Curso de Análisis I
y 150 problemas resueltos

Antoni Wawrzyńczyk

Índice general

1. Introduction

Este libro es un libro de texto. Su propósito es entonces ayudar a los estudiantes de las matemáticas la iniciación en el análisis que idudablemente es una de las área más importantes de esta ciencia.

Existen numerosos libros de texto sobre este tema en todos los idiomas del mundo. Si considero necesario escribir otro material, es porque creo que en cada Universidad se debe elaborar libros y problemarios adecuados a sus programas de estudios y tomando en cuenta las características de los estudiantes que ingresan a la Universidad.

Son necesarios años de experiencia para conocer las dificuldades que afrontan nuestros estudiantes y tipos de “trampas”, en las cuales suelen caer en los primeros años de sus estudios.

Por lo tanto una presentación de la teoría, aunque fuera perfectamente clara, lógica y consistente, no hace todavía un texto satisfactorio. El siguiente requisito por cumplir es una selección cuidadosa de ejemplos, contraejemplos, ejercicios resueltos y ejercicios para resolver.

Haciendo esta tarea debemos tener muy claro su propósito.

Muchos estudiantes creen que que el conocimiento de las definiciones y de los teoremas debe ser suficiente para aprobar el curso.

Es muy importante convencerlos que los teoremas que tienen que aprender no son una molestia más, sino una bendicion que los permite aprovechar los conceptos introducidos para resolver cada vez más problemas concretos.

El vínculo entre los conceptos introducidos y los teoremas se conoce mejor estudiando las demostraciones de los teoremas. Durante las clases debe verse claramente que las demostraciones son la mejor forma de entrenamiento y de entender para que sirven los teoremas.

Resumiendo: este texto tiene un propósito didáctico concreto. Solo el lector puede opinar si este propósito fue logrado.

En los cursos del cálculo se ha estudiado los conceptos de conjunto abierto, cerrado, compacto, conexo como propiedades de subconjuntos del espacio euclideano. Por lo tanto las funciones y aplicaciones continuas que aparecen en estos cursos están definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y toman valores en $\mathbb{R}^k$.

El paso principal que se hace en el curso de Análisis I consiste en la introducción y manejo de los conceptos topológicos en espacios mucho más generales, a saber en los espacios métricos.

En particular el estudiante verá que las funciones y aplicaciones forman espacios en los cuales se puede introducir el concepto de la distancia y por medio de ésta introducir los conceptos de la convergencia de sucesiones, de conjuntos abiertos y cerrados, lo que permite extender a estos casos otros conceptos conocidos de geometría del espacio euclidiano como la compacidad o conexidad.

Capítulo 1

Espacios métricos

Muchos de los conceptos que forman la rama de matemáticas llamada topología aparecieron como resultado de del siguiente patrón: tomamos una propiedad importante del espacio euclidiano o de alguna clase de subconjuntos de este espacio y consideramos los espacios abstractos que poseen la misma propiedad. En transcurso de este texto vamos a ver varios ejemplos del funcionamiento de este esquema.

La introducción de espacios métricos es uno de estos casos.

En el espacio euclidiano, en particular en el plano identificado con $\mathbb{R}^2$ tenemos definida la función distancia. La propiedad fundamental de esta función está relacionada con una experiencia cotidiana:

Si, camino a la fiesta de cumpleaños de la abuela Lupita, tenemos que recoger a la tía Lourdes, nos espera un recorrido más largo ó en mejor de los casos igual al que hacemos yendo directamente a la casa de la abuela.

Esta propiedad se llama la desigualdad de triangulo y constituye una de las leyes importantes a la cual estamos sujetos en vida real.

Pensamos entonces en todos los espacios, en los cuales se puede introducir una función que cumple la desigualdad de triangulo, además de algunas otras obvias propiedades de la distancia euclidiana y observamos que objetos se puede definir y que propiedades se puede deducir partiendo únicamente de estos datos.

A los espacios provistos de una distancia, los llamamos espacios métricos. La definición del espacio métrico apareció en la tesis doctoral del matemático frances M. Fréchet en el año 1906.

1. Definiciones básicas

Definición 1.1. Un *espacio métrico* es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una función real definida sobre el producto cartesiano $X \times X$ y que satisface las siguientes condiciones:

1° $d(x, y) \geq 0$ para todos x, $y \in X$,
2° $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
3° $d(x, y) = d(y, x)$, para todos x, $y \in X$,
4° para todos x, y, $u \in X$

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y).$$

A la función d, la llamaos la *métrica* del espacio X.

Las propiedades de esta lista resultan muy naturales si interpretamos la afirmación $d(x, y) = D$ como "el punto x se encuentra a la distancia D del punto y".

Por lo tanto al valor $d(x, y)$, lo llamamos *la distancia entre x y y.*

Como es natural, la distancia no puede ser negativa (inciso 1°), es nula solo si nos quedamos en el mismo punto (inciso 2°), es simétrica (inciso 3°) y satisface la desigualdad de triangulo (inciso 4°).

Definición 1.1 no es ninguna carga nueva para nuestra memoria. Para reconstruir las propiedades de la distancia en cualquier espacio métrico es suficiente pensar en la relación entre los lados de un triangulo de vértices x, y, z en el plano.

En ocasiones la desigualdad de triangulo se usa en forma modificada.

PROPOSICIÓN 1.2. Para todos x, y, $u \in X$

$$|d(x, y) - d(x, u)| \leq d(u, y).$$

¿Otra fórmula para sobrecargar a la memoria? No, si nuevamente pensamos en el mismo triangulo de vértices x, y, z.

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y)$, implica $d(x, y) - d(x, u) \leq d(u, y)$.

Además, por la misma desigualdad 4° tenemos $d(x, u) \leq d(x, y) + d(u, y)$, por lo cual $d(x, u) - d(x, y) \leq d(u, y)$.

Ambos números $d(x, y) - d(x, u)$ y $-(d(x, y) - d(x, u))$ son menores que $d(u, y)$ entonces $|d(x, y) - d(x, u)| \leq d(u, y)$.
□

El anunciado de la proposición siguiente se denomina la *desigualdad de cuadrángulo.*

PROPOSICIÓN 1.3. Para x, y, u, $v \in X$ arbitrarios

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v).$$

Antes de ver la demostración dibuja un rectángulo de vértices x, y, u, v.

DEMOSTRACIÓN. Dos veces aplicamos la desigualdad de triangulo para obtener

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(y, v).$$

Luego $d(x, u) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(y, v)$. Intercambiando los papeles de las parejas (x, y) y (u, v) y gracias a la simetría de la distancia obtenemos $d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(y, v)$. Finalmente $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$.

□

DEFINICIÓN 1.4. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $x \in X$, $r > 0$. El conjunto de forma $B(x,r) = \{u \in X : d(x,u) < r\}$ se llama *la bola centrada en x y de radio r.*

Un conjunto $A \subset X$ es *acotado* cuando existe una bola $B(x,r)$ que lo contenga.

Como hemos mencionado arriba el concepto de espacio métrico es una generalización de espacio euclidiano, entonces este espacio tiene que aparecer como el primer ejemplo de un espacio métrico.

EJEMPLO 1.5. ESPACIO EUCLIDIANO

En el espacio $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ definimos la métrica por la formula

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

El espacio $\mathbb{C}^n$ con la métrica

$$d((z_1,\ldots,z_n),(w_1,\ldots,w_n)) = \left(\sum_{j=1}^{n}(z_j - w_j)\overline{(z_j - w_j)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

es, como espacio métrico, otra forma de presentar al espacio $\mathbb{R}^{2n}$.

Ambos espacios son objetos principales de los cursos de Cálculo, donde se ha demostrado las propiedades de la distancia correspondiente.

Por otro lado el espacio euclidiano es el caso más sencillo de un espacio normado al cual dedicamos más adelante otra sección.

♢

En seguida hablamos de ejemplos de espacios métricos de estructura más "exótica".

EJEMPLO 1.6. MÉTRICA DISCRETA

Sea X un conjunto arbitrario. Para x, $y \in X$ sea

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y, \\ 1, \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

Las propiedades 1° - 3° de la métrica se cumplen obviamente.

Cuando $x = y$, la desigualdad $0 = d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y)$ es obvia, porque las distancias son no negativas.

En el caso de $x \neq y$ y $u = x$ ó $u = y$ la desigualdad de triangulo toma la forma $1 \leq 1$. Si los tres puntos son distintos la desigualdad de triangulo afirma $1 \leq 1 + 1$.

En cualquier caso se cumple $d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y)$.

En un espacio discreto la bola $B(x, r)$ consta de un solo punto $\{x\}$ cuando $r \leq 1$ y es todo el espacio X cuando $r > 1$.

El espacio de la métrica discreta es fácil de visualizar únicamente cuando contiene muy pocos elementos.

Cuando $X = \{x, y\}$ podemos pensar en dos puntos en la recta que se encuentran a la distancia 1.

En el caso de $X = \{x, y, z\}$, el triangulo equilátero en el plano describe bién la estructura del espacio.

Cuando X contiene 4 elementos, podemos pensar en una pirámide eqiláteral en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Un espacio discreto de 5 elementos queda fuera de nuestra imaginación. Sin embargo, sí podemos construir el conjunto de 5 puntos en el espacio $\mathbb{R}^4$ tal que la distancia entre cada par de puntos sea 1.

¡Hágalo como ejercicio de geometría euclidiana!

$\diamondsuit$

Este ejemplo demuestra que en los espacios métricos generales aparecen fenómenos que no se observan en el espacio euclidiano. Otros fenómenos de este tipo se pueden ver en el ejercicio siguiente.

Ejemplo 1.7. Métrica "social"

Esta métrica se define en un conjunto de personas que actualmente viven en nuestro mundo.

Sean A, B dos personas reales vivas. Definimos obviamente $d(A, B) = 0$ si se trata de la misma persona.

Cuando existe unconjunto de personas $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ tal que P_j y P_{j+1} se conocen, $1 \leq j \leq n-1$, vamos a decir que $\mathcal{P}$ es una cadena de conocidos de longitud n.

Para personas distintas A, B, sea $d(A, B)$ la longitud de la cadena mas corta tal que $P_1 = A$ y $P_n = B$.

Obviamente el dominio de esta función no está bién determinado. La distancia entre Tu y el miembro de algún tribu perdido en la selva no se puede calcular.

La bola unitria contiene únicamente un elemento, su centro, como en el espacio discreto. La bola de radio 2 contiene a la misma persona y sus conocidos directos.

Es interesante que esta métrica no alcanza valores muy grandes.

Intenta calcular la distancia entre tu persona y el Presidente de México, el Papa, el cantante más famoso de actualidad.

$\diamondsuit$

Ejemplo 1.8. Métrica de camino más corto

En este caso se trata de una amplia clase de métricas en distintos conjuntos.

Si X es una esfera, la distancia entre dos puntos de la esfera se puede definir como la longitud del arco más corto que une a estos puntos.

Un automovilista mide la distancia entre dos punto de la superficie terrestre como la mas pequeña de longitudes de las carreteras que unen a estos puntos. El espacio X es en tal caso el conjunto de puntos sobre las carreteras que llegan al lugar, donde se encuentra nuestro automovilista.

De la forma semejante, para un turista en una ciudad, la distancia ,,a vuelo de pájaro" es irrelevante. La longitud del recorrido por las calles ó y senderos es lo que realmente define la distancia por recorrer.

Los Ejercicios 4 y 5 de este Capítulo proporciionan ejemplos de este tipo formulados en forma analítica.

$\diamondsuit$

Ejemplo 1.9. ¿Es posible que en algún espacio una bola de radio 2 contenga a una bola de radio 3?

La respuesta es: ¡sí!

Sea $X = \{-\frac{3}{2}, -1, 0, 1, \frac{3}{2}\}$. En este espacio con su métrica natural $d(x,y) = |x-y|$ tenemos $B(0,2) = X$, mientras que $B(\frac{3}{2}, 3) = X \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.

Sin embargo, demuestre que en cualquier espacio métrico se cumple $B(x, 2r) \subsetneq B(y, r)$.

Vea el ejercicio 10 de este capítulo y en caso necesario la sugerencia en Capítulo 11.

$\diamondsuit$

Pasamos a los ejemplos que son fundamentales para el material que siga. Como hemos advertido en la Introducción una de las novedades más importante que debe asimilar el estudiante de este curso es el hecho de que un objeto tan complicado como una aplicación puede verse como un solo punto en un espacio, en nuesto caso en un espacio métrico adecuado.

En algunos problemas tenemos que tratar al mismo tiempo con varios espacios métricos y por consiguiente con varias métricas. En estos casos parece lo más adecuado denotar la métrica en el espacio X como d_X. Solo en algunos casos, cuando en lugar de X aparece un espacio de notación demasiado complicada (por ejemplo cuando $X = L^2(M, d\mu)$), vamos a buscar otra solución.

Pasamos al problema de definir una métrica en un espacio de aplicaciones.

Ejemplo 1.10. La métrica de convergencia uniforme

Sea C un conjunto cualquiera y sea (X, d_X) un espacio métrico. Una aplicación $F\colon C \to X$ es *acotada* si $F(C)$ es un conjunto acotado en X.

Denotamos por $B(C, X)$ el espacio de todas las aplicaciones acotadas entre C y X. En este espacio introducimos una métrica. Para F, $G \in B(C, X)$ definimos

$$d_\infty(F, G) = \sup_{a \in C} d_X(F(a), G(a)).$$

Esta métrica es de importancia especial en análisis. Lleva el nombre de la métrica de convergencia uniforme, porque efectivamente en el caso de $C \subset \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}$ la convergencia de sucesiones correspondiente a esta métrica coincide con la convergencia uniforme de funciones conocida del curso de cálculo.

Vamos a verificar que la función d_∞ es efectivamente una métrica en $B(C, X)$.

Las propiedades de la positividad y de la simetría son obvias. Si $d_\infty(F, G) = 0$, se sigue $d_X(F(a), G(a)) = 0$ y luego $F(a) = G(a)$ para todo $a \in C$. Entonces $F = G$.

Sea $H \in B(C, X)$. Para todo $a \in C$ se cumple $d_X(F(a), G(a)) \leq d_X(F(a), H(a)) + d_X(H(a), G(a))$ y por la definición de d_∞

$$d_X(F(a), H(a)) + d_X(H(a), G(a)) \leq d_\infty(F, H) + d_\infty(H, G),$$

entonces

$$d_X(F(a), G(a)) \leq d_\infty(F, H) + d_\infty(H, G).$$

Tomando el supremo del lado izquierdo obtenemos la desigualdad de triangulo para la función d_∞.

$\diamondsuit$

Cuando la métrica d_X en el espacio X es acotada, a saber $\exists\, C > 0$ $\forall\, x,\ y \in X$ se cumple $d_X(x, y) \leq C$, la métrica d_∞ está bién definida en el espacio C^X de todos los mapeos $F\colon C \to X$.

El Ejercicio 11 proporciona una información muy importante (se puede ver la solución en Capítulo 11). Para cualquier espacio métrico $(X.d)$ la función definida por la fórmula

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es también una métrica en X. La métrica δ es acotada (la cota $C = 1$), entonces para cualquier conjunto C podemos definir la métrica δ_∞ de la convergencia uniforme.

Los espacios de sucesiones proporcionan gran cantidad de ejemplos de espacios métricos. Por lo tanto vamos a introducir la notación adecuada y definir los espacios más importantes de esta clase.

Definición 1.11. Por una *sucesión en un espacio* X entendemos una aplicación del dominio $\mathbb{N}$ y con valores en X.

De acuerdo con la notación general una sucesión $\mathfrak{a}$ se debe denotar como $\mathbb{N} \ni n \to a(n) \in X$, sin embargo por tradición la denotamos (a_n). No se debe confundir la sucesión con su imagen que es el conjunto $\mathfrak{a}(\mathbb{N}) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En fin, las sucesiones que toman solo los valores 0 y 1 forman un conjunto de la misma cardinalidad que el eje real. Lo saba hasta la más simple calculadora.

El espacio de todas las sucesiones valuadas en X se denota por $X^{\mathbb{N}}$ aunque en algunos casos, por ejemplo cuando $X = \mathbb{R}$ se usa la notación $\mathbb{R}^{\infty}$.

Si E es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, en $E^{\mathbb{N}}$ tenemos la estructura vectorial natural.

Para $\mathfrak{a} = (a_n)$, $\mathfrak{b} = (b_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $t \in \mathbb{K}$ se define la combinación lineal como

$$\mathfrak{a} + t\mathfrak{b} = (a_n + tb_n).$$

Si el espacio E es también un álgebra definimos la estructura de álgebra en $E^{\mathbb{N}}$:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a_n b_n).$$

Los espacios $\mathbb{R}^k$ se sumergen en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por medio de aplicaciones que conservan la estructura vectorial de los mismos. Vamos a usar estas aplicaciones en algunas ocasiones, entonces conviene introducir la notación correspondiente.

Para $(a_1, \dots, a_k) \in E^k = E \times \cdots \times E$ sea

$$\sigma_k(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k, 0, 0 \dots).$$

En cambio, el espacio $E^{\mathbb{N}}$ se proyecta sobre E^k por medio de la aplicación

$$\pi_k(\mathfrak{a}) = (a_1, \dots, a_k).$$

Ejemplo 1.12. Sucesiones acotadas

Las sucesiones acotadas son caso particular de aplicaciones acotadas que hemos estudiado en Ejemplo 1.10, entonces agregamos aquí unas informaciones sobre la notación.

Definición 1.13. El espacio de todas las sucesiones acotadas en X se denota por $l^{\infty}(X)$. Únicamente en el caso de $X = \mathbb{R}$ en lugar de $l^{\infty}(\mathbb{R})$ escribimos simplemente l^{∞}.

En el espacio $l^{\infty}(X)$ se usa la métrica de convergencia uniforme definida anteriormente: para $\mathfrak{a} = (a_n)$, $\mathfrak{b} = (b_n) \in l^{\infty}(X)$,

$$d_{\infty}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d_X(a_n, b_n).$$

2. Espacios normados

Los espacios normados ocupan un lugar intermedio entre los espacios euclidianos y teoría de espacios métricos generales.

Estos espacios conservan varias propiedades de espacio $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$ y al mismo tiempo proporcionan ejemplos de fenómenos nuevos que ocurren en espacios métricos más generales.

DEFINICIÓN 1.14. *Espacio normado* es un espacio vectorial E sobre el campo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (y denotado por $\mathbb{K}$) provisto de una función $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{K}$ llamada *la norma* que tiene las siguientes propiedades:

1° $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$,
2° $\|x\| = 0$ implica $x = 0$,
3° $\|ax\| = |a|\|x\|$ para $x \in E$, $a \in \mathbb{K}$,
4° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos x, $y \in E$.

