1 \in (a, b)$ y defina la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Interprete geométricamente en términos de la tangente de la gráfica de la función $f(x)$.

3 Demuestre que $\lim_{n\mapsto\infty} x_n = \xi$.

4 Si $A = M/(2\delta)$ demuestre que

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{1}{A}\left(A(x_1 - \xi)\right)^{2^n} \tag{2.8.6}$$

5 Sea $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^{1/3}$, intente aplicar el método de Newton. Explique sus resultados.

6 Aunque la prueba más sencilla del inciso 3 es por medio del teorema de punto fijo de Banach, la ecuación (2.8.6) demuestra que la convergencia en el método de Newton es mucho más rápida. Para la función $f(x) = x^3 + x$ definida en el intervalo $[-1, 1]$ haga una tabla en donde se compare la distancia entre el punto fijo 0 y el termino $n-$ésimo de la sucesión y las predichas por el teorema de Banach y la ecuación (2.8.6).

CAPITULO 3

Los teoremas fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales

3.1. Teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales

Mediante el el teorema fundamental del cálculo daremos una forma más comoda de trabajar para el problema de condiciones iniciales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}. \tag{3.1.1}$$

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea* $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ *una función continua,* $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ *entonces la función* $\phi(t)$ *es solución de (3.1.1) si y sólo si* $\phi(t)$ *es solución de la ecuación integral*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\, ds. \tag{3.1.2}$$

DEMOSTRACIÓN: $\rightarrow$) Si $\phi(t)$ es solución de (3.1.1) entonces

$$\phi'(t) = \mathbf{f}(t, \phi(t)), \qquad \phi(t_0) = \mathbf{x_0}. \tag{3.1.3}$$

Integrando y usando el teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$\phi(t) - \mathbf{x_0} = \phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \phi'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds.$$

Por lo tanto $\phi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds$.

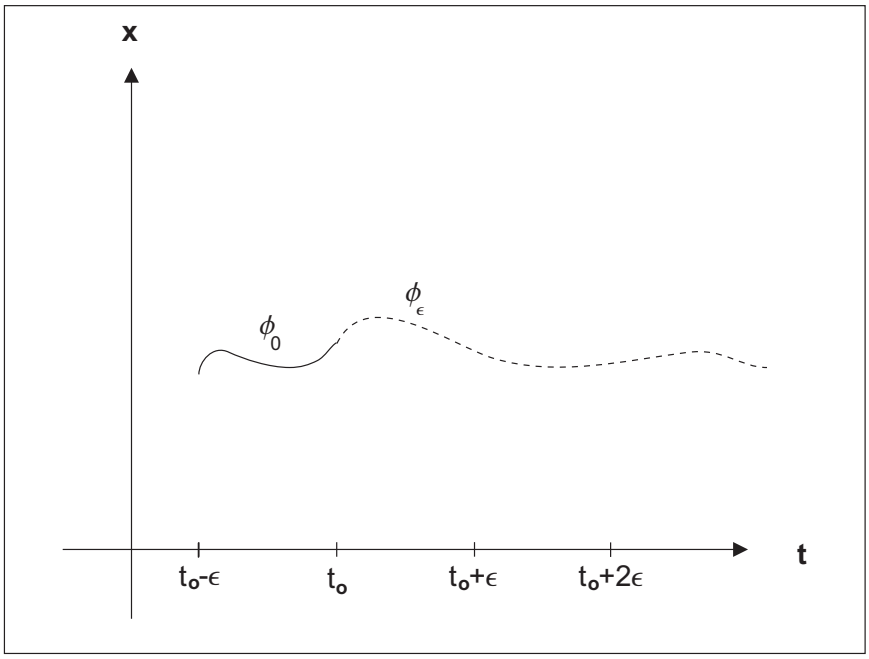

FIGURA 1. Construcción de la función $\phi_\epsilon(t)$.

$\leftarrow$) Si $\phi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds$ entonces $\phi(t_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \phi(s))\, ds = \mathbf{x}_0$. Además, del teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds\right) = f(t, \phi(t)).$$

□

TEOREMA 3.2. *[de existencia de Peano] Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ *continua, sea*

$$R = \{(t, \mathbf{x}) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\} \subset D.$$

Sean M *una cota superior para* $|f(t, \mathbf{x})|$ *en* R, $\alpha = \min\{a, b/M\}$, *entonces la EDO con condiciones iniciales:* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$ *tiene al menos una solución definida en* $[t_0, t_0 + \alpha]$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\delta > 0$ y sea $\phi_0 : [t_0 - \delta, t_0] \mapsto \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 que satisface $\phi_0(t_0) = \mathbf{x}_0$, $|\phi_0(t) - \mathbf{x}_0| \leq b$, $|\phi_0(t)| \leq M$. Y sea $0 < \epsilon \leq \delta$, a partir de $\phi_0(t)$ construiremos una nueva función de clase C^1, $\phi_\epsilon(t)$ en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$, ver la figura 1.

Si $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ tomemos $\phi_\epsilon(t) = \phi_0(t)$. Sea $\alpha_1 = \min\{\alpha, \epsilon\}$ entonces definamos

$$\phi_\epsilon(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\big(s, \phi_\epsilon(t-\epsilon)\big)\, ds, \quad \text{si } t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha_1. \tag{3.1.4}$$

Esta función está bien definida pues si $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \alpha_1$ entonces $t_0 - \delta \leq t_0 - \epsilon \leq s - \epsilon \leq t - \epsilon \leq t_0 + \alpha_1 - \epsilon \leq t_0$. Luego entonces $\phi_\epsilon(s-\epsilon) = \phi_0(s-\epsilon)$, y además $(s, \phi_\epsilon(s-\epsilon)) = (s, \phi_0(s-\epsilon)) \in R$, y la función $\mathbf{f}$ puede ser evaluada en este punto.

Por otro lado

$$\|\phi_\epsilon(t) - \mathbf{x}_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi_\epsilon(s-\epsilon))\, ds \right\| \leq M\,|t - t_0| \leq M\alpha_1 \leq M\alpha \leq b.$$

Ahora se puede definir $\phi_\epsilon(t)$ si t está en el intervalo $[t_0 + \alpha_1, t_0 + \alpha_2]$, donde $\alpha_2 = \min\{\alpha, 2\epsilon\}$ usando nuevamente la ecuación 3.1.4. Siguiendo de esta manera se define $\phi_\epsilon(t)$ sobre el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$. Esto es

$$\phi_\epsilon(t) = \begin{cases} \phi_0(t) & \text{si } t \in [t_0 - \delta, t_0]; \\ \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\big(s, \phi_\epsilon(t-\epsilon)\big)\, ds, & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Hay que observar que la definición de $\phi_\epsilon(t)$ depende de la elección de $\phi_0(t)$.

AFIRMACIÓN 3. *Si* $t,\ u \in [t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$ *entonces* $\|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(u)\| \leq M\,|t - u|$.

DEMOSTRACIÓN: Caso 1: Si $t_0 - \delta \leq t,\ u \leq t_0$, entonces:

$$\|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(u)\| = \|\phi_0(t) - \phi_0(u)\| = \|\phi'(r)\|\,|t - u| \leq M\,|t - u|\,.$$

En la segunda igualdad hemos usado el teorema del valor medio, el número r está en $[t, u]$.

Caso 2: Si $t_0 - \delta \leq t \leq t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(u)\| &= \left\|\phi_0(t) - \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{u} \mathbf{f}(s, \phi_\epsilon(t-\epsilon))\, ds\right)\right\| \\ &\leq \|\phi_0(t) - \mathbf{x}_0\| + \left|\int_{t_0}^{u} \mathbf{f}(s, \phi_\epsilon(s-\epsilon))\, ds\right| \\ &\leq M\,|t - t_0| + M\,|u - t| = M(t_0 - t) + M(u - t_0) = M\,|u - t_0|\,.\end{aligned}$$

El tercer paso se obtiene del teorema del valor medio y la acotación de $\mathbf{f}$ por M.

Caso 3: Si $t_0 \leq t$, $u \leq t_0 + \alpha$. En este caso tenemos

$$\|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(u)\| = \left\|\int_{t}^{u} \mathbf{f}(s, \phi_\epsilon(s-\epsilon))\, ds\right\| \leq M\,|u - t|$$

y con este caso se termina la demostración de la afirmación. □

Esta afirmación demuestra que la familia de funciones $\{\phi_\epsilon(t)\}$ es equicontinua. La siguiente afirmación prueba que esta familia es uniformemente acotada.

Afirmación 4. *Si* $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$ *entonces* $\|\phi_\epsilon(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b$.

Demostración: Si $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ entonces $\|\phi_\epsilon(t) - \mathbf{x}_0\| = \|\phi_0(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b$.

Si $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ entonces

$$\|\phi_\epsilon(t) - \mathbf{x}_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi_\epsilon(s-\epsilon))\, ds\right\| \leq |t - t_0| \leq M\alpha \leq Mb/M = b.$$

□

Sea $\{\epsilon_n\} \mapsto 0$, por el teorema de Arzela-Ascoli, la sucesión $\{\phi_{\epsilon_n}(t)\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente. Sin perdida de generalidad, supongamos que la misma sucesión

$\{\phi_{\epsilon_n}(t)\}$ converge uniformemente a $\phi(t)$. Entonces si $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ se sigue

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \lim_{n\mapsto\infty} \phi_{\epsilon_n}(t) = \lim_{n\mapsto\infty} \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi_{\epsilon_n}(s))\, ds \right) \\ &= \mathbf{x}_0 + \lim_{n\mapsto\infty} \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi_{\epsilon_n}(s))\, ds = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\mapsto\infty} \mathbf{f}(s, \phi_{\epsilon_n}(s))\, ds \\ &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds\end{aligned}$$

De donde se sigue que la función $\phi(t)$ es solución de (3.1.1). En este desarrollo se usó la convergencia uniforme de la sucesión $\{\phi_{\epsilon_n}(t)\}$ y la ecuación (2.4.1). □

Observación 3.3. Análogamente se puede obtener una solución de (3.1.1) sobre el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0]$, las dos soluciones así obtenidas pueden ser acopladas para obtener una solución sobre el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Observación 3.4. Es de esperar que dependiendo de la elección de la función inicial $\phi_0(t)$ y de ϵ_n se obtendrán diferentes soluciones, sin embargo pueden existir soluciones que no sean detectadas por este método, ver problema 3.25.

3.2. Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales

El teorema de Peano es insuficiente en varios aspectos. En primer lugar no da un método para calcular soluciones, solamente indica su existencia. En segundo lugar, es deseable que la ecuación (3.1.1) tenga una única solución como sucede en las ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen en la física y otras ramas del conocimiento, en donde se observan soluciones únicas. Esto nos lleva a buscar un teorema que garantice la unicidad de las soluciones de esta ecuación y que además nos indique como construir estas soluciones.

DEFINICIÓN 3.5. La función $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ es *localmente Lipschitz* si es continua y para todo subconjunto $K \subset D$ compacto existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $(\mathbf{x}, t)$ y $(\mathbf{y}, t) \in K$ entonces

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| . \tag{3.2.1}$$

OBSERVACIÓN 3.6. Al escribir la desigualdad (3.2.1) en la forma

$$\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq k$$

se observa que la constante k es una cota superior de la razón de cambio de la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ en la variable $\mathbf{x}$.

TEOREMA 3.7 (Existencia y unicidad de soluciones, Picard-Lindelöff). *Para la función* $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ *localmente Lipschitz, y para el conjunto*

$$R = \{(t, \mathbf{x}) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\} \subset D,$$

sean M *una cota de* $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$ *en* R*; y* k *la constante de Lipschitz de* $f(t, \mathbf{x})$ *en* R*; y* $\alpha = \min\{a, b/M, 1/k\}$*. Entonces el problema de condiciones iniciales (3.1.1) tiene solución única en el intervalo* $[t_0, t_0 + \alpha]$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F = \{\phi(t) \in C([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n) : \phi(t_0) = \mathbf{x}_0, \|\phi(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b\}$. El problema 2.35 demuestra que $C([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach con la norma uniforme

$$\|\phi\| = \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha} \|\phi(t)\| . \tag{3.2.2}$$

AFIRMACIÓN 5. *El conjunto* F *es cerrado en* $C([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\phi_n(t)\} \subset F$ una sucesión que converge uniformemente a la función $\phi(t)$. Por demostrar que $\phi(t) \in F$.

1) De las desigualdades $\|\mathbf{x}_0 - \phi(t)\| = \|\phi_n(t) - \phi(t)\| \leq d(\phi_n, \phi) \mapsto 0$ se sigue que $\mathbf{x}_0 = \phi(t_0)$.

2) Considere la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}\|\phi(t) - \mathbf{x}_0\| &\leq \|\phi(t) - \phi_n(t) + \phi_n(t) - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq \|\phi(t) - \phi_n(t)\| + \|\phi_n(t) - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq d(\phi, \phi_n) + b.\end{aligned}$$

Pero $\{\phi_n(t)\}$ converge uniformemente a $\phi(t)$, entonces $\|\phi(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b$.

Los incisos 1 y 2 implican que F es cerrado. □

Definamos ahora el operador $\Gamma : F \mapsto C([t_0, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$ tal que la imagen de la función $\phi(t)$ es la función $\Gamma\phi(t)$ definida por

$$\Gamma\phi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds. \tag{3.2.3}$$

AFIRMACIÓN 6. *Si $\phi(t) \in F$ entonces $\Gamma\phi(t)$ está en F.*

Esta afirmación se sigue de $\Gamma\phi(t_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_0} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds = \mathbf{x}_0$. Y además $\|\Gamma\phi(t) - \mathbf{x}_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds \right\| \leq M\,|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$.

AFIRMACIÓN 7. *El operador Γ es una contracción.*

Si $\phi(t)$ y $\psi(t) \in F$ entonces

$$\begin{aligned} d(\Gamma\phi(t), \Gamma\psi(t)) &= \|\Gamma\phi(t) - \Gamma\psi(t)\| \\ &= \max_{t_0 \le t \le t_0+\alpha} \left\| \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds \right) - \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \psi(s))\, ds \right) \right\| \\ &= \max_{t_0 \le t \le t_0+\alpha} \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \psi(s))\, ds \right\| \\ &\le \max_{t_0 \le t \le t_0+\alpha} \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \phi(s)) - \mathbf{f}(s, \psi(s))\|\, ds \\ &\le \max_{t_0 \le t \le t_0+\alpha} \int_{t_0}^{t} k\, \|\phi(s) - \psi(s)\|\, ds \le k\alpha \max_{t_0 \le t \le t_0+\alpha} \|\phi(s) - \psi(s)\| \\ &= k\alpha\, d(\phi(t), \psi(t)). \end{aligned}$$

Usando $k\alpha < 1$ se concluye la demostración de la afirmación.

Como Γ es una contracción definida en un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo, el teorema de punto fijo de Banach (2.12) implica que existe una única $\phi \in F$ tal que $\Gamma\phi = \phi$, esto es:

$$\phi(t) = \Gamma\phi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \phi(s))\, ds.$$

Por lo tanto la función $\phi(t)$ es la única solución del problema de condiciones iniciales (3.1.1). □

Observación 3.8. La demostración de este teorema puede ser usada para hallar las soluciones de una ecuación diferencial. Este es el *método de aproximaciones sucesivas.* La solución así encontrada generalmente está definida en un intervalo más grande que el garantizado por el teorema anterior.

Observación 3.9. Se puede demostrar el teorema de Peano (3.2) buscando puntos fijos del operador definido en (3.2.3), pero se requieren teoremas propios del análisis funcional como son el teorema de punto fijo de Schauder, ver la referencia [**2**].

EJEMPLO 3.10. Hallaremos la solución de la ecuación $x' = x$, $x(0) = 1$ por el método de aproximaciones sucesivas. Definamos el operador $\Gamma\phi(t) = 1 + \int_0^t \phi(s)\,ds$, y la sucesión de funciones $\phi_0(t) = 1$, $\phi_n = \Gamma\phi_{n-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) =& 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t,\\
\phi_2(t) =& 1 + \int_0^t (1 + s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},\\
\phi_3(t) =& 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},\\
& \mapsto e^t.
\end{aligned}$$

Que es la solución esperada.

3.3. Continuación de soluciones

Dos soluciones de una ecuación diferencial pueden ser diferentes simplemente porque no tienen el mismo intervalo de definición. Para evitar esta ambigüedad conviene trabajar con los intervalos más grandes en que están definidas las soluciones.

DEFINICIÓN 3.11. Sea $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ una ecuación diferencial, y sean $\phi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ y $\psi : J \mapsto \mathbb{R}^n$ dos soluciones. Entonces ψ es una extensión de ϕ si $I \subset J$ y para todo $t \in I$ se cumple $\phi(t) = \psi(t)$. La solución $\psi(t)$ es una *solución máxima* si ella misma no tiene otras extensiones. En este caso el intervalo I se llama un *intervalo maximal.*

PROPOSICIÓN 3.12. *Toda solución de la ecuación diferencial* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *tiene una extensión máxima.*

Esta proposición es una consecuencia del axioma del supremo y su demostración se deja como ejercicio; notemos que esta extensión no tiene que ser única. Continuemos hacia el principal

objetivo de esta sección que es explicar las obstrucciones que impiden que una solución sea extendida indefinidamente.

