

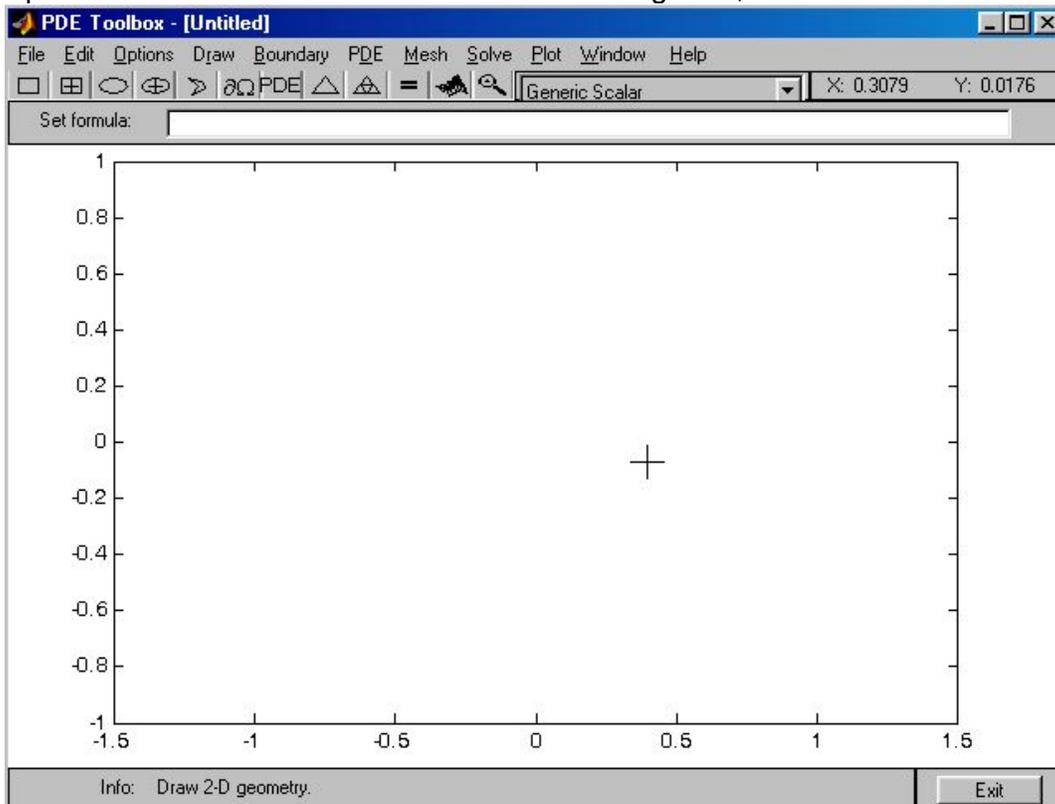
## El Toolbox PDEtool de Matlab

**@Joaquín Delgado**  
**Departamento de Matemáticas**  
**UAM-Iztapalapa**

Matlab tiene un modo interactivo para resolver varios tipos de ecuaciones diferenciales parciales llamado *Pdetool*. Invóquelo directamente desde la ventana de comandos.

```
>>pdetool
```

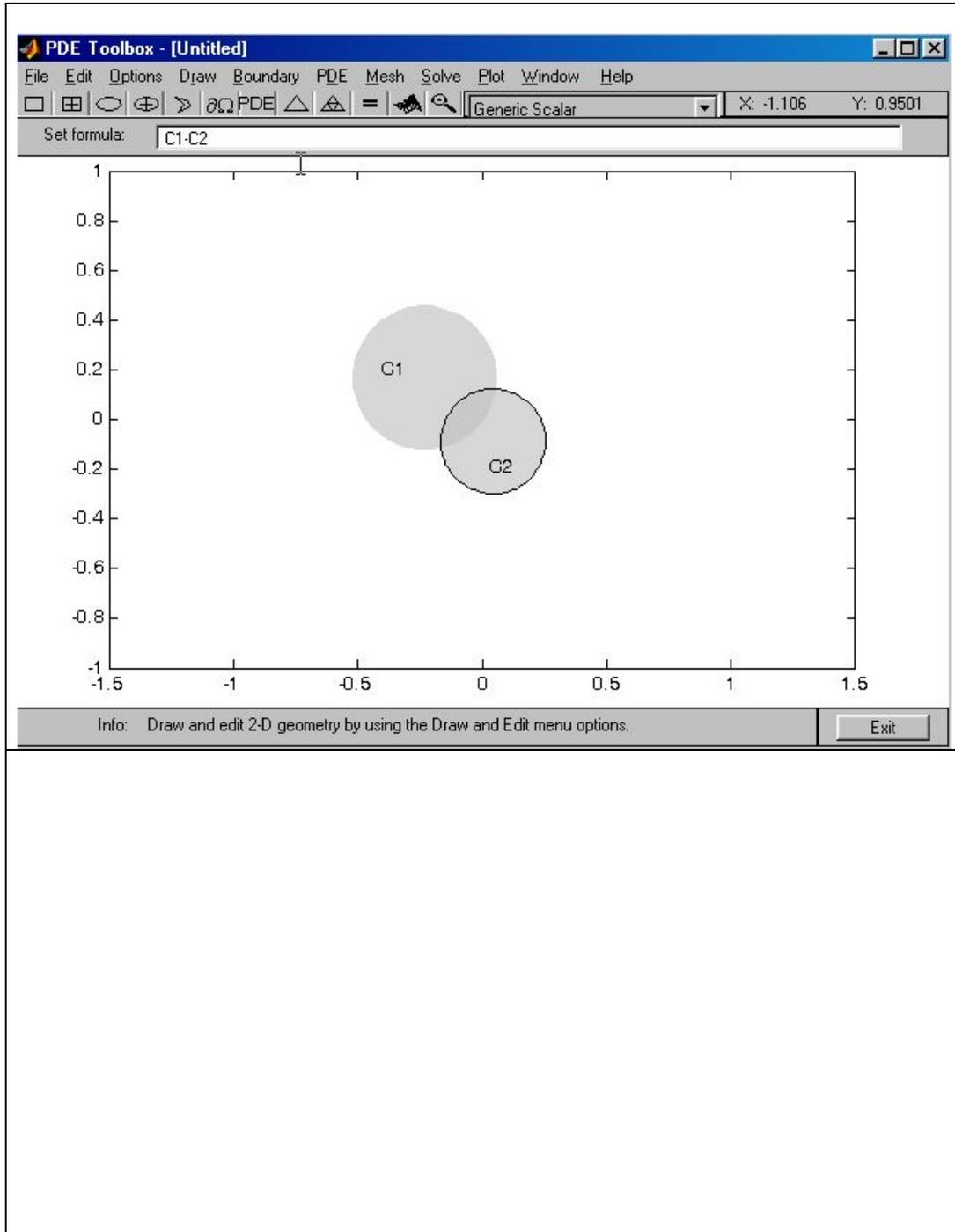
Aparecerá una ventana como se muestra en la figura 1,