Cada espacio normado admite una métrica natural.

PROPOSICIÓN 1.15. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $d(x, y) := \|x - y\|$. El espacio (E, d) es un espacio métrico.

DEMOSTRACIÓN. Las propiedades 1°, 2°, 3° de la norma implican exactamente las propiedades 1°, 2° 3° de lamétrica. Luego

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|x - u + (u - y)\| \leq \|x - u\| + \|u - y\| \\ &= d(x, u) + d(u, y), \end{aligned}$$

por la propiedad 4° de la métrica. $\square$

EJEMPLO 1.16. ESPACIOS EUCLIDEANOS

Las métricas que definen los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ (Ejemplo 1.5) son casos particulares de métricas provenientes de unas normas. En ambos casos la norma correspondiente se puede escribir en la misma forma:

$$\|x\| = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

para $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$\diamondsuit$

Los espacios de sucesiones l^2 y $l^2(\mathbb{C})$ se pueden considerar generalizaciones a dimensión infinita de espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ respectivamente.

EJEMPLO 1.17. Sea $l^2 = \{\mathfrak{a} = (a_n) \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2) < \infty\}$.

El espacio $l^2(\mathbb{C})$ consta de sucesiones complejas que satisfacen la misma condición.

La norma en ambos espacios está dada por la fórmula

$$\|\mathfrak{a}\|_2 = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

También en este caso las propiedades 1°, 2°, 2° de la norma son obvias.

En los casos del espacio $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ conocemos la desigualdad

$$(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabiendo que las series $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$ y $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2$ convergen vemos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^2$ también converge. Por la continuidad de la función raíz se obtiene la desigualdad de triangulo para la norma $\| \cdot \|_2$.

$\diamondsuit$

Ejemplo 1.18. En el mismo espacio $\mathbb{R}^n$ podemos definir otras normas, de las cuales las más importantes son las siguientes:

$$\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \qquad \|a\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|.$$

$\diamondsuit$

Los espacios normados de sucesiones análogos a $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1)$ y $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$ son los espacios l^1 y l^infty que describimos en seguida.

Ejemplo 1.19. Sea $l^1 = \{\mathfrak{a} = (a_n) \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty\}$.

La norma en este espacio se define como

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|.$$

El hecho de que esta función es una norma es evidente.

Para espacio normado arbitrario $(E, \| \cdot \|)$ podemos construir el espaci de sucesiones sumables en E:

$$l^1(E) = \{(a_n) \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty\}$$

con la norma

$$\|(a_n)\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 1.20. En la sección anterior hemos conocido el espacio de sucesiones acotadas valuadas en un espacio métrico arbitrario. Si este espacio métrico es un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, el espacio $l^\infty(E)$ es también normado con la norma

$$\|\mathfrak{a}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathfrak{a}\|_E = d_\infty(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}),$$

donde $\mathfrak{o} = (0, 0, \dots)$ es la sucesión nula.

Se cumple entonces

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|_\infty = d_\infty(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

En los casos de $E = \mathbb{R}$ ó $E = \mathbb{C}$ vamos a usar la notación l^∞ y $l^\infty(\mathbb{C})$, respectivamente.

$\diamondsuit$

Conocemos varios ejemplos de espacios de aplicaciones $F\colon X \to M$ valuadas en un espacio métrico en los cuales se puede definir una métrica de tal manera que $F_n \to F$ implica $F_n(x) \to F(x)$ para todos $x \in X$. Es muy natural preguntar si en el caso de un espacio normado $E, \|\cdot\|)$, el conjunto $\mathcal{F}(X, E)$ de todas las aplicaciones entre algún conjunto X y E, que tiene la estructura de un espacio vectorial, se puede definir una norma tal que la convergencia en esta norma implique la convergencia puntual.

En este caso, si el espacio X no es finito, la respuesta es negativa. En Capítulo 11 presentamos como problema resuelto el caso del espacio de todas las sucesiones reales y demostramos que en este espacio no existe ninguna norma que tenga la propiedad mencionada.

La estructura lineal que tenemos en los espacios normados nos permite hablar de conjuntos convexos en estos espacios. La convexidad juega un papel muy importante en análisis de espacios normados, cuando existe un vínculo entre la estructura vectorial y la estructura métrica. En los capítulos siguientes vamos a observar algunas de estas relaciones, entonces es conveniente recordar aquí los hechos básicos sobre los conjuntos convexos.

Recordemos que un conjunto A en un espacio vectorial E es *convexo* si para todos a, $b \in A$ y para todo $0 \leq t \leq 1$ la combinación $ta + (1-t)b$ pertenece a A. Cuando para a, b fijos t recorre el intervalo $[0, 1]$, las combinaciones de esta forma recorren el segmanto lineal $I(a, b)$ que une a estos dos puntos.

Un conjunto A es convexo si para a, $b \in A$ se cumple $I(a, b) \subset A$.

Nuestro interes por los conjuntos convexos se explica en parte por el hecho de que las bolas en los espacios normados son convexas.

PROPOSICIÓN 1.21. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sean $x \in E$, $r > 0$. La bola $B(x, r)$ es convexa.

DEMOSTRACIÓN. Sean a, $b \in B(x, r)$. Sea $0 \leq t \leq 1$. Calculamos: $\|ta+(1-t)b\| \leq \|ta\|+\|(1-t)b\| = t\|a\|+(1-t)\|b\| < tr+(1-t)r = r$. Efectivamente, $ta + (1 - t)b \in B(x, r)$.

■

Para $A \subset E$ cualquiera, se define *la cáscara convexa* de A como el más pequeño conjunto convexo que contiene al conjunto A. La Cáscara convexa de A se denota por $\text{conv}(A)$.

La definición de la cáscara convexa que hemos usado es elegante, pero poco manejable. Para $A \subset E$ y $a \in E$, ¿como averiguar si $a \in \text{conv}(A)$?

La proposición siguiente da una descripción de $\text{conv}(A)$ es más técnica pero también de carácter más constructivo.

PROPOSICIÓN 1.22. Sea A un subconjunto arbitrario de un espacio vectorial real E. Entonces

$$\text{conv}(A) = \{\sum_{j=1}^{k} t_j a_j : a_1, \dots, a_k \in A, \sum_{j=1}^{k} t_j = 1, \ 0 \leq t_j, \ 1 \leq j \leq k\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Deanotemos por $C(A)$ el conjunto que aparece de lado derecho de la igualdad.

Visiblemente $A \subset C(A)$. Verifiquemos que $C(A)$ es un conjunto convexo. Sean $a = \sum_{j=1}^{k} t_j a_j$, donde todos $a_j \in A$ y $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$ y $b = \sum_{i=1}^{m} s_i b_i$, donde todos $b_i \in A$ y$\sum_{i=1}^{m} s_i = 1$. Si $t+s = 1$ obtenemos

$$ta + sb = \sum_{j=1}^{k} tt_j a_j + \sum_{i=1}^{m} ss_i b_i$$

que es una combinación lineal con coeficientes no negativos de elementos de A.

Calculamos la suma de todos los coeficientes: $\sum_{j=1}^{k} tt_j + \sum_{i=1}^{m} ss_i = t + s = 1$, por lo cual efectivamente $ta + sb \in C(A)$.

El conjunto $C(A)$ contiene a A y es convexo, entonces $\text{conv}(A) \subset C(A)$, porque $\text{conv}(A)$ es más peque no conjunto de estas dos propiedades.

Ahora tenemos que probar que $C(A) \subset \text{conv}(A)$.

Vamos a demostrar que bajo las condiciones $a_1, \dots, a_k \in A$, $0 \leq t_j$, para todos $1 \leq j \leq k$ y $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$, las combinaciones lineales de forma $\sum_{j=1}^{k} t_j a_j$ pertenecen a $\text{conv}(A)$. Para este fin utilizamos la inducción con respecto al índice k.

Determinamos la hipótesis inductiva en la forma siguiente: para $a_1, \dots, a_k \in A$ y para los números no negativos $t_1, \dots, t_k$ tales que $\sum_{j=1} t_j = 1$ la combiunación $\sum_{j=1^k} t_j a_j$ es elemento de $\mathrm{conv}(A)$.

Cuando $k = 1$, se cumple forzocamente $t_1 = 1$ y para cada $a_1 \in A$ tenemos $t_1 a_1 = a_1 \in A \subset \mathrm{conv}(A)$.

Suponemos que para k la hipótesis es válida y tomamos $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$, $0 \leq t_j$ tales que $\sum_{j=1}^{k+1} t_j = 1$.

Sea $s = \sum_{j=1}^{k} t_j$ y sean $t'_j = t_j/s$, $1 \leq j \leq k$.

Se cumple entonces que $\sum_{j=1}^{k} t'_j = 1$ y por lo tanto, gracias a la suposición inductiva $b = \sum_{j=1}^{k} t'_j a_j \in \mathrm{conv}(A)$.

Tenemos $t_{k+1} + s = 1$, b, $a_{k+1} \in \mathrm{conv}(A)$ y por la convexidad de $\mathrm{conv}(A)$ se cumple $sb + t_{k+1}a_{k+1} \in \mathrm{conv}(A)$. Ya hemos logrado nuestro propósito, porque $sb + t_{k+1}a_{k+1} = s(\sum_{j=1}^{k} t'_j a_j) + t_{k+1}a_{k+1} = \sum_{j=1} t_j a_j$.

$\diamondsuit$

A los elementos de $\mathrm{conv}(A)$, se los llama las *combinaciones convexas* de elementos de A.

3. Sucesiones convergentes

La convergencia de sucesiones es indudabemente el origen y el concepto fundamental de la teoría de espacios métricos.

Durante varios siglos los conceptos de la integral y de la derivada usadas exitosamente en tantas ramas de las matemáticas y de la física se basaban en poco convincentes argumentos de los "infinitesimales".

Apenas en la segunda mitad del siglo XIX en los trabajos de Cauchy aparecieron las definiciones y demostraciones relacionadas con los conceptos de límites que ahora consideramos correctas.

Un poco mas tarde en los trabajos de Heine apareció el método de definir la continuidad de funciones utilizando las sucesiones. Desde entonces el concepto de la sucesión convergente ocupó un lugar central en análisis.

El hecho de que las sucesiones son suficientes para manejar la continuidad en los espacios métricos está relacionado con la estructura del eje real y no se generaliza a espacios topológicos más generales.

Definición 1.23. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión (a_n) en X es *convergente* si existe $a \in X$ tal que $d(a_n, a) \to 0$ ó en forma explícita

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N \quad d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Denotamos este hecho como $a_n \to a$. El elemento a se llama el límite de la sucesión (a_n) y se denota $\lim_{n \to \infty} a_n$.

Si una sucesión es convergente, su límite está definido univocamente gracias a la propiedades básicas de la métrica.

Proposición 1.24. Si $a_n \to a$ y $a_n \to b$ entonces $a = b$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la desigualdad de triangulo tenemos para a_n cualquiera

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b).$$

Para n suficientemente grandes ambos términos del lado derecho son menores que $\varepsilon/2$ entonces $d(a, b) < \varepsilon$ para todos $\varepsilon > 0$. Esto implica $d(a, b) = 0$ y finalmente $a = b$. $\square$

Definición 1.25. Sea $n \colon \mathbb{N} \ni k \to n_k \in \mathbb{N}$ una sucesión creciente y sea $a = (a_n)$ una sucesión en X. La composición $a \circ n$ se llama subsucesión de a y, siendo también una sucesión, se denota como (a_{n_k}).

Una subsucesión se forma con un número infinito de elementos de la sucesión original conservando el orden entre ellos.

Proposición 1.26. Si una sucesión (a_n) en un espacio métrico X es convergente, entonces cada subsucesión de (a_n) converge al mismo límite.

Demostración. Sea $a_n \to a$ y sea a_{n_k} una subsucesión de (a_n). Para $\varepsilon > 0$ dado, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, a) \leq \varepsilon$ para todos $n > N$.

Existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$. Si $k > K$ tenemos $n_k > n_K > N$, porque n_k es una sucesión creciente. Obtenemos $d(an_k, a) \leq \varepsilon$ cuando $k > K$, entonces efectivamente $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. $\square$

Ejemplo 1.27. Sea $\mathfrak{a} = (a_n) \in l^1$ y sea

$$\mathfrak{a}_m = (a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots).$$

Obviamente $(\mathfrak{a}_m)$ es una sucesión en l^1. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos $\|\mathfrak{a}_m\|_1 \leq \|\mathfrak{a}\|_1$. Observemos que

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_m\|_1 = \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j|.$$

El hecho de que $\|\mathfrak{a}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$ significa que $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j| = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{a}_m \to \mathfrak{a}$.

Sin embargo, si definimos $\mathfrak{a}_m$ de la misma manera en el espacio l^∞ entonces

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_m\|_\infty = \sup_{j>m} |a_j|$$

y este valor tiende a cero si y solo si (a_n) es convergente a cero.

Para otros elementos de l^∞ la sucesión $(\mathfrak{a}_m)$ es divergente.

$\diamondsuit$

4. Ejercicios

1. ⧫ En el espacio $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definimos la función:
$$d(n,m)=\begin{cases}0, & n=m,\\ 1+\frac{1}{n+m}, & n\neq m.\end{cases}$$
Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{N}$.

2. Demuestre que las siguientes funciones son métricas en el espacio $\mathbb{R}^n$ y en el caso de $\mathbb{R}^2$ traza las bolas unitarias correspondientes.
   - $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\sum_{j=1}^n |a_j-b_j|$.
   - $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\max_{1\le j\le n}|a_j-b_j|$.
   - $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\sqrt{\sum_{j=1}^n c_j|a_j-b_j|^2}$, donde $c_j>0$, $1\le j\le n$.

3. La métrica *del bosque.*
   Demueste que la siguiente función en el plano es una métrica.
   Para $\mathfrak{a}=(a_1,a_a)$, $\mathfrak{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ sea
$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\begin{cases}|a_1|+|a_1-b_1|+|b_2|, & a_1\neq b_1,\\ |a_2-b_2|, & a_1=b_1.\end{cases}$$
Dibuja la bola centrada en el punto $(1,1)$ y de radio 2.

4. Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$, explique su nombre "la metrica de puente" y btraza la bola centrada en $(1,-1)$ de radio $1+\sqrt{2}$.
$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\begin{cases}\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}, & \text{si } (a_2\ge 0,\ b_2\ge 0)\\ & \text{ó } (a_2<0,\ b_2<0),\\ \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}, & \text{si } (a_2\ge 0,\ b_2<0)\\ & \text{ó } (a_2<0,\ b_2\ge 0).\end{cases}$$

5. La métrica *Metro parisiense.*
   Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$:
$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\begin{cases}\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}, & \text{si existe } t\in\mathbb{R}, \mathfrak{a}=t\mathfrak{b},\\ \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}, & \text{si tal número no existe.}\end{cases}$$

6. Traza las siguientes bolas en el espacio métrico del ejercicio anterior: $B((0,0),1)$, $B((1,1),1)$, $B((1,1),2)$.

7. En el espacio $\mathbb{R}^3$ con la norma $\|(x,y,z)\|_1=|x|+|y|+|z|$ describa la bola unitaria $B(0,1)$.

8. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2,\ x \neq 1\}$. Sea
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$
Demuestre que d es una métrica en A.

9. Demuestre que si una bola de radio 7 está contenida en una bola de radio 3, ambas son iguales.

10. Sea (X, d) un espacio métrico. En el mismo conjunto $X \times X$ definimos
$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{cuando} \quad d(x,y) \leq 1, \\ 1, & \text{cuando} \quad d(x,y) > 1. \end{cases}$$
Demuestre que $\tilde{d}$ es una métrica en X y que $x_n \to x$ en (X, d) si y solo si $x_n \to x$ en $(X, \tilde{d})$.

11. ♦ Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$, x, $y \in X$. Demuestre que δ es una métrica en X.

12. ♦ Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa que se anula únicamente en cero. Sea $\delta(x,y) = f(x-y)$. ¿Cuando δ es una métrica?

13. ♦ Sean $\delta_1(x,y) = |x-y|^2$, $\delta_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Cual de estas funciones define una métrica en $\mathbb{R}$?

14. Para $0 < p < \infty$ sea l^p el espacio de sucesiones reales (a_n) tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$.
a. Demuestre que para $0 < p < 1$ la función $d_p((a_n),(b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p$ es una métrica.
b. Demuestre que para $1 \leq p < \infty$ la función $\|(a_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ es una norma.

15. Sea $C([a,b])$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Para $f \in C([a,b])$ sea
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$$
Demuestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $C([a,b])$.

16. Demuestre que la función definida en el espacio $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ de matrices complejas $n \times n$ por la fórmula $\|A\| = (\mathrm{tr}(AA^*))^{\frac{1}{2}}$ es una norma.
(Para $A = (a_{ij})$ se define $A^* = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \overline{a_{ji}}$ y $\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$.)

17. Sea X un espacio métrico arbitrario y sea Y un espacio métrico discreto. Pruebe que $B(X,Y)$ es un espacio discreto.
18. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $a_0 \in X$. Sea $\mathfrak{X}$ el espacio de todas las sucesiones $\mathfrak{a} = (a_j)$ con valores en X y tales que $\sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, a_0) < \infty$.

    Demuestre que la función $D\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula
    $$D(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, b_j),$$
    está bién definida y es una métrica en $\mathfrak{X}$.
19. Pruebe que en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ para cada $x \in E$ se tiene
    $$\|x\| = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}.$$
20. ♦ Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el espacio de todas las sucesiones reales con su estructura natural de espacio vectorial. Demuestre que en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no existe ninguna norma tal que $(a_{jn}) = \mathfrak{a}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{a} = (a_j)$. implique $a_{jn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
21. Demuestre que el espacio $\mathfrak{D}$ de todas las métricas definidas en el conjunto X es un *cono convexo*, es decir para todos d, $d' \in \mathfrak{D}$ y para todos $s \geq 0$, $t > 0$ se cumple $sd + td' \in \mathfrak{D}$.
22. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sean (x_n), (y_n) sucesiones convergentes en E. Demuestre que para a, $b \in \mathbb{K}$ se cumple
    $$\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = a \lim_{n\to\infty} x_n + b \lim_{n\to\infty} y_n.$$
23. Sean A, B conjuntos convexos en un espacio vectorial E. Demuestre que el conjunto $A + B := \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$ es convexo.

Capítulo 2

Espacios completos

La construcción del eje real $\mathbb{R}$ partiendo del campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ tiene como propósito asegurar que para cada conjunto acotado A los números $\sup A$, $\inf A$ existan.

Esta propiedad resulta equivalente a decir que cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ tiene límite.