PROPOSICIÓN 3.13. *Sea* $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ *una función continua y acotada definida sobre el conjunto abierto* $D \subset \mathbb{R}^n$, *y sea* $\phi : (a,b) \mapsto \mathbb{R}^n$ *una solución de la ecuación diferencial* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$. *Entonces*

1 *Los dos límites* $\lim_{t\mapsto a^+} \phi(t) = \phi(a^+)$ *y* $\lim_{t\mapsto b^-} \phi(t) = \phi(b^-)$ *existen.*

2 *Si* $(b,\phi(b^-))$ *(respectivamente* $(a,\phi(a^+))$ *está en* D *entonces la solución* $\phi(t)$ *puede ser continuada a la derecha de* $t = b$, *(respectivamente a la izquierda del punto* $t = a$*).*

3 *Si* $\phi : (a,b) \mapsto \mathbb{R}^n$ *es una solución máxima y si* $\{t_k\} \mapsto b$ *entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión* $\{(t_k,\phi(t_k))\}$ *están en la frontera de* D.

DEMOSTRACIÓN: 1) Consideremos el extremo b. Sea M una cota de $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\|$ en D. Entonces $\phi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(t,\phi(s))\,ds$. Si $t_0 \le t < u \le b$ entonces

$$\begin{aligned}\|\phi(u) - \phi(t)\| &= \left\| \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{u} \mathbf{f}(t,\phi(s))\,ds \right) - \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(t,\phi(s))\,ds \right) \right\| \\ &= \left\| \int_{t}^{u} \mathbf{f}(t,\phi(s))\,ds \right\| \le \int_{t}^{u} \|\mathbf{f}(t,\phi(s))\|\,ds \le M\,|u-t|\end{aligned}$$

Entonces si $\{t_m\} \subset (a,b)$ y $t_m \mapsto b$ se tiene $\|\phi(t_m) - \phi(t_k)\| \le M\,|t_m - t_k|$, por lo que $\{\phi(t_m)\}$ es una sucesión de Cauchy, de donde $\lim_{t\mapsto b^-} \phi(t)$ existe.

2) Si $(b,\phi(b^-)) \in D$, entonces por el teorema de Peano existe una solución $\psi(t)$ que satisface $\psi(b) = \phi(b^-)$. Sea $\Gamma(t)$ la función definida por

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } t_0 \le t \le b, \\ \psi(t) & \text{si } b \le t. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función satisface la ecuación integral (3.1.2) y que es una extensión de $\phi(t)$. En la discusión anterior es suficiente suponer que el punto $(b, \phi(b^-))$ es un punto de acumulación de la alguna sucesión $(t_k, \phi(t_k))$, por lo que el inciso 3 es el contrarrecíproco del anterior. □

TEOREMA 3.14. *Sea* $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ *continua, sea* $\phi : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$ *una solución máxima de la ecuación* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. *Sea* $K \subset D$ *un conjunto compacto, entonces existe* $\alpha \in (a, b)$ *tal que si* $\alpha < t < b$ *entonces* $(t, \phi(t)) \notin K$.

En otras palabras, dado un compacto en el dominio de definición de una ecuación diferencial, cualquier solución máxima tiene un tiempo α en que escapa del compacto y no regresa.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que no existe tal α, entonces existe una sucesión creciente $\{t_n\}$ que converge a b y tal que $\mathbf{x}_n = (t_n, \phi(t_n)) \in K$. Como $\mathbf{x}_n$ es una sucesión contenida en un compacto, entonces tiene una subsucesión covergente. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\mathbf{x}_n \mapsto (b, \phi^+(b))$. Siguiendo el mismo argumento de la demostración de la proposición 3.13, se puede extender la función $\phi(t)$ a un intervalo de la forma $(a, b + \epsilon)$, lo que contradice la maximalidad de esta función. □

EJEMPLO 3.15. En el ejemplo 1.11 se vio que la función $\phi(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in (-\infty, 1)$ es solución de la ecuación diferencial $x' = x^2$. El dominio del campo vectorial $f(x, t) = x^2$ es $\mathbb{R}^2$. Este conjunto es cubierto por la familia creciente de discos compactos $\overline{\{B_n(\mathbf{0})\}}$, donde $n \in \mathbb{N}$. La solución máxima se sale de cada uno de estos compactos por los dos extremos, por el lado izquierdo si $t \mapsto -\infty$ y por arriba si $t \mapsto 1$.

EJEMPLO 3.16. Sean $h(t)$, $g(t)$ funciones continuas positivas definidas en el intervalo $[t_0, \infty)$ y tal que para toda $a > 0$ se sigue que $\lim_{b \mapsto \infty} \int_a^b \frac{dx}{g(x)} = \infty$. Entonces toda solución de la EDO $x' = h(t)g(x)$, $x(t_0) = x_0$, y $x_0 > 0$ puede ser extendida al intervalo $[t_0, \infty)$.

Si esto no fuera el caso entonces existiría una solución $\phi(t)$ con intervalo maximal $[t_0, T)$, donde $T > t_0$. Como $\phi(t)$ resuelve la EDO, entonces $\phi'(t) > 0$ y por lo tanto es creciente. La única posibilidad es que $\lim_{t \mapsto T} \phi(t) = \infty$. Por el método de separación de variables

$$\int_{t_0}^{t} h(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(s)}{g(\phi(s))}\, ds = \int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{dx}{g(x)}$$

Tomando el límite $t \mapsto T$ se tiene

$$\infty > \int_{t_0}^{T} h(s)\, ds = \lim_{t \mapsto T} \int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{dx}{g(x)}\, ds = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{g(x)}\, ds = \infty \quad !!!$$

EJEMPLO 3.17. En el ejemplo 2.34 se estudió el problema de tres cuerpos, que es el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x_i'} = \mathbf{v_i}, \qquad \mathbf{v_i'} = \sum_{j \neq i} \frac{G m_j (\mathbf{x_j} - \mathbf{x_i})}{|\mathbf{x_j} - \mathbf{x_i}|^3}, \qquad \text{para } i = 1, 2, 3. \tag{3.3.1}$$

El dominio de definición de este sistema de ecuaciones diferenciales es $\mathbb{R}^{12} - \Delta$, donde

$$\Delta = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) : \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \text{ ó } \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \text{ ó } \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3\}.$$

Existen dos tipos de soluciones en este sistema, las que están definidas sobre todo los números reales y las que tienen un tiempo finito de escape, éstas deben aproximarse al conjunto Δ.

Si $\Big(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t)\Big)$ es una solución entonces se puede demostrar que para alguna permutación i, j, k, los límites $\lim_{t \mapsto b} \mathbf{x}_i(t) = \lim_{t \mapsto b} \mathbf{x}_j(t)$, $\lim_{t \mapsto b} \|\mathbf{v}_i(t)\| \mapsto \infty$, $\lim_{t \mapsto b} \|\mathbf{v}_j\|(t) \mapsto \infty$ y finalmente $\lim_{t \mapsto b} \mathbf{x}_k(t)$ y $\lim_{t \mapsto b} \mathbf{v}_k(t)$ existen. Estos límites se interpretan

diciendo que las partículas i y j chocan entre si con velocidad infinita y la tercera partícula atestigua este choque. Puede darse el caso que las tres partículas choquen simultaneamente.

Poincaré conjeturó que en el movimiento de más cuerpos ésta sería la situación. Uno de sus primeros resultados es que el límite inferior de las distancias $\|\mathbf{r_k} - \mathbf{r_j}\|$ para i, $j = 1, 2, 3$ es cero. Esto no significa que dos partículas determinadas choquen, puede ocurrir que dos partículas se aproximen y luego se alejen, mientras otras dos se acercan, luego éstas se alejan al mismo tiempo que otras más se están acercando, etcetera. Aunque este caso parece imposible, a fines del siglo pasado se demostró la existencia de este tipo de órbitas.

3.4. Dependencia continua de las soluciones con respecto a condiciones iniciales y parámetros

En esta sección estudiaremos el comportamiento de las ecuaciones diferenciales con respecto a las condiciones iniciales y parámetros. Primero demostremos un resultado técnico muy útil.

TEOREMA 3.18. *[Lema de Growall] Sea* $\Gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ *una función continua, sean* α, $\beta \geq 0$ *constantes tales que*

$$\Gamma(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta\, \Gamma(s)\, ds \tag{3.4.1}$$

entonces $\Gamma(t) \leq \alpha \exp[\beta(t - a)]$.

OBSERVACIÓN 3.19. Este teorema despeja la función $\Gamma(t)$ de la desigualdad.

DEMOSTRACIÓN: La idea de la demostración es repetir el argumento usado en los cursos elementales de ecuaciones diferenciales para probar que las únicas soluciones de la ecuación $x' = x$ son funciones de la forma $x(t) = Ce^t$, recordemoslo. Si $x(t)$ una solución de la ecuación

$x' = x$, multiplicando esta ecuación por e^{-t} obtenemos $x'(t)e^{-t} = x(t)e^{-t}$. Agrupando todos los terminos y usando la regla de Leibniz obtenemos $\frac{d}{dt}\Big(x(t)e^{-t}\Big) = 0$. De donde se tiene $x(t)e^{-t} = C$, y finalmente $x(t) = Ce^{t}$.

Pasemos ahora a la demostración de la desigualdad de Gronwall. Definamos $R(t) = \alpha + \int_a^t \beta\,\Gamma(s)\,ds$, observemos que $R(a) = \alpha$ y que la ecuación (3.4.1) se convierte en $R'(t) = \beta\Gamma(t) \leq \beta R(t)$. Por lo tanto $R'(t) - \beta R(t) \leq 0$. Multiplicando por $e^{\beta(a-t)}$ obtenemos $[e^{\beta(a-t)}R(t)]' = e^{\beta(a-t)}\left(R'(t) - \beta R(t)\right) \leq 0$, integrando desde a hasta t se obtiene

$$e^{\beta(a-t)}R(t) - \alpha = \left[e^{\beta(a-s)}R(s)\right]\Big|_{s=a}^{t} = \int_a^t \left[e^{\beta(a-s)}R(s)\right]' ds \leq 0,$$

y finalmente obtenemos $\Gamma(t) \leq R(t) \leq \ \alpha \exp[\beta(t-a)]$. □

TEOREMA 3.20. *Sea* $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$, *donde la función* $\mathbf{f}$ *es Lipschitz y el conjunto* D *es compacto. Si* $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ *y* $\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_1)$ *son las soluciones de la ecuación diferencial* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *que pasan por los puntos* $(t_0, \mathbf{x}_0)$ *y* $(t_1, \mathbf{x}_1)$ *respectivamente,* M *es una cota superior de* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *y* K *es la contante de Lipschitz en* D, *entonces*

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_1)\| \leq \Big[\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| + M\,|t_0 - t_1|\Big]e^{k|t-t_0|} \tag{3.4.2}$$

DEMOSTRACIÓN: Sin perdida de generalidad supongamos que $t_0 \leq t_1 \leq t$. Del teorema 3.1 se sigue

$$\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s, t_0, \mathbf{x}_0))\,ds,$$
$$\mathbf{x}(t, t_1, \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 + \int_{t_1}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s, t_0, \mathbf{x}_0))\,ds.$$

Restando estas ecuaciones y tomando la norma obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t,t_1,\mathbf{x}_1)\| \\
&\quad = \left\| \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_0,\mathbf{x}_0))\,ds - \left(\mathbf{x}_1 + \int_{t_1}^{t} \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1))\,ds \right) \right\| \\
&\quad \leq \left\| \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_0,\mathbf{x}_0))\,ds \right. \\
&\qquad\qquad \left. -\mathbf{x}_1 - \int_{t_1}^{t_0} \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1))\,ds - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1))\,ds \right\| \\
&\quad = \left\| \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_0,\mathbf{x}_0)) - \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1))\,ds \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_{t_1}^{t_0} \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1))\,ds \right\| \\
&\quad \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| + \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_0,\mathbf{x}_0)) - \mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1))\|\,ds \\
&\qquad\qquad + \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1))\|\,ds \\
&\quad \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| + K \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}(s,t_0,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(s,t_1,\mathbf{x}_1)\|\,ds + M\,|t_0 - t_1|\,.
\end{aligned}
$$

Usando el lema de Gronwall, 3.18, donde $\Gamma(t) = \|\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t,t_1,\mathbf{x}_1)\|$, $\alpha = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| + M\,|t_0 - t_1|$ y $\beta = K$ obtenemos la ecuación (3.4.2). □

PROPOSICIÓN 3.21. *Sea* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ *una ecuación diferencial,* $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ *localmente Lipschitz continua, y sea* $\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ *la solución definida en el intervalo* (a,b) *tal que* $\mathbf{x}(t_0,t_0,\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. *Entonces, dados* $\epsilon > 0$ *y* $T > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|t_0 - t_1| \leq \delta$, $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \leq \delta$ *implican* $\|\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)\| < \epsilon$ *para todo* $t \in [t_0,T]$.

DEMOSTRACIÓN: Tome $\delta = \frac{\epsilon}{2(1+M)e^{kT}}$ en el teorema anterior. □

COROLARIO 3.22. *[Dependencia continua con respecto a condiciones iniciales] Sea* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ *una ecuación diferencial,* $\mathbf{f}$ *localmente Lipschitz continua. Entonces la solución* $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ *depende continuamente con respecto a* t, t_0 *y* $\mathbf{x}_0$.

EJEMPLO 3.23. Consideremos la ecuación $x' = x$, entonces las soluciones son $x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$, que claramente son continuas.

Observamos que $x(t, 0, 0) = 0$. Sean $T > 0$, $\epsilon > 0$, y $\delta = \epsilon/e^T$; si $|x_0| < \delta$ entonces $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ para todo $t \in [0, T]$.

A veces se estudian familias de ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro, en el siguiente teorema muestra que la forma en que las soluciones dependen de parametros, se omite la prueba, que es similar a la dada en la sucesión de proposiciones 3.20, 3.21 y 3.22.

TEOREMA 3.24. *[Dependencia continua con respecto a parámetros] Sea* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ *una ecuación diferencial, donde* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ *es una función localmente Lipschitz continua con respecto a* $(t, \mathbf{x})$ *y continua con respecto al parámetro* λ. *Entonces la solución* $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \lambda)$ *depende continuamente con respecto a* t, t_0, $\mathbf{x}_0$ *y* λ.

En la sección 4.9 se demostrará que las soluciones no son sólo continuas con respecto a las condiciones iniciales, sino que también son diferenciales con respecto a éstas si la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ es continuamente diferenciable.

3.5. Problemas

3.25. Usar la demostración del teorema de Peano para encontrar soluciones aproximadas de los siguientes problemas para al menos dos diferentes $\phi_0(t)$.

1 $y' = xy$, $x(0) = 1$.

2 $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

3 $x' = \sqrt{x}$, $x(0) = 0$. En este inciso tratar de obtener una solución que no sea identicamente cero.

3.26. Este problema da otra demostración del teorema de Peano (teorema 3.2), bajo las hipótesis y notación de éste tome la partición regular:

$$P_n : t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \alpha, \text{ con } t_{k+1} - t_k = \alpha/n.$$

En el intervalo $[t_0, t_1]$ defina la función $\phi_n(t) = \mathbf{x}_0 + (t - t_0)\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$. Entonces

$$\phi_n(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad \|\phi_n(t) - \mathbf{x}_0\| < b \text{ para } t \in [t_0, t_1]. \tag{3.5.1}$$

Supongamos que la función $\phi_n(t)$ ha sido definida en el intervalo $[t_0, t_k]$, con $k < n$, si t está en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ entonces $\phi_n(t) = \phi_n(t_k) + (t - t_k)\mathbf{f}(t_k, \phi_n(t_k))$. De esta manera $\phi_n(t)$ está definida en todo el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

1 Demostrar que en el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ se cumple (3.5.1).

2 Demostrar que la familia $\{\phi_n(t)\}$ es equicontinua y uniformemente acotada en el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

3 Usando el teorema de Arzela-Ascoli encontrar una subsucesión convergente.

4 Probar que el límite de esta subsucesión es una solución del problema de condiciones iniciales (3.1.1) definida en el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Observación 3.27. La construcción definida en este problema se llama el *método de las quebradas de Euler.*

3.28. Utilizando el método de quebradas de Euler, encontrar algunas soluciones aproximadas de las ecuaciones propuestas en el problema 3.25.

DEFINICIÓN 3.29. Si $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \Big(f_1(x_1,\ldots,x_n,t),\ldots,f_1(x_n,\ldots,x_n,t\Big)$ es suave, su *matriz jacobiana* con respecto a $\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

3.30. Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ una función continua tal que $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},t)$ también es continua, demostrar que $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ es localmente Lipschitz. (Usar el teorema de valor medio para funciones diferenciales).