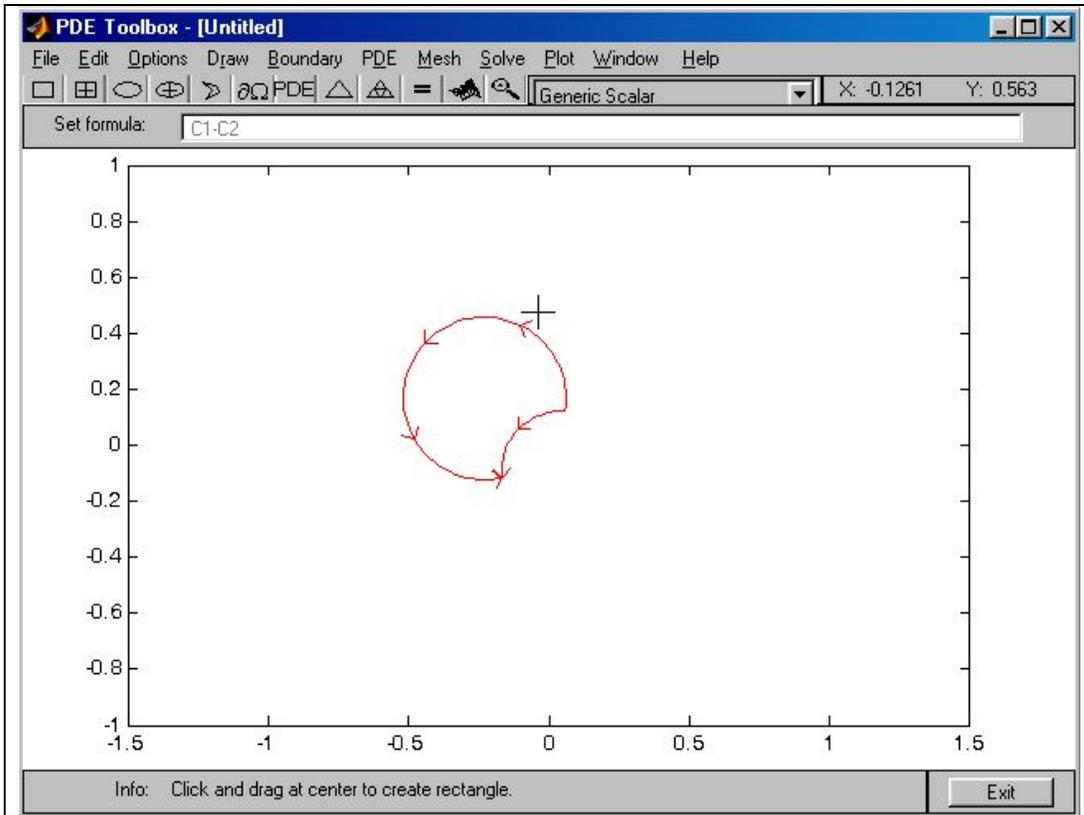


### El Modo de dibujo

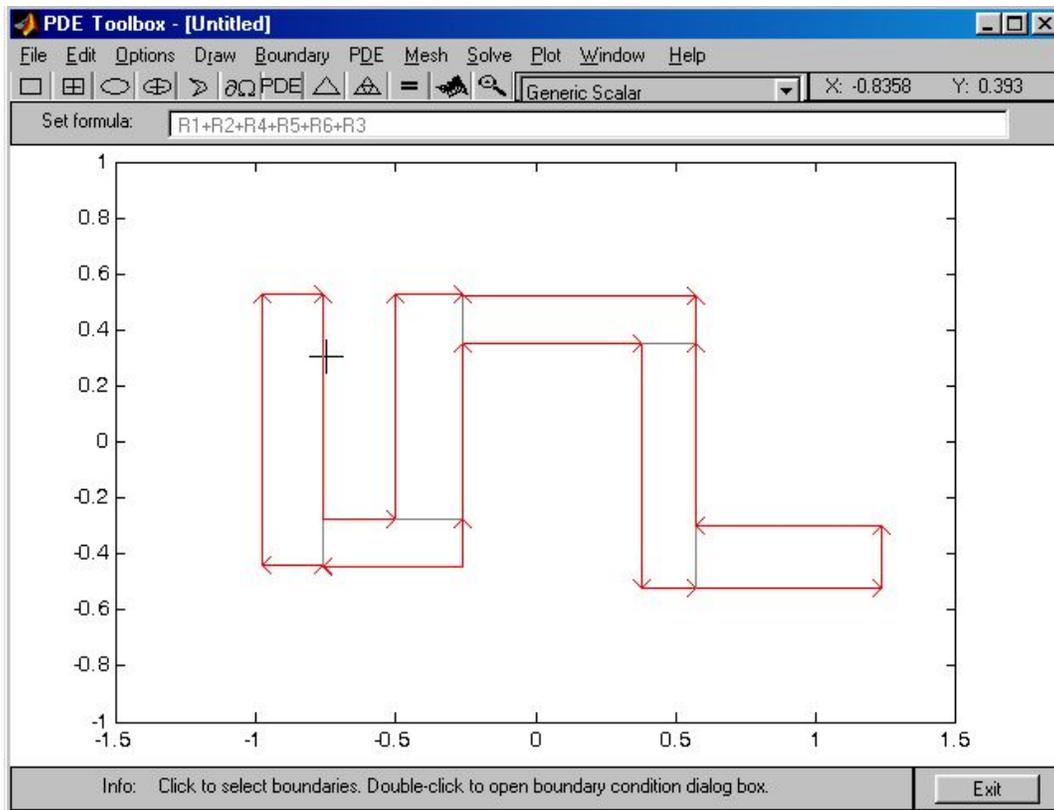
Podemos comenzar por poner el Pdetool en *Modo de dibujo (Draw Mode)*. Seleccionando del menú principal Draw → Draw Mode. Se pueden dibujar rectángulos, elipses o polígonos seleccionando del menú principal Draw → Rectangle, Ellipse, Polygon, o bien a partir de los íconos que aparecen debajo del menú principal. Existen dominios básicos como rectángulos, discos y polígonos con los cuales se pueden operar para obtener dominios más complejos combinándolos con las operaciones de unión (+) y diferencia (-). Observe que las distintas regiones se van numerando consecutivamente, si son rectángulos como R1, R2, etc., si son círculos C1, C2, etc. Para dibujar una