El concepto de la sucesión de Cauchy se generaliza a espacios métricos en forma automática. Llamamos completos los espacios que tienen la propiedad de que cada sucesión de Cauchy en ellos es convergente.

El resultado más importante de esta sección dice que, así como los números racionales se sumergen en el eje real, cada espacio métrico se sumerge en un espacio completo.

1. Sucesiones de Cauchy. Espacios completos

Definición 2.1. A una sucesión (x_n) en un espacio métrico X se la llama *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Cada sucesión convergente es de Cauchy. Efectivamente, si $x_n \to x$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon/2.$$

Si además $m > N$, obtenemos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \varepsilon.$$

La sucesión (x_n) es de Cauchy.

No todas las sucesiones de Cauchy son convergentes. Conocemos los contraejemplos en en el espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales. La aproximación decimal del número $\sqrt{2}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en este espacio.

Veamos otro ejemplo de una sucesión de Cauchy de funciones que no es convergente.

Ejemplo 2.2. Sea $X = C[-1,1]$ con la norma $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt$. En este espacio definimos la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - nx, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

La función f_n es constante e igual a 1 en el intervalo $[-1,0]$, luego decrece linealmente al valor cero que alcanza en el punto $\frac{1}{n}$ y queda nula en los demás puntos del dominio. La sucesión satisface

$$\|f_n - f_{n+k}\|_1 \leq \frac{1}{2n},$$

entonces es una sucesión de Cauchy. Sin embargo para la función discontinua

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

se cumple $\|f_n - f\|_1 \leq \frac{1}{2n}$.

No existe una función continua que fuera el límite de la misma sucesión.

$\diamondsuit$

El resultado siguiente es muy útil, cuando buscamos el límite de una sucesión de Cauchy.

Proposición 2.3. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X. Si una subsucesión (x_{n_k}) converge a $x \in X$, entonces $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Demostración. Tenemos la información de que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{N}, \quad \forall\, k > K \quad d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon.$$

La sucesión original es de Cauchy, entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n, m > N \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Para cada $n > \max\{N, n_K\}$ y k tal que $n_k > \max\{N, n_K\}$ se cumple

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq 2\varepsilon.$$

La sucesión (x_n) converge a x.

$\square$

Definición 2.4. Un espacio métrico X se llama *completo* si cada sucesión de Cauchy en X es convergente.

Como sabemos, el espacio euclidiano es completo. Varios de los espacios que acabamos de introducir también son completos.

El espacio X del Ejemplo 1.25 no es completo.

Para probar la competez de varios espacios de sucesiones necesitamos una digresión sobre la convergencia de series.

Proposición 2.5. Sean $a_{nk} \geq 0$, n, $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Demostración. La positividad de los términos de las series es muy importante, porque asegura que las sumas parciales forman sucesiones no decrecientes.

Supongamos que la primera serie converge al valor A, mientras que la serie del lado derecho converge a $B > A$.

Existe entonces K_0 tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A < \sum_{k=1}^{K_0}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_0} a_{nk}.$$

La contradicción que obtuvimos demuestra que si una de las series converge, la otra coverge al mismo valor. Si una diverge al infinito, lo mismo pasa con la otra. $\square$

Ejemplo 2.6. Los espacios l^1, l^2, l^∞ son completos.

Vamos a probarlo en el caso de l^1. Los demás casos se demuestran con los mismos argumentos.

Sea $(\mathfrak{a}_m)$ una sucesión de Cauchy en l^1. Si denotamos $(\mathfrak{a}_m) = (a_{mn})$, entonces la información que tenemos es la siguiente:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, m, k > N \quad \|\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_k\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{mj} - a_{kj}| \leq \varepsilon.$$

Vamos a buscar una subsucesión $(\mathfrak{a}_{m_k})$ cuyos elementos nos den valores $\|\mathfrak{a}_{m_k} - \mathfrak{a}_{m_l}\|_1$ muy pequeños.

Sea n_1 tal que para $l > n_1$ se cumple $\|\mathfrak{a}_{m_1} - \mathfrak{a}_{m_l}\|_1 < \frac{1}{2}$.

Sea $n_2 > n_1$ y tal qie para $l > n_2$ se cumple $\|\mathfrak{a}_{m_2} - \mathfrak{a}_{m_l}\|_1 < \frac{1}{4}$.

Sea $n_3 > n_2$ y tal qie para $l > n_3$ se cumple $\|\mathfrak{a}_{m_3} - \mathfrak{a}_{m_l}\|_1 < \frac{1}{8}$.

Cada uno de estos pasos está justificado por la definición de una sucesión de Cauchy.

Siguiendo con esta procedimiento obtenemos $(\mathfrak{a}_{m_k})$ tal que

$$\|\mathfrak{a}_{m_k} - \mathfrak{a}_{m_{k+1}}\|_1 < \frac{1}{2^k}.$$

Para simplificar la notación denotemos $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_{m_k} = (b_{kj})$. De tal manera tenemos una sucesión que satisface

$$\|\mathfrak{b}_1\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathfrak{b}_{k+1} - \mathfrak{b}_k\|_1 \leq \|\mathfrak{b}_1\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

En forma explícita

$$\sum_{j=1}^{\infty}|b_{1j}|+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|b_{(k+1)j}-b_{kj}|<\infty. \tag{1}$$

La convergencia de esta serie asegura que la sucesión de las sumas

$$\mathfrak{s}_n=\mathfrak{b}_1+\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{b}_{k+1}-\mathfrak{b}_k)$$

forman una sucesión de Cauchy en l^1. Efectivamente,

$$\|\mathfrak{s}_{n+l}-\mathfrak{s}_n\|_1=\|\sum_{k=n+1}^{n+l}\mathfrak{b}_{k+1}-\mathfrak{b}_k\|\leq\sum_{k=n+1}^{n+l}2^n<2^{1-n}.$$

Si $\mathfrak{s}_n=(s_{nj})$ entonces obviamente par cada j se cumple

$$|s_{(n+l)j}-s_{nj}|\leq\|\mathfrak{s}_{n+l}-\mathfrak{s}_n\|_1<2^{1-n}.$$

Para cada j la sucesión numérica $n\to s_{nj}$ es de Cauchy en el espacio $\mathbb{R}$ que es completo, entonces existe una sucesión $\mathfrak{s}=(s_j)=(\lim_{n\to\infty}s_{nj})$.

Vamos a probar que esta sucesión es elemento de l^1.

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{s}\|_1 &= \sum_{j=1}^{\infty}|s_j|=\sum_{j=1}^{\infty}|\lim_{n\to\infty}s_{nj}|=\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}|s_{nj}|\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}(|b_{1j}|+\sum_{k=1}^{n}|b_{(k+1)j}-b_{kj}|)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}|b_{1j}|+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{(k+1)j}-b_{kj}|\end{aligned}$$

La ecuación (1) afirma que, cambiando el orden de las sumas obtenemos un valor finito entonces por Proposición 2.5 concluimos que $\|\mathfrak{s}\|_1<\infty$, es decir $\mathfrak{s}=\lim\mathfrak{s}_n\in l^1$. Ahora debemos darnos cuenta de que $\mathfrak{s}_n=\mathfrak{b}_1+\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{b}_{k+1}-\mathfrak{b}_k)=\mathfrak{b}_{n+1}=\mathfrak{a}_{n_{k+1}}$.

Acabamos de probar que la subsucesión $(\mathfrak{a}_{n_{k+1}})$ de nuestra sucesión de Cauchy $(\mathfrak{a}_n)$ tiene límite $\mathfrak{s}$ en l^1. PorProposición 2,3 se cumple $\lim_{n\to\infty}\mathfrak{a}_n=\mathfrak{s}$.

El espacio l^1 es completo.

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.7. La afirmación: "un límite uniforme de de funciones continuas es una función continua" dice exactamente que el espacio $BC(X)$ de funciones acotadas y continuas con la norma $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$ es un espacio completo.

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.8. Sea X un conjunto arbitrario y sea Y un espacio métrico completo.

Sea F_n una sucesión de Cauchy en el espacio $B(X,Y)$. Se cumple entonces lo siguiente:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N, \quad \forall\, n,m > N \quad d_\infty(F_n, F_m) < \varepsilon.$$

Por consiguiente para todo $x \in X$

$$d_Y(F_n(x), F_m(x)) < \varepsilon. \tag{2}$$

La sucesión $(F_n(x))$ es de Cauchy en Y para cada valor $x \in X$. El espacio Y es completo, entonces podemos definir $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$.

Pasando al límite $m \to \infty$ en la desigualdad (2) obtenemos $d_Y(F_n(x), F(x)) \le \varepsilon$ en todo dominio X y para $n > N$ entonces $d_\infty(F_n, F) < \varepsilon$, lo que demuestra que la aplicación F es acotada y además $F_n \to F$ en el espacio $B(X,Y)$.

$\diamondsuit$

2. Completación

Los espacios completos juegan un papel muy importante en análisis. Más adelante vamos a probar varias de sus propiedades. Sin embargo muchos espacios no son completos. En este momento vamos a demostrar un teorema muy consolador. Cada espacio métrico se puede completar.

Definición 2.9. Una aplicación $\mathcal{I}\colon X \to Y$ entre dos espacios métricos es *isométrica* si $d_Y(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) = d_X(x,y)$ para todos x, $y \in X$.

Una isometría sumerge el espacio X en Y conservando las distancias entra los puntos.

Teorema 2.10. Para cada espacio métrico X existe un espacio métrico completo Y y una isometría $\mathcal{I}\colon X \to Y$ tal que la imagen $\mathcal{I}(X)$ es densa en Y.

Demostración. La demostración del teorema es larga y consta de varias etapas que señalamos explicitamente.

Construcción del espacio Y

Empezando la construcción del espacio Y denotamos por $\mathfrak{Y}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X. En este enorme espacio introducimos una relación de equivalencia diciendo que $\mathfrak{a} = (a_n) \sim \mathfrak{b} = (b_n)$ cuando $\lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n) = 0$.

La relación definida sí es de equivalencia, porque la propiedad $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}$ es obvia, así como la simetría.

La transitividad es consecuencia de la desigualdad de triangulo. De hecho, si $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}$, tenemos: $\lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} d_X(b_n, c_n) = 0$ y se sigue $0 \le d_X(a_n, c_n) \le d_X(a_n, b_n) + d(b_n, c_n) \to 0$, es decir $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{c}$.

Observemos que una sucesión (a'_n) que es equivalente a una sucesión convergente $a_n \to a$, converge al mismo límite. Efectivamente, si $d_X(a_n, a) < \varepsilon/2$, para todos $n > N$, entonces tomando $m > \max\{N, \frac{1}{\varepsilon}\}$ obtenemos

$$d_X(a'_m, a) \le d(a'_m, a_m) + d_X(a_m, a) < \frac{1}{m} + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Hemos probado que $a'_m \to a$.

Sea $Y = \mathfrak{Y}/\sim$. Los elementos del espacio Y son clases de equivalencia de elementos de $\mathfrak{Y}$. La clase del elemento $\mathfrak{a} \in \mathfrak{Y}$ se denota por $[\mathfrak{a}]$.

Sumergimos X en Y

Definimos de una vez la aplicación $\mathcal{I}\colon X \to Y$ asociando primero al elemento $x \in X$ la sucesión constante $\mathfrak{x} = (x, x, x, \dots) \in \mathfrak{Y}$ para luego poner $\mathcal{I}(x) = [\mathfrak{x}]$.

En seguida tenemos que definir en Y una métrica d_Y para luego probar que $d_Y(\mathcal{I}(x), d_Y(\mathcal{I}(y)) = d_X(x, y)$.

La métrica en Y

Para $[\mathfrak{a}] = [(a_n)]$, $[\mathfrak{b}] = [(b_n)] \in Y$ sea

$$d_Y([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}]) = \lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n).$$

Antes de aceptar d_Y como una función sobre $Y \times Y$ tenemos que verificar que el límite del lado derecho existe y luego probar que el resultado no depende de los representantes de las clases $[\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}]$ que hemos usado en la definición.

Según la desigualdad de cuadrángulo (Proposición 1.3) tenemos

$$|d_X(a_n, b_n) - d_X(a_m, b_m)| \le d_X(a_n, a_m) + d_X(b_n, b_m).$$

Ambas sucesiones (a_n) y (b_m) son de Cauchy, entonces para cierto N y para todos n, $m > N$ se cumple $d_X(a_n, a_m) < \varepsilon/2$, $d_X(b_n, b_m) < \varepsilon/2$, así que $|d_X(a_n, b_n) - d_X(a_m, b_m)| \le \varepsilon$.

La sucesión $(d_Y(a_n, b_n))$ es de Cauchy en el espacio completo $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n)$ existe para cada par de representates de las clases $[\mathfrak{a}]$ y $[\mathfrak{b}]$.

En seguida probamos que el el límite no depende de representantes particulares. Sean $(a'_n) \sim (a_n)$ y $(b'_n) \sim (b_n)$.

Nuevamente, por la desigualdad de rectángulo estimamos:

$$|d_X(a_n, b_n) - d_X(a'_n, b'_n)| \le d_X(a_n, a'_n) + d_X(b_n, b'_n).$$

La definición de sucesiones equivalentes afirma que para los $n's$ mayores que cierto N $d_X(a_n, a'_n) < \varepsilon$ y $d_X(b_n, b'_n) < \varepsilon$, por lo cual las sucesiones de Cauchy $(d_X(a_n, b_n))$ y $(d_X(a'_n, b'_n))$ son equivalentes y como tales tienden al mismo límite.

La función d_Y está bién definida y es una métrica en el espacio Y.

Prueba que $\mathfrak{I}$ es una isometría

Cuando $[\mathfrak{a}] = \mathfrak{I}(a) = [(a, a, \dots)]$ y $[\mathfrak{b}] = \mathfrak{I}(b) = [(b, b, \dots)]$, obtenemos:

$$d_Y(\mathfrak{I}(a), \mathfrak{I}(b)) = d_Y([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}]) = \lim_{n\to\infty} d_X(a, b) = d_X(a, b).$$

La aplicación $\mathfrak{I}\colon X \to Y$ sí es una isometría.

Prueba que $\mathfrak{I}(X)$ es denso en Y

Sea $[\mathfrak{a}] = [(a_n)]$ y sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar un elemento de la imagen $\mathfrak{I}(X)$ que está a la distancia $\leq \varepsilon$ de $[\mathfrak{a}]$.

Existe N tal que $d_X(a_n, a_m) < \varepsilon$ para n, $m > N$. Para el elemento de la imagen $\mathfrak{I}(a_{N+1})$ se cumple

$$d_Y([\mathfrak{a}], \mathfrak{I}(a_{N+1})) = \lim_{n\to\infty} d_X(a_n, a_{N+1}) \leq \varepsilon.$$

Prueba que el espacio Y es completo

Sea $[\mathfrak{a}_n]$ una sucesión de Cauchy en Y. Por la densidad del conjunto $\mathfrak{I}(X)$ en Y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $d_Y(\mathfrak{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) < \frac{1}{n}$. Luego, como $\mathfrak{I}$ es una isometría, se sigue

$$\begin{aligned} d_X(x_n, x_m) &= d_Y(\mathfrak{I}(x_n), \mathfrak{I}(x_m)) \leq d_Y(\mathfrak{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) + d_Y([\mathfrak{a}_n], \mathfrak{I}(x_m)) \\ &\leq d_Y(\mathfrak{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) + d_Y([\mathfrak{a}_n], [\mathfrak{a}_m]) + d_Y([\mathfrak{a}_m], \mathfrak{I}(x_m)) \\ &\leq \frac{1}{n} + d_Y([\mathfrak{a}_n], [\mathfrak{a}_m]) + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

La sucesión $[\mathfrak{a}_n]$ es de Cauchy, entonces para cierto N y para $m, n > N$ se cumple $d_Y([\mathfrak{a}_n], [\mathfrak{a}_m] < \varepsilon/3$. Si además tomamos n, $m > \frac{3}{\varepsilon}$ obtenemos $d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Le sucesión (x_n) construida en X es de Cauchy. Terminaremos la demostración probando que $[(x_m)] = \lim_{n\to\infty}[\mathfrak{a}_n]$.

Hacemos una estimación de la distancia $d_Y([(x_m)], [\mathfrak{a}_n])$.

$$\begin{aligned} d_Y([(x_m)], [\mathfrak{a}_n]) &\leq d_Y([(x_m)], \mathfrak{I}(x_n)) + d_Y(\mathfrak{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) \\ &\leq \lim_{m\to\infty} d_X(x_n, x_m) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ ambos términos del lado derecho tienden a cero, entonces efectivamente $[\mathfrak{a}_n] \to [(x_m)]$.

$\square$

¿Que va a pasar, si aplicamos el procedimiento de la completación a un espacio completo?

Obviamente obtenemos un espacio isométrico con el espacio original. Si X es completo y $[\mathfrak{a}]$ es una clase de sucesiones de Cauchy equivalentes, todos los elementos de esta clase son sucesiones convergentes al mismo límite $a \in X$. De tal manera obtenemos una aplicación $\mathfrak{Y}/\sim \ni [\mathfrak{a}] \to a \in X$ que es inversa a la aplicación $\mathfrak{I}$ y por lo tanto es también isométrica.

El primer caso de una completación de un espacio métrico que hemos conocido en el curso de Cálculo fue la obtención del eje real $\mathbb{R}$ a partir del campo de los números racionales. Desafortunamente Teorema 2.10 no se aplica a este caso, porque en su demostración hemos usado la completez del eje real. Si embargo, el método de clases de equivalencia de sucesión de Cauchy sí funciona para obtener la completación del espacio $\mathbb{Q}$. Necesitamos únicamente una modificación al momento de definir la distancia en el espacio $\mathbb{R}$.

Nuestro punto de partida es el espacio $\mathbb{Q}$ provisto de la norma $|x|$ y la métrica $d(p, q) = |p-q|$ que toman valores en el mismo espacio $\mathbb{Q}$. La definición de la sucesión de Cauchy no necesitra ninguna modificación y tampoco la definición de la equivalencia de tales sucesiónes.

El problema surge al momento de definir la métrica en el espacio $\mathbb{R}$ definido obviamente como el espacio $\mathfrak{Y}/\sim$ de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy valuadas en $\mathbb{Q}$. La definición $d([(\mathfrak{p}_\mathfrak{n})], [(\mathfrak{q}_\mathfrak{n})]) = \lim_{n\to\infty} |p_n - q_n|$ que hemos usado debe ser substituida por

$$d([(p_n)], [(q_n)]) = [(|p_n - q_n|)]$$

después de haber probado que en estas circunstancias la sucesión $|p_n - q_n|$ es una sucesión de Cauchy.

Todos los demás elementos de la demostración funcionan perfectamente en este caso.