3.31. Probar las proposición 3.12 y 3.24.

3.32. Demostrar la siguiente generalización de la desigualdad de Gronwall: Si ϕ, α, β : $[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ son tres funciones continuas, $\beta(t) \geq 0$ y además

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\,\phi(s)\,ds, \qquad a \leq t \leq b,$$

entonces

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\left(\exp\int_s^t \beta(u)\,du\right)ds, \qquad a \leq t \leq b.$$

3.33. Sea $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función acotada. Si $u(t)$ tiene segunda derivada continua, se define $L(u) = u'' + g(t)u'$, demostrar

1 Si $L(u) > 0$ entonces el máximo de u no es alcanzado en ningún punto interior.

2 Si u es constante entonces $L(u) \geq 0$ y todos los puntos interiores son máximos.

3 Si $L(u) \geq 0$, $u(t) \leq M$ y existe $c \in (a,b)$ tal que $u(c) = M$ entonces $u(t) = M$ para todo t. (si el máximo es alcanzado en un punto interior entonces la función $u(t)$ es constante).

Hint: Suponga que $u(c) = M$, $u(d) < M$, $c < d$. Sea $z(t) = e^{\alpha(t-c)} - 1$, α es una constante. Demuestre que $z(t) < 0$ si $a < t < c$; $z(c) = 0$; $z(t) > 0$ si $c < t < b$.Elija α tal que $L(z) > 0$, $0 < \epsilon < \frac{M-u(d)}{z(d)}$. Sea $w(t) = u(t) + \epsilon z(t)$, demuestre que $L(w) > 0$, $w(d) < M$ y $w(c) = M$ y obtener una contradicción.

3.34. Demostrar el teorema de Picard-Lindelöff usando el teorema de Peano y la desigualdad de Gronwall.

3.35. Sean $K : [a,b] \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ funciones continuas, $\lambda \in \mathbb{R}$. La ecuación

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)\,dt + f(x)$$

se llama la*ecuación de Fredholm de segunda clase,* el objetivo es encontrar la función $\phi(t)$. Este tipo de ecuaciones son muy importantes en la física pues representan leyes de conservación. Sea $T : C([a,b],\mathbb{R}) \mapsto C([a,b],\mathbb{R})$ el operador definido por

$$T\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)\,dt + f(x)$$

1 Demostrar que el operador T está bien definido.

2 Si $|K(x,t)| < M$ en el cuadrado $[a,b] \times [a,b]$ en donde $M > 0$ y si $\lambda < M^{-1}(b-a)^{-1}$ probar que T es una contracción definida en $C([a,b],\mathbb{R})$ y por el teorema de Banach tiene un único punto fijo $\phi(t)$, el cual es una solución.

3 Mediante aproximaciones sucesivas resuelver la ecuación $\phi(t) = \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x+t)\phi(t)\,dt + 1$.

3.36. Sean $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ funciones continuas y $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ con constante de Lipschitz igual a K y que satisfacen la desigualdad

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \leq \epsilon \text{ para todo } (\mathbf{x}, t) \in D.$$

1 Si $\mathbf{x}(t)$ es solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$ y $\mathbf{y}(t)$ es solución de $\mathbf{y}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x_0}$ definidas ambas en el intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ entonces

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon\alpha e^{k(t-t_0)}.$$

2 Usando el problema 3.32 obtenga una desigualdad similar para el caso en que las condiciones iniciales no son necesariamente iguales.

3 Considerando las ecuaciones

- *Ecuación del péndulo:* $x'' + \operatorname{sen}(x) = 0$, $x(0) = \theta_0$.
- *Oscilador armónico:* $x'' + x = 0$, $x(0) = \theta_0$.

La segunda es una aproximación de la primera. Encontrar θ_0 tal que si $\phi(t)$ es una solución de la primera EDO, y $\psi(t)$ es una solución de la segunda entonces para toda t en el intervalo $[0, 10]$ se tiene $|\phi(t) - \psi(t)| < 1/10$.

3.37. Sea $\mathbf{f} : D :\subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz continua, $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua, y tal que para toda $t \geq t_0$ y para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se sigue que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq \alpha(t) \|\mathbf{x}\|$, entonces si $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ es la solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ entonces $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ no tiene tiempo finito de escape hacia adelante. [Esto es: el extremo derecho del intervalo máximo es ∞].

3.38. Para $\epsilon \geq 0$ demuestre que ninguna solución de la *ecuación de Van Der Pol* $x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = y_0$ tiene tiempo finito de escape.

3.39. Consideremos la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, donde $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq \phi(t) \|\mathbf{x}\|$ y $\int_{t_0}^{\infty} \phi(t)\, dt < \infty$.

1 Demostrar que toda solución se aproxima a una constante.

2 Estudiar las concecuencias del inciso anterior sobre la ecuación $x' = -x + a(t)x$, donde $\int_{t_0}^{\infty} |a(t)|\ dt < \infty$. [Hint: Usar la transformación $x = e^{-t}y$].

3.6. *Ecuaciones en diferencias

DEFINICIÓN 3.40. Una *ecuación en diferencias* tiene la forma

$$\{\Delta x_n = f(x_n, n), \qquad x_0\} \tag{3.6.1}$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^n \times \Big(\mathbb{N} \bigcup \{0\}\Big) \mapsto \mathbb{R}^n$ es una función y $(x_0, 0) \in D$ es el valor inicial de la sucesión. Una solución de esta ecuación es una sucesión $\{x_n\}$ que satisface la ecuación en diferencias y que empieza en x_0. Esta sucesión puede ser finita o infinita.

3.41. 1 Demostrar que las ecuaciones en diferencias se pueden escribir en la forma $\{x_{n+1} = g(x_n, n),\ x_0\}$ la cual se llama una *ecuación de recurrencia,* más adelante no haremos diferencia entre estas dos formas.

2 Encontrar la ecuación de recurrencia asociada a las ecuación $\Delta x_n = r$, la tasa de crecimiento r es una constante.

OBSERVACIÓN 3.42. Los problemas 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.45, 2.46 y 2.47 estudian algunas ecuaciones en recurrencias.

3.43. En este problema se comparan las soluciones de las ecuaciones en diferencias con las soluciones de las EDO's. y cada inciso corresponde a uno de los teoremas fundamentales de este

capítulo. Se denotará por $\{x_k(x_0)\}$ a la solución de la ecuación en diferencias

$$\{x_{k+1} = f(x_k, k), \qquad x_0\}. \tag{3.6.2}$$

1 La ecuación en diferencias (3.6.2) tiene una única solución $\{x_k(x_0)\}$.

2 Demostrar que $\{x_k(x_0)\}$ está definida en un intervalo de números naturales 1, 2, $\ldots n$, donde $f(x_n, n) \notin D$ o bien está definida sobre todos los números naturales.

3 En los dos incisos siguientes se supone que la función $f(x, n)$ es continua con respecto a la variable $x \in D$. Si $\{x_k(x_0)\}$ está definido para $k = 1, \ldots, n$, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - y_0| < \delta$ entonces $|x_k(x_0) - x_k(y_0)| < \epsilon$ para $k = 1, \ldots, n$.

4 La sucesión $\{x_k(x_0)\}$ depende continuamente en la condición inicial x_0.

5 Si además la función $f(x_k, k, \lambda)$ depende continuamente del parámetro λ, entonces la sucesión $\{x_k(x_0, \lambda)\}$ depende continuamente de x_0 y λ.

CAPITULO 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

4.1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, el objeto de este capítulo, surgen constantemente en la física; la ecuación del oscilador armónico es de este tipo; también aparecen en la teoría de circuitos eléctricos. Además el movimiento del electrón en el átomo de hidrógeno, y el movimiento de una partícula bajo interacción gravitacional pueden ser descritos por estos sistemas. Estos sistemas son fundamentales en ramas de las matemáticas como son la geometría diferencial y los sistemas dinámicos. Por otro lado presentan una estructura coherente basada en principios muy generales y simples de álgebra lineal. Por último, las EDO's que no son lineales se empiezan a estudiar en su aproximación lineal, en la sección 4.9 profundizaremos este punto.

El álgebra lineal necesaria para este capítulo se encuentra en las referencias [**1, 3, 7**]. Las matrices se escribirán en mayúsculas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, etc. La matriz identidad es $\mathbf{I}$ o bien $\mathbf{I}_n$. El *núcleo* de la matriz $\mathbf{A}$ es el conjunto $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. El núcleo de $\mathbf{A}^k$ será denotado por $N(\mathbf{A})^k$. La matriz asociada a la familia de vectores $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es la matriz que tiene por columnas a dichos vectores, esto es $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n]$. Entonces el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si el determinante de su matriz asociada es diferente de cero. Se supondrá que el espacio lineal $\mathbb{M}_n$ de las matrices cuadradas de orden n tiene la métrica inducida por la norma $\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\|$, ver la sección 2.6.

DEFINICIÓN 4.1. Sean $\mathbf{A} : (a,b) \mapsto \mathbb{M}_n$ y $\mathbf{g} : (a,b) \mapsto \mathbb{R}^n$ funciones continuas. La *ecuación diferencial lineal homogénea* es la EDO de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{4.1.1}$$

La *ecuación diferencial lineal no homogénea* es la EDO

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{4.1.2}$$

Ambas ecuaciones se llaman *ecuaciones diferenciales lineales* o *sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.*

EJEMPLO 4.2. La ecuación

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \tag{4.1.3}$$

donde las funciones $a_1(t)$, ..., $a_n(t)$, $f(t)$ son continuas, es estudiada en los cursos elementales de ecuaciones diferenciales. Para escribirla en la forma (4.1.2) se definen las variables $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, ..., $x_n = y^{(n-1)}$, entonces $x_1' = y' = x_2$, $x_2' = y'' = x_3$,..., $x_n' = y^{(n)} = f(t) - a_1(t)y^{(n-1)} - \cdots - a_{n-1}(t)y' - a_n(t)y = f(t) - a_1(t)x_n - \cdots - a_{n-1}(t)x_2 - a_n(t)x_1$. La ecuación (4.1.3) se transforma en

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 4.3. *Sea* $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D = \{(t, \mathbf{x}) : t \in (a, b), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, *entonces el sistema (4.1.2) con condición inicial* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *tiene una única solución* $\phi(t)$, *la cual está definida sobre todo el intervalo* (a, b).

DEMOSTRACIÓN: La demostración consiste en dos partes que se relacionan con la unicidad local de las soluciones y con la prolongación de éstas a todo el intervalo (a, b).

AFIRMACIÓN 8. *La función* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ *es localmente Lipschitz.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F \subset D$ un conjunto compacto, sea $M \in \mathbb{R}$ una cota de $\|\mathbf{A}(t)\|$ sobre este conjunto. Las desigualdades

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| &= \|\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) - (\mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t))\| \\ &= \|\mathbf{A}(t)\,(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{A}(t)\|\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq M\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\end{aligned}$$

prueban la afirmación. □

De este lema y del teorema de Picard-Lindelöff se sigue la unicidad de la solución $\phi(t)$. Sea (α, β) el intervalo maximal de esta solución, demostraremos que $\beta = b$; la demostración de que $\alpha = a$ es similar y se omite.

AFIRMACIÓN 9. *Si* $\beta < b$ *entonces* $\lim_{t \mapsto \beta-} \phi(t)$ *existe.*

DEMOSTRACIÓN: Sean L, K y M cotas superiores de $\|\mathbf{A}(s)\|$, $\left\|\int_{t_0}^{t} \mathbf{g}(s)\,ds\right\|$ y $\|\mathbf{g}(t)\|$ respectivamente en algún intervalo compacto F que contiene al intervalo $[t_0, \beta)$. El sistema se escribe en la forma $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{g}(s)\,ds$. Tomando normas y usando la propiedad del

triángulo tenemos

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s)\, ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds \right\| \leq \|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} L\, \|\mathbf{x}(s)\|\, ds + K.$$

Usando ahora la desigualdad de Gronwall e integrando obtenemos $\|\mathbf{x}(t)\| \leq (\mathbf{x}_0 + K)\, e^{L(t-t_0)}$. Sea R una cota superior de $\|\mathbf{x}(t)\|$ en el intervalo F y por lo tanto en $[t_0, \beta)$.

Sean $t_0 \leq \tau \leq t < \beta$, entonces

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\tau)\| \leq \int_{\tau}^{t} \|\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{g}(s)\|\, ds \leq \int_{\tau}^{t} \big(LR + M\big)\, ds = (LR + M)\,(t - \tau)$$

lo que demuestra que $\lim_{t \mapsto \beta} \mathbf{x}(t) = x(\beta)$ existe. □

Usando ahora la proposición 3.13 se sigue que la solución $\phi(t)$ puede ser continuada sobre β, lo que contradice la maximalidad del intervalo (α, β), demostrandose que $\beta = b$.

□

TEOREMA 4.4. *El conjunto de soluciones de (4.1.1) es un espacio vectorial de dimensión n.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente es un espacio vectorial. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Sean $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$,..., $\phi_n(t)$ las soluciones de (4.1.1) tales que $\phi_i(t_0) = \mathbf{e}_i$ para $i = 1, 2, \ldots n$.

AFIRMACIÓN 10. *Las funciones $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$,..., $\phi_n(t)$ son linealmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in (a, b)$. Evaluandola en $t = t_0$ se tiene

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i,$$

de donde se sigue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. □

AFIRMACIÓN 11. *Las funciones $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$,..., $\phi_n(t)$ generan al conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal (4.1.1).*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi(t)$ una solución con $\phi(t_0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$ para algunas constantes α_1, α_2, ..., α_n. La función $\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(t)$ también es una solución de (4.1.1) que satisface $\psi(t_0) = \mathbf{x}_0$. Por el teorema Picard-Lindelöff se sigue que $\phi(t) = \psi(t)$. □

Estas dos afirmaciones prueban el teorema. □

DEFINICIÓN 4.5. La matriz asociada $\mathbf{\Phi}(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)]$ al conjunto de n soluciones $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ de la ecuación (4.1.1) se llama una *matriz solución.* El determinante de $\mathbf{\Phi}(t)$ se llama su *wronskiano.* Si $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ..., $\phi_n(t)$ son linealmente independientes entonces forman un *conjunto fundamental de soluciones* y $\mathbf{\Phi}(t)$ es una *matriz fundamental.* La ecuación $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X}$ es una matriz cuadrada de orden n se llama la *ecuación diferencial matricial* asociada.

OBSERVACIÓN 4.6. Como las matrices cuadradas de orden n son vectores de dimensión n^2, entonces las ecuaciones matriciales también son ecuaciones diferenciales ordinarias, y cumplen los teoremas del capítulo anterior.

EJEMPLO 4.7. Sean $\phi_1(t) = (t, t)$ y $\phi_2(t) = (|t|, |t|)$, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene $\phi_1(t) = \pm\phi_2(t)$. Sin embargo, al tomar la combinación lineal $a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) = (0, 0)$ en $t = 1$ y en $t = -1$, se tiene el sistema de ecuaciones: $a_1 + a_2 = 0$ y $a_1 - a_2 = 0$ lo que implica que $a_1 = a_2 = 0$ de donde se sigue que las funciones $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son linealmente independientes.

TEOREMA 4.8. *Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es una solución fundamental de (4.1.1), entonces satisface la ecuación matricial asociada*

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}. \tag{4.1.4}$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{\Phi}'(t) = [\phi_1', \phi_2', \dots \phi_n'] = [\mathbf{\Phi}(t)\phi_1, \mathbf{\Phi}(t)\phi_2, \dots, \mathbf{\Phi}(t)\phi_n] = \mathbf{\Phi}(t)\,[\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n]$$

□

TEOREMA 4.9 (Fórmula de Abel [1]). *Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es una solución de la ecuación matricial (4.1.4), entonces su wronskiano satisface*

$$\det \mathbf{\Phi}(t) = \det \mathbf{\Phi}(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} Tr\mathbf{A}(s)\, ds\right], \tag{4.1.5}$$

donde $Tr(\mathbf{A}) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ es la traza de la matriz $\mathbf{A}$.

DEMOSTRACIÓN: Si el lector encuentra difícil la notación empleada en los determinantes le recomendamos estudiar primero el caso en que $n = 2$ ó 3. El determinante de la matriz $\mathbf{A}$ es [2] $\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$.

Sea $\mathbf{\Phi}(t) = [\phi_{ij}]$ una matriz fundamental y $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ entonces $\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$. De donde

$$\phi_{ij}' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\phi_{kj}. \tag{4.1.6}$$

---

[1] A veces atribuida a Liouville.