muesca se puede dibujar un círculo sobre otro modificar la combinación por defecto en la ventana *Set formula* de  $C1+C2$  a  $C1-C2$ , como en la figura 2. al cambiar de modo (por ejemplo cambiando a *Boundary Mode*) aparecerá la región resultante.





En la siguiente figura se muestra una región más complicada.



## El Modo de frontera

Una vez especificado el dominio, se pueden especificar las condiciones de frontera cambiando al Modo de Frontera (Boundary Mode) a partir del menú principal: Boundary → Boundary Mode. Si se desea se pueden remover los border interiores del dominio, si los hay, seleccionando del Boundary → Remove all subdomain borders.

Las condiciones de frontera sobre uno de los bordes se inician dando doble click sobre alguno de los bordes de la frontera del dominio. Aparecerá una ventana donde se podrán especificar las condiciones de frontera del tipo Dirichlet, Neuman o Mixtas. En la figura siguiente aparece la ventana por defecto para especificar condiciones de frontera tipo Dirichlet

$$h*u=r.$$

Aquí  $h$  y  $r$  son constantes o a lo más funciones de las variables independientes  $x$ ,  $y$ . Por ejemplo para especificar la condición de frontera

$$u = x^2 + y^2, (x, y) \in \partial_1$$

donde  $\partial_1$  denota la parte de la frontera seleccionada, debemos especificar  $h$  como se muestra en la figura

Condition type:	Coefficient	Value	Description
<input type="radio"/> Neumann	g	0	
<input checked="" type="radio"/> Dirichlet	q	0	
	h	1	
	r	x.^2+y.^2	

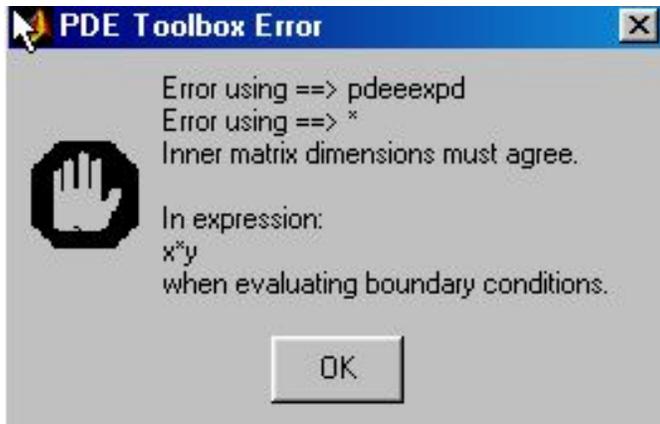
Observe que  $x$  e  $y$  serán en general arreglos (vectores o arrays) que contienen las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de los distintos puntos de la frontera, de modo que en la especificación de  $h$  y  $r$  deberán aparecer operaciones que preserven las dimensiones de los arreglos  $x$  e  $y$  (i.e. operaciones puntuales o entrada por entrada). En el ejemplo anterior, si en vez de especificar

$$r = x.^2+y.^2$$

escribimos

$$r = x*y$$

obtendríamos el mensaje de error



ya que  $x*y$  es la operación de *multiplicación matricial*.

Las condiciones tipo Neuman se dan en el formato  $n*c*\text{grad}(u) + qu=g$

donde  $n$ , representa el vector normal exterior al borde la frontera seleccionado, es decir

$$c(n \cdot \nabla u) + qu = g \quad (1)$$

donde  $c, q, g$  a lo más pueden ser funciones de  $x, y$  a valores reales. La cantidad

$n \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial n}$  evaluada en un punto  $(x, y)$  de la frontera, se llama también la