El hecho de que $\mathbb{Q}$ tiene la estructura algebraica de un campo agrega un aspecto adicional al asunto. Obviamente nos gustaría obtener la misma estructura algebraica en el espacio completado. El problema se resuelve positivamente.

Teorema 2.11. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea F su completación. El espacio F tiene la estructura de espacio normado y E se sumerge en F por medio de una aplicación isométrica y lineal $\mathfrak{J}$.

Si además E es un álgebra tal que $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$, $a, b \in E$ entonces F tiene la estructura del álgebra y $\mathfrak{J}(ab) = \mathfrak{J}(a)\mathfrak{J}(b)$. Si E es un campo, el espacio F es un campo.

Demostración. La demostración es más larga que difícil. Definiendo el espacio F como el conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en E, tenemos que introducir la operacion de suma de elementos en F, el producto de un elemento por un número y en el caso de una álgebra el producto de dos elementos de F. Luego, debemos probar que la estructura algebraica obtenida es de un espacio vectorial, de álgebra y de campo, respectivamente.

Las definiciones de de la suma y productos en F es natural. En la sección 1.1 hemos definido la suma y el producto en el espacio de sucesiones con valores en un álgebra.

Para $[\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}] \in F$, $t \in \mathbb{K}$ definimos:

$$[\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}] := [\mathfrak{a} + \mathfrak{b}], \quad t[\mathfrak{a}] = [t\mathfrak{a}], \quad [\mathfrak{a}] \cdot [\mathfrak{b}] := [\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}].$$

Para justificar estas definiciones tenemos que probar que suma de dos sucesiones de Cauchy en un espacio normado, es una sucesión de Cauchy, que en un álgebra normada el producto de dos sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy. Además es necesario verificar que las definiciones correspondientes no dependen de los representantes de clases.

Dejamos esta labor como ejercicios al Lector.

A continuación señalamos las etapas que debe realizar el Lector para completar la demostración.

Como sabemos, la norma en el espacio E define la métrica en el mismo espacio según la fórmula $d_E(a, b) = \|a - b\|$. De tal manera $\|a\| = d_E(0, a)$. En la demostración de Teorema 2.10 se define en F la métrica $d_F([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}])$. Para obtener una norma en F ponemos entonces: $\|[\mathfrak{a}]\| := d_F([0], [\mathfrak{a}])$.

Hay que probar que $\|[\mathfrak{a}]\|$ es una norma en F. Si E es una álgebra, queda por probar que $\|[\mathfrak{a}][\mathfrak{b}]\| \leq \|[\mathfrak{a}]\|\|[\mathfrak{b}]\|$.

Finalmente, cuando E es un campo, debemos probar que cada elemento de F distinto de cero tiene el inverso en F. El elemento nulo en F es el conjunto de sucesiones en E convergentes a cero. Si $\mathfrak{a} = (a_n)$ es una sucesión de Cauchy que no converge a cero, solo un número finito de elementos a_n puede anularse. Además, ninguna subsucesión de (a_n) converge a cero, lo que significa que existe $r > 0$ tal que $\|a_n\| > r$ para casi todos $n \in \mathbb{N}$. Ignorando el número finito los elementos nulos de la sucesión podemos definir

$$[(a_n)]^{-1} = [(a_n^{-1})].$$

Falta probar que (a_n^{-1}) es una sucesión de Cauchy que es el elemento inverso a $[(a_n)]$.

□

El punto débil de Teorema 2.10 es que los elementos de la completación son objetos complicados. Si tomamos como X el espacio de funciones polinomiales en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con la norma $\|p\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |p(t)|$, el hecho de que los elementos de la completación son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de polinomios no nos dice mucho. Es mucho más útil la información de que, según Teorema de Weierstrass (vea Capítulo 10) este espacio se identifica con el espacio de funciones continuas sobre el intervalo.

3. Ejercicios

1. Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Demuestre que $(d(x_n, y_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.
2. ♦ Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Sea

$$u_n = \begin{cases} x_k, & \text{si } n = 2k - 1, \\ y_k, & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Demuestre que la sucesión (u_n) es de Cauchy si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

3. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Supongamos que la sucesión (y_n) en X satisface $d(x_n, y_n) < |a_n|$, donde (a_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$ convergente a cero. Demuestre que (y_n) es una sucesión de Cauchy.

4. En el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ introducimos la métrica
$$d((a_n),(b_n)) = \begin{cases} 0, & (a_n) = (b_n), \\ \frac{1}{m}, & m = \text{mín}\{n : a_n \neq b_n\}. \end{cases}$$
Demuestre que d es una nmétrica y que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio completo.

5. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ que se anulan fuera de cierto intervalo. Demuestre que $C_0(\mathbb{R})$ no es espacio completo con respecto a la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. y tampoco con respecto a la norma $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$.

6. ⧫ Con el fin de probar que el espacio de las funciones polinomiales sobre el intervalo $[-1, 1]$ no es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ considera los polinomios
$$w_n(t) = \frac{1}{p_n} \int_0^t (1 - x^2)^n dx,$$
donde $p_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$ y pruebe que $w_n \to \text{sgn}$ uniformemente sobre cada conjunto de forma $[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$.

   Deduzca que los polinomios $v_n(t) = \int_0^t w_n(x)dx$ aproximan uniformemente sobre $[-1, 1]$ a la función $t \to |t|$.

7. Demuestre que los espacios métricos (l^p, d_p), $0 < p < 1$ y los espacios normados $(l^p, \|\cdot\|_p)$ para $1 \leq p < \infty$ definidos en Ejercicio 14 del Capítulo 1 son completos.

Capítulo 3

Conjuntos abiertos, conjuntos cerrados

1. Conjuntos abiertos

Cuando un físico, un biólogo o un ingeniero habla de un objeto de sus estudios: de una partícula, una planta o un puente, está convencido de que se trata de algo "existente". Los conceptos que introducen y manejan los matemáticos "existen" en el sentido muy diferente. Se puede pasar muy bién horas y días discutiendo el problema: ¿ En que sentido existe el número π?

Indudablemente los conceptos de un número o de un triangulo se ha formado como resultado de experiencias cotidianas de gente no necesariamente relacionada con el pensamiento matemático.

La situación es diferente cuando se trata de conceptos relacionados con matemáticas a nivel más avanzado, especialmente en la etapa de la investigación, de la creación de áreas nuevas.

Los matemáticos del comienzo del siglo XX estaban probando importantes teoremas sin usar los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados. ¡ Incluso la noción del espacio vectorial fue introducida en el siglo XX!

Las dudas que preocupan a los alumnos, cuando tienen que estudiar los conceptos que aparentemente tienen poco que ver con las experiencias de la vida cotidiana son absolutamente naturales.

Sin embargo, el enorme progreso en muchas ramas de matemáticas que se ha observado a lo largo del siglo XX en gran parte se debe a la aparición y el desarrollo de la nueva rama de matemáticas - la topología dedicada al estudio de conjuntos abiertos en la cual abundan conceptos de gran nivel de abstracción.

Basta con muy poca experiencia en matemáticas para aceptar que el concepto de aproximacion de un objeto por una sucesión de objetos más simples es fundamental. Mientras generaciones de geometras estaban haciendo esfuerzos de construir un intervalo de longitud π con la regla y el compás, otros se dedicaban a determinar esta longitud con una exactitud cada vez mejor.

La derivada, la integral fueron fundamentos de la ciencia contemporánea aunque las definiciones de estos conceptos que se usaban durante varios siglos son para nosotros poco aceptables. De todas maneras el estudio de las reglas que gobiernan los procesos de aproximación fue el motor del desarrollo de matemáticas desde hace mucho tiempo.

La aparición de la topología está relacionada con una observación muy sencilla: se simplifican muchos razonamientos y muchas demostraciones si en lugar de estudiar los métodos de aproximaciones nos ocupamos de los métodos de separar unas cosas de otras.

Aquí aparece el concepto del conjunto abierto - un conjunto cuyos elementos están bién separados del "mundo exterior".

DEFINICIÓN 3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $O \subset X$ *es abierto en* X si para cada $x \in O$ existe un radio $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset O$.

El conjunto O es abierto en X si con cada elemento x que contenga, toda una bola centrada en x cabe dentro de O. Los elementos de O no pueden ser aproximados por elementos del complemento O^c.

Definiendo los conjuntos abiertos en espacios métricos generales estamos construyendo objetos análogos al intervalo sin extremos en el eje real $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 3.2. Sea $X = \mathbb{R}$. El intervalo $O = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ es el ejemplo fundamental de un conjunto abierto. Para $x \in (a, b)$ y el radio $r = \min\{x-a, b-x\}$ la bola $B(x, r)$ es el intervalo $(x - r, x + r)$ y éste está contenido en O.

$\Diamond$

Es muy importante observar la relatividad de concepto "ser abierto".

EJEMPLO 3.3. El intrevalo $[a, b)$ no es abierto en $\mathbb{R}$, porque su elemento a no está separado del complemento $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$. Qualquier que sea $r > 0$, la "bola"$(a - r, a + r)$ contiene elementos de $[a, b)^c$.

Sin embargo el mismo conjunto $[a, b)$ sí es abierto si en lugar de $X = \mathbb{R}$ lo consideramps como subconjunto del espacio $[a, \infty)$. Efectivamente, en este caso la bola $B(a, r)$ significa el intervalo $[a, a + r)$ y para $r < b - a$ se cumple $B(a, r) \subset (a, b)$.

$\Diamond$

EJEMPLO 3.4. En el espacio $X = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ provisto de la métrica cartesiana todos los subconjuntos $O \subset X$ son abiertos, porque las bolas $B(x, 1)$ consisten de un solo elemento: el mismo x.

$\Diamond$

La misma situación existe en cada espacio de métrica discreta.

EJEMPLO 3.5. Sea $X = \mathbb{R}^n$ y sea

$$O = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i > 0, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

El conjunto O es abierto, porque para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in O$, tomando $r = \text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\}$ obtenemos para cada $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$, $1 \leq i \leq n :$

$|x_i - y_i| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r \leq x_i$, y se sigue $y_i \geq x_i - |x_i - y_i| > 0$.

De tal manera se ha probado que $B(\mathbf{x}, r) \subset O$.

$\Diamond$

Sin embargo, en el espacio l^1 de sucesiones sumables un conjunto definido en forma semejante no es obierto.

EJEMPLO 3.6. Sea $A = \{(a_n) \in l^1 : \ a_n > 0, \ n \in \mathbb{N}\}$.

Este conjunto no es abierto en l^1.

Sea $(a_n) \in A$ y sea $r > 0$. La sucesión (a_n) converge a cero, entonces existe n_0 tal que $a_{n_o} < \frac{r}{2}$. Sea

$$y_n = \begin{cases} a_n, & n \neq n_0, \\ -a_n, & n = n_0. \end{cases}$$

La sucesión (y_n) es elemento de l^1, pero obviamente no pertenece a A. Sin embargo $\|(a_n) - (y_n)\|_1 = 2a_{n_0} < r$.

Cada elemento de A puede aproximarse con los elementos del complemento de A, entonces efectivamente A no es abierto.

$\Diamond$

EJERCICIO 3.7. Sea $C \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito y sea $A_C = \{(a_n) \in l^1 : \ a_n > 0, \ n \in C\}$. Demuestre que A_C es abierto en l^1.

EJEMPLO 3.8. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con su métrica usual

$$d((x, y), (u, v)) = ((x - u)^2 + (y - v)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \ x - 1 < y < 1 - x, \ -x - 1 < y < x + 1\}.$$

Queremos probar que O es un conjunto abierto. Para $\mathbf{x} = (x, y) \in O$ tenemos que determinar explícitamente el valor del radio $r > 0$ para el cual $B(\mathbf{x}, r) \subset O$.

Conjunto O es el cuadrado limitado por las rectas $x + y = 1$, $x - y = 1$, $-x + 1 = 1$, $-x - y = 1$. Recordando las fórmulas que nos dan la distancia de un punto de una recta obtenemos

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{mín}\{x + y - 1, x - y - 1, -x - y - 1. - x + y - 1\}.$$

Incluso en este caso extremadamente simple tenemos que apoyarnos en fórmulas de geometría analítica para probar lo deseado.

Si queremos ser igualmente concretos en el caso del conjunto $U = \{\mathbf{x} : y > x^2,\ y - x < 1\}$ no lo lograríamos sin usar el cálculo diferencial para calcular la distancia de un punto de la parábola.

En realidad, si nuestro problema es únicamente probar que U es abierto, no nos interesa el valor exacto de r, sino su existencia. Los teoremas que vamos a probar en el capítulo sigueiente convertiran el problema en muy sensillo.

De todas maneras recomendamos al lector que demuestre directamente por la definición que U es abierto. $\diamondsuit$

En cada espacio métrico existen muchos conjuntos abiertos.

Proposición 3.9. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $R > 0$ la bola $B(x, R)$ es abierta.

Demostración. Sea $y \in B(x, R)$ y sea $r = R \setminus d(x, y)$. Por suposición $r > 0$. Si $u \in B(y, r)$ se sigue $d(u, x) \leq d(u, y) + d(y, x) < r + d(y, x) = R$. Hemos probado que $B(y, r) \subset B(x, R)$, entonces el último conjunto es abierto.

$\square$

Ejemplo 3.10. Proposición 3.8 nos proporciona una demostración alternativa del hecho de que el conjunto O del Ejemplo 3.7 es abierto. Este conjunto se puede describir en forma más sencilla como $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$. Por lo tanto O coincide con la bola centrada en cero y de radio 1 con respecto a la métrica asociada a la norma $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. De acuerdo con Proposición 3.8 O es conjunto abierto.

$\diamondsuit$

Ejemplo 3.11. Para $a < b \in \mathbb{R}$ sea $X = C([a, b])$ con su norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Sea $O = \{f \in X : \forall x \in [a, b]\ f(x) > 0\}$. Sea $f \in O$. Cada función continua sobre un intervalo cerrado alcanza en este intervalo su mínimo. Sea $m = \text{mín}_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_0)$. Se cumple entonces $m > 0$, porque $f(x_0) > 0$ por suposición. Sea $g \in B(f, m)$. Para todo $x \in [a, b]$ tenemos $-m < g(x) - f(x) < m$ y se sigue $g(x) = g(x) - f(x) + f(x) > g(x) - f(x) + m > 0$.

De tal manera $B(f, m) \subset O$. El conjunto O es abierto.

$\diamondsuit$

Hay cierta analogía entre el último ejemplo y Ejemplo 3.5. En ambos consideramos el conjunto de funciones (sobre $\mathbb{N}$ y $[a, b]$ respectivamente) que toman exclusívamente los valores positivos. Sin embargo el conjunto A de Ejemplo 3.5 no es abierto, mientras que el conjunto O de Ejemplo 3.10, sí es abierto. Esto se debe a que en el segundo caso el dominio de las funciones es cerrado y acotado.

En seguida vamos a probar las propiedades básicas de la familia de todos conjuntos abiertos.

TEOREMA 3.12. Sea (X, d) un espacio métrico.

1. X es abierto en X.
2. $\emptyset$ es abierto en X.
3. Si $O_\alpha \subset X$ es abierto en X para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$ es abierto en X.
4. Si $O_j \subset X$, $j = 1, \dots, n$ son abiertos en X, entonces $\bigcap_{j=1}^n O_j$ es abierto en X.

DEMOSTRACIÓN. El inciso 1. no necesita explicación.

2. Un conjunto A no es abierto si existe $x \in A$ tal que cualquier bola $B(x, r)$ contiene elementos que no son de A. En el caso de $A = \emptyset$ la afirmación "existe $x \in \emptyset$..."nos da una contradicción probando que $\emptyset$ es abierto.

3. Si $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$, existe α_0 tal que $x \in O_{\alpha_0}$. Sabemos que O_{α_0} es abierto y podemos encontrar $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset O_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$, lo que termina la demostración.

4. Para cada $x \in \bigcap_{j=1}^n O_j$, $1 \leq j \leq n$ existe $r_j > 0$ tal que $B(x, r_j) \subset O_j$. Tomando $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ obtenemos $B(x, r) \subset \bigcap_{j=1}^n O_j$. El anunciado está probado.

$\square$

Inmediatamente debemos aclarar porque en el inciso 4. se considera el número finito de conjuntos. Facilmente encontramos el ejemplo de número infinito de conjuntos abiertos con intersección que no es abierta.

EJEMPLO 3.13. Sea $X = \mathbb{R}$ y sean $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Cada intervalo I_n es abierto en $\mathbb{R}$, pero $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = \{0\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$.

$\Diamond$

En el caso del eje real $\mathbb{R}$, que es exepcional en muchos aspectos, es posible describir a todos los subconjuntos abiertos.

TEOREMA 3.14. Cada abierto $O \subset \mathbb{R}$ es de forma de una unión a lo mas numerable de intervalos abiertos mutuamente disjuntos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in O$ y sea $r > 0$ tal que $B(x, r) = (x-r, x+r) \subset O$. Cada elemento de O pertenece a un intervalo abierto contenido en O. Sea O_x la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a x y están contenidos en O. Por Teorema 1.7. el conjunto O_x es abierto en $\mathbb{R}$ como unión de abiertos.

Obviamente $O = \bigcup_{x\in O} O_x$.

Vamos a probar que cada O_x es un intervalo abierto. Sea $a = \inf(O_x)$, $b = \sup(O_x)$. Sea $a < y < b$. Si $y < x$, existe $u \in O_x$ tal que $u < y$ por la definición del ínfimo. Ahora, por la definición de O_x el intervalo (u, x) pertenece a O_x y obtenemos $y \in O_x$. En forma análoga concluimos que $x < y < b$ implica $y \in O_x$. Entonces $O_x = (a, b)$.

Supongamos que para $y,\ x \in O$, $y \neq x$ tenemos $O_x \cap O_y \neq \emptyset$. La unión de dos intervalos abiertos que se intersectan es también un intervalo abierto, que contiene a ambos puntos x, y.

De tal manera obtenemos que $y \in O_x$ y $x \in O_y$, es decir $O_x = O_y$. La familia de conjuntos $\{O_x : x \in O\}$ consta de intervalos abiertos mutuamente ajenos. Cada uno de ellos contiene algún elemento racional, entonces la cardinalidad de esta familia no puede superar la cardinalidad de $\mathbb{Q}$ - es a lo más numerable.

□

Aunque esta descripción de los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ parece muy sencilla, la estructura de los abiertos en el eje real tiene sus sutilezes.

Ejemplo 3.15. Sea $\mathbb{N} \ni n \to a_n \in \mathbb{Q}$ una una biyección y sea $\varepsilon > 0$. Sea $O = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$. El conjunto O es abierto y contiene a todos los números racionales, lo que sugiere que O "casi llena" al eje. Su complemento O^c no contiene ningún intervalo. Sin embargo la suma de las longitudes de los componentes que definen a O es igual a ε, entonces el "tamaño"de O es en este sentido mínimo en comparación co él de O^c. Aquí entramos en problemas que estudia la teoría de la medida.