[2] $S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{1, 2, \dots, n\} : \sigma \text{ es biyección}\}$ = grupo simétrico de orden n. A_n es el grupo alternante. La función signo está definida por $\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma \in A_n, \\ -1 \text{ si } \sigma \notin A_n. \end{cases}$

Derivando y usando la regla de Leibnitz

$$\frac{d}{dt}\Big[\det \mathbf{\Phi}(t)\Big] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\phi_{1\sigma(1)}\phi_{2\sigma(2)}\dots\phi_{n\sigma(n)}\right] = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\frac{d}{dt}\Big[\phi_{1\sigma(1)}\phi_{2\sigma(2)}\dots\phi_{n\sigma(n)}\Big]$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\phi'_{1\sigma(1)}\phi_{2\sigma(2)}\dots\phi_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\phi_{1\sigma(1)}\phi'_{2\sigma(2)}\dots\phi_{n\sigma(n)} + \cdots$$

$$\dots \qquad + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\phi_{1\sigma(1)}\phi_{2\sigma(2)}\dots\phi'_{n\sigma(n)}.$$

Usando ahora la ecuación (4.1.6) se tiene

$$\frac{d}{dt}\left[\det \mathbf{\Phi}(t)\right] = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\left[\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\phi_{i\sigma(1)}\right]\phi_{2\sigma(2)}\dots\phi_{n\sigma(n)} \tag{4.1.7}$$

$$+\cdots+\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\phi_{1\sigma(1)}\phi_{2\sigma(2)}\dots\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\phi_{i\sigma(n)}\right].$$

Consideremos la primera suma:

$$B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\left[\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\phi_{i\sigma(1)}\right]\phi_{2\sigma(2)}\dots\phi_{n\sigma(n)} = \begin{vmatrix} \sum_{1j} a_{1j}\phi_{j1} & \sum_{1j} a_{1j}\phi_{j2} & \cdots & \sum_{1j} a_{1j}\phi_{jn} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sumando la segunda fila multiplicada por a_{12} a la primera, luego la tercera multiplicada por a_{13} a la primera, etcetera, se tiene

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}\phi_{11} & a_{11}\phi_{12} & \cdots & a_{11}\phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{n1} & \cdots & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{n1} & \cdots & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\det \mathbf{\Phi}(t).$$

Procediendo de la misma forma en las demás sumas de (4.1.7), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left[\det \mathbf{\Phi}(t)\right] = \left[a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right]\det \mathbf{\Phi}(t) = Tr(\mathbf{A}(t))\det \mathbf{\Phi}(t).$$

Resolviendo esta sencilla ecuación diferencial se sigue la ecuación (4.1.5). □

A partir de este teorema se siguen los siguientes corolarios:

COROLARIO 4.10. *El wronskiano de la matriz solución* $\mathbf{\Phi}(t)$ *de la ecuación* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ *es diferente de cero para todo* t *en el dominio de* $\mathbf{A}(t)$ *si su wronskiano es diferente de cero en un punto* t_0.

COROLARIO 4.11. *Una solución* $\mathbf{\Phi}(t)$ *de la ecuación matricial* $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$ *es una matriz fundamental de la ecuación* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ *si y sólo si su wronskiano es diferente de cero en un punto* t_0.

PROPOSICIÓN 4.12. *Si* $\mathbf{\Phi}(t)$ *es una matriz fundamental de* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{C}$ *es una matriz constante no singular, entonces* $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$ *también es una matriz fundamental.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $(\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C})' = \mathbf{\Phi}(t)'\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$, por lo que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$ también es una matriz solución. Además $\det[\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}] = \det[\mathbf{\Phi}(t)]\det\mathbf{C} \neq 0$, lo que demuestra que es una matriz fundamental. □

PROPOSICIÓN 4.13. *Sean* $\mathbf{\Phi}(t)$ *y* $\mathbf{\Gamma}(t)$ *matrices fundamentales de la ecuación* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ *entonces existe una matriz constante e invertible* $\mathbf{P}$ *tal que* $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}$.

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{I}$, entonces de la regla del Leibnitz se tiene que $\mathbf{0} = \left(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^{-1}\right)' = \mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi}^{-1} + \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\right)' = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^{-1} + \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\right)' = \mathbf{A} + \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\right)'$. Despejando $\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\right)'$ se tiene $\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\right)' = -\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{A}(t)$. Entonces $\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Gamma}\right)' = \left(\mathbf{\Phi}^{-1}\right)'\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{\Gamma})' = -\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{A}(t)\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{A}(t)\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$. Lo que implica que $\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{C}$ es una matriz constante. □

DEFINICIÓN 4.14. Sea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, la *matriz de transición en* τ es la matriz fundamental tal que $\mathbf{\Phi}(\tau) = \mathbf{I}_n$. Esta matriz se denotará por $\mathbf{\Phi}(t, \tau)$.

LEMA 4.15. *Si $\mathbf{\Gamma}(t)$ es una matriz fundamental entonces $\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(\tau)^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN: La matriz $\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(\tau)^{-1}$ es una matriz fundamental y su evaluación en τ es $\mathbf{\Gamma}(\tau)\mathbf{\Gamma}(\tau)^{-1} = \mathbf{I}$. Usando el teorema de Picard-Lindelöff que sigue el lema. □

TEOREMA 4.16. *Sean τ un número real en el dominio de definición de $\mathbf{A}(t)$, $\phi(t)$ una solución de la ecuación (4.1.1) tal que $\phi(\tau) = \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$ su matriz de transición. Entonces*

1 *La matriz $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$ es la solución de la ecuación matricial*

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t), \qquad \mathbf{X}(\tau) = \mathbf{I}_n.$$

2 *La matriz $\mathbf{\Phi}(t,\tau)$ es no singular para todo t y τ.*

3 *Para cualesquiera t, τ y σ se satisface*

$$\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,\sigma) = \mathbf{\Phi}(t,\sigma), \qquad \mathbf{\Phi}(t,\tau)^{-1} = \mathbf{\Phi}(\tau,t).$$

4 *La solución $\phi(t)$ satisface $\phi(t) = \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{x}_0$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Sea $\mathbf{\Gamma}(t)$ una matriz fundamental. Entonces $\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(\tau)^{-1}$. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(\tau)^{-1}\right) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(\tau)^{-1} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau).$$

Además $\mathbf{\Phi}(\tau,\tau) = \mathbf{I}$. Del teorema de Picard-Lindelöff se sigue el inciso.

2) Es suficiente observar que $\det \mathbf{\Phi}(t,\tau) = \det \mathbf{\Gamma}(t) \det\left[\mathbf{\Gamma}^{-1}(\tau)\right] \neq 0$.

3) Se sigue de las ecuaciones

$$\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,\sigma) = \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(\tau)^{-1}\mathbf{\Gamma}(\tau)\mathbf{\Gamma}(\sigma)^{-1} = \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(\sigma)^{-1} = \mathbf{\Phi}(\tau,t).$$

4) Sea $\psi(t) = \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{x}_0$, entonces

$$\psi(\tau) = \mathbf{\Phi}(\tau,\tau)\mathbf{x}_0 = \mathbf{I}_n\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0,$$

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{x}_0\right] = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(t)\psi(t).$$

Usando nuevamente el teorema de Picard-Lindelöff se sigue $\psi(t) = \phi(t)$. □

OBSERVACIÓN 4.17. La matriz de transición determina todas las soluciones de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, aunque puede ser difícil o imposible de calcular. En las secciones siguientes se describirá y se dará un algoritmo para computar la matriz de transición en el caso en que $\mathbf{A}(t)$ no dependa del tiempo.

4.2. La forma de Jordan de una matriz

En esta sección daremos algunas de las propiedades de la forma de Jordan de una matriz que serán utilizadas en la próxima sección para calcular exponenciales de matrices.

DEFINICIÓN 4.18. Dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *similares* si existe una matriz no singular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$. El polinomio $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ se llama *polinomio característico* de $\mathbf{A}$. Las raices de $p(\lambda)$ se llaman *valores propios* de $\mathbf{A}$.

DEFINICIÓN 4.19. Un *vector propio* asociado al valor propio λ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ diferente de $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. En general un vector $\mathbf{x}$ es un *vector propio generalizado* de rango k asociado al valor propio λ si $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\,\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Si además no existe un vector $\mathbf{y}$ tal que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{y} = \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x}$ se llama un *vector propio generalizado maximal.* En

este caso la *cadena de vectores propios generalizados* es la sucesión

$$\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\,\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-2}\,\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x}_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathbf{x}_{k-1} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{1}\,\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x}_k,$$

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{0}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

El número k se llama la *longitud de la cadena.*

Recordemos que el núcleo de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ es denotado por $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, el núcleo de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2$ es denotado por $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2$, etc. Entonces el vector $\mathbf{x}_1$ está en $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, el vector $\mathbf{x}_2$ está en $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2$ pero no está en $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, el vector $\mathbf{x}_3$ está en $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3$ pero no está en $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2$, etc. Si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s$ son valores propios generalizados maximales linealmente independientes se puede demostrar que el conjunto de sus cadenas es linealmente independiente.

TEOREMA 4.20. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz con entradas complejas, entonces existe una matriz no singular* $\mathbf{P}$ *tal que la matriz* $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ *tiene la forma* $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 & & & \\ & \mathbf{J}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_k \end{pmatrix}$, *donde* $\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s \end{pmatrix}$ *y* $\mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \lambda_{r+s} & 1 & & \\ & \lambda_{r+s} & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{r+s} \end{pmatrix}$ *para* $r = 1, \ldots, k$. *Los números* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+k}$ *son los valores propios de la matriz* $\mathbf{A}$. *La matriz* $\mathbf{J}$ *se llama la forma de Jordan de* $\mathbf{A}$.

TEOREMA 4.21. *El siguiente es un algoritmo para calcular la forma de Jordan de la matriz cuadrada matriz* $\mathbf{A}$ *y su matriz de cambio de base* $\mathbf{P}$.

1 *Computar los valores propios de* $\mathbf{A}$. *Sea* λ *un valor propio de* $\mathbf{A}$, *con multiplicidad* k.

2 *Calcular las potencias* $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$, *donde* $i = 1\ 2, \ldots$. *La dimensión del núcleo de cada elemento de esta sucesión de matrices será denotada por* n_i. *Sea* m *igual al primer natural que cumple* $n_i = n_{i+1}$.

3 *Observar la siguiente cadena de contenciones*

$$N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \subset N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2 \subset N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3 \subset \cdots \subset N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m = N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m+1},$$

y además

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < m.$$

4 *El núcleo* $N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m$ *es la suma directa de* $N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}$ *y un subespacio* W_1 *de dimensión* j_1. *Dar una base* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j_1}$ *de* W_1. *Cada uno de estos vectores es generalizado maximal y además define una cadena de longitud* m. *La primera de estas cadenas es* $\mathbf{x}_{11} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_1$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{1,m-1} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_{1,m} = \mathbf{x}_1$. *De esta manera se definen* $m\,j_1$ *vectores linealmente independientes. Si* $k = m\,j_1$ *entonces ir al siguiente paso. Si éste no es el caso observemos que los* j_1 *vectores definidos por* $\mathbf{x}_{1,m-1} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_{2,m-1} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{j_1,m-1} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_{j_1}$ *son linealmente independientes y están contenidos en* $N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}$. *Si* $j_1 = n_{m-1}$ *continuar con el análisis del siguiente núcleo* $N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-2}$. *En otro caso como el núcleo* $N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}$ *es la suma directa de* $N(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-2}$ *y un subespacio* W_2 *de dimensión* j_2. *Sea* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{j_2}$ *una base de* W_2, *nuevamente cada uno de estos vectores define una cadena de longitud* $m-1$ *y ahora se tienen* $mj_1 + (m-1)j_2$ *vectores linealmente independientes. Si* k *es igual a este número se ha terminado este paso, de otra forma continuar el mismo análisis en los siguientes núcleos. De esta forma se encuentran exactamente* k *vectores propios generalizados asociados a* λ.

5 *Repetir la misma construcción para los siguientes valores propios.*

6 *Los vectores propios generalizados* $\mathbf{x}_{11}$, $\mathbf{x}_{12}$,... , *así obtenidos forman una base. Como* $\mathbf{A}\mathbf{x}_{11} = \lambda\mathbf{x}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_{11} + \lambda\mathbf{x}_{12}$, *y así sucesivamente hasta* $\mathbf{A}\mathbf{x}_{1k} = \mathbf{x}_{1,k-1} + \lambda\mathbf{x}_{1k}$. *Entonces la matriz* $\mathbf{A}$ *tiene la siguiente representación en la nueva base*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots \end{pmatrix}.$$

7 *Finalmente observemos que la matriz de similaridad* $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \ldots, \mathbf{x}_{1k}, \ldots]$ *satisface* $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Cada uno de estos pasos presenta dificultades, por ejemplo los valores propios de una matriz son las raices de un polinomio, la obtención de estas raices es tema central en la teoría de Galois y el análisis numérico.

Ejemplo 4.22. Encontrar la forma de Jordan de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz $\mathbf{A}$ es triangular superior su polinomio característico es $(x-2)^4(x-3)$ y sus valores propios son 2 y 3, de multiplicidad 4 y 1 respectivamente. Como siguiente paso computemos la

sucesión de matrices $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^i$ y la dimensión de su núcleo n_i.

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&1&-1&0&-2\\0&0&0&1&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad (\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2=(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$n_1=2,\qquad n_2=n_3=4.$$

Como la dimensión de los núcleos de $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2$ y $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^3$ son iguales, el cálculo de las potencias es detenido y se pueden construir cadenas de vectores generalizados de a lo más longitud dos.

El vector $\mathbf{x}=(0,1,0,0,0)$ es un vector propio de rango 2 pues satisface $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$ y $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=(1,0,0,0,0)$. Tenemos la siguiente cadena

$$\mathbf{x}_1=(1,0,0,0,0),\qquad \mathbf{x}_2=(0,1,0,0,0).$$

Como la multiplicidad del valor propio 2 es 4, faltan dos vectores propios generalizados asociados a este valor.

El vector $\mathbf{x}=(0,-2,-1,1,0)$ es un vector propio generalizado de rango 2, pues satisface $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$ y $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=(-1,1,1,0,0)$. Además los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}$ son linealmente independientes por lo tanto la cadena faltante asociada al valor propio 2 es

$$\mathbf{x}_3=(-1,1,1,0,0),\qquad \mathbf{x}_4=(0,-2,-1,1,0).$$

Un vector propio asociado a 3 es $\mathbf{x}_5 = (0, 2, 0, -1, 1)$. Entonces la forma de Jordan de $\mathbf{A}$, $\mathbf{J}$ y la matriz de cambio de base $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_5]$ son

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos finalmente que $N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ es generado por los vectores $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3$, y que $N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2$ es la suma directa de $N(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ y del subespacio generado por $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_4$.

Ejemplo 4.23. En este ejemplo se calcula la forma de Jordan de la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de $\mathbf{B}$ es $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = (x-1)^5$, entonces el único valor propio es 1 y tiene multiplicidad igual a 5.

Computemos $(\mathbf{B}-\mathbf{I})^k$ y la dimensión de su núcleo n_k para $k = 1, 2, \ldots$.

$$\mathbf{B}-\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{B}-\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{B}-\mathbf{I})^3 = (\mathbf{B}-\mathbf{I})^4 = \mathbf{0},$$

$$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_4 = 5.$$

Comparando las dimensiónes de los núcleos se ve que existe un único vector en $N(\mathbf{B}-\mathbf{I})^3 - N(\mathbf{B}-\mathbf{I})^2$; dos vectores linealmente independientes en $N(\mathbf{B}-\mathbf{I})^2 - N(\mathbf{B}-\mathbf{I})$; y finalmente dos vectores linealmente independientes en $N(\mathbf{B}-\mathbf{I})$. Tenemos la siguiente cadena de longitud 3:

$$\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{B}-\mathbf{I})\,\mathbf{x}_3 = (-1, -1, 1, 3, 1)$$

$$\mathbf{x}_1 = (\mathbf{B}-\mathbf{I})^2\,\mathbf{x}_3 = (\mathbf{B}-\mathbf{I})\,\mathbf{x}_2 = (2, 2, -2, -4, -2)$$

Observemos que $\mathbf{x}_2$ está en $N(\mathbf{B}-\mathbf{I})^2 - N(\mathbf{B}-\mathbf{I})$. Existe otro vector linealmente independiente en este conjunto, por ejemplo $\mathbf{y} = (-1, 0, 0, 0, 2)$, por lo que la cadena faltante es

$$\mathbf{y}_2 = (-1, 0, 0, 0, 2),$$

$$\mathbf{y}_1 = (\mathbf{B}-\mathbf{I})\,\mathbf{y}_2 = (3, 1, -3, -3, -3).$$

De esta información se deduce que la forma de Jordan $\mathbf{J}$, y la matriz de cambio de base $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ son:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.3. La exponencial de una matriz

TEOREMA 4.24. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada de orden* n*, definiendo* $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ *entonces la suma de matrices* $\mathbf{S}_n(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$ *converge.*

DEMOSTRACIÓN: Como el espacio de matrices $\mathbb{M}_n$ es de Banach, es suficiente probar que la sucesión de matrices $\mathbf{S}_n$ es una sucesión de Cauchy. Supongamos que $n > m$, entonces

$$\|\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!}.$$

Pero $\|\mathbf{A}\|$ es un número real, entonces $\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} \mapsto 0$, si m, $n \mapsto 0$, de donde la sucesión de matrices $\mathbf{S}_n$ es de Cauchy. □

DEFINICIÓN 4.25. La *exponencial de la matriz* $\mathbf{A}$, denotada por $e^{\mathbf{A}}$ o por $\exp(\mathbf{A})$, es

$$e^{\mathbf{A}} = \lim_{n \mapsto \infty} \mathbf{S}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Las exponenciales de matrices tienen propiedades similares a las exponenciales de números. Los siguientes lemas y ejemplos darán un método para calcularlas usando su forma de Jordan.

LEMA 4.26. *Si* $\mathbf{A}$ *es una matriz cuadrada entonces* $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}}\mathbf{A}$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la siguiente suma

$$\mathbf{A}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}\mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^k\mathbf{A}}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right]\mathbf{A}.$$

Tomando límites se sigue que

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \lim_{n\mapsto\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right]\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}}\mathbf{A}.$$

□

PROPOSICIÓN 4.27. *Si* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *entonces* $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$.