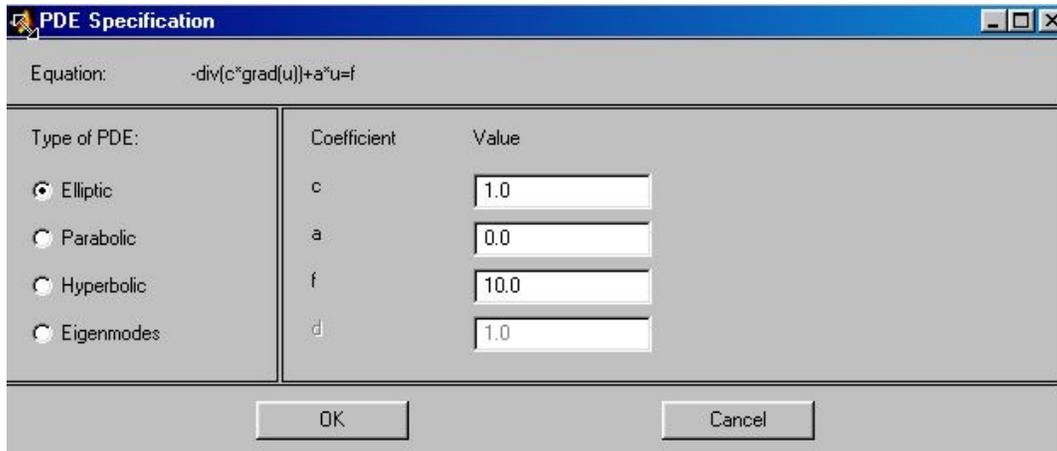
derivada normal y representa la tasa instantánea de variación de  $u$  a lo largo de una curva cualquiera con dirección del vector normal  $n$ , en el punto  $(x, y)$ . La constante  $c$  permite interpretar muchas veces  $c(n \cdot \nabla u)$  como flujo de calor, corriente eléctrica, etc. En muchos casos, las leyes empíricas establecen una relación proporcional entre el flujo y la diferencia del valor de  $u$  respecto de un valor de referencia. Tal es el caso de la ley de enfriamiento de Newton que establece que el flujo de calor en una frontera libre es proporcional a la diferencia de temperatura de la frontera y el medio ambiente. En símbolos

$$c(n \cdot \nabla u) = \lambda(u - u_a)$$

que naturalmente se puede llevar a la forma normal (1) de Matlab.

## El Modo PDE

Los tipos de EDP que se pueden simular en Pdetool son las que se muestran en la siguiente figura, después de seleccionar el modo PDE: PDE → PDE Mode y seleccionar el menú PDE → PDE Specification.



Por ejemplo la ecuación elíptica más general que se pueden trabajar en Pdetool son de la forma

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

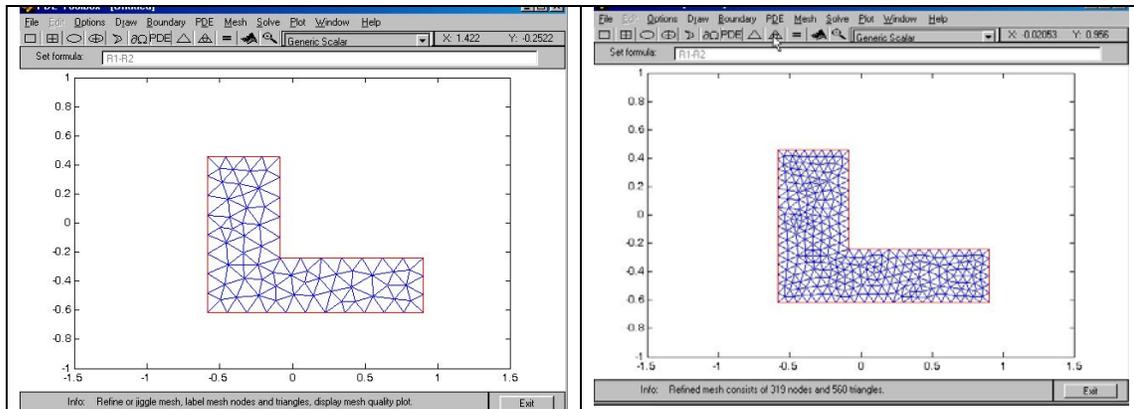
En el caso más simple  $u$  es una variable real, pero también pueden especificarse sistemas de ecuaciones. En tal caso, las operaciones  $c \nabla u$ ,  $au$  deben considerarse con mucho cuidado, por ejemplo, si  $u \in \mathbb{R}^2$ , entonces  $f \in \mathbb{R}^2$  y  $a$  debe ser una matriz  $2 \times 2$  para que  $au \in \mathbb{R}^2$ . El gradiente de  $u \in \mathbb{R}^2$  se considerar componente a componente, así que  $\nabla u \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz de  $2 \times 2$ , de modo que también  $c$  deberá ser una matriz  $2 \times 2$ . Más adelante veremos como especificar sistemas de EDPs.

Los tipos de EDPs que se pueden especificar se resumen en la siguiente tabla donde se muestra la sintaxis de Matlab a la izquierda y en notación matemática en la columna derecha.

Tipo	Matlab	Notación clásica
Elíptica	$n * c * \text{grad}(u) + a * u = f$	$c(n \cdot \nabla u) + au = f$
Parabólica	$d * u' - \text{div}(c * \text{grad}(u)) + a * u = f$	$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$
Hiperbólica	$d * u'' - \text{div}(c * \text{grad}(u)) + a * u = f$	$d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$
Valores propios	$-\text{div}(c * \text{grad}(u)) + a * u = \text{lambda} * d * u$	$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda du$