$\lozenge$

Como hemos explicado anteriormente, el concepto del conjunto abierto tiene su origen en los estudios de las separaciones de puntos y conjuntos. Veamos el caso mas sencillo de estos fenómenos.

Teorema 3.16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x,\ y \in X$. Si $x \neq y$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.

Demostración. Sea $r = \frac{1}{2}d(x, y)$. Se cumple la condición $r > 0$, porque $x \neq y$. Si $u \in B(x, r) \cap B(y, r)$, por la desigualdad de triangulo obtenemos: $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) < r + r = d(x, y)$. La contradicción demuestra que la intersección es vacía.

□

Cada subconjunto Y de un espacio métrico (X, d) es un espacio métrico con la métrica definida por restricción. Es importante conocer la relación entre los conjuntos abiertos en (X, d) y (Y, d).

Teorema 3.17. Un conjunto $U \subset Y$ es abierto en Y si y solo si existe en X un abierto O tal que $U = O \cap Y$.

Demostración. En este caso tenemos que distinguir entre las bolas en X y en Y. Obviamente, para $y \in Y$ se cumple

$$B_Y(y,r) = \{u \in Y : d(u,y) < r\} = B_X(y,r) \cap Y.$$

De tal manera resulta obvio que para $O \subset X$ abierto en X el conjunto $O \cap Y$ es abierto en Y.

Ahora supongamos que $U \subset Y$ es abierto en Y. Para $y \in Y$, sea $r_y > 0$ tal que $B_Y(y,r_y) \subset U$. Definimos $O = \bigcup_{y\in Y} B_X(y,r_y)$.

Obviamente $U \subset O \cap Y$. Sea $u \in O \cap Y$. Entonces $U \in Y$ y existe $y \in U$ tal que $d(u,y) \le r_y$, lo que implica $u \in U$.

Hemos probado la contensión $O \cap Y \ \subset \ U$ completando así la demostración.

$\square$

En algunos problemas es importante saber si un conjunto determinado contiene a un abierto. Es conveniente definir el concepto del interior de un conjunto.

Definición 3.18. Sea $A \subset X$. El siguiente conjunto se llama el *interior* de A.

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : \exists\, r > 0,\ B(x,r) \subset A\}.$$

Si $x \in \mathrm{Int}(A)$, decimos que A es una *vecindad* de x.

Un conjunto tiene el interior no vacío si contiene un subconjunto abierto.

Un conjunto es abierto si y solo si es igual a su interior.

Ejemplo 3.19. En el ejemplo 3.5 tenemos el caso del conjunto A definido como la intersección del número numerable de conjuntos abiertos $A_k = \{(a_n) \in l^1 : a_k > 0\}$. Lo que hemos probado es que no solamente A no es abierto, sino que $\mathrm{Int}\, A = \emptyset$.

$\diamondsuit$

Definición 3.20. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d$ la familia de todos los conjuntos abiertos del espacio (X,d). A esta familia, la llamamos la *topología* del espacio (X,d).

Si en un espacio X están definidas dos métricas d_1, d_2 y se cumple $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$, decimos que las métricas d_1 y d_2 son *equivalentes.*

Ejemplo 3.21. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\delta(x,y) = \frac{d(x,y}{1+d(x,y)}$.

La función δ es también una métrica. La métrica δ toma valores acotados por el número 1, cualquier que sea la métrica d. Sin embargo las métricas d y δ son equivalentes.

Ambos hechos están probados en la sección de problemas resueltos.

La convergencia o divergencia de sucesiones se puede expresar en términos de vecindades y conjuntos abiertos.

Proposición 3.22. En un espacio métrico (X, d) una sucesión (a_n) converge a $x \in X$ si y solo si para cada vecindad $V(x)$ de x la condición $x_n \notin V(x)$ se cumple solo para un número finito de los índices n.

En la demostración de este resultado se utilizan únicamente las definiciones de los conceptos correspondientes, entonces dejamos esta tarea al Lector.

2. Conjuntos cerrados

Definición 3.23. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $C \subset X$ es *cerrado en* X si su complemento C^c es abierto en X.

Inmediatamente debemos emfatizar que el hecho de que un conjunto cerrado es complementario a un abierto no significa que estas propiedades son contrarias.

Ejemplo 3.24. En el espacio $X = [-1, 0) \cup (0, 1]$ los subconjuntos mutuamente complementarios $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son ambos abiertos y ambos cerrados.

Las formulas de de Morgan

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c, \quad (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c,$$

conducen a las propiedades de los conjuntos cerrados que son duales a las propiedades de los abiertos. Dejamos al lector como ejercicio la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3.25. Sea (X, d) un espacio métrico.

1. X es carrado en X.
2. $\emptyset$ es cerrado en X.
3. Si $O_\alpha \subset X$ es cerrado en X para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$ es cerrado en X.
4. Si los conjuntos $O_j \subset X$, $j = 1, \dots, n$ son cerrados en X, entonces $\bigcup_{j=1}^n O_j$ es cerrado en X.

Teorema 3.16 tiene tambén su homólogo en el caso de conjuntos cerrados.

Teorema 3.26. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$. Un conjunto $C \subset Y$ es cerrado en (Y, d) si y solo si existe $D \subset X$ cerrado en X tal que $C = D \cap Y$.

Dejamos la demostración al lector como ejercicio.

Hasta este momento podemos tener la impresión de que la introducción de los conjuntos cerrados es solamente un juego sin gran importancia porque mediante las fórmulas de de Morgan las propiedades de los abiertos y de los cerrados están en una correspondencia uno a uno. Si no es así, se debe a dos razones:

1. el papel de sucesiones convergentes en el estudio de los conjuntos cerrados,

2. la importancia del concepto de la cerradura de un conjunto que sería poco manejable en términos de los conjuntos abiertos.

Teorema 3.27. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si cada sucesión en A que es convergente en X tiene límite en A.

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado en X y sea (a_n) una sucesión de elementos de A. Supongamos que $a_n \to a \in X$. Si $a \notin A$, entonces a es elemento del complemento de A que es conjunto abierto. Existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A^c$. La bola $B(a, r)$ no contiene ningún elemento de la sucesión (a_n), lo que es una contradicción. Hemos probado que $a \in A$.

Ahora supongamos que A tiene la propiedad de que cada sucesión en A que es convergente en X tiene límite en A. Sea $a \in A^c$. Si A^c no es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$ la bola $B(a, \frac{1}{n})$ contiene a un elemento A, digamos a_n. De tal manera obtenemos $A \ni a_n \to a$ mientras que $a \notin A$. La contradicción termina la demostración del teorema.

□

La característica de conjuntos cerrados contenida en Teorema 3.27 se puede expresar utilizando el concepto de un punto de acumulación.

Definición 3.28. Sea A un conjunto en un espacio métrico X. Un punto $x \in X$ es *un punto de acumulación de* A si en cada bola $B(x, r)$ se encuentra un elemento de A distinto de x. Los elementos de A que no son sus puntos de acumulación se llaman *puntos aislados*.

Llamamos *perfecto* a un conjunto que no tiene puntos aislados.

Proposición 3.29. Un elemento $a \in X$ es punto de acumulación de $A \subset X$ si y solo si en $A \setminus \{a\}$ existe una sucesión (a_n) convergente a a.

Demostración. Si a es un punto de acumulación de A, entonces para cada n existe un elemento $a_n \in A \cap B(a, \frac{1}{n})$ tal que $a_n \neq a$. De tal manera obtenemos una sucesión $A \setminus \{a\} \ni a_n \to a$.

Por otro lado, suponiendo que $a_n \in A \setminus \{a\}$ y $a_n \to a$, obtenemos que cada bola centrada en a contiene un número infinito de elementos de la sucesión, entonces a es un punto de acumulación de A.

□

Proposición 3.30. Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Demostración. Sea A un conjunto cerrado. Como afirma Proposición 3.29, los puntos de acumulación de A son limites de elementos de A, entonces por Teorema 3.27, pertenecen a A. Cada conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación.

Ahora supongamos que A contiene a todos sus puntos de acumulación. Sea $A \ni a_n \to a$. Si para algún n_0 tenemos $a_{n_0} = a$, ya sabemos que $a \in A$. En caso contrario a es un punto de acumulación de A y por suposición pertenece a A. Por Teorema 3.27 A es cerrado.

Definición 3.31. *La cerradura de* A en X es la unión de A y de todos sus puntos de acumulación en X. La cerradura de A en X se denota $\overline{A}$ o $\overline{A}^X$ si queremos enfatizar cual es nuestro universo.

Proposición 3.32. La cerradura de $A \subset X$ es es un conjunto cerrado en X.

Demostración. Según Proposición 3.30, para probar que la cerradura es cerrada, es suficiente demostrar que cada punto de acumulación de $\overline{A}$ pertenece a $\overline{A}$, es decir es punto de acumulación del mismo A.

Tomemos $x \in X$ tal que que cada bola $B(x,r)$ contiene un elemento $u \in \overline{A}$. Cada bola centrada en u, en particular la bola $B(u, r - d(x,u))$, contiene a un elemento $a \in A$. Sin empargo, $B(u, r - d(x,u)) \subset B(x,r)$, entonces $a \in B(x,r)$. Así hemos probado que cada elemento de $\overline{\overline{A}}$ pertenece a $\overline{A}$. La cerradura de A es cerrada.

□

Hacemos un resumen de las propiedades de la operación de la cerradura.

Teorema 3.33. La operación $A \to \overline{A}$ tiene las siguientes propiedades

1. $A \subset \overline{A}$,
2. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración. Las propiedades 1. 2. son obvias por la definición. Inciso 3. es otra formulación de Proposición 3.32.

Las contenciones $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ implican por la fórmula 2. que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, es decir $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Por otro lado, aplicando nuevamente el inciso 2. a la fórmula $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, y obtenemos $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Sin embargo el conjunto

$\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado como unión de dos conjuntos cerrados y por lo tanto es igual a su cerradura. Finalmente $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, lo que temina la demostración.

□

Existe otra manera de caracterizar la cerradura de A que es muy importante para generalizar este concepto a espacios topológicos que no son espacios métricos.

Teorema 3.34. Sea X un espacio métrico y sea $A \subset X$. La cerradura de A es igual a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

Demostración. Denotemos por $\widetilde{A}$ la intersección de todos los cerrados que contienen a A. La cerradura $\overline{A}$ es uno de los conjuntos cerrados que contienen a A, entonces $\widetilde{A} \subset \overline{A}$.

Por inciso 3 de Teorema 3.24 el conjunto $\widetilde{A}$ es cerrado y obviamente contiene a A. Aplicamos la propiedades 2. y 3. de Teorema 3.32 a la contención $A \subset \widetilde{A}$ obteniendo $\overline{A} \subset \overline{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$. Hemos probado que $\tilde{A} = \overline{A}$.

□

Pasando a los ejercicios sobre el tema de la cerradura y los conjuntos cerrados debemos subrayar que en cada caso tenemos la opción de utilizar el método de sucesiones del Teorema 3.26 o bién las propiedades expresadas en Teorema 3.24 y 3.32, respectivamente. El método de sucesiones es más natural para las personas que piensan "geométricamente"mientras que el segundo método es más "algebraico".

La demostración del inciso 4. del último teorema pertenece a la segunda categoría. Como ejercicio hagámosla utilizando el método de sucesiones.

Ejercicio 3.35. Estamos probando dos contenciones: $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Si un elemento x pertenece a $\overline{A} \cup \overline{B}$, existe una sucesión (x_n) convergente a x que consta de elementos de A únicamente o de elementos de B únicamente. En ambos casos la sucesión pertenece a $A \cup B$ entonces $x \in \overline{A \cup B}$.

Si $x \in \overline{A \cup B}$, existe $x_n \to x$, donde para cada n determinada sucede $x_n \in A$ o $x_n \in B$. Ente los conjuntos $N = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$ y $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B\}$ al menos uno es infinito, entonces la sucesión (x_n) tiene una subsucesión que pertenece a A o una subsucesión que pertenece a B. Así obtenemos $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$.

Ejercicio 3.36. La igualdad 4. de Teorema 3.24 fácilmente se extiende a las uniones finitas de conjuntos. Es natural pensar en la relación entre los conjuntos $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A_\alpha}$ y $\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha}$, cuando el conjunto Λ es infinito.

Aplicando la operación de cerradura a la obvia relación $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ obtenemos únicamente

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha}.$$

Un simple ejemplo demuestra que la igualdad no se da.

Sea $X=\mathbb{R}$ y sean $A_n=[\frac{1}{n},1]$. Como unión de estos conjuntos cerrados obtenemos el intervalo $(0,1]$, mientras que la cerradura de la unión nos da el intervalo $[0,1]$.

Lo que sí se puede probar es la igualdad

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A_\alpha}}=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha},$$

que dejamos al lector como ejercicio.

Ejercicio 3.37. No menos natural es preguntar por la relación entre $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $\overline{A\cap B}$. Cerrando ambos lados de la relación $A\cap B\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ obtenemos la contención

$$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}.$$

La igualdad no se cumple en el siguiente caso de subconjuntos del eje real. Si $A=(0,1)$ y $B=(1,a)$, el lado izquierdo de la relación es el conjunto vacío, mientras que el lado derecho consta del conjunto $\{1\}$.

Ejercicio 3.38. Sea (X,d) un espacio métrico. Además de la bola $B(x.r)$, $x\in X$, $r>0$ podemos definir la bola "con frontera" $\overline{B}(x,r)=\{u\in X:\, d(x,u)\le r)$.

El conjunto $\overline{B}(x,r)$ es cerrado, lo que podemos ver directamente por la definición probando que el complemento de $\overline{B}(x,r)$ es abierto.

Si $y\notin\overline{B}(x,r)$, se cumple $d(x,y)>r$. Cada elemento a de la bola $B(y,r-d(x,y))$ satisface $d(a,x)\ge d(x,y)-d(y,a)>d(x,y)-(r-d(x,y))=r$. La bola $B(y,r-d(x,y))$ esta contenida en el complemento de $\overline{B}(x,r)$, entonces este complemento es abierto, mientras que $\overline{B}(x,r)$ es cerrado.

La bola $\overline{B}(x,r)$ es un conjunto cerrado que contiene a $B(x,r)$, entonces contiene también a la cerradura $\overline{B(x,r)}$.

¿Son iguales $\overline{B(x,r)}$ y $\overline{B}(x,r)$?

Obviamente ¡ no!

En el espacio discreto X de más de un elemento cada bola $B(x,1)$ consta de un solo punto $\{x\}$ y coincide con su cerradura, mientras que $\overline{B}(x,1)=X$.

Sin embargo en algunos espacios estas bolas coinciden.

Proposición 3.39. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces para cada $x \in E$, $r > 0$

$$\overline{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}.$$

Demostración. Ya hemos visto que $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r)$. Por la relación $C = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\| = 1\}$ es suficiente demostar que $C \subset \overline{B(x, r)}$.

Sea $u \in C$. Denotemos $v = u - x$ y $u_t = x + tv$, $0 \leq t \leq 1$. Tenemos $d(x, u_t) = \|u_t - x\| = \|tv\| = tr$. Para $t < 1$ el vector u_t es elemento de $B(x, r)$. Luego

$$d(u_t, u) = \|u_t - u\| = \|x + t(u - x) - u\|(1 - t)(x - u)\| = (1 - t)r.$$

Cuando $t \nearrow 1$ los elementos u_t de la bola $B(x, r)$ tienden a u. Hemos probado que $C \subset \overline{B(x, r)}$, entonces $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$.

□

De los cursos de álgebra lineal conocemos la construcción de un espacio cociente E/F cuando F es un subespacio vectorial del espacio vectorial E (real ó complejo).

Cuando el espacio E es un espacio normado, es natural pensar en una norma en un espacio cociente.

Proposición 3.40. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $F \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. La función definida en el espacio cociente E/F por la fórmula

$$\|[x]\| := \inf_{h \in F} \|x + h\|$$

es una norma.

Demostración. Estudiemos primero la función sobre E definida por la fórmula $\nu(x) = \inf_{h \in F} \|x + h\|$. El valor $\nu(x)$ obviamente existe y es no negativo. Además $\nu(x) \leq \|x + h\|$ para cualquier $h \in F$.

La desigualdad del triangulo en E implica que para todos x. $y \in E$ y h, $h' \in F$ se cumple

$$\nu(x + y) \leq \|x + y + h + h'\| \leq \|x + h\| + \|y + h'\|.$$

Tomando los íinfimos del lado derecho obtenemos

$$\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y).$$

La función ν se anula sobre el subespacio F y por lo tanto, si $y - x \in F$ obtenemos:

$$\nu(x) = \nu(y + (x - y)) \leq \nu(y) + \nu(x - y) = \nu(y),$$

y de la misma manera

$$\nu(y) = \nu(x + (y - x)) \leq \nu(x).$$

Obtenemos $\nu(x) = nu(y)$ cuando $x - y \in F$.

La función ν toma el mismo valor sobre todo el conjunto $[x] = x + F$. La definición de $\|[\cdot]\|$ como de función sobre el espacio cociente es correcta y satisface

$$\|[x] + [y]\| = \|[x + y]\| = \nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y) = \|[x]\| + \|[y]\|.$$

Por la definición del ínfimo para cada $x \in E$ existe una sucesión h_n en el subespacio F tal que $\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \|x + h_n\|$. Si $\nu(x) = 0$ tenemos $0 = \nu(x) = \lim_{n\to\infty} \|x + h_n\|$. La sucesión (h_n) es entonces convergente y su límite es el vector $-x$. El subespacio F es cerrado, así que, por Teorema 3.26 se sigue $x \in F$. La función $\|[\cdot]\|$ se anula únicamente sobre la clase $[0]$ y sí,es una norma.

□

3. Ejercicios

1. ♦ Demuestre que cada conjunto abierto en $\mathbb{R}$ se puede representar como una unón numerable de intervalos abiertos mutuamente ajenos.
2. Pruebe que en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto es una unión numerable de bolas.
3. En cada espacio métrico los conjunto finitos son cerrados.
4. Encuentre un espacio métrico (X, d) distinto delo espacio discreto y una bola $B(x, r) \subset X$ tal que $\overline{B(x, r)} \neq \overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$.
5. Sean d, $\tilde{d}$ dos métricas en el mismo espacio X. Demuestre que las métricas d, $\tilde{d}$ son equivalentes ($d \sim \tilde{d}$) si y solo si para cada sucesión (x_n) en X se cumple $(x_n \to x$ en $(X, d)) \iff (x_n \to x$ en $(X, \tilde{d}))$.
6. Sean d, $\tilde{d}$ dos métricas en el mismo espacio X. Supongamos que existen a, $b \in \mathbb{R}$ tales que para todos x, $y \in X$

   $$a\, d(x, y) \leq \tilde{d}(x, y) \leq b\, d(x, y).$$

   Demuestre que las métricas d, $\tilde{d}$ son equivalentes.