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente probar que

$$S_{2n}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = S_n(\mathbf{A})S_n(\mathbf{B}) + \mathbf{R}_n,$$

donde $\lim_{n\mapsto\infty}\mathbf{R}_n = \mathbf{0}$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y definamos

$$\mathbf{C} = S_{2n}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \sum_{s=0}^{2n}\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^s}{s!}.$$

Como $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ entonces es válido el binomio de Newton:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^s = \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\mathbf{A}^t\mathbf{B}^{s-t} = \sum_{t=0}^{s}\frac{s!}{t!\,(s-t)!}\mathbf{A}^t\mathbf{B}^{s-t} = \sum_{t+r=s}\frac{s!}{t!\,r!}\mathbf{A}^t\mathbf{B}^r = s!\sum_{t+r=s}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!},$$

entonces

$$\mathbf{C} = \sum_{s=0}^{2n}\frac{1}{s!}\left(s!\sum_{t+r=s}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!}\right) = \sum_{s=0}^{2n}\sum_{t+r=s}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!}.$$

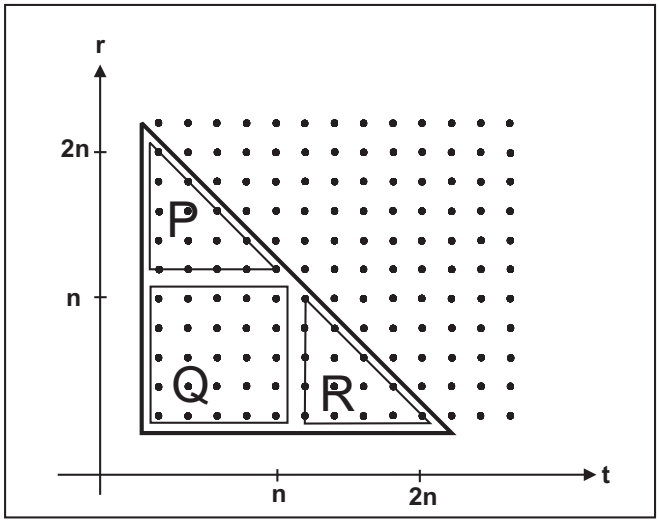

FIGURA 1. Conjunto de índices de la matriz $\mathbf{C}$.

El triángulo más grande en la figura 1 es el conjunto de índices de la doble sumatoria, éste es dividido en los conjuntos

$$P = \{(t,r) : 0 \leq t \leq n, n+1 \leq r \leq 2n-t\},$$

$$Q = \{(t,r) : 0 \leq t \leq n, 0 \leq r \leq n\},$$

$$R = \{(t,r) : n+1 \leq t \leq 2n, 0 \leq r \leq 2n-t\}.$$

Separando los índices correspondientes a cada conjunto se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \sum_{t=0}^{n}\sum_{r=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!} + \sum_{t=0}^{n}\sum_{r=n+1}^{2n-t}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!} + \sum_{t=n+1}^{2n}\sum_{r=0}^{2n-t}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!} \\ &= \sum_{t=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\sum_{r=0}^{n}\frac{\mathbf{B}^r}{r!} + \sum_{t=0}^{n}\sum_{r=n+1}^{2n-t}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!} + \sum_{t=n+1}^{2n}\sum_{r=0}^{2n-t}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!} \\ &= S_n(\mathbf{A})S_n(\mathbf{B}) + \sum_{t=0}^{n}\sum_{r=n+1}^{2n-t}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!} + \sum_{t=n+1}^{2n}\sum_{r=0}^{2n-t}\frac{\mathbf{A}^t}{t!}\frac{\mathbf{B}^r}{r!}.\end{aligned}$$

Agrupando $\mathbf{C}$ y $S_n(\mathbf{A})S_n(\mathbf{B})$, tomando normas y usando las propiedades de éstas se sigue

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{C} - S_n(\mathbf{A})S_n(\mathbf{B})\| \leq & \sum_{t=0}^{n}\sum_{r=n+1}^{2n-t}\frac{\|\mathbf{A}\|^t}{t!}\frac{\|\mathbf{B}\|^r}{r!} + \sum_{t=n+1}^{2n}\sum_{r=0}^{2n-t}\frac{\|\mathbf{A}\|^t}{t!}\frac{\|\mathbf{B}\|^r}{r!} \\
\leq & \sum_{t=0}^{n}\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{\|\mathbf{A}\|^t}{t!}\frac{\|\mathbf{B}\|^r}{r!} + \sum_{t=n+1}^{2n}\sum_{r=0}^{2n}\frac{\|\mathbf{A}\|^t}{t!}\frac{\|\mathbf{B}\|^r}{r!} \\
= & \sum_{t=0}^{n}\frac{\|\mathbf{A}\|^t}{t!}\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{\|\mathbf{B}\|^r}{r!} + \sum_{t=n+1}^{2n}\frac{\|\mathbf{A}\|^t}{t!}\sum_{r=0}^{2n}\frac{\|\mathbf{B}\|^r}{r!} \\
\leq & e^{\|\mathbf{A}\|}\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{\|\mathbf{B}\|^r}{r!} + \sum_{t=n+1}^{2n}\frac{\|\mathbf{A}\|^t}{t!}e^{\|\mathbf{B}\|} \mapsto 0 \quad \text{¿Por qué?}
\end{aligned}$$

□

A continuación daremos un método para calcular exponenciales de matrices.

PROPOSICIÓN 4.28. *La exponencial de la matriz* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ *es* $e^{\lambda t}\mathbf{I}$.

Como $(\mathbf{A}t)^n = \mathbf{A}^n t^n = \begin{pmatrix} \lambda^n t^n & & & \\ & \lambda^n t^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^n t^n \end{pmatrix}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\begin{pmatrix} \lambda^n t^n & & & \\ & \lambda^n t^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^n t^n \end{pmatrix}}{n!} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n t^n}{n!} & & & \\ & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n t^n}{n!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & & \\ & e^{\lambda t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{I}_n.
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4.29. *La exponencial de* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ *es la matriz dada en la ecuación (4.3.1).*

Las potencias de $\mathbf{B}$ son $\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, etcetera. Observamos que para calcular $\mathbf{B}^k$ se recorre k lugares a la derecha los 1's localizados sobre la diagonal. Además $\mathbf{B}^k = \mathbf{0}$, si $k \geq n$ donde n es el orden de $\mathbf{B}$. Calculemos ahora la exponencial de $\mathbf{B}t$.

$$e^{\mathbf{B}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{B}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t^k}{k!} \tag{4.3.1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & t^3/3! & \dots & t^{n-2}/(n-2)! & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{n-3}/(n-3)! & t^{n-2}/(n-2)! \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & t \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSICIÓN 4.30. *Calculo de la exponencial de una célula de Jordan.*

Usando las proposiciones anteriores la exponencial de una célula de Jordan es

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, de la proposición 4.27 se sigue que $e^{\mathbf{C}t} = e^{\lambda t} e^{\mathbf{B}t}$, donde $e^{\mathbf{B}t}$ fue calculada en el ejemplo anterior.

PROPOSICIÓN 4.31. *La ecuación (4.3.2) es la exponencial de la matriz de Jordan* $\mathbf{J}$ *definida a continuación.*

DEMOSTRACIÓN: Si la matriz $\mathbf{J}$ tiene la forma

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_k \end{pmatrix},$$

donde cada $\mathbf{J}_k$ es una célula de Jordan. Entonces

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1^n & & & \\ & \mathbf{J}_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_k^n \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que

$$e^{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_1} & & & \\ & e^{\mathbf{J}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mathbf{J}_k} \end{pmatrix}. \tag{4.3.2}$$

□

PROPOSICIÓN 4.32. *Si* $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ *entonces* $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{B}t}\mathbf{P}$.

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^k\mathbf{P}$ entonces

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}t\right)^k}{k!} = \lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^k\mathbf{P}t^k}{k!} \\ &= \lim_{n\mapsto\infty}\mathbf{P}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{B}^k t^k}{k!}\right)\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\left(\lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{B}^k t^k}{k!}\right)\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{B}t}\mathbf{P} \end{aligned}$$

□

Se tiene entonces un método de calcular la exponencial de una matriz, el cual consiste en buscar su forma de Jordan, luego se obtienen las exponenciales de sus células, etc.

EJEMPLO 4.33. Calculemos $e^{\mathbf{A}t}$, donde $\mathbf{A}$ está definida en el ejemplo 4.22. Usaremos la notación de este ejemplo.

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} =& e^{\mathbf{PJP}^{-1}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1} \\
=& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \exp\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} t \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & -te^{2t} & 0 & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 & te^{2t} & -2e^{2t} + 2e^{3t} + te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

TEOREMA 4.34. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada y constante,* $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$, *consideremos la ecuación diferencial* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, *entonces*

1 *La matriz* $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ *es una matrix fundamental.*

2 *Para todo* t, $\tau \in \mathbb{R}$ *se tienen las identidades* $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau} = e^{\mathbf{A}(t+\tau)}$, $\left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$.

3 *La matriz de transición es* $\mathbf{F}(t,\tau) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$.

4 *La única solución* $\phi(t)$ *de* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *es* $\phi(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$.

DEMOSTRACIÓN: 1) Consideremos la ecuación matricial $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Por el método de aproximaciones sucesivas la solución de esta ecuación diferencial es el punto límite de la sucesión:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{X}_{n+1}(t) = \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{A}\,\mathbf{X}_n(s)\,ds.$$

Esto es

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_0 = \mathbf{I},\\
&\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{A}\,ds = \mathbf{I} + \mathbf{A}t,\\
&\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{I} + \int_0^t (\mathbf{I} + \mathbf{A}s)\,ds = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}t^2,\\
&\mathbf{X}_3(t) = \mathbf{I} + \int_0^t \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}s + \frac{1}{2}\mathbf{A}s^2\right) ds = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}t^3,\\
&\qquad \mapsto e^{\mathbf{A}t}.
\end{aligned}$$

De donde $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ es matriz solución, usando la fórmula de Abel se tiene que $\det\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = e^{\operatorname{Tr}\mathbf{A}t} \neq 0$, por lo que $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz de transición.

2) Como $(\mathbf{A}t_1)(\mathbf{A}t_2) = (\mathbf{A}t_2)(\mathbf{A}t_1)$, entonces $e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}t_1+\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)}$.

3) Del inciso anterior se sigue que $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, por lo que la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ es $e^{-\mathbf{A}t}$.

4) La matriz de transición es $\mathbf{F}(t,\tau) = e^{\mathbf{A}t}\left(e^{\mathbf{A}\tau}\right)^{-1} = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$.

□

EJEMPLO 4.35. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, donde $\beta \neq 0$, en este ejemplo se calculará la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ por dos métodos diferentes. Como primer método se usará la forma de Jordan de $\mathbf{A}$. Siguiendo el procedimiento dado en la sección 4.2, se obtiene que la relación entre $\mathbf{A}$ y su forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+\beta i & 0 \\ 0 & \alpha-\beta i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \exp\left[\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} t\right] &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} \exp\left[\begin{pmatrix} \alpha+\beta i & 0 \\ 0 & \alpha-\beta i \end{pmatrix} t\right] \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(\alpha+\beta i)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-\beta i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\operatorname{sen}(\beta t) \\ \operatorname{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

aquí se ha usado $e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}[\cos \beta t + i \operatorname{sen}(\beta t)]$.

El teorema 4.34 da otra forma de calcular la matriz exponencial. La matriz $e^{\mathbf{A}t}$ es la matriz fundamental de la ecuación diferencial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad x(0) = x_0,\, y(0) = y_0.$$

La cual se puede escribir en terminos de sus componentes como

$$x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Transformando a coordenadas polares $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ se tiene

$$x' = \cos\theta\,\rho' - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\theta',$$

$$y' = \mathrm{sen}\,\theta\,\rho' + \rho\cos\theta\,\theta'.$$

Como el determinante $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0$, por la regla de Cramer se sigue

$$\rho' = \frac{\begin{vmatrix} x' & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' & \rho\cos\theta \end{vmatrix}}{\rho} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha x - \beta y & -y \\ \beta x + \alpha y & x \end{vmatrix}}{\rho} = \frac{\alpha\left(x^2 + y^2\right)}{\rho} = \frac{\alpha\rho^2}{\rho} = \alpha\rho,$$

$$\theta' = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & x' \\ \mathrm{sen}\,\theta & y' \end{vmatrix}}{\rho} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{\rho} & \alpha x - \beta y \\ \frac{x}{\rho} & \beta x + \alpha y \end{vmatrix}}{\rho} = \frac{\beta x^2 + \alpha xy - \alpha xy + \beta y^2}{\rho^2} = \frac{\beta\left(x^2 + y^2\right)}{\rho} = \frac{\beta\rho^2}{\rho^2} = \beta.$$

Integrando se obtiene $\rho(t) = c_1 e^{\alpha t}$, $\theta(t) = \beta t + c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes, en coordenadas cartesianas se tiene $x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t + c_2)$, $y(t) = c_1 e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\beta t + c_2)$. Evaluando en $t = 0$ se tiene $x_0 = c_1\cos(c_2)$ y $y_0 = c_1\,\mathrm{sen}\,(c_2)$. Para encontrar la matriz fundamental se hace el siguiente cómputo:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t + c_2) \\ c_1 e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\beta t + c_2) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t)\cos(c_2) - \mathrm{sen}\,(\beta t)\mathrm{sen}\,(c_2) \\ \mathrm{sen}\,(\beta t)\cos(c_2) + \cos(\beta t)\mathrm{sen}\,(c_2) \end{pmatrix}$$

$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\mathrm{sen}\,(\beta t) \\ \mathrm{sen}\,(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\cos(c_2) \\ c_2\mathrm{sen}\,(c_2) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\mathrm{sen}\,(\beta t) \\ \mathrm{sen}\,(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz fundamental de la ecuación diferencial lineal es

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\text{sen}\,(\beta t) \\ \text{sen}\,(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix},$$

este resultado coincide con el obtenido con el primer método.

En el siguiente teorema se dan las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

TEOREMA 4.36. *La solución de*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{4.4.1}$$

donde $\mathbf{A}$ *es una matriz constante y* $\mathbf{f} : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ *es una función suave, es*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{4.4.2}$$

DEMOSTRACIÓN: Primero escribamos la ecuación (4.4.1) como $\mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$. Usando $\left(e^{-\mathbf{A}t}\right)' = -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}$, la fórmula de Leibnitz, la conmutatividad del producto de $\mathbf{A}$ y $e^{-\mathbf{A}t}$ y sustituyendo la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}\right)' &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}' + \left(e^{-\mathbf{A}t}\right)'\mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}' - \mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x} \\ &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}' - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x}\right) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t).\end{aligned}$$

Esto es $\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}\right)' = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)$. Integrando ahora desde t_0 hasta t se tiene

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds$$

Y finalmente despejando $\mathbf{x}(t)$ obtenemos la ecuación (4.4.2). □

4.5. Más sobre la forma de Jordan y la matriz exponencial

Esta sección contiene varias observaciones sobre la forma de Jordan y la matriz exponencial que son muy importantes en el estudio posterior de las ecuaciones diferenciales. Consideremos el bloque de Jordan

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En ocasiones es conveniente reemplazar los 1's con un número $\epsilon \neq 0$. Para hacer esto definamos $\mathbf{Q}_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \epsilon & & & \\ & & \epsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \epsilon^{k-1} \end{pmatrix}$ entonces $\mathbf{Q}_\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \epsilon^{-1} & & & \\ & & \epsilon^{-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \epsilon^{1-k} \end{pmatrix}$. Es inmediato verificar

$$\mathbf{Q}_\epsilon^{-1}\mathbf{J}\mathbf{Q}_\epsilon = \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & & & & & \\ & \lambda & \epsilon & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda & \epsilon \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Para matrices de Jordan se opera bloque por bloque.

Ahora consideremos las ecuaciones de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Para simplificar estas ecuaciones se procede a hacer un cambio lineal de variables, si $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ donde $\det(\mathbf{Q}) \neq 0$ y $\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ entonces se obtienen las ecuaciones

$$\mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{y}, \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{y} + \mathbf{f}(t, \mathbf{Q}\mathbf{y}).$$

Se busca una matriz $\mathbf{Q}$ tal que este cambio de variables haga estos problemas más sencillos que los originales. El candidato obvio es que $\mathbf{J}$ es la forma de Jordan, pero surgen varios problemas. Los valores propios de $\mathbf{A}$ no tienen por que ser reales; la matriz de cambio de bases $\mathbf{Q}$ puede ser no real; y $\mathbf{f}(t, \mathbf{Qy})$ puede no existir si $\mathbf{Q}$ toma valores complejos. Una manera de resolver estos problemas es buscar alguna forma análoga a la de Jordan, pero definida sobre los números reales. Para dar esta forma postulemos primero que los valores propios complejos de $\mathbf{A}$ se pueden agrupar, contando multiplicidades, en parejas de la forma $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, donde $\beta \neq 0$ y tales que los correspondientes bloques de Jordan son

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 1 & & \\ & \overline{\lambda} & \epsilon & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

donde ambos bloques de Jordan tienen la misma dimensión k. Se puede demostrar que existe una matrix $\mathbf{P}$ constante, real e invertible y tal que $\mathbf{PJP}^{-1}$ tiene en su diagonal bloques de dimensión $2k$ de la forma

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Al sustituir los bloques de Jordan correspondientes a entradas complejas por bloques que tienen la forma anterior, que tienen la ventaja de ser reales, se obtiene la *forma de Jordan real.*

Otra posibilidad es trabajar con funciones analíticas y con su extensión a subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}^n$.