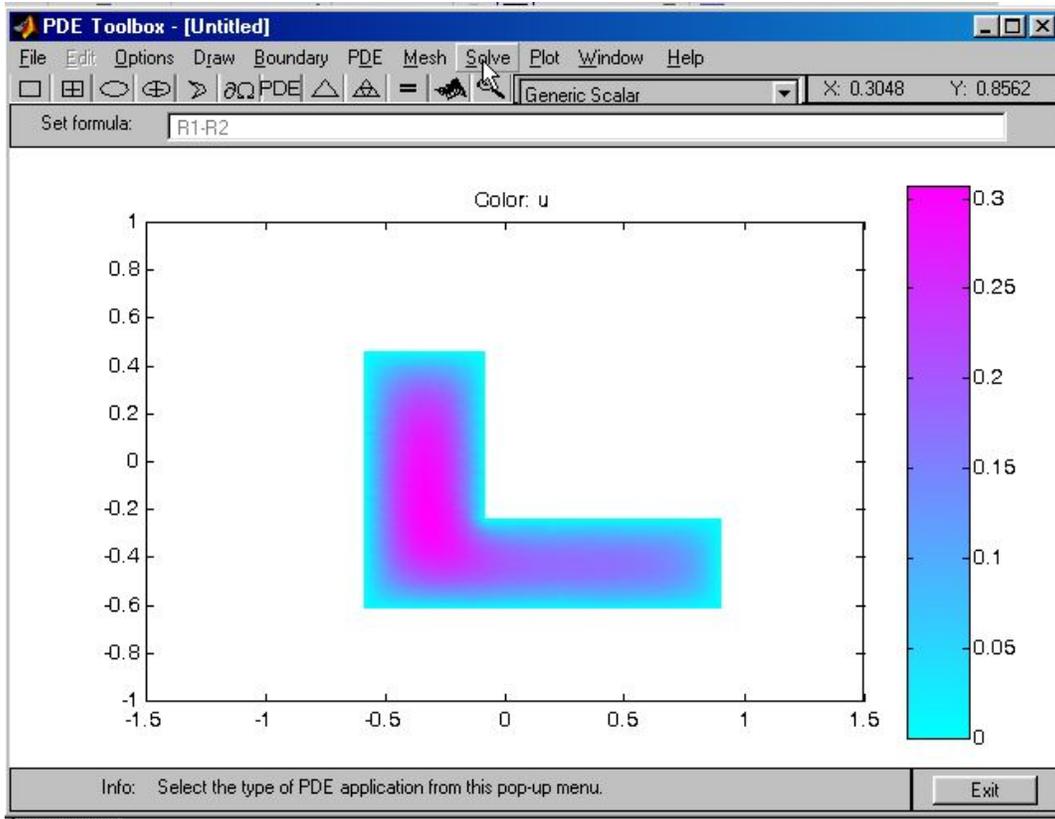
## El modo de Malla

Este modo permite inicializar la malla y refinarla en caso necesario. Tome en cuenta que una malla no se puede refinar indefinidamente, si se refina demasiado el cálculo puede demorar demasiado o pueden aparecer oscilaciones espurias. Esto marca un compromiso de rapidez y precisión. En la siguiente figura se muestra la malla inicial en una región en forma de L y un primer refinamiento que obtenido al dar clic en el icono señalado por el puntero en la figura de la derecha.

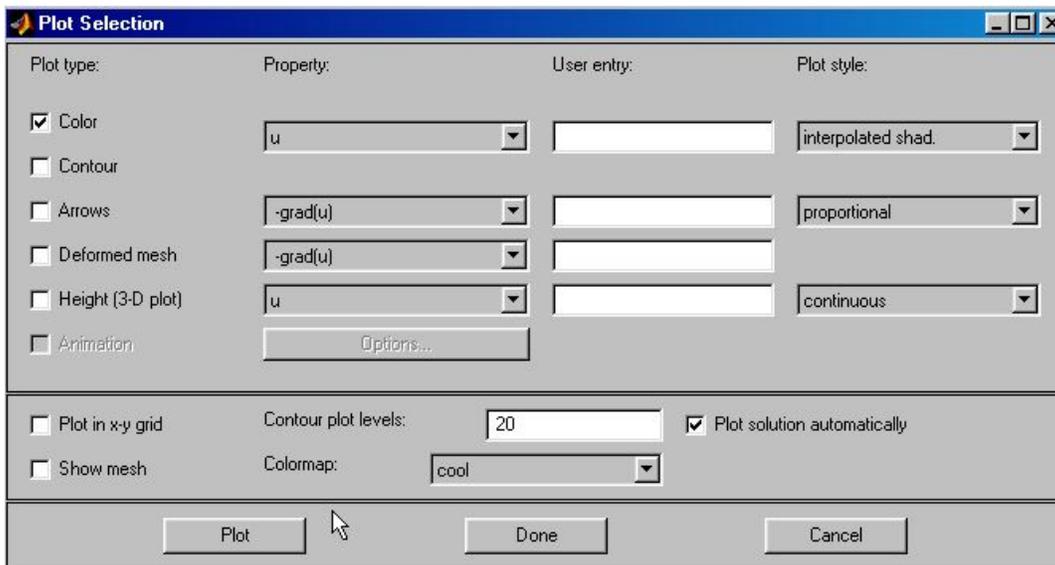


## El modo de Solución

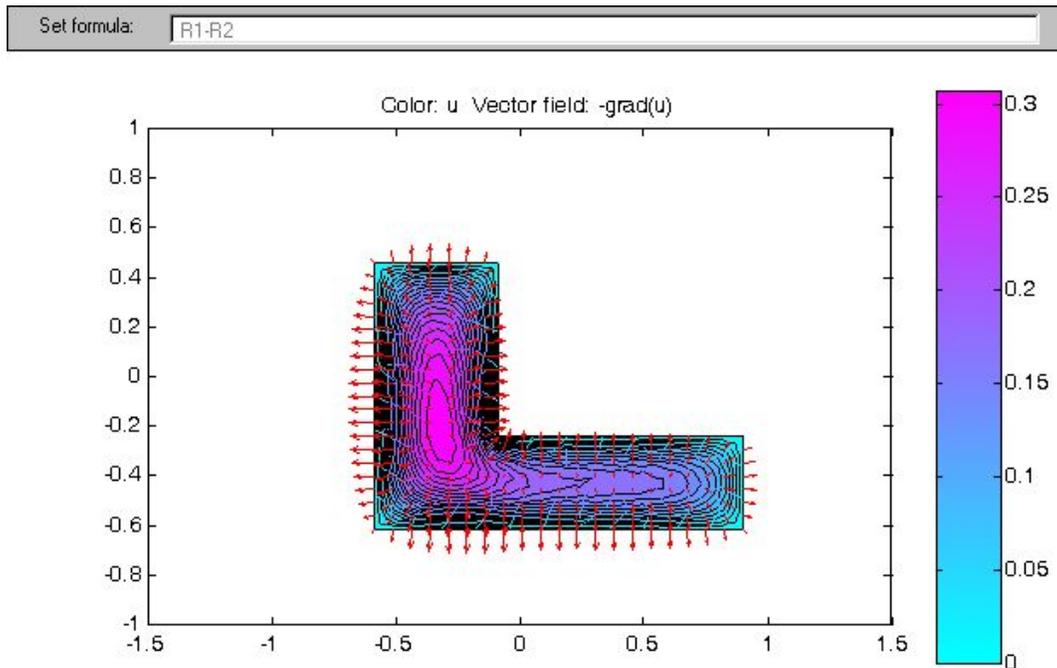
En este modo se resuelve la EDP. Basta seleccionar del menú principal *Solve*. En la siguiente figura se muestra la solución en base al último mallado de la región. Por defecto, el gráfico que se muestra es del tipo de colores, con la barra a la derecha indicando los valores que se asocian a diversos tonos. En la figura, se ha resuelto la ecuación de Laplace en la región en forma de L. la región central en rojo corresponde a valores más altos, los bordes más claros a valores menores de la solución. En el ejemplo, las condiciones de frontera son del tipo Dirichlet homogéneas, de ahí que la solución debe tomar el valor cero en la frontera.