   Mediante un ejemplo demuestre que esta condición no es necesaria para la equivalencia de las métricas,

7. ♦ Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, x, $y \in X$. Demuestre que δ es una métrica equivalente a la métrica d.

8. En el espacio $\mathbb{R}$ definimos la métrica:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x,y \in \mathbb{Q} \ o \ x,y \in \mathbb{Q}^c, \\ |x|+|y|, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   a. Demuestre que d es una métrica.
   b. Verifique si el espacio $(\mathbb{R},d)$ es completo.
   c. Describa las bolas en este espacio.
   d. Encuentre $\operatorname{Int}\mathbb{Q}$, $\operatorname{Int}\mathbb{Q}^c$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}^c}$.

9. ♦ En el espacio l^1 de las sucesiones sumables tenemos la norma natural de este espacio: $\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y la estructura métrica dada por la fórmula $d_1((a_n),(b_n)) = \|(a_n)-(b_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$.
   Demuestre que la métrica $d_\infty((a_n),(b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$ no es eqivalente a la métrica d_1.

10. Sea (x_n) una sucesión en un espacio métrico (X,d) convergente a x. Sea $Y = \{x\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Describa los conjuntos cerrados en (Y,d).

11. Demuestre que para cada familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subconjuntos de un espacio métrico se cumple

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{A_\alpha}} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha}$$

12. ♦ En el plano $\mathbb{R}^2$ definamos

$$A = \{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} : \ x > 0\}.$$

   Describe la cerradura de A.

13. ♦ Demuestre que el espacio l^1 no es cerrado en el espacio **c**, el último provisto de la norma $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n\|$..

14. Los espacios l^p, $0 < p < \infty$ están definidos en Ejercicio 14 del Capítulo 1. Sean

$$A_p = \{(a_n) \in l^p : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \ a_n \geq 0\}.$$

   Investigue si los conjuntos A_p son cerrados en los espacio l^p correspondiente.

15. Sea A un conjunto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que
$$x \in \overline{A} \iff \inf_{y \in A} d(x, y) = 0.$$
16. Demuestre que en un espacio normado la cerradura de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial.
17. Sea C un conjunto en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ tal que $B(0, r) \subset C \subset \overline{B(0, r)}$. Demuestre que C es convexo. ¿Es cierta esta afirmación si en lugar de la norma euclidiana consideramos otra norma en $\mathbb{R}^n$? Encuentre un ejemplo positivo y un contraejemplo.
18. Sean A, B dos subconjuntos de un espacio normado. Denotamos: $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$. Supongamos que A es abierto.

    Demuestre que $A + B$ es abierto.
19. Sea A un subconjunto en un espacio métrico X. Demuestre que el interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A.
20. Demuestre las siguientes propiedades del interior de conjunto:
    1. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.
    2. $\mathrm{Int}(A^c) = (\overline{A})^c$.
    3. $(\mathrm{Int}(A))^c = \overline{A^c}$.

    ¿Es cierto que $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$ para A, B arbitrarios?
21. Para un subconjunto $A \subset X$ de un espacio métrico (X, d) se define *la frontera* de A como $\overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

    Demuestre las relaciones:

    a. $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A^c}$, **b**. $X = \overset{\circ}{A} \cup \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(A^c)$,

    c. $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overset{\circ}{A}$, **d**. $\overset{\circ}{\mathrm{Int}(A)} \subset \overset{\circ}{A}$,

    e. $\overset{\circ}{(A \cup B)} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, **f**. $\overset{\circ}{(A \cap B)} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

    En los casos **c**., **d**., **e**., **f**. demuestre que las igualdades no son válidas.
22. Sea V un abierto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que para todo $A \subset X$ se tiene $V \cap \overline{A} \subset \overline{A \cap V}$. ¿Sigue siendo válida la relación si no se supone que V es abierto?
23. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$ un conjunto convexo. Demuestre que la cerradura $\overline{C}$ es también un conjunto convexo.

24. Sea $\mathbf{c}$ el espacio de todas sucesiones reales convergentes y sea $\mathbf{c}_0$ el espacio de sucesiones convergentes a cero. Demuestre que ambos espacios son cerrados en l^∞. ¿Es $\mathbf{c}_0$ cerrado en $\mathbf{c}$?
25. ⧫ (Teorema de Cantor) Sea F_n una familia descendiente de conjuntos no vacíos cerrados en un espacio completo y tal que $d(F_n) = \sup_{x,\, y \in F_n} d(x, y) \to 0$. Demuestre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ consta de un punto,
26. ⧫ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado completo (espacio de Banach) y sea $F \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Demuestre que el espacio E/F es completo.
27. ⧫ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $F \subset E$ un subespacio vectorial. Supongamos que F y E/F son espacios completos. Demuestre que el espacio E es completo.

Capítulo 4

Teorema de Baire

Teorema de Baire de Categorías tiene papel fundamental en análisis y especialmente en análisis funcional. Los famosos teoremas tales como Teorema de Banach-Steingaus, Teorema de la Gráfica Cerrada, Teorema de Operador Abierto, Teorema de Mazur-Orlicz y muchos más son corolarios de Teorema de Baire.

Entre los alumnos de análisis este teorema tiene mala fama. La causa es la terminología introducida en relación a este teorema que tradicionalmente usa el concepto de conjunto denso en ninguna parte y divide los conjuntos en los de categoría 1° y los de categoría 2°, lo que conduce a muchos teoremas de caracter formal.

Lo que es realmente importante en esta teoría se puede expresar sin introducir conceptos nuevos. La demostración del teorema es un bonito ejercicio acerca de conjuntos abiertos, sucesiones de Cauchy, la completez de espacio métrico.

Después de haber conocido Teorema de Baire y sus consecuencias, la introducción de los conjuntos de primera y segunda categor

1. Teorema de Baire básico

Definición 4.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset X$ es *denso en* X si $\overline{D} = X$.

Teorema 4.2. (Baire) Sea O_n, $n \in \mathbb{N}$ una familia de conjuntos abiertos y densos en un espacio métrico completo. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es un conjunto denso en X.

Demostración. Denotemos por D el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Para probar que D es denso en X es suficiente demostrar que cada bola $B(x_0, r_0)$, donde $x_0 \in X$ y $r_0 > 0$ se intersecta con D.

El conjunto O_1 es abierto y denso en X y $B(x_0, r_0) \cap O_1$ es un conjunto abierto no vacío, entonces contiene alguna bola $B(x_1, s)$. Sea $r_1 = \min\{s/2, 1/2\}$. La bola más pequeã $B(x_1, r_1)$ satisface $\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_1) \cap O_1$.

El conjunto O_2 es abierto y denso en X entonces usando los mismos argumentos con $B(x_1, r_1)$ en lugar de $B(x_0, r_0)$ podemos encontrar $0 < r_2 < 1/4$ tal que $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap O_2$.

Por inducción, siempre con los mismos argumentos, podemos construir dentro de $B(x_0, r_0)$ una familia de bolas

$$B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2) \supset B(x_3, r_3) \supset \cdots \supset B(x_n, r_n) \supset \dots$$

tales que para $n = 0, 1, \dots$ se cumple $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$ y donde $r_n < 2^{-n}$.

La sucesión (x_n) de los centros de estas bolas satisface $d(x_n, x_{n+k}) < 2^{-n}$ para todos n, $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto es una sucesión de Cauchy.

El espacio X es completo. Existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. En vista de que $x_{n+k} \in \overline{B(x_n, r_n)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se sigue que $x \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset O_n \cap B(x_0, r_0)$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. El elemento x pertenece a $D \cap B(x_0, r_0)$. El teorema está probado.

$\square$.

Como primera aplicación del Teorema de Baire vamos a obtener una información importante sobre la estructura de espacios métricos que son completos y a la vez numerables.

Corolario 4.3. Si X es un espacio completo finito o numerable entonces X contiene un elemento aislado.

Demostración. El caso de un conjunto finito es obvio. Supongamos que X es numerable, entonces de la forma $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$.

Recordemos que un espacio que no contiene elementos aislados se llama perfecto. Estamos probando que un espacio completo y numerable no puede ser perfecto.

Supongamos entonces que X sí es perfecto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $X \setminus \{x_n\}$ es abierto y denso. Por Teorema de Baire también es denso en X el conjunto

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \{x_n\}) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\})^c = X^c = \emptyset.$$

Esta contradicción demuestra que X no es perfecto. $\square$

Ejemplo 4.4. Conocemos varios ejemplos de espacios completos perfectos. Además de los intervalos en $\mathbb{R}$ y el mismo espacio $\mathbb{R}$, el espacio de Cantor también es perfecto. Corolario 4.2 demuestra en forma sencilla que estos conjuntos no son numerables.

Si en un espacio métrico X tenemos una sucesión (x_n) convergente a x_0, entonces $A = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ es un ejemplo sencillo de un espacio numerable completo y no discreto.

Aunque el teorema de Baire dice únicamente que un espacio completo numerable tiene al menos un punto aislado, es fácil ver que en un espacio X de estas propiedades existe un número infinito de puntos aislados. Efectivamente, si $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ es un conjunto finito de puntos aislados de X, entonces $X \setminus A$ sigue siendo numerable y completo, entonces contiene puntos aislados que a la vez son puntos aislados de X.

2. Teorema de Baire generalizado

Para expresar Teorema de Baire en forma más tradicional necesitamos otra definición.

DEFINICIÓN 4.5. Un conjunto A en un espacio métrico X es *denso en ninguna parte* si el interior de $\overline{A}$ es vacío.

COROLARIO 4.6. Si X es un espacio métrico completo y $A_n \subset X$ son conjuntos densos en ninguna parte entonces $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

DEMOSTRACIÓN. Si A_n es denso en ninguna parte, entonces $\overline{A_n}$ tiene complemento abierto y denso en X.

Por teorema de Baire $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n})^c \neq \emptyset$. Fórmula de de Morgan nos lleva a $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n})^c \neq \emptyset$, es decir $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq X$. Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, que es un conjunto más pequeño tampoco llena a X.

En varias aplicaciones la siguiente forma de Teorema de Baire es más conveniente.

COROLARIO 4.7. Si X es un espacio métrico completo que se puede representar como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Int}(\overline{X_k}) \neq \emptyset$.

DEFINICIÓN 4.8. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que un conjunto $A \subset X$ es de 1^a categoría en X si existe una familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte en X tal que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Un conjunto $B \subset X$ es de 2^a categoría si no es de 1^a categoría.

TEOREMA 4.9. (Teorema de Baire de categorías) Cada espacio métrico completo es de 2^a categoría en si mismo.

3. Ejercicios

1. Demuestre que en el espacio $C([-a, a])$, $a > 0$ los conjuntos de funciones lineales, de funciones polinomiales, de funciones, de funciones pares, tienen complementos densos.
2. Utiliza Teorema de Baire para demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo.
3. Demuestre que, si $Y \subset X$ es de 2^a categoría en X entonces X es de 2^a categoría en si mismo.
4. Sea X un espacio métrico completo. Sea $O \subset X$ un subconjunto abierto. Demuestre que O es de segunda categoría en X.

5. ⧫ Demuestre que existen funciones continuas sobre $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que no son derivables en ninguna parte.
6. ⧫ Demuestre que en cada espacio métrico, completo y numerable el conjunto de elementos aislados es denso.

Capítulo 5

Separabilidad

En todos los enfoques de la teoría de los números reales el eje $\mathbb{R}$ aparece como la completación del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, aunque no neceseriamente se usa esta terminología. En muchos problemas de análisis es importante que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ donde el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable.

El concepto de espacios separables aparece cuando nos preguntamos que se puede decir sobre los espacios métricos que contienen un subconjunto numerable y denso. La conclusión más importante es que la familia de todos los conjuntos abiertos en tal espacio es también generada por una subfamilia numerable.

Los teoremas 5.15 y 5.17 son resultados centrales de este capítulo.

La primera sección está dedicada a un recordatorio sobre la numerabilidad de los conjuntos.

1. Conjuntos a lo más numerables

Definición 5.1. Decimos que un conjunto C es *a lo mas numerable* si existe una sucesión (c_n) cuyos elementos agotan a todos los elementos de C.

Si un conjunto a lo más numerable no es finito decimos simplemente que es *numerable*.

Las propiedades básicas de conjuntos numerables se deducen directamente de las propiedades del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, en particular del principio de buen orden.

Las dos "obvias"propiedades siguientes son especialmente importantes para el estudio de numerabilidad:

1. Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ es a lo más numerable.
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

El lector interesado puede encontrar la demostración rigurosa de la propiedad (1) por ejemplo en el libro [**Z**], Capítulo II.

La propiedad (1) implica de inmediato lo siguiente.

Corolario 5.2. Cada subconjunto de un conjunto a lo más numerable, es a lo más numerable.

Demostración. Si $D \subset C$ y $C = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos $M = \{n \in \mathbb{N} : c_n \in D\}$. Si M es finito, D es finito. En caso contrario por la propiedad (1) existe una sucesión $\mathbb{N} \ni k \to n_k \in M$ que es suprayectiva. Por lo tanto $\mathbb{N} \ni k \to c_{n_k} \in D$ es una sucesión suprayectiva. El conjunto D es a lo más numerable.

$\square$

La propiedad (2) se puede obtener construyendo explícitamente una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ejercicio 5.3. La función $\tau \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (k, l) \to \frac{k(k+1)}{2} + l - 1 \in \mathbb{N}$ es una biyección.
Sugerencia. Grafique el producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en el plano y despues de calcular los valores $\tau(1, 1)$, $\tau(1, 2)$, $\tau(2, 1)$, $\tau(1, 3)$, $\tau(2, 2)$, $\tau(3, 1$, etc. encuentre la interpretación geométrica de la función τ.

$\diamondsuit$

Como corolarios obtenemos dos resultados.

Corolario 5.4. Si X_1, X_2, $\ldots, X_N$ son conjuntos a lo más numerables, el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ es a lo más numerable.

Demostración. Es suficiente demostrar el hecho para dos conjuntos X, Y y luego aplicar la inducción y la fórmula $X \times Y \times Z \equiv (X \times Y) \times Z$. Sea $\tau \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida en Ejercicio 5.3.

Denotemos $\tau^{-1}(k) = (n(k), m(k))$ para $k \in \mathbb{N}$. Si $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $Y = \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, obtenemos

$$X \times Y = \{(x_n, y_m)\}_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \{(x_{n(k)}, y_{m(k)})\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

El último conjunto es a lo más numerable.

$\square$

Corolario 5.5. Sea C_n, $n \in \mathbb{N}$ una familia de conjuntos a lo más numerables. Entonces $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ es un conjunto a lo más numerable.

Demostración. Cada uno de los conjuntos C_n es de forma $C_n = \{c_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}}$, entonces $C = \{c_{nk}\}_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \{c_{\tau^{-1}(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$. El conjunto C es a lo más numerable.

$\square$

Ejemplo 5.6. El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable, porque se puede identificar con un subconjunto del producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ de pares (k, l) tales que k y l no tienen divisores comunes no triviales.

El espacio $\mathbb{Q}^n$ es también numerable para cada $n \in \mathbb{N}$.

$\diamondsuit$

Veamos otro ejemplo, que resultará útil en la sección siguiente.

EJEMPLO 5.7. Sea X un espacio a lo más numerable. Sea $S(X)$ el espacio de las sucesiones $\mathfrak{a}$ con valores en X y tales que a_n es constante desde cierto índice en adelante.

El espacio $S(X)$ es a lo más numerable.

Efectivamente, para $\mathfrak{a} \in S(X)$ fijo, sea $N_{\mathfrak{a}}$ el índice más pequeõ desde el cual los valores de $\mathfrak{a}$ son ya constantes.

Sea $\phi(\mathfrak{a}) = (a_1, \ldots, a_{N_{\mathfrak{a}}}) \in \mathbb{Q}^{N_{\mathfrak{a}}}$.

La aplicación ϕ es visiblemente inyectiva y sumerge $S(X)$ en el espacio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^n$. Por Corolario 5.5 el último espacio es numerable, entonces según Corolario 5.2 $S(X)$ es a lo más numerable.

$\diamondsuit$

EJEMPLO 5.8. El conjunto $\mathcal{R}$ de todas las sucesiones que toman únicamente valores 0 y 1 no es numerable.

Efectivamente, supongamos que $\mathcal{F}\colon \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ es una biyección. Denotamos

$$\mathcal{F}(n) = (\mathcal{F}(n)_1, \mathcal{F}(n)_2, \ldots,)$$

Definimos una sucesión por la fórmula

$$\mathfrak{s} = (1 - \mathcal{F}(1)_1, 1 - \mathcal{F}(2)_2, 1 - \mathcal{F}(3)_3, \ldots).$$

La aplicación $\mathcal{F}$ es biyectiva entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{s} = \mathcal{F}(N)$. Obtenemos una contradicción porque el elemento N-ésimo de $\mathfrak{s}$ es igual a $1 - \mathcal{F}(N)_N$, mientras que el N-ésimo elemento de la sucesión $\mathcal{F}(N)$ es $\mathcal{F}(N)_N$.

El conjunto $\mathcal{R}$ no es numerable.

$\diamondsuit$

2. Espacios separables

DEFINICIÓN 5.9. El espacio X es *separable* si contiene un subconjunto a lo más numerable denso.

EJEMPLO 5.10. El espacio $\mathbb{R}^n$ es una completación de $\mathbb{Q}^n$ entonces $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$. El espacio $\mathbb{Q}^n$ es numerable y denso en $\mathbb{R}^n$, así que $\mathbb{R}^n$ es separable para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

$\diamondsuit$

EJEMPLO 5.11. Un espacio discreto es separable si y solo si es a lo mas numerable.

$\diamondsuit$

EJEMPLO 5.12. El espacio l^1 es separable.

Recordemos que $l^1 = \{\mathfrak{a} = (a_n) : \|\mathfrak{a}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$.

Para $\mathfrak{a} = (a_n)$ hemos denotado por $\sigma_k(\mathfrak{a})$ la sucesión $(a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)$. Sea D el conjunto de elementos de l^1 de coordenadas racionales y de forma $\sigma_k(\mathfrak{a})$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

El conjunto D es numerable como subconjunto del espacio que en Ejemplo 5.7 hemos llamado $S(\mathbb{Q})$.