Para terminar esta sección notemos que calcular formas de Jordan y matrices exponenciales puede ser muy difícil, la referencia [**4**] incluye una amplia discusión de las posibles complicaciones que pueden haber, así como varias formas de calcular las matrices exponenciales.

4.6. Retratos fase en el plano

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

también escrito como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{4.6.1}$$

Haciendo el cambio lineal de variables $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, donde $\mathbf{P}$ es una matriz lineal constante e invertible se obtiene $\mathbf{y}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}$ y el sistema se transforma en

$$\mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{y}, \text{ donde } \mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \tag{4.6.2}$$

Para regresar al sistema original (4.6.1) se realiza la transformación lineal inversa por lo que, sin perdida de generalidad, se puede suponer que el sistema ya está en su forma de Jordan real. Como se verá a continuación, el diagrama de fase de (4.6.2) está determinado sobre todo por los valores y vectores propios. Antes de estudiar las diferentes posibilidades, observemos que si $\alpha(t) = (y_1(t), y_2(t))$ es una solución, entonces la inclinación de $\alpha(t)$ es medida por

$$m(t) = \frac{d\, y_2}{d\, y_1} = \frac{y_2'}{y_1'}.$$

4.6.1. La matriz J tiene dos vectores propios diferentes y reales. Sean λ_1 y λ_2 los dos valores propios de $\mathbf{J}$, los cuales son necesariamente reales. Entonces $\mathbf{J} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, y el sistema (4.6.2) es

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \qquad y_2' = \lambda_2 y_2.$$

Las soluciones son las curvas $\alpha(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$, donde c_1 y c_2 son constantes. Si $c_1 = 0$ ó $c_2 = 0$ entonces $y_1(t) = 0$ ó $y_2(t) = 0$ respectivamente. Las soluciones que empiezan en el eje X o en el eje Y cumplen esta condición y por lo tanto siempre estarán en estos ejes. Tenemos cinco soluciones particulares: los cuatro semiejes y la solución constante $\alpha(t) = (0, 0)$. En otro caso la inclinación de $\alpha(t)$ es

$$m(t) = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{\lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Caso 1: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Las funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ y $m(t)$ son estrictamente crecientes y se tienen los siguientes límites

$$\lim_{t \mapsto -\infty} y_1(t) = 0, \qquad \lim_{t \mapsto \infty} y_1(t) = \pm\infty,$$

$$\lim_{t \mapsto -\infty} y_2(t) = 0, \qquad \lim_{t \mapsto -\infty} y_2(t) = \pm\infty,$$

$$\lim_{t \mapsto \infty} m(t) = 0, \qquad \lim_{t \mapsto -\infty} m(t) = \pm\infty.$$

Donde el signo del límite al infinito depende del signo de c_1 o c_2. El origen $(0, 0)$ en esta EDO se llama nodo. Con esta información se construye el diagrama de fase, ver la figura 2.

Caso 2: $0 = \lambda_1 < \lambda_2$. En este caso $y_1(t) = c_1$. Además $y_2(t) \mapsto \pm\infty$ si $t \mapsto \infty$ y $y_2(t) \mapsto \pm 0$ si $t \mapsto -\infty$. El diagrama de fase está en la figura 2.

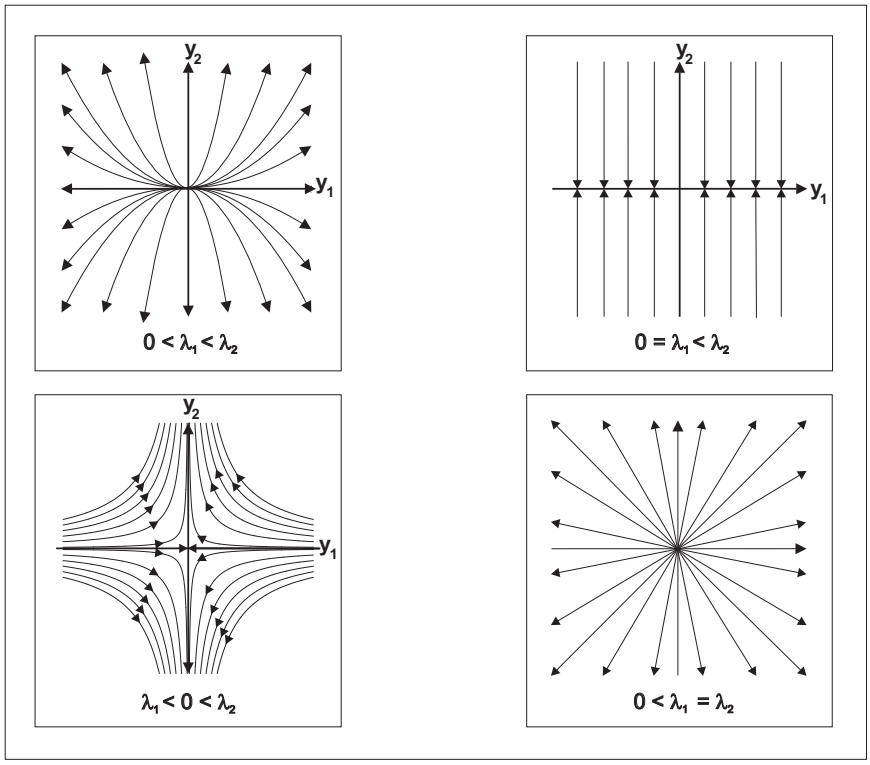

FIGURA 2. Gráficas de las soluciones de la subsección 4.6.1.

Caso 3 : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Las funciones $y_2(t)$ y $m(t)$ son estrictamente crecientes, $y_1(t)$ es estrictamente decreciente. Además se tienen los siguientes límites

$$\lim_{t\mapsto-\infty} y_1(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} y_1(t) = 0, \quad (c_1 \neq 0),$$

$$\lim_{t\mapsto-\infty} y_2(t) = 0, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} y_2(t) = \pm\infty, \quad (c_2 \neq 0),$$

$$\lim_{t\mapsto-\infty} m(t) = 0, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} m(t) = \pm\infty, \quad (c_1, c_2 \neq 0).$$

El origen $(0, 0)$ en esta EDO se llama un punto hiperbólico o punto silla. En la figura 2 se encuentra es diagrama de fase.

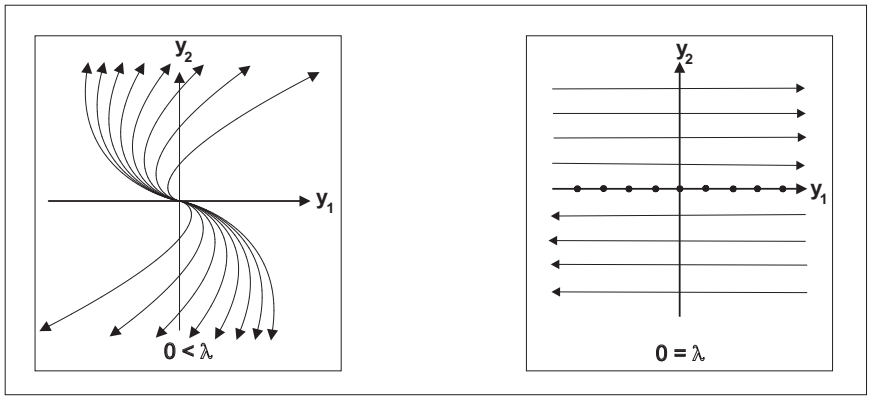

FIGURA 3. Gráficas de las soluciones de la subsección 4.6.2.

Caso $4 : 0 < \lambda_1 = \lambda_2$. Se sigue que $m(t)$ es una función constante. Además se tienen los siguientes límites

$$\lim_{t\mapsto\infty} y_1(t) = \infty, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} y_2(t) = \infty,$$

$$\lim_{t\mapsto-\infty} y_1(t) = 0, \qquad \lim_{t\mapsto-\infty} y_2(t) = 0.$$

Con esta información se demuestra que las órbitas son rayos que salen del origen, junto con el origen. En la figura 2 se encuentra el diagrama de fase.

Caso $5 : 0 = \lambda_1 = \lambda_2$. En este caso $y_1(t) = c_1$, $y_2(t) = c_2$ y las soluciones son constantes.

4.6.2. La matriz J tiene un único valor propio real y un único vector propio. La forma de Jordan es $\mathbf{J} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. Las componentes de las soluciones son

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \qquad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Entonces $y_1'(t) = (c_2 + \lambda(c_1 + c_2 t))\, e^{\lambda t}$, $y_2'(t) = c_2\lambda e^{\lambda t}$ y $m(t) = \frac{c_2\lambda}{c_2+\lambda(c_1+c_2t)}$.

Caso 6: $0 < \lambda$. Se tienen los siguientes límites

$$\lim_{t\mapsto-\infty} y_1(t) = 0, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} y_1(t) = \pm\infty, \quad (c_1 \neq 0 \text{ or } c_2 \neq 0),$$

$$\lim_{t\mapsto-\infty} y_2(t) = 0, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} y_2(t) = \pm\infty, \quad (c_2 \neq 0),$$

$$\lim_{t\mapsto-\infty} m(t) = 0 \quad (c_2 \neq 0), \qquad \lim_{t\mapsto\infty} m(t) = 0, \quad (c_2 \neq 0).$$

En la figura 3 se encuentra es diagrama de fase. El caso $0 > \lambda$ es muy similar y será omitido.

Caso 7: $0 = \lambda$. Las componentes de las soluciones son

$$y_1(t) = c_1 + c_2 t, \qquad y_2(t) = c_2.$$

Entonces si $c_2 > 0$ se sigue $y_1(t) \mapsto \infty$ si $t \mapsto \infty$, $y_1(t) \mapsto -\infty$ si $t \mapsto -\infty$. Si $c_2 < 0$ se sigue $y_1(t) \mapsto \infty$ si $t \mapsto -\infty$, $y_1(t) \mapsto -\infty$ si $t \mapsto \infty$. Si $c_2 = 0$ entonces $y_1(t) = c_1$, $y_2(t) = 0$, entonces el eje X está formado por puntos fijos. En la figura 3 se encuentra el diagrama de fase.

4.6.3. La matriz J tiene valores propios complejos $\lambda = \alpha + \beta\, i$ y $\overline{\lambda} = \alpha - \beta\, i$, $\beta \neq 0$. La forma de Jordan real es $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, que fue estudiada en el ejemplo 4.35. Las soluciones son, en coordenadas polares, $\rho(t) = c_1 e^{\alpha t}$, $\theta(t) = \beta t + c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes, se observa que α está relacionada con el cambio en el radio, mientras que β es la velocidad angular, ésta es constante.

Caso 8: $\alpha = 0$, $\beta < 0$. En este caso el radio es constante, por lo que las órbitas son círculos con centro en el origen y que son recorridos a velocidad uniforme en sentido de las manecillas del reloj. Ver la figura 4.

Caso 9: $\alpha > 0$, $\beta < 0$. El radio crece a una velocidad uniforme y satisface $r(t) \mapsto \infty$. Las órbitas son espirales que giran alrededor del origen en sentido de las manecillas del reloj. Ver la figura 4.

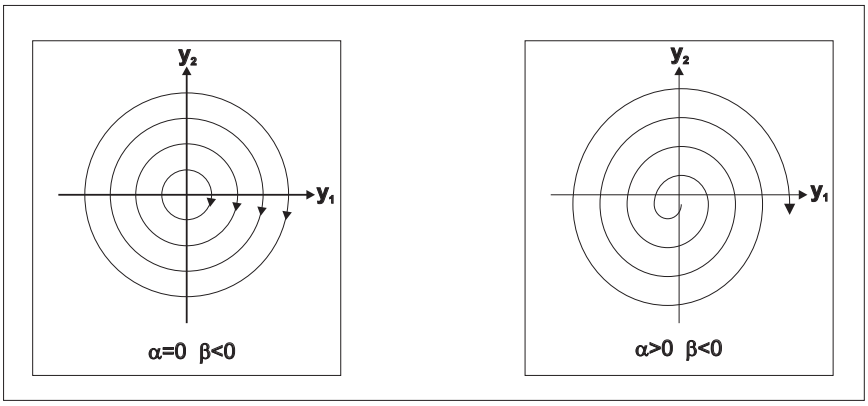

FIGURA 4. Gráficas de las soluciones de la subsección 4.6.3.

El resto de los casos posibles son similares a los estudiados y son omitidos.

4.7. Retratos fase en el espacio

En esta sección se estudian los retratos fase de las ecuaciones diferenciales lineales en tres dimensiónes, no daremos su clasificación completa. La siguiente ecuación diferencial nos mostrará algunas de las dificutades que pueden surgir. Sea $x' = \alpha x - y$, $y' = x + \alpha y$, $z' = -z$. O bien

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.7.1}$$

La matriz $\mathbf{A}$ está en forma de Jordan real, pero es natural escribir esta ecuación en coordenadas cilíndricas. Recordemos que las coordenadas cilíndricas del punto (x, y, z) son (ρ, θ, z) donde $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $z = z$. El plano $X - Y$ satisface $z = 0$. El eje Z es $\rho = 0$, y en general $\rho = c$ es un cilindro cuyo eje es el eje Z.

Procediendo como en el ejemplo 4.35 el sistema se transforma en

$$\rho' = \alpha\,\rho, \qquad \theta' = 1, \qquad z' = -z. \tag{4.7.2}$$

Integrando se obtiene $\rho(t) = c_1 e^{\alpha t}$, $\theta(t) = t + c_2$, $z(t) = c_3 e^{-t}$. Entonces

$$\lim_{t\mapsto-\infty} z(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} z(t) = 0.$$

Como la coordenada $\theta(t)$ crece uniformemente entonces las soluciones giran alrededor del eje Z, como $z(t)$ tiende a cero entonces todas las soluciones se aproximan al plano $X - Y$. Más aún, si $c_1 = 0$ entonces $\rho(t) = 0$; si $c_3 = 0$ entonces $z(t) = 0$, por lo que las soluciones que en algún momento están en el eje Z o el plano $X - Y$ siempre permanecerán en estos conjuntos. Estudiaremos a continuación los diferentes retratos de fase resultantes al ir variando α.

Caso 1: $\alpha > 0$. En este caso

$$\lim_{t\mapsto-\infty} \rho(t) = 0, \qquad \lim_{t\mapsto\infty} \rho(t) = \infty.$$

Las soluciones se alejan del eje Z. Ver la figura 5.

Caso 2: $\alpha = 0$. Se tiene $\rho(t) = c_1$. Las soluciones giran en cilindros con eje en el eje Z. Ver la figura 5.

Caso 3: $-1 < \alpha < 0$. En este caso se tienen los siguientes límites:

$$\lim_{t\mapsto-\infty} \frac{z(t)}{\rho(t)} = \lim_{t\mapsto-\infty} \frac{c_3 e^{-t}}{c_1 e^{\alpha t}} = \frac{c_3}{c_1} \lim_{t\mapsto-\infty} e^{-t(1+\alpha)} = \pm\infty,$$
$$\lim_{t\mapsto\infty} \frac{z(t)}{\rho(t)} = 0.$$

Entonces la soluciones se van acostando sobre el plano $X - Y$. Ver la figura 5.

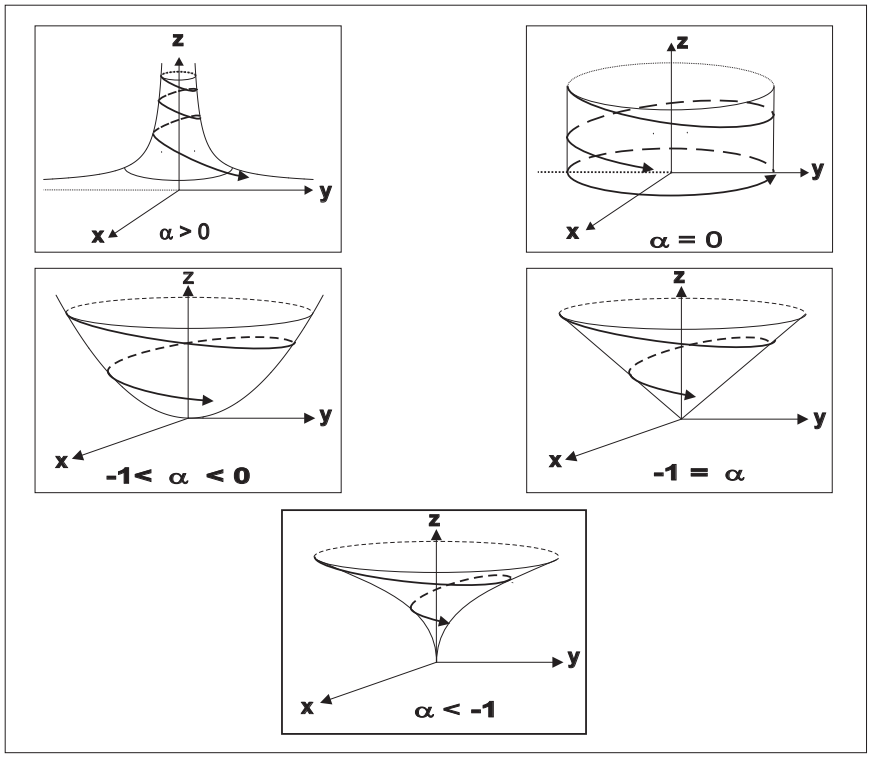

FIGURA 5. Gráficas de las soluciones de la sección 4.7.