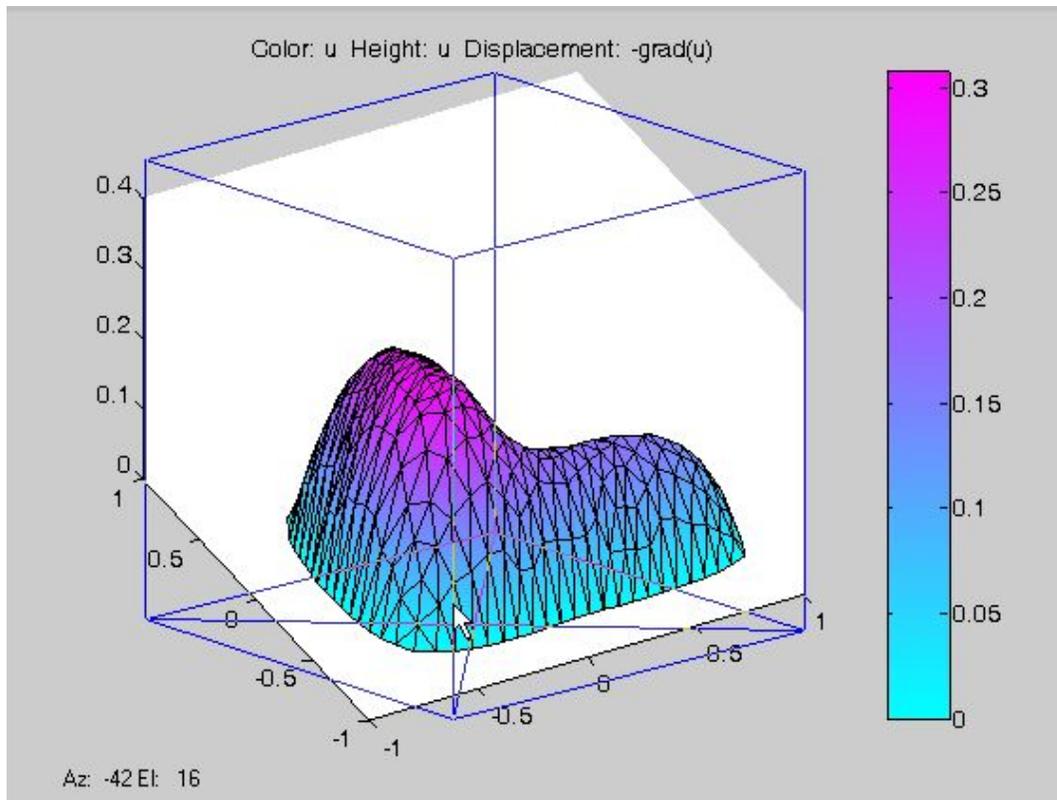
Se puede optar por otras formas de representación de la solución. Esto se logra seleccionando del menú principal Plot → Parameters, con lo que aparecerá la siguiente ventana de opciones:



Por ejemplo, si seleccionamos las opciones de *Contours* y *Arrows*, después de dar clic en el botón *Plot*, obtendremos la siguiente figura donde además del gráfico de color, aparecerán las curvas de contorno  $u(x,y) = \text{const.}$  y el negativo del campo gradiente  $-\nabla u$  que en el caso de problemas de transferencia de valor se puede interpretar como el vector de flujo de calor, en elasticidad se interpreta como el desplazamiento

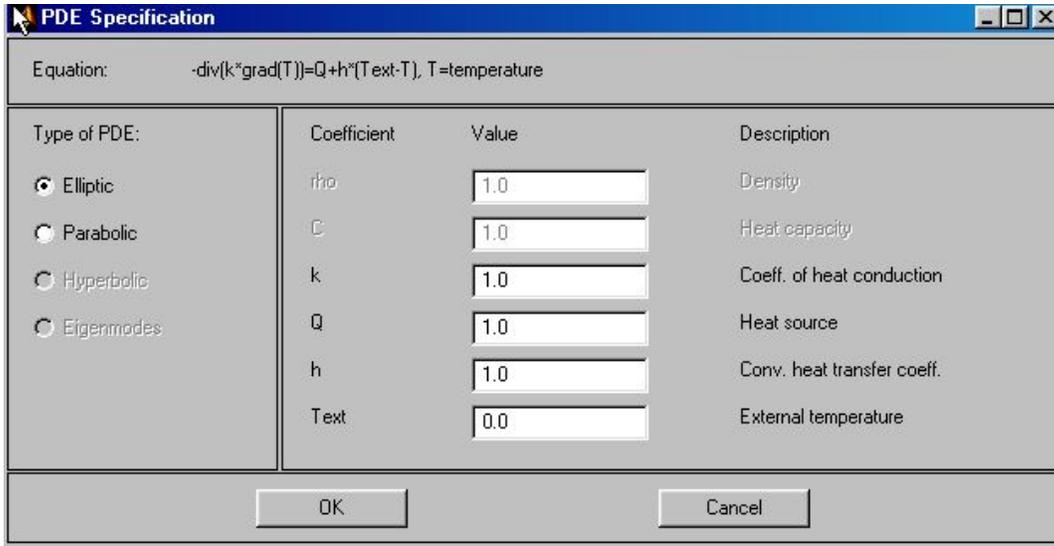


En otra forma de representación hemos seleccionado las opciones *Deformed mesh* y *Height (3-D plot)*, con lo que obtenemos un gráfico tridimensional de la superficie  $u = u(x,y)$ , con el mallado sobre la superficie. Este objeto tridimensional se puede girar con el mouse seleccionando el ícono de giro en el menú de la Figura.