Vamos a probar que la cerradura de D coincide con l^1. Para este fin calculamos $\|\mathfrak{a} - \sigma_k(\mathfrak{a})\|_1 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|$. La convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ significa que $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{k\to\infty} \sigma_k(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Por otro lado para cada elemento de forma $\sigma_k(\mathfrak{a})$y para cada $\varepsilon > 0$ existen números racionales $q_1, \ldots, q_k$ tales que $\sum_{n=1}^{k} |a_n - q_n| < \varepsilon$.

Efectivamente, cada elemento de l^1 se puede aproximar por elementos del conjunto numerable D.

$\diamondsuit$

De manera análoga se puede probar que el espacio l^2 es separable.

Ejemplo 5.13. El espacio l^∞ no es separable.

Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de sucesiones que toman únicamente los valores 0 y 1. Como sabemos estas sucesiones tienen la misma cardinalidad que el mismo $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{R}$ no es numerable.

Por otro lado, si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son elementos distintos de $\mathcal{R}$ tenemos $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| > 2$.

El conjunto $\mathcal{R} \subset l^\infty$ tiene métrica discreta y no es numerable, entonces ni $\mathcal{R}$ ni tampoco l^∞ es separable.

$\diamondsuit$

Existen otras formas de caracterizar la separabilidad de un conjunto en términos de conjuntos abiertos en lugar de aproximaciones.

Teorema 5.14. Un espacio métrico (X, d) es separable si y solo si existe una familia a lo más numerable $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos abiertos tal que cada abierto $O \subset X$ se puede representar como $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{n_k}$.

Demostración. Supongamos que X es un espacio separable con un subconjunto denso $D = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. Sea $O_{n,k} = B(x_n, \frac{1}{k})$, $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Los conjuntos $O_{n,k}$ son abiertos y forman una familia a lo más numerable.

Sea $O \subset X$ un abierto y sea $\mathcal{U} = \{O_{n,k} : O_{n,k} \subset O\}$. Como subfamilia de una familia numerable, $\mathcal{U}$ es una familia a lo más numerable de conjuntos abiertos. Vamos a probar que $O = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$.

Para $x \in O$ arbitrario debemos encontrar un elemento de la familia $\mathcal{U}$ que lo contenga. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset O$, porque O es abierto. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < r/2$. Por la densidad del conjunto D existe $x_n \in D$ tal que $x_n \in B(x, \frac{1}{k})$. Se cumple entonces

$$x \in B(x_n, \tfrac{1}{k}) \subset B(x, r) \subset O.$$

La bola $B(x_n, \frac{1}{k})$ pertenece a la familia $\mathcal{U}$ y contiene el elemento $x \in O$.

La familia $\mathcal{U}$ tiene las propiedades deseadas.

Ahora supongamos que el espacio X dispone de la familia numerable $\mathcal{U}$ tal que cada conjunto abierto se puede representar como unión de algunos elementos de esta familia.

Para $O_n \in \mathcal{U}$, sea $x_n \in O_n$. Vamos a probar que el conjunto (¡axioma de selección!) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en X.

Sea $x \in X$ y sea $r > 0$. La bola $B(x, r)$ es un conjunto abierto y se puede representar como $\bigcup_{k=1}^{\infty} O_{n_k}$, donde $O_{n_k} \in \mathcal{U}$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in O_{n_{k_0}}$. Por la definición $x_{n_{k_o}} \in O_{n_{k_0}} \subset B(x, r)$. En particular $d(x, x_{n_{k_o}}) < r$. Hemos probado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en X, así que X es separable.

$\diamondsuit$

Teorema 5.13 proporciona en realidad una definición equivalente de la separabilidad de un conjunto.

Usando esta condicion, algunas propiedades de espacios separables se demuestran más fácil.

COROLARIO 5.15. Sea (X, d) un espacio métrico separable y sea $Y \subset X$. Entonces (Y, d) es separable.

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de abiertos en X que tiene las propiedades del anunciado de Teorema 5.13, entonces $O_n = U_n \cap Y$ es la familia de abiertos en Y que tiene las mismas propiedades. El espacio Y es separable.

$\square$

Obviamente se puede demostrar Corolario 5.14 utilizando la definición original de la separabilidad. Lo recomendamos como ejercicio.

DEFINICIÓN 5.16. Sea A un subconjunto del espacio métrico X. Una cubierta abierta de A es una familia $\mathcal{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de conjuntos abiertos en X tal que $A \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} O_\alpha$.

Si $\Lambda \subset \Delta$, a la familia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, la llamamos subcubierta de $\mathcal{O}$.

El concepto de una cubierta abierta juega un papel fundamental en el estudio de espacios compactos. Sin embargo, la separabilidad del espacio se puede caracterizar también en estos términos. La familia de abiertos $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del Teorema 5.13 es un ejemplo de una cubierta, pero en este caso la cubierta tiene propiedades adicionales muy espaciales, a saber es muy fina.

He aquí otra caracteristica de espacios separables llamada Teorema de Lindelöf.

TEOREMA 5.17. Un espaio métrico X es separable si y solo si de cada cubierta abierta de X se puede selecciónar una subcubierta a lo más numerable.

Demostración. Vamos a llamar *la propiedad de Lindelöf* la condición que según el presente teorema eqivale a la separabilidad de un espacio métrico.

Esta propiedad de cubiertas abiertas del espacio $\mathbb{R}^n$ fue observada por Lindelöf en 1903 dando inicio a una teoría actualmente muy avanzada.

Supongamos que X es separable.

Sabemos por Teorema 5.13 que existe una cubierta numerable $\mathcal{O} = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que cada abierto $O \subset X$ se puede cubrir con una subfamilia de $\mathcal{O}$.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta de X arbitraria. Primero definimos una subfamilia $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$.

A un conjunto O_n, lo incluimos en $\mathcal{O}'$ si existe $\alpha \in A$ tal que $O_n \subset U_\alpha$.

La familia $\mathcal{O}'$ es también una cubierta abierta a lo más numerable de X. Efectivamente, para cualquier $x \in X$ existe $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha$. El abierto U_α es unón de algunos elementos de la cubierta $\mathcal{O}$. En particular, para algún O_n se cumple $x \in O_n \subset U_\alpha$.

Resulta que $O_n \in \mathcal{O}'$ y que cada $x \in X$ pertenece a algún elemento de la cubierta reducida $\mathcal{O}'$.

Ahora, para cada $O_n \in \mathcal{O}'$ escogemos uno de los U_α que lo contenga y ya tenemos una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$.

Hemos probado que cada espacio métrico separable tiene la propiedad de Lindelöf, es decir cada cubierta abierta del espacio se puede reducir a una cubierta numerable.

Ahora supongamos que X tiene la propiedad de Lindelöf. Vamos a probar que X es separable construyendo un subconjunto denso numerable.

Sea $\mathcal{U}_n$ la familia de todas las bolas en X de radio $\frac{1}{n}$. Obviamente $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de X. Esta cubierta tiene una subcubierta numerable que es entonces de forma $\mathcal{U}'_n = \{B(x_{n,k}, \frac{1}{n}) : x_{n,k} \in X,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Repitiendo el procedimiento para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos un conjunto numerable de elementos de X, a saber $D = \{x_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$.

Inmediatamente vemos que el conjunto D es numerable y denso en X. Si $x \in X$ y $r > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Luego, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$ y por lo tanto existe k tal que $x \in B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$. En cada vecindad de x existe un elemento de D. El conjunto D es denso en X.

$\square$

3. Ejercicios

1. ¿Cuando un espacio discreto es separable?
2. Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ no es numerable.
3. ⧫ Sea (X, d) un espacio métrico separable y sea $C \subset X$ un conjunto que no es numerable. Demuestre que C contiene un número no numerable de sus puntos de acumulación.
4. ⧫ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $A \subset E$ un conjunto separable. Demuestre que la la cáscara convexa de A es separable.
5. ⧫ La siguiete función es una métrica en $\mathbb{R}^2$: (vea Capítulo 1, Ejercicio 6)

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{si existe } t \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} = t\mathfrak{b}, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si tal número no existe.} \end{cases}$$

   Demuestre que el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ no es separable.
6. ⧫ Supongamos que en el espacio métrico X cada conjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es separable.
7. Para $A \subset \mathbb{N}$ definimos la función (sucesión) característica del conjunto A como

$$1_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A, \\ 0, & n \notin A \end{cases}.$$

   Demuestre que las combinaciones lineales de las funciones características forman un conjunto denso en l^∞.
8. Sea G un subgrupo del grupo additivo $\mathbb{R}, +)$. Demuestre que G es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si $\text{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = 0$.
9. Sea $r \in \mathbb{Q}^c$. Demuestre que el conjunto $\{m + nr : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.
10. Demuestre que la métrica en un espacio métrico (X, d) es equivalente a la métrica discreta si y solo si el único subconjunto denso en X es el mismo X.

Capítulo 6

Funciones y aplicaciones continuas

1. Definición de continuidad

Existen dos opciones de definir la continuidad de aplicaciones entre los espacios métricos, exactamente como en el caso de aplicaciones entre los espacios euclideanos.

Ambas definiciones son equivalentes, entonces es solamente un problema didáctico qual de las dos escogemos como la básica. Consideramos como más natural la definición sequencial relacionada con el nombre del matemático alemán H. E. Heine (1821-1881).

DEFINICIÓN 6.1. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Sea $x \in X$.

Una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua en x si para cualquier sucesión convergente $x_n \to x$ en X se cumple $F(x_n) \to F(x)$ en Y.

La segunda de las definiciones mencionadas pertenece al francés A. L. Cauchy (1789-1857), a quien se considera creador del análisis funcional. Sus definiciones y demostraciones precisas de "tipo ε, δ", tan odiadas por los alumnos, abrieron una época nueva en matemáticas. Presentamos la definición de Cauchy en forma del siguiente teorema.

TEOREMA 6.2. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Sea $F\colon X \to Y$ una aplicación y sea $x \in X$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $d_X(x, y) < r$ implica $d_Y(F(x), F(y)) \leq \varepsilon$.
(b) F es continua en x.

DEMOSTRACIÓN. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que la aplicación tiena la propiedad (a). Sea $x_n \to x$ en X. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $r > 0$ el número que existe de acuerdo con la condición (a). Por la convergencia de la sucesión (x_n) podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se cumple $d_X(x_n, x) < r$. Por consiguiente para los mismos n se cumple $d_Y(F(x_n, F(x)) \leq \varepsilon$. La convergencia $F(x_n) \to F(x)$ está probada.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que F es continua en x y que la condición (b) no se cumple. Vamos a llevar esta situación al absurdo.

La condición (b) no se cumple si podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$ arbitraria algún punto x_δ satisface $d_X(x_\delta, x) < \delta$, mientras que $d_Y(F(x_\delta, F(x)) > \varepsilon$.

En particular, tomando δ en forma de $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obtiene en X una sucesión (x_n) que converge a x, pero los valores $F(x_n)$ están a la distancia mayor que ε del punto $F(x)$. La aplicación no es continua en x contrario a nuestra suposición.

$\square$

Ejemplo 6.3. En el caso de las funciones y aplicaciones sobre el espacio euclideaano la existencia de objetos continuos es obvia, porque la estructura vectorial del espacio nos proporciona las funciones - coordenadas que son continuas. En el caso de un espacio métrico, las únicas funciones dadas por la misma estructura del espacio son las distancias.

Sea (X, d) un espacio métrico.

Para cada $y \in X$ fijo definimos función

$$f_y(x) = d(x, y).$$

Vamos a probar que esta función es continua en cada punto $x \in X$ usando el criterio de Cauchy de continuidad.

Evaluamos el valor $|f_y(x) - f_y(u)| = |d(x, y) - d(x, u)| \leq d(x, u)$ por Proposición 1.2.

Dado $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $r = \varepsilon$ y de esta manera bajo la condición $d(x, u) < r$ obtenemos $|f_y(x) - f_y(u)| \leq \varepsilon$. La función f_y es continua.

$\diamondsuit$

Resulta que la familia de funciones que obtenemos de esta manera es bastante amplia. Al menos es suficiente para separar los puntos de X.

Definición 6.4. Una familia de funciones $\mathcal{F}$ definidas en el espacio X *separa los puntos de* X si para cada par de puntos $x \neq y$ en X existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

El ejemplo fundamental de una familia de funciones que separa los puntos del dominio es el sistema de coordenadas en el espacio euclidiano.

El caso de funciones f_x definidas en Ejemplo 4.3 es muy sencillo, pero de suma importancia.

Teorema 6.5. Sea (X, d) un espacio métrico.

Para $y \in X$ fijo definimos $f_y(x) = d(x, y)$. La familia de funciones $\mathcal{D} = \{f_x : x \in X\}$ separa los puntos del espacio X.

Demostración. Si x, $y \in X$ y $x \neq y$ entonces la función f_y separa estos puntos. Efectivamente, $f_y(y) = 0$, mientras que $f_y(x) = d(x, y) \neq 0$. $\square$

Ejemplo 6.6. La función distancia $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ es también continua con respecto a la distancia

$$D((x, y), (u, v)) = d(x, u) + d(y, v)$$

definida en $X \times X$.

Para la demostración usamos la desigualdad de rectángulo (Proposición 1.3).

Según esta fórmula

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, y) + d(u, v) = D((x, y), (u, v)).$$

Dado $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $r = \varepsilon$ y entonces la condición $D((x, y), (u, v)) < r$ implica $|d(x, y) - d(u, v)| \leq \varepsilon$.

$\lozenge$

Es conveniente formular la condición (a) del Teorema 4.2 en términos de las bolas en los espacios correspondientes. El siguiente resultado significa únicamente un cambio de lenguaje y es tan solo otra forma del Teorema 4.2.

Proposición 6.7. Una aplicación $F \colon X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y solo si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r > 0 \quad F(B_X(x, r)) \subset B_Y(F(x), \varepsilon).$$

A continuación seguimos reformulando Teorema 4.2 para darle forma cada vez más "topologica" y menos "técnica". El cambio es de gran importancia para nuestra forma de pensar, pero también tiene grandes valores prácticos.

Teorema 6.8. Una aplicación $F \colon X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y solo si para toda vecindad $U \subset Y$ del punto $F(x)$ la imagen inversa $F^{-1}(U)$ contiene una vecindad de x.

Demostración. Suponemos primero que F es continua. Si $U \subset Y$ es una vecindad de $F(x)$, existe una bola $B_Y(F(x), \varepsilon) \subset U$. Por la Proposición 6.7 existe entonces $r > 0$ tal que $F(B_X(x, r)) \subset B_Y(F(x)$, lo que implica $B_X(x, r) \subset F^{-1}(U)$. Así vemos que $F^{-1}(U)$ es efectivamente una vecindad de x.

Ahora supongamos que $F^{-1}(U)$ es una vecindad de x, siempre y cuando U es vecindad de $F(x)$. En particular para $U = B_Y(F(x), \varepsilon)$ la imagen inversa $F^{-1}(B_Y(F(x), \varepsilon))$ es una vecindad de x y por lo tanto contiene una bola $B_X(x, r)$. Proposición 6.7 demuestra que la aplicación F es continua.

$\square$

Definición 6.9. Cuando una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua en todos los puntos del dominio, decimos simplemente que F es continua. El espacio de todas las aplicaciones continuas entre dos espacios métricos X, Y se denota por $C(X,Y)$.

Por $BC(x,Y)$ denotamos el espacio de las palicaciones acotadas y continuas.

Teorema 6.10. Una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua si y solo si para cada $U \subset Y$ abierto $F^{-1}(U)$ es abierto en$X$.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea F una aplicación continua y sea $U \subset Y$ un conjunto abierto. Sea $x \in F^{-1}(U))$. El conjunto U es una vecindad de $F(x)$, entonces por Teorema 4.8 $F^{-1}(U))$ contiene a una vecindad de x y por lo tanto a una bola $B(x,r)$. Hemos probado así que $F^{-1}(U))$ es un conjunto abierto.

$\Leftarrow$ Suponiendo que la imagen inversa de cada abierto $U \subset Y$ es abierto en X, fijamos $x \in X$ y una vecindad U del punto $F(x)$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $B(F(x),\varepsilon)) \subset U$. El conjunto $F^{-1}(B(F(x),\varepsilon))$ es abierto y contiene a x, entonces es una vecindad de x y por teorema 6.8 obtenemos la continuidad de F en cada $x \in X$. $\square$

En muchos casos la continuida de una aplicación no es obvia, pero resulta fácil de probar si la tratamos como composición de aplicaciones mas simples.

Teorema 6.11. Sean X, Y, Z espacios métricos $F\colon X \to Y$, $G\colon Y \to Z$ unas aplicacionews. Si F es continua en $x \in X$ y G es continua en $F(x) \in Y$, entonces la composición $G \circ F(y) := G(F(y))$ es continua en x.

Demostración. Vamos a aplicar Teorema 6.8. Sea V una vecindad del punto $G \circ F(x) = G(F(x))$. Debemos probar que $(G \circ F)^{-1}(V)$ contiene a una vecindad de x. Por la definición de la composición $(G \circ F)^{-1}(V) = F^{-1}(G^{-1}(V))$. Aplicando Teorema 6.8 a la aplicación G sabemos que $(G^{-1}(V) \subset Y$ contiene a una vecindad U de $F(x)$, luego por continuidad de F obtenemos que $F^{-1}(U)$ contiene a una vecindad O de x, la cual está contenida en $(G \circ F)^{-1}(V)$.

$\square$

Ejemplo 6.12. Veamos como Teorema 6.8 se usa en ciertos casos para investigar si un conjunto dado es abierto.

Sea $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x + y < 3,\ 0 < z - y\}$. Para probar directamente por la definición que O es abierto tendríamos que hacer cálculos relativamente complicados. En lugar de esto definamos la aplicación $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ por la fórmula

$$F(x,y,z) = (x+y, z-y).$$

Obtenemos entonces: $O = F^{-1}((1,3) \times (0,\infty))$. La aplicación F es continua en cada punto, el conjunto $(1,3)\times(0,\infty)$ es abierto, entonces por Teorema 6.8 nuestro conjunto O es una vecindad de cada uno de sus puntos. Por lo tanto O es abierto.

Inmediatamente podemos generalizar este método.

Ejemplo 6.13. Sea X un espacio métrico y sean $f_1, \dots, f_k \in C(X)$. Definimos

$$O = \{x : \, a_1 < f_1(x) < b_1, \dots, a_k < f_k(x) < b_k\}.$$

Podemos representar $O = F^{-1}((a_1,b_1)\times\cdots\times(a_k,b_k))$, donde la aplicación $F\colon X \to \mathbb{R}^k$ está dada por la fórmula: $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$.