Caso 4: $-1 = \alpha$. En este caso se tiene

$$\frac{z(t)}{\rho(t)} = \frac{c_3 e^{-t}}{c_1 e^{-t}} = \frac{c_3}{c_1}.$$

Entonces las curvas solución se mueven en conos con vértice en el origen. Ver la figura 5.

Caso 5: $\alpha < -1$. En este caso se tienen los límites

$$\lim_{t\mapsto\infty} \frac{z(t)}{\rho(t)} = \lim_{t\mapsto\infty} \frac{c_3 e^{-t}}{c_1 e^{\alpha t}} = \frac{c_3}{c_1} \lim_{t\mapsto\infty} e^{-t(1+\alpha)} = \pm\infty,$$

$$\lim_{t\mapsto-\infty} \frac{z(t)}{\rho(t)} = 0.$$

Ahora las soluciones se aproximan al eje Z. Ver la figura 5.

4.8. La foliación de Hopf

En esta sección estudiaremos la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{4.8.1}$$

que se puede escribir como $x_1' = -3x_2$, $x_2' = 3x_1$, $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1$. La solución de este sistema es: $x_1(t) = c_1\cos(3t) - c_2\text{sen}\,(3t)$, $x_2(t) = c_2\cos(3t) + c_1\text{sen}\,(3t)$, $y_1(t) = c_3\cos(t) - c_4\text{sen}\,(3t)$, $y_2(t) = c_4\cos(3t) + c_3\text{sen}\,(3t)$, donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes. Desde un punto de vista cuantitativo sabemos todo sobre la ecuación diferencial (4.8.1) pues tenemos las fórmulas explicitas de todas las soluciones.

Desde un punto de vista cualitativo estas fórmulas no son satisfactorias. Por ejemplo, no sabemos como las diferentes soluciones se agrupan, o si podemos distinguir algunos subconjuntos particulares por medio de las soluciones. En esta sección describiremos al flujo y responderemos a estas preguntas.

Observemos que las órbitas que empiezan en una esfera con centro en el origen permanecen siempre en este conjunto pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2\right] =& 2x_1x'_1 + 2x_2x'_2 + 2y_1y'_1 + 2y_2y'_2 \\ =& 2x_1\left(-3x_2\right) + 2x_2\left(3x_1\right) + 2y_1\left(-y_2\right) + 2y_2\left(y_1\right) = 0, \end{aligned}$$

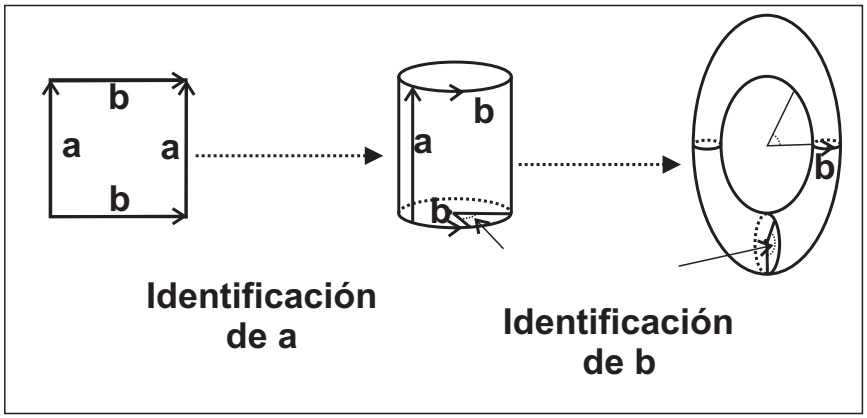

FIGURA 6. Construcción de un toro.

por lo que el radio $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}$ es constante. Sin perdida de generalidad, estudiaremos la ecuación (4.8.1) en la esfera contenida en $\mathbb{R}^4$ de radio uno y centro en el origen:

$$\mathbb{S}^3 = \big\{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1\big\}.$$

Necesitamos describir este conjunto. Como un paso previo veamos como se construye un toro a través de la identificación de varios puntos en el cuadrado $\{(\theta, \phi) : \theta, \phi \in [0, 2\pi]\}$. Al identificar en este cuadrado a todos los puntos $(0, \phi)$ y $(2\pi, \phi)$ (es decir al pegar los lados **a** en la figura 6), se obtiene un cilindro. Si en este cilindro se identifican los puntos $(\theta, 0)$ y $(\theta, 2\pi)$ (pegando los lados **b** de la misma figura) se obtiene el toro.

Haremos ahora un análisis semejante en la esfera $\mathbb{S}^3$, consideremos los siguientes pares de coordenadas polares

$$x_1 = r\cos\theta, \qquad x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$y_1 = \rho\cos\phi, \qquad y_2 = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad \text{donde} \quad 0 < r, \rho, \qquad 0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi.$$

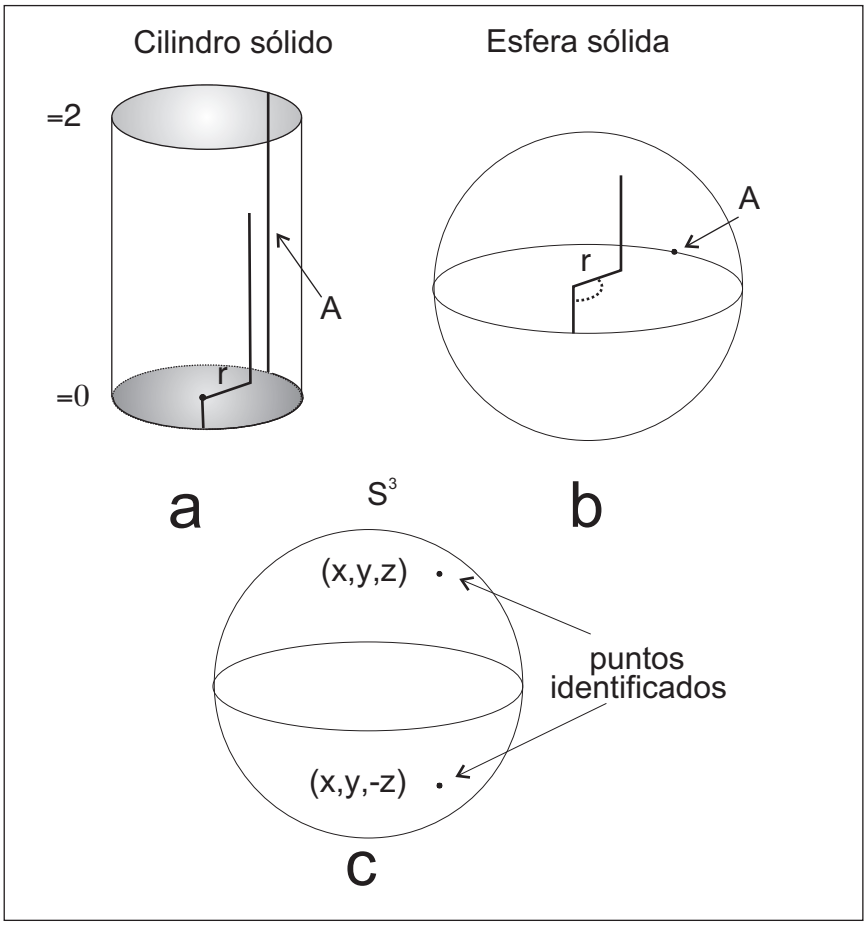

FIGURA 7. Construcción de la esfera $\mathbb{S}^3$.

La ecuación de $\mathbb{S}^3$ en estas coordenadas es $r^2 + \rho^2 = 1$. De aquí se sigue que $0 \leq r \leq 1$, y que $\rho = \sqrt{1 - r^2}$ es una variable redundante que se puede ignorar. Usamos (r, θ, ϕ), donde $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, como las coordenadas de $\mathbb{S}^3$, sin embargo varias de estas coordenadas pueden corresponder a un mismo punto, y necesitamos hacer las identificaciones $\theta = 0$ con $\theta = 2\pi$ y $\phi = 0$ con $\phi = 2\pi$.

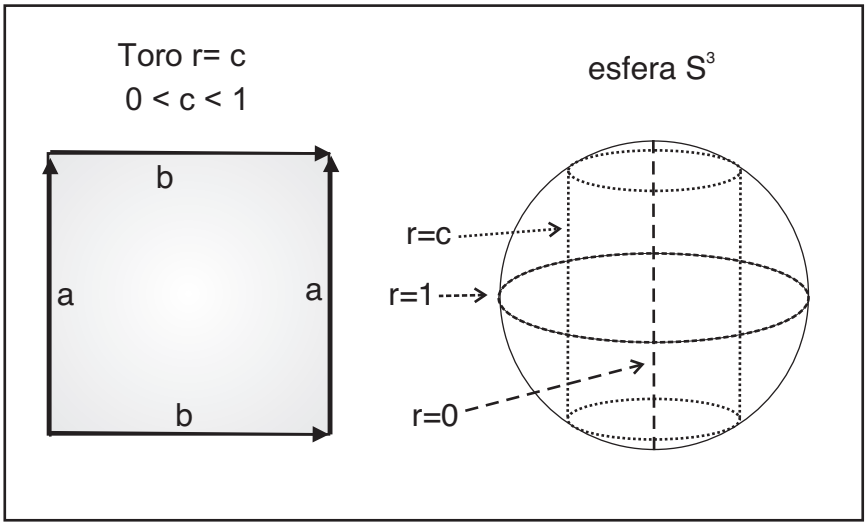

FIGURA 8. Subconjuntos de la esfera $\mathbb{S}^3$.

Observemos que las coordenadas (r, θ), donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ son las coordenadas polares de un disco cerrado; al agregar la coordenada ϕ se obtiene un cilindro sólido, ver la figura 7.a. Notemos que estamos identificando $\theta = 0$ con $\theta = 2\pi$.

Cuando $r = 1$ entonces $\rho = 0$ y la coordenada ϕ es superflua, esto quiere decir que si $0 \leq \theta \leq 2\pi$ entonces el conjunto $A_\theta = \{(1, \theta, \phi) : 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ se colapsa en un punto, al hacer esta identificación se obtiene la esfera sólida $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, donde el hemisferio superior corresponde a los puntos $\phi = 2\pi$, el hemisferio inferior a los puntos $\phi = 0$ y la cara lateral del cilindro en la figura 7.a se convierte en el ecuador, ver la figura 7.b.

Como siguiente paso observemos que la identificación de $\phi = 0$ con $\phi = 2\pi$ significa la identificación del punto (x, y, z) en el hemisferio superior con el punto $(x, y, -z)$ en el hemisferio inferior, ver la figura 7.

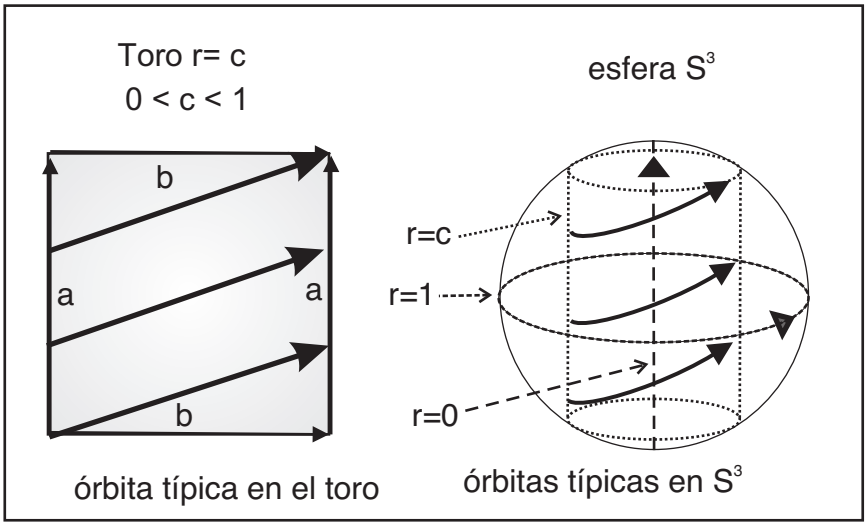

FIGURA 9. Flujo de la ecuación (8).

Notemos que los conjuntos $r = 0$ y $r = 1$ son dos círculos anudados. El conjunto $r = c$, con $0 < c < 1$ es un toro, ver figura 8.

En las coordenadas (r, θ, ρ, ϕ) el sistema (4.8.1) se escribe

$$r' = 0, \quad \theta' = 3, \quad \rho' = 0, \quad \phi = 1. \tag{4.8.2}$$

Integrando obtenemos

$$r(t) = c_1, \quad \theta(t) = 3t + c_2, \quad \rho(t) = c_3, \quad \phi(t) = t + c_4. \tag{4.8.3}$$

Observamos que la coordenada θ se mueve tres veces más rapido que la coordenada ϕ. En la figura 9.a se encuentra el flujo en el toro $r = c_1$, con $0 < c_1 < 1$ y finalmente en la figura 9.b se encuentra el flujo en $\mathbb{S}^3$.

4.9. Ecuación de la primera variación

Esta sección puede ser incluida en el capítulo 3, nosotros preferimos diferirla hasta ahora porque las ecuaciones diferenciales lineales son fundamentales. Empecemos con un resultado de Hadamard.

LEMA 4.37 (Hadamard). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, y sea $f : D \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen y son continuas. Entonces existe la familia de funciones continuas $g_k : D \times D \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$ tales que si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in D$ se sigue que*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)\, g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad g_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, $0 \leq t \leq 1$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D$. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ permanecen fijos, se usará la notación $\alpha(t)$, entonces $\alpha(0) = \mathbf{y}$, $\alpha(1) = \mathbf{x}$ por lo que esta función es la parametrización de la recta que une a dichos puntos. Observemos que α es suave y además $\alpha'(t) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Usando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) &= f\big(\alpha(1)\big) - f\big(\alpha(0)\big) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\big(f \circ \alpha(s)\big)\, ds = \int_0^1 \nabla f\big(\alpha(s)\big) \cdot \alpha'(s)\, ds \\ &= \int_0^1 \nabla f\big(\alpha(s)\big)\, ds \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}\big(\alpha(s)\big)\, ds \right) (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k). \end{aligned}$$

Observemos ahora que $g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}\big(\alpha(s)\big)\, ds$ es una función continua. El siguiente cálculo termina la demostración:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{g_k(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k, \mathbf{x})\, h}{h} = \lim_{h \mapsto 0} g_k(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k, \mathbf{x}) = g_k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

□

Los siguientes teoremas dan la diferenciabilidad de las soluciones con respecto a las condición inicial.

TEOREMA 4.38. *Para la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función con primeras derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ continuas. Sea $\phi(t, \tau, p)$ la solución de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, $\phi(\tau) = p$. Entonces las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial p}\phi(t, \tau, p)$ y $\frac{\partial}{\partial \tau}\phi(t, \tau, p)$ existen, son continuas y satisfacen la ecuación diferencial*

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t, \tau, p), t)y, \tag{4.9.1}$$

y las condiciones iniciales $\frac{\partial}{\partial p}\phi(\tau, \tau, p) = 1$, $\frac{\partial}{\partial \tau}\phi(\tau, \tau, p) = -f(p, \tau)$.

DEMOSTRACIÓN: El teorema de Hadamard implica que existe $H(x, y, t)$ continua tal que

$$f(x, t) - f(y, t) = H(x, y, t)(x - y), \qquad H(x, x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t).$$

Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales dependientes del parámetro h

$$y' = H(\phi(t, \tau, p + h), \phi(t, \tau, p))y, \qquad y(\tau) = 1. \tag{4.9.2}$$

Esta familia depende continuamente del parámetro h. Usando el teorema 3.24 se sigue que sus soluciones, $\psi(t, \tau, p, h)$, son continuas. Si $h \neq 0$ se tiene la igualdad

$$\psi(t, \tau, p, h) = \frac{\phi(t, \tau, p + h) - \phi(t, \tau, p)}{h}.$$

Pues el lado izquierdo satisface

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\phi(t, \tau, p + h) - \phi(t, \tau, p)}{h} =& \frac{f(\phi(t, \tau, p + h), t) - f(\phi(t, \tau, p + h), t)}{h} \\ =& H(\phi(t, \tau, p + h), \phi(t, \tau, p), t)\frac{\phi(t, \tau, p + h) - \phi(t, \tau, p)}{h}.\end{aligned}$$

Además $\frac{\phi(t,\tau,p+h)-\phi(t,\tau,p)}{h} = \frac{p+h-p}{h} = 1$. Usando la continuidad de ψ se sigue que

$$\psi(t,\tau,p,0) = \lim_{h\mapsto 0}\psi(t,\tau,p,h) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{\phi(t,\tau,p+h)-\phi(t,\tau,p)}{h} = \frac{\partial}{\partial p}\phi(t,\tau,p).$$

De donde se sigue que esta es solución de la ecuación (4.9.1)y que $\frac{\partial}{\partial p}\phi(\tau,\tau,p) = 1$. Las soluciones de (4.9.1) dependen de forma continua de las condiciones iniciales, por lo que $\frac{\partial}{\partial p}\phi(t,\tau,p)$ es continua. El resto de este teorema se obtiene de forma similar. □

La siguiente generalización de este teorema es también valida, y se prueba de manera similiar.