### Otras EDPs que se pueden estudiar con PDETool

Existen otro tipo de aplicaciones específicas de PDEtool hacia problemas de la ingeniería. Algunas de las posibilidades se muestran en la siguiente figura que muestra el submenú de Options → Applications → Heat transfer. Podemos ver la forma explícita de la EDP que se resuelve a partir del menú Solve → PDE Specification, como se muestra en la siguiente figura



### Resolución de sistemas de EDPs en Matlab

Con un poco de esfuerzo se pueden resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{a} \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

donde  $\mathbf{c}$  es un tensor  $N$ -por- $N$ -por-2-por-2. Con la notación  $\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}$ , queremos decir la matriz  $N$ -por- $N-1$  con componente  $(i,1)$

Las condiciones de frontera son en general *mixtas*, i.e., en cada punto de la frontera una combinación de condiciones de Dirichlet y Neumann generalizadas,

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \mathbf{u} &= \mathbf{r} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{q} \mathbf{u} &= \mathbf{g} + \mathbf{h}' \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

La notación  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u})$  significa la matriz  $N$ -por-1 con componente  $(i,1)$

$$\sum_{j=1}^N (\cos(\alpha) c_{i,j,1,1} \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\alpha) c_{i,j,1,2} \frac{\partial}{\partial y} + \sin(\alpha) c_{i,j,2,1} \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\alpha) c_{i,j,2,2} \frac{\partial}{\partial y}) u_j \dots(1)$$

donde el vector normal exterior es  $\hat{\mathbf{n}} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ . Existen  $M$  condiciones de Dirichlet y la matriz  $\mathbf{h}$  es  $M$ -por- $N$ ,  $M \geq 0$ . La condición generalizada de Neumann contiene una fuente  $\mathbf{h}' \boldsymbol{\mu}$  donde los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\mu}$  se computan de tal manera que las condiciones de Dirichlet se satisfagan. En un problema de mecánica estructural éste término es exactamente la fuerza de reacción necesaria para satisfacer las restricciones cinemáticas descritas por las condiciones de Dirichlet.

# LAS ECUACIONES DE STOKES EN MATLAB

## *La función de corriente y vorticidad*

Las ecuaciones de Stokes en un dominio plano  $D \subset \mathbb{R}^2$

$$(1) \quad \begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{v} &= \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

se pueden escribir en términos de la función de corriente  $\psi$  y la vorticidad  $\omega$  como sigue:

La función de corriente está relacionada con el campo de velocidades por

$$\mathbf{v} = u + i v = \psi_y - i \psi_x = -i \nabla \psi = -i(\psi_x + i \psi_y)$$

es decir

$$u = \psi_y$$

$$v = -\psi_x$$

luego la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  se satisface automáticamente. En términos de la vorticidad

$$\omega = \nabla \wedge \mathbf{v} = \partial_x v - \partial_y u = \partial_x (-\psi_x) - \partial_y (\psi_y) = -\Delta \psi$$

de donde

$$\Delta \psi + \omega = 0.$$

Por otro lado tomando el rotacional de ambos lados de la primera ecuación en (1), e intercambiando los operadores  $\Delta$  y  $\nabla$ ,

$$\mu \nabla \wedge (\Delta \mathbf{v}) = \mu \Delta (\nabla \wedge \mathbf{v}) = \nabla \wedge (\nabla p) = 0$$

es decir  $\Delta \omega = 0$ . En resumen, la función de corriente  $\psi$  y la vorticidad  $\omega$  satisfacen el sistema de EDPs elípticas

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta \psi + \omega &= 0, \\ \Delta \omega &= 0. \end{aligned}$$

## *Resolución en Matlab*

En nuestro caso  $N = 2$  y la forma explícita de (1) es

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{11,11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{11,12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{11,21} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{11,22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} u_1 +$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{12,11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{12,12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{12,21} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{12,22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} u_2 +$$

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = f_1$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{21,11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{21,12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{21,21} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{21,22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} u_1 +$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{22,11} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{22,12} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{22,21} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{22,22} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} u_2 +$$

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = f_2$$

Para nuestro caso

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( 0 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 0 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \psi +$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 0 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( 0 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 0 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \omega + 0 \cdot \psi + 1 \cdot \omega =$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 0 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( 0 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 0 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \psi +$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( 0 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 0 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \omega + 0 \cdot \psi + 0 \cdot \omega =$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$$

Comparando coeficientes

$$a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = 0, a_{22} = 0$$

$$c_{11,11} = 1, c_{11,12} = 0, c_{11,21} = 0, c_{11,22} = 1,$$

$$c_{12,11} = 0, c_{12,12} = 0, c_{12,21} = 0, c_{12,22} = 0,$$

$$c_{21,11} = 0, c_{21,12} = 0, c_{21,21} = 0, c_{21,22} = 0,$$

$$c_{22,11} = 1, c_{22,12} = 0, c_{22,21} = 0, c_{22,22} = 1,$$

## Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet para  $\omega$ ,

$$\omega = \partial_x v - \partial_y u$$

y de tipo Neumann para  $\psi$

$$\psi_x = -v,$$

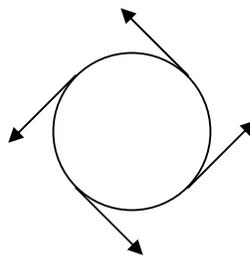
$$\psi_y = u$$

que son conocidas en la frontera.

Para la vorticidad es necesario hacer una hipótesis adicional para extender  $\mathbf{v}$  a un entorno de la frontera.

Un ejemplo.

Considérese un círculo de radio 1 rotando con velocidad angular constante.