TEOREMA 4.39 (Diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales). *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *una función con primeras derivadas continuas. Si* $\phi(t,\tau,\mathbf{x}_0)$ *es la solución de la ecuación diferencial* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$, $\phi(\tau) = \mathbf{x}_0$ *entonces la matriz jacobiana* $\phi_{\mathbf{x}_0}(t,\tau,\mathbf{x}_0)$ *y la función* $\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(t,\tau,\mathbf{x}_0)$ *existen y resuelven la ecuación diferencial*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\phi(t,\tau,\mathbf{x}_0))\mathbf{y}. \tag{4.9.3}$$

También satisfacen

$$\phi_{\mathbf{x}_0}(t,\tau,\mathbf{x}_0) = \mathbf{I}, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\phi(t,\tau,\mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}\left(\tau,\phi(\tau,\tau,\mathbf{x})\right), \ \textit{si } t=\tau.$$

DEFINICIÓN 4.40. Cada una de las ecuaciones(4.9.1) y (4.9.3) se llama *ecuación de la primera variación.*

OBSERVACIÓN 4.41. La ecuación (4.9.3) es una ecuación lineal. La matriz no es constante en general y para poder aplicar esta ecuación es necesario conocer la solución $\phi(t,\tau,\mathbf{x})$. Suponiendo que la función $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ es suficientemente suave se puede aplicar este teorema repetidas veces para

obtener ecuaciones diferenciales sobre las siguientes derivadas parciales de las soluciones. Lo más importante es que las soluciónes satisfacen

$$\phi(t,\tau,\mathbf{p}+\mathbf{h}) \simeq \phi(t,\tau,\mathbf{p}) + \mathbf{X}(t)\mathbf{h}, \tag{4.9.4}$$

donde $\mathbf{X}(t)$ es la matriz fundamental de la ecuación (4.9.3), y Y la aproximación es de orden t^2.

EJEMPLO 4.42. La ecuación del péndulo es $\theta'' + \operatorname{sen}(\theta) = 0$, introduciendo las variables $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$ se escribe como

$$x_1' = x_2, \qquad x_2' = -\operatorname{sen}(x_1). \tag{4.9.5}$$

El campo vectorial de esta ecuación es $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_2, -\operatorname{sen}(x_1))$. Notemos que la función constante $\phi(t) = (0,0)$ es una solución de esta ecuación diferencial pues $\mathbf{f}(0,0) = (0,0)$. Además la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ en este punto es $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. La ecuación de la primera variación es

$$\mathbf{y}' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{y}'.$$

Como se estudió en la sección 4.6, las soluciones de esta ecuación diferencial son los círculos con centro en el origen y están parametrizados en coordenadas $y_1(t) = c_1\cos(-t + c_2)$, $y_2(t) = c_1\operatorname{sen}(-t+c_2)$, las constantes c_1 y c_2 están determinadas por las condiciones iniciales. El teorema 4.39 indica que las soluciones de la ecuación diferencial (4.9.5) tienen la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 + c_1\cos(-t + c_2) + o(t^2) = c_1\cos(-t + c_2) + o(t^2), \\ x_2(t) &= 0 + c_1\operatorname{sen}(-t + c_2) + o(t^2) = c_1\operatorname{sen}(-t + c_2) + o(t^2). \end{aligned}$$

Con el transcurso del tiempo el error determinado por el teorema 4.39 se incrementa, pero algunas circunstancias este no es el caso. Los teoremas de la variedad estable e inestable y el

teorema de Hartman-Grobman están intimamente relacionados con este aspecto, las referencias [**2, 5**] traen un amplio estudio de estos teoremas y se recomiendan como continuación de este libro.

4.10. Álgebra lineal

Terminemos este capítulo dando otra manera de pensar a las ecuaciones diferenciales lineales y a sus soluciones. trabajaremos con los siguientes conjuntos:

$$C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n : f \text{ es una función continua}\},$$

$$C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n : f \text{ es una función con primera derivada continua}\}.$$

Los dos son espacios vectoriales de dimensión infinita. Sea $\mathbf{A}(t)$ una matriz continua, definida también para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces la función

$$T : C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \mapsto C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \qquad \text{definida por} \qquad T(\phi) = \phi' - \mathbf{A}\phi$$

es una transformación lineal continua. El núcleo $N(T) = \{\phi : \phi' - \mathbf{A}\phi = 0\}$, consiste de las soluciones de la ecuación lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. El teorema 4.4 dice que éste tiene dimensión finita.

Con esta notación la ecuación no homogénea (4.1.2) se escribe $T(\phi) = \mathbf{g}(t)$, por lo que este problema es equivalente al estudio de la imagen del operador T.

Una gran diferencia entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y varios de los ejemplos dados en la sección 1.2 es que en estos no se puede hacer la misma construcción, ya sea por que los correspondientes espacios sean difíciles de definir o manejar, por que la transformación T presente diversas dificultades o por que el núcleo tenga dimensión infinita.

La fórmula de Abel y la existencia de la matriz fundamental dependen fuertemente de la dimensión del núcleo, por lo que no es posible construir sus análogos si la dimensión del núcleo es infinita.

4.11. Problemas

4.43. Sea $\Phi(t,\tau)$ la matriz de transición de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, entonces la única solución $\mathbf{x}(t,\tau,\mathbf{x}_0)$ del problema con condiciones iniciales $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, está dada por

$$\mathbf{x}(t,\tau,\mathbf{x}_0) = \Phi(t,\tau)\mathbf{x}_0 + \int_\tau^t \Phi(s,\tau)\mathbf{g}(s)\,ds.$$

4.44. Demostrar que si $\Psi(t)$ es una solución particular de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ entonces toda solución es de la forma $\Phi(t) + \Psi(t)$, donde $\Phi(t)$ es solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$.

4.45. Calcular la forma de Jordan y la forma de Jordan real de las siguientes matrices. Calcular su matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ usando la definición y por medio de la forma de Jordan de las matrices:

1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.46. Demostrar si $\mathbf{B}$ es una de las dos matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

no existe ninguna matriz real $\mathbf{A}$ tal que $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}$. Hint: Analizar las trazas, valores propios y determinantes de las exponenciales de las posibles formas normales reales de matrices de orden 2, éstas son

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donde α, β, λ y μ son reales.

4.47. Sea $\mathbf{A}$ una matriz constante. Sea $\sigma = \max\{Re\,\lambda : \lambda \text{ es un valor propio de } \mathbf{A}\}$. Demostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay una K tal que $\left\|e^{\mathbf{A}t}\right\| \leq Ke^{(\sigma+\epsilon)t}$ para $t \geq 0$. Demuestre por medio de un ejemplo que es imposible encontrar una K que funcione para $\epsilon = 0$.

4.48. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^n$ una serie definida en $\mathbb{R}$ con radio de convergencia r, demostrar que si $\mathbf{A}$ es una matriz que satisface $\|\mathbf{A}\| < r$ entonces $f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{A}^n$ es convergente.

4.49. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada constante y con polinomio característico $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$. Demostrar:

1 Si $k \geq 0$, entonces

$$\mathbf{A}^{n+k} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{kj} \mathbf{A}^j,$$

donde $\alpha_{0j} = -a_j$ para $j = 0, \ldots, n-1$; $\alpha_{k+1,0} = -a_0\, \alpha_{k,n-1}$; y para $j = 1, \ldots n-1$ $\alpha_{k+1,j} = -a_j\, \alpha_{k,n-1} + \alpha_{k,j-1}$. Hint: Usar el teorema de Hamilton-Cayley.

2 Demostrar que

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t) \mathbf{A}^k,$$

donde $f_k(t)$ es la función analítica definida por

$$f_k(t) = \frac{t^k}{k!} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{jk} \frac{t^{n+j}}{(n+1)!}.$$

Hint: Estudiar la convergencia de la serie, el criterio M de Wierstrass puede ser útil.

4.50. Describir el diagrama de fase de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

4.51. Describir los diagramas de fase en la esfera unitaria $\mathbb{S}^3$ de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & & \\ 2 & 0 & & \\ & & 0 & -3 \\ & & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

4.12. *Ecuaciones lineales en diferencias

Casi todos los teoremas estudiados en este capítulo tienen un análogo en las ecuaciones en diferencias lineales. Esta sección esta destinada a estos teoremas.

DEFINICIÓN 4.52. Si para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}_k$ es una matriz cuadrada invertible de orden n y $\mathbf{g}_k$ es un vector de orden n entonces la *ecuación en diferencias lineal homogénea* es la ecuación en diferencias

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{y}_k, \qquad \mathbf{y}_0. \tag{4.12.1}$$

La *ecuación en diferencias lineal no homogénea* es la ecuación en diferencias

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{g}_k, \qquad \mathbf{y}_0. \tag{4.12.2}$$

Ambas ecuaciones se llaman *ecuaciones lineales en diferencias.*

4.53. Escribir en la forma (4.12.2) a la ecuación

$$y_{n+k} = p_1(k) y_{n+k-1} + p_2(k) y_{n+k-2} + \cdots + p_n(k) y_k + g_k,$$

donde $p_1(k), \ldots, p_n(k), g_k \in \mathbb{R}$.

4.54. Las soluciones de las ecuaciones (4.12.1) y (4.12.2) son, respectivamente,

$$\mathbf{y}_k = \left[\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_j \right] \mathbf{y}_0,$$

$$\mathbf{y}_k = \left[\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_j \right] \mathbf{y}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \left[\prod_{r=j+1}^{k-1} \mathbf{A}_r \right] \mathbf{g}_j.$$

4.55. El conjunto de soluciones de la ecuación (4.12.1) es un espacio vectorial de dimensión n.

DEFINICIÓN 4.56. Si $\mathbf{y}_k^1, \ldots, \mathbf{y}_k^n$ es un conjunto de n soluciones de la ecuación (4.12.1) entonces la matriz $\mathbf{\Phi}_k = [\mathbf{y}_k^1, \ldots, \mathbf{y}_k^n]$ se llama una *matriz solución.* El determinante de $\mathbf{\Phi}_k$ se llama su *Casarotiano.* Si $\mathbf{y}_k^1, \ldots, \mathbf{y}_k^n$ son linealmente independientes entonces forman un *conjunto fundamental de soluciones* y $\mathbf{\Phi}_k$ es una *matriz fundamental.*

4.57. Demostrar que la matriz $\mathbf{\Phi}_k$ es una matriz solución si y sólo si satisface la ecuación en diferencias matricial $\mathbf{\Phi}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{\Phi}_k$.

4.58. Demostrar la fórmula de Abel:

$$\det[\mathbf{\Phi}_k] = \left[\prod_{j=r}^{k-1} \det \mathbf{A}_j\right] \det[\mathbf{\Phi}_r].$$

4.59. Demostrar que la matriz solución $\mathbf{\Phi}_n$ es no singular en para todo $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $\mathbf{\Phi}_{n_o}$ para algún $n_o \in \mathbb{N}$.

4.60. Demostrar que las soluciones $\mathbf{y}_n^1, \ldots, \mathbf{y}_n^k$ son linealmente independientes si y solo si la matriz solución asociada $\mathbf{\Phi}_k$ es no singular para todo $k \in \mathbb{N}$.

4.61. Si $\mathbf{\Phi}_k$ es una matriz fundamental y $\mathbf{C}$ es una matriz constante no singular, entonces $\mathbf{\Phi}_k \mathbf{C}$ tambien es una matriz fundamental.

4.62. Si $\mathbf{\Phi}_k$ y $\mathbf{\Gamma}_k$ son matrices fundamentales, entonces existe una matriz $\mathbf{C}$ constante e invertible tal que $\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{C}$.

DEFINICIÓN 4.63. La matriz de transición en $k_0 \in \mathbb{N}$ es la matriz fundamental tal que $\mathbf{\Phi}_{k_0} = \mathbf{I}_n$. Denotaremos esta matriz por $\mathbf{\Phi}_{k,k_0}$.

4.64. Si $\mathbf{\Gamma}_k$ es una matriz fundamental entonces $\mathbf{\Phi}_{k,k_0} = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{\Gamma}_{k_0}^{-1}$.

4.65. Escribir y demostrar una versión del teorema 4.16 para la ecuaciones en diferencias lineales.

Bibliografía

1. T. M. Apostol, *Calculus*, Reverte, 1970.
2. J. K. Hale, *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, 1969.
3. S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley PublishingCompany, 1965.
4. C. Moler and C. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix*, SIAM Review **20** (1978), no. 4, 801–836.
5. C. Robinson, *Dynamical systems, stability, symbolic dynamics, and chaos*, second edition ed., Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton London New York Washington, 1999.
6. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Third edition ed., McGrow Hill/Kogakusha, 1976.
7. G. Strang, *Algebra lineal y sus aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano, 1982.

Índice

$N(\mathbf{A})$, 73

$N(\mathbf{A})^k$, 73

$Suc(\mathbb{R}^n)$, 28

$\mathbb{M}_n$, 41

$C(D, \mathbb{R}^n)$, 38

antidiferencia, 30

bola abierta, 31

cadena de vectores propios generalizados, 83

campo

- de pendientes, 13
- de velocidades, 3
- vectorial, 3

Casarotiano, 124

cerradura, 33

conjunto

- de las funciones continuas, 38
- abierto, 32
- acotado, 33
- cerrado, 33
- compacto, 36
- fundamental de soluciones, 77, 124

contracción, 34

convergencia

- puntual, 39
- uniforme, 39

corrimiento, 29

cubierta abierta, 36

curva solución, 4

diferencia, 28

diferenciabilidad de las soluciones con respecto a la condición inicial, 116

diferenciabilidad de soluciones con respecto a las condiciones iniciales, 117

distancia, 31, 37

ecuación

- integral, 5

con retardo, 4

de Bernoulli, 25

de Duffing, 19

de evolución, 4

de Fredholm de segunda clase, 69

de la primera variación, 117

de recurrencia, 71

de Riccati, 26

de Van Der Pol, 70

del oscilador armónico, 70

del péndulo, 70

en diferencias, 71

exacta, 25

hamiltoniana, 19

separable, 23

ecuación en diferencias lineal, 123

homogénea, 123

no homogénea, 123

ecuación diferencial

lineal, 74

de segundo orden, 8

de primer orden, 22

homogénea, 74

no homogénea, 74

matricial, 77

ordinaria, 3

con condiciones iniciales, 12

con valores en la frontera, 12

EDO, 3

espacio

de Banach, 41

métrico, 31

completo, 33

normado, 41

de las matrices, 41

exponencial de matrices, 89

fórmula

de Abel, 78, 124

de Liouville, 78

factor integrante, 22

familia

equicontinua, 40

uniformemente acotada, 40

foliación de Hopf, 110

forma de Jordan, 82, 83

real, 101

función

continua, 33

localmente Lipschitz, 56

hamiltoniano, 19

integración de una ecuación diferencial, 22

integral de una EDO, 25

intervalo maximal, 59

isoclinas, 13

lema
  de Gronwall, 63, 68
  de Hadamard, 115
lineas de flujo, 3
longitud de la cadena, 83

método
  clásico, 45
  clásico mejorado, 46
  de aproximaciones sucesivas, 58
  de Gauss-Seidel, 48
  de Jacobi, 47
  de las quebradas de Euler, 67
  de Newton, 49
  de transformación de gráficas, 48
métrica, 31
  uniforme, 39
matrices similares, 82
matriz
  de transición, 80
  fundamental, 77, 124
  jacobiana, 68
  solución, 77, 124

núcleo de la matriz, 73

norma, 41

orden de una EDO, 3

polinomio característico, 82
potencial, 19
problema
  de tres cuerpos, 10, 62
  inverso a las tangentes, 1
punto
  de acumulación, 36
  singular, 4

retrato fase, 16

segunda ley de Newton., 10
shift, 29
sistema
  gradiente, 27
  hamiltoniano, 27
  lineal de ecuaciones diferenciales, 74
sistema de ecuaciones diferenciales
  lineales, 73
sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, 9
solución
  de una EDO, 3
  máxima, 59
sucesión

convergente, 32
de Cauchy, 32
suma, 28

teorema
de Arzela-Ascoli, 40
de dependencia continua con respecto a
condiciones iniciales, 66
parámetros, 66
de existencia de Peano, 52
de existencia y unicidad de soluciones, 56
de Peano, 67
de Picard-Lindelöff, 56, 69
del punto fijo de Banach, 34

valor propio, 82
variación, 28
vector propio, 82
generalizado, 82
generalizado maximal, 82

wronskiano, 77