Tomemos la condición de frontera  $\mathbf{v}(x,y) = i(x+iy) = -y + ix = u + iv$ . Se verifica que la solución en el *interior* del disco es  $\mathbf{v} = -y + ix$ . La condiciones de frontera son:

Para la función de corriente,

$$\psi_x = -x,$$

$$\psi_y = -y$$

para la vorticidad,

$$\omega = \partial_x v - \partial_y u = \partial_x x - \partial_y (-y) = 2.$$

Para simplificar y a manera de prueba, aprovechando que se conoce la solución, la función de corriente es

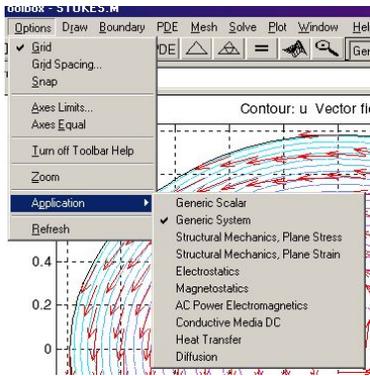
$$\psi = - (1/2)(x^2 + y^2)$$

de modo que podemos especificar condiciones de tipo Dirichlet para el vector

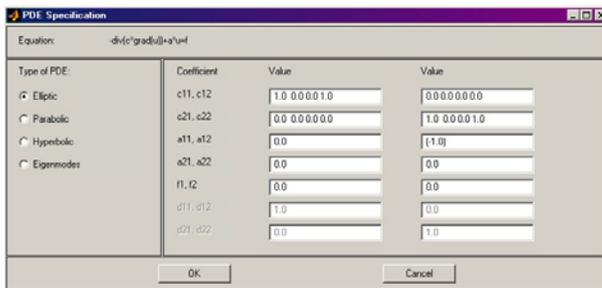
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - (1/2)(x^2 + y^2) \\ 2 \end{pmatrix}$$

Véanse las siguiente ventanas de diálogo en matlab

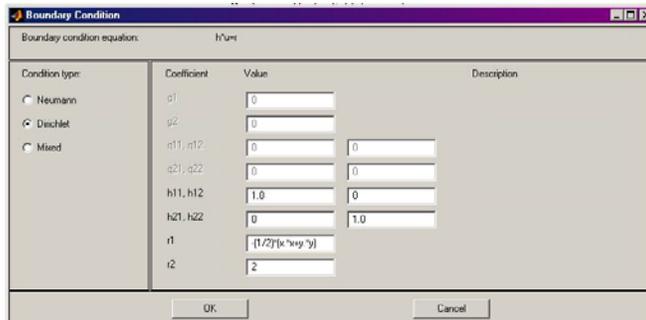
Selección de opción genérica (vectorial)



## Especificación de PDE



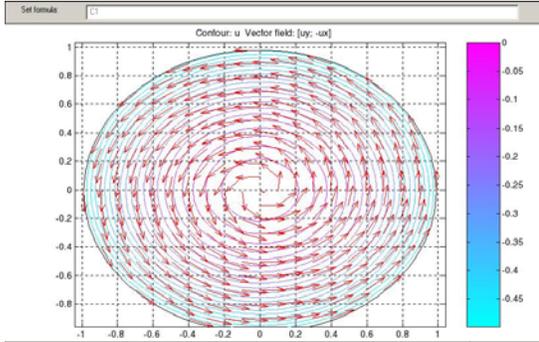
## Especificación de condiciones de frontera (Dirichlet)



## Parámetros de graficación



## Gráfico de líneas de corriente y vector velocidad



## Resultados preliminares para codificar en matlab

(Sección en construcción, pero se incluye para futura referencia)

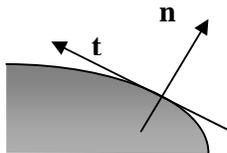
Problema: Conocidos los valores de  $\nabla\psi$  sobre la frontera, ¿cómo calcular la vorticidad sobre la frontera?

1. Usar la relación  $\omega = -\Delta\psi$  y usar la aproximación discreta del laplaciano

$$-\omega_{i,j} = \frac{1}{h^2} (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j}) \approx -\omega_{i,j+1}$$

donde  $(i, j+1)$  es un punto sobre la frontera de donde  $\psi_{i,j+1}$  es conocido; en tanto que los valores interiores  $\psi_{i,j}$ ,  $\psi_{i-1,j}$ ,  $\psi_{i,j-1}$ ,  $\psi_{i+1,j}$  provienen de una iteración anterior.

2. Consideremos un sistema de coordenadas  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  como se muestra en la figura



entonces si  $\mathbf{n} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$  entonces  $\mathbf{t} = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} \\ &= ((u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + ((u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} \\ &= (u \cos(\alpha) + v \sin(\alpha))\mathbf{n} + (-u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha))\mathbf{t} \\ &= v_n \mathbf{n} + v_t \mathbf{t} \end{aligned}$$

Por el teorema de Stokes

$$\int (\partial_x v - \partial_y u) dx dy = \oint u dx + v dy$$

pero

$$dx = \frac{\partial x}{\partial n} dn + \frac{\partial x}{\partial s} ds$$

$$= \cos(\alpha) dn - \sin(\alpha) ds$$

$$dy = \sin(\alpha) dn + \cos(\alpha) ds$$

luego

$$\oint u dx + v dy = \oint u(\cos(\alpha) dn - \sin(\alpha) ds) + v(\sin(\alpha) dn + \cos(\alpha) ds) =$$

$$\oint (u \cos(\alpha) + v \sin(\alpha)) dn + (-u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha)) ds =$$

$$\oint v_n dn + v_s ds =$$

$$\iint \partial_n v_s - \partial_s v_n dnds$$

Tomando un circuito de área dS y haciendo tender a cero

$$\omega = \partial_n v_t - \partial_t v_n$$

### Proposición

Sean  $\mathbf{n}, \mathbf{t}$  los vectores unitarios normal y tangente al dominio  $D$ . Sean  $n, t$  coordenadas relativas a este sistema coordenado, sean  $v_n, v_t$  las componentes normal y tangencial del campo entonces

$$\omega = \partial_n v_t - \partial_t v_n$$