El conjunto O es abierto como imagen inversa del cubo abierto $(a_1,b_1) \times \cdots \times (a_k,b_k)$ bajo una aplicación continua.

$\diamondsuit$

Ejemplo 6.14. Como sabemos, una matriz $k \times k$ real o compleja A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. La matriz A es un elemento del espacio $\mathbb{K}^{k\times k}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dependiendo del caso. La funcón determinante $\det\colon \mathbb{K}^{k\times k} \to \mathbb{K}$ es continua porque tiene forma polinomial. El conjunto de matrices invertibles se representa como $O = \det^{-1}(\mathbb{K}\setminus\{0\})$ y es abierto.

Un análisis mas detallado permite calcular para cada $A \in O$ el radio $r(A) > 0$ tal que $B(A, r(A)) \subset O$. Este radio depende únicamente de la norma de A en el espacio $\mathbb{K}^{k\times k}$.

Por lo tanto, si A_n es una sucesión de matrices que converge a la matriz invertible A, entonces existe N tal que para todos $n > N$ la matriz A_n es invertible.

Observemos que en este ejemplo los conjuntos abiertos aparecen no solo como una herramienta para estudiar la continuidad sino como un criterio para estudiar la invertibilidad de matrices.

2. Homeomorfismos, isometrías

Definición 6.15. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. *Un homeomorfismo* entre X y Y es una biyección $F \in C(X,Y)$ tal que $F^{-1} \in C(X,Y)$.

Los espacios X, Y son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos.

Una aplicación $F\colon X \to Y$ es ısométrica (es una isometría) si $d_Y(x,y) = d_X(x,y)$ para todos x, $y \in Y$.

Cada isometría es inyectiva y continua. La aplicación inversa a una isometría es también isométrica, entonces cada isometría es un homeomorfismo sobre su imagen.

Para establecer la existencia de homeomorfismo entre dos epacios dados es importante ver cuales propiedades se conservan bajo los homeomorfismos.

Ejemplo 6.16. La completez de espacio no es propiedad invariante bajo homeomorfismos. Los espacios $\mathbb{N}$ y $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, ambos provistos de la métrica de $\mathbb{R}$ son homeomorfos por medio de la aplicación $\mathbb{N} \ni n \to \frac{1}{n} \in Y$. El primer espacio es completo y el segundo no lo es.

Ejemplo 6.17. Las propiedades de conjuntos "ser abierto", "ser cerrado" son invariantes de homeomorfismos.

Ejemplo 6.18. La separabilidad es una propiedad invariante bajo homeomorfismos. Gracias al Teorema 5.17 el hecho es obvio porque un homeomorfismo transforma una cubierta abierta en cubierta abierta.

3. Continuidad uniforme

La propiedad de continuidad de una aplicación es de caracter local incluso considerando la continuidad en todos los puntos del dominio. Para un punto x del dominio y $\varepsilon > 0$ dado, el valor de r que asegure la implicación

$$d(x, y) < r \;\Rightarrow\; d(F(x), F(y)) < \varepsilon$$

depende no solamente de $\varepsilon > 0$ sino también del punto x. Las aplicaciones que admiten para $\varepsilon > 0$ el valor de r que sirva para todos los puntos del dominio, se llaman uniformemente continuas y son de importancia especial.

Definición 6.19. Una aplicación $F\colon X \to Y$ es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que para x, $y \in X$

$$d(x, y) < r \;\Rightarrow\; d(F(x), F(y)) < \varepsilon.$$

Obviamente cada aplicación uniformemente continua es continua. Las aplicaciones uniformemente continuas "respetan" a las sucesiones de Cauchy, cosa que no neceriamente se cumple para algunas aplicaciones continuas.

Proposición 6.20. Sea $F\colon X \to Y$ una aplicación uniformemente continua y sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Entonces $(F(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en Y.

Demostración. El hecho se deduce directamente de las definiciones correspondientes.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(F(x), F(y)) < \varepsilon.$$

Sea N tal que para n, $m > N$ se cumple $d_X(x_n, x_m) < \delta$.

Para los mismos n, $m \in \mathbb{N}$ obtenemos $d_Y(F(x_n), F(x_m)) < \varepsilon$, lo que demuestra que $(F(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en Y.

□

TEOREMA 6.21. Sea $F\colon X \to Y$ una aplicación uniformemente continua y sean $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ las completaciones de los espacios X, Y, respectivamente. Existe una aplicación uniformemente continua $\tilde{F}\colon X \to Y$

DEMOSTRACIÓN. En los espacios $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ denotamos las distancias por $\tilde{d}_X$ y $\tilde{d}_Y$.

Tenemos que definir el valor $F(u)$ para cada $u \in \tilde{X}$ conservando la continuidad uniforme de la aplicación. Sea $u = \lim_{n\to\infty} x_n$, donde $x_n \in X$.

La sucesión (x_n) es de Cauchy en X entonces por Proposición 6.20 la sucesión $(F(x_n))$ es de Cauchy en Y. Existe $\lim_{n\to\infty} F(x_n) \in \tilde{Y}$. Definimos $\tilde{F}(u) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$.

Observemos que para $n > N$ se cumple $\tilde{d}_Y(F(u), F(x_n) \leq \varepsilon$.

Debemos asegurarnos sin embargo, que el valor $F(u)$ no depende de la sucesión particular (x_n) que aproxima a u. Si $(y_n) \sim (x_n)$, existe M tal que para $n > M$ se cumple $d_X(y_n, x_n) < \delta$ y nuevamente por la continuidad uniforme $d_Y(F(x_n), F(y_m)) < \varepsilon$.

Las sucesiones $(F(x_n))$ y $(F(y_n))$ son equivalentes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(y_n).$$

Ahora, queda por probar que $\tilde{F}$ es uniformemente continua. Si $u = \lim_{n\to\infty} x_n$, $v = \lim_{n\to\infty} y_n$ y $\tilde{d}_X(u, v) < \delta/3$, existe N tal que para $n > N$ se cumple $\tilde{d}_X(u, x_n) < \delta/3$, $\tilde{d}_X(u, y_n) < \delta/3$, de tal manera que

$$d_X(x_n, y_n) < \tilde{d}_X(u, x_n) + \tilde{d}_X(u, v) + \tilde{d}_X(v, x_n) < \delta.$$

Por la continuidad uniforme de F seguimos:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_Y(F(u), F(v)) &\leq \tilde{d}_Y(F(u, F(x_n)) + \tilde{d}_Y(F(x_n, F(y_n)) + \tilde{d}_Y(F(v, F(y_n)) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

La extensión $\tilde{F}$ de la aplicación F es uniformemente continua.

□

EJEMPLO 6.22. El espacio normado $BC(X, Y)$

Para espacios métricos (X, d_X), (Y, d_Y) denotamos por $BC(X, Y)$ el espacio de aplicaciones $f\colon X \to Y$ acotadas y continuas.

El espacio $BC(X, Y)$ dispone de la métrica natural $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$ heredada del espacio $B(X, Y)$.

TEOREMA 6.23. El espacio $BC(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $B(X,Y)$. Cuando Y es completo $BC(X,Y)$ es completo.

DEMOSTRACIÓN. Sea f_n una sucesión en $BC(X,Y)$ convergente en $B(X,Y)$ a una aplicación f. Debemos probar que f es una función continua.

Sea N tal que para todo $n \geq N$ se cumple $d_\infty(f, f_n) < \varepsilon/3$. La función f_N es continua, entonces para todo $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $d_X(x,y) < \Gamma implicad_Y(f_N(x), f_N(y)) < \varepsilon/3$.

Bajo las mismas suposiciones sobre x, y calculamos:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f_(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(y)) + d_Y(f_N(y), f(y)) \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos probado la continuidad de f en cada punto del dominio. El conjunto $BC(X,Y)$ es cerrado en $B(X,Y)$.

Cuando Y es completo, el espacio $B(X,Y)$ es completo (Ejemplo 2.8) y su subespacio cerrado $BC(X,Y)$ es completo.

□

4. Continuidad de operadores lineales

Cuando $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado, tenemos en E dos estructuras: la lineal de suma y de multiplicación por números y la estructura métrica. La definición de la norma establece la relación entre estas estructuras.

Es natural pensar primero en la continuidad de las operaciones algebraicas en E.

Estudiamos entonces la continuidad de dos aplicaciones:

$$S\colon\ E \times E \ni (x,y) \to x + y \in E,$$

$$M\colon\ \mathbb{K} \times E \ni (t,x) \to tx \in E.$$

En el espacio $E \times E$ fijamos la norma $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E$ y en $\mathbb{K} \times E$ la norma $\|(t,x)\| = |t| + \|x\|_E$.

PROPOSICIÓN 6.24. Las aplicaciones S y M son continuas.

DEMOSTRACIÓN. Para (x,y), $(u,v) \in E \times E$ se tiene

$$\begin{aligned} \|S(x,y) - S(u,v)\|_E &= \|x + y - (u+v)\|_E = \|(x-u) + (y-v)\|_E \\ &\leq \|x-u\|_E + \|y-v\|_E = \|(x,y) - (u-v)\| \\ &= d((x,y),(u,v)). \end{aligned}$$

La desigualdad asegura la continuidad de la operación de adición. En el caso de la multiplicación M calculamos:

$$\begin{aligned} \|M(t,x) - M(s,y)\|_E &= \|tx - sy\|_E = \|t(x-y) + (t-s)y\|_E \\ &\leq |t|\|x-y\|_E + |t-s|\|y\|_E. \end{aligned}$$

Cuando $(s_n, y_n) \to (t, x)$, se obtiene $M(s_n, y_n) \to M(t, x)$.

$\square$

Sean E, F espacios normados sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $A\colon E \to F$ un operador lineal, es decir una aplicación $A\colon E \to F$ tal que para todos x, $y \in E$, $a \in \mathbb{K}$

$$A(x + ay) = A(x) + aA(y).$$

Un operaador lineal es continuo en todas partes si y solo si es continuo en cero. Lo vamos a demostrar en el teorema siguiente, donde incluimos otro criterio de continuidad que tiene mucha importancia para la teoría.

Teorema 6.25. Sea $A\colon E \to F$ un operador lineal. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) A es continuo en cero.
(b) A es uniformemente continuo.
(c) $\sup_{\|y\|_E \le 1} \|A(y)\|_F < \infty$.
(d) Existe $C > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$\|A(x)\|_F \le C\|x\|_E.$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b)

Suponemos que A es continuo en cero. En particular para cada $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que para $x \in E$ tal que $\|x\|_E < r$ se cumple $\|A(x)\|_F < \varepsilon$. Si los puntos $x, y \in E$ satisfacen $\|x-y\|_E < r$ obtenemos $\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\|_F < \varepsilon$. El operador es uniformemente continuo.

(b) $\Rightarrow$ (c)

La continuidad de A en cero expresada en términos del Teorema 6.2 (a) implica que existe $r > 0$ tal que para $\|x\|_E < r$ se tiene $\|A(x)\|_F \le 1$. Si $\|y\|_E \le 1$, se cumple $\|\frac{r}{2}y\|_E = \frac{r}{2}\|y\|_E < r$, entonces $\|A(\frac{r}{2}y\|_F \le 1$. Así obtenemos $\|A(y)\|_F = \frac{2}{r}\|A(\frac{1}{2}ry\|_F \le \frac{2}{r} < \infty$.

(c) $\Rightarrow$ (d)

Sea $C = \sup_{\|y\|_E \le 1} \|A(y)\|_F < \infty$. Para $x \ne 0$ tenemos $\|\frac{x}{\|x\|_E}\|_E = 1$. Por lo tanto $\|A(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \le C$, luego $\|A(x)\|_F \le C\|x\|_E$. Para $x = 0$ la misma desigualdad se cumple obviamente.

(d) $\Rightarrow$ (a)

La desigualdad en cuestión implica que para $\|x_n\|_E \to 0$ se cumple $\|A(x_n)\|_F \to 0$ y la continuidad de A ven cero está probada.

$\square$

El valor $\sup_{\|y\|_E \le 1} \|A(y)\|_F$ se denota por $\|A\|$ y se llama norma del operador A.

El espacio de todos los operadores lineales continuos $A\colon E \to F$ se denota por $L(E, F)$.

En el caso particular, cuando $F = \mathbb{K}$, al espacio $L(E, \mathbb{K})$ se le llama el *espacio dual* de E denota por E'.

Para el espacio de todas las funciones lineales sobre un espacio vectorial E usamos la notación E^*.

EJEMPLO 6.26. Veamos como se puede describir el espacio dual del espacio $\mathbf{c}_0$ que es el espacio de todas las sucesiones complejas convergentes a cero. La función

$$\mathbf{c}_0 \ni \mathfrak{a} = (a_n) \to \|\mathfrak{a}\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|$$

es una norma en $\mathbf{c}_0$.

Sea l^1 el espacio de las sucesiones $\mathfrak{c} = (c_n)$ tales que $\|\mathfrak{c}\|_1 := \sum_{j=1}^\infty |c_j| < \infty$. Visiblemente l^1 es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$ es una norma en l^1.

A cada $c \in l^1$ podemos definir un elemento de $\mathbf{c}_0'$ por la fórmula

$$\varphi_c(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^\infty c_j a_j.$$

La serie del lado derecho converge porque

$$|\varphi_c(\mathfrak{a})| = |\sum_{j=1}^\infty c_j a_j| \le \sum_{j=1}^\infty |c_j a_j| \le \|\mathfrak{c}\|_1 \|a\|_\infty < \infty.$$

La misma desigualdad demuestra que $\varphi_c \in (s)_0'$ y además $\|\varphi_c\| \le \|\mathfrak{c}\|_1$.

Vamos a demostrar que cada $\varphi \in (s)_0$ es de esta forma, es decir existe $c \in l^1$ tal que $\varphi = \varphi_c$.

Para $\mathfrak{a} = (a_n) \in (s)_0$ arbitrario definamos una sucesión en el mismo espacio convergente a $\mathfrak{a}$.

Denotamos por $\mathfrak{e}_N$ la sucesión de forma $\mathfrak{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots)$ y definimos

$$\mathfrak{a}_N = \sum_{j=1}^N a_j \mathfrak{e}_j = (a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots).$$

Tenemos entonces $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_N\|_\infty = \sup_{j>N} |a_j| \to 0$, porque la sucesión a es convergente a cero.

Ahora calculamos aprovechando la continuidad de φ:

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \lim_{N\to\infty} \varphi(\mathfrak{a}_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^N a_j \varphi(\mathfrak{e}_j).$$

Sabemos que este límite existe, entonces

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi(\mathfrak{e}_j).$$

De esta manera hemos probado que φ está definido por una sucesión $\mathfrak{c} = (\varphi(\mathfrak{e}_n))$ y queda por demostrar que $\mathfrak{c} \in l^1$.

Cada número complejo $c_n = \varphi(\mathfrak{e}_n)$ tiene forma $c_n = |c_n|e^{i\alpha_n}$, $0 \leq \alpha_n < 2\pi$.

Sea $\mathfrak{b}_N = (e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \dots, e^{i\alpha_N}, 0, 0 \dots) = \sum_{j=1}^{N} e^{i\alpha_j} \mathfrak{e}_j$. Las sucesiones $\mathfrak{b}_N$ pertenecen al espacio $\mathbf{c}_0$ y son de norma 1, entonces

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} |\varphi(\mathfrak{b}_N) \leq \|\varphi\|.$$

Sin embargo $\varphi(\mathfrak{b}_N) = \sum_{j=1}^{N} |\varphi(\mathfrak{e}_n)| = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\mathfrak{e}_n)|$. De tal manera concluimos que $\varphi = \varphi_{\mathfrak{c}}$, donde $\mathfrak{c} = (c_n) = (\varphi(\mathfrak{e}_n)) \in l^1$ y además $\|c\|_1 \leq \|\varphi\|$. Junto con el resultado anterior obtenemos $\|\varphi\| = \|\varphi_{\mathfrak{c}}\| = \|\mathfrak{c}\|_1$.

La aplicación $l^1 \ni \mathfrak{c} \to \varphi_{\mathfrak{c}} \in (s)_0'$ es lineal, suprayectiva y conserva la norma. Es entnces un elemento del espacio de operadores $L(l^1, (s)_0)$.

Obtenemos así una descripción completa del espacio dual $(s)_0'$ que simbólicamente podemos expresar como $' \cong l^1$. $\Diamond$

Ejemplo 6.27. Uno de los espacios mas importantes que se estudia en este curso es el espacio de funciones continuas sobre un conjunto compacto. En particular sobre el espacio $C[a, b]$, donde $[a, b]$ es un intervalo finito tenemos definida la función de integral de Riemann:

$$C[a, b] \ni f \to \varphi(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Como sabemos, esta función es lineal y además satisface

$$|\varphi(f)| = |\int_a^b f(t)dt| \leq |b - a| \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| = \|f\|_\infty.$$

La función φ definida sobre el espacio métrico $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ es continua.

En realidad conocemos este hecho del curso de Cálculo Avanzado como el teorema que afirma:

Si $C[a, b] \ni f_n \to f$ uniformemente entonces

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt.$$

La norma $\|\varphi\|$ se calcula facilmente. La desigualdad de arriba demuestra que $\|\varphi\| \leq |b - a|$. El funcional φ alcanza este valor sobre la función $f \equiv 1$, entonces $\|\varphi\| = |b - a|$.

$\diamondsuit$

5. Ejercicios

1. De un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en un solo punto.

2. $\blacklozenge$ Sea
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n},\ n > 0,\ n, m \text{ primos relativos}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Demuestre que f es continua en cero y en los puntos irracionales y es discontinua en puntos racionales $\neq 0$.

3. El eje real $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$. Sabemos del curso de álgebra lineal que existe una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ tal que el número 1 es uno de los elementos de la base que denotamos por r_0. Representamos esta base como $\{r_0\} \cup \{r_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos la descomposición única:
$$x = q_0(x) + \sum_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(x) r_\alpha,$$
donde $q_0(x)$ $q_\alpha(x) \in \mathbb{Q}$ y solo un núpero finito de los coeficientes q es distinto de cero.
Sea $f(x) := q_0(x)$. Demuestre que la función f es aditiva ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) y discontinua en todos los puntos del dominio.

4. Construye una isometría del espacio
$A = \{x \in \mathbb{R} :\ 1 \leq |x| \leq 2,\ x \neq 1\}$ con la métrica
$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{si } xy > 0, \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$
sobrs el intervalo $[0, 2]$ con su métrica natural.

5. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ un conjunto no cerrado. Construya una función continua no acotada sobre A.

6. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$. Demuestre que la función sobre X definida por la fórmula
$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$
es uniformemente continua.

7. Muestre que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, existen a, $b > 0$ tales que $|f(x)| \leq a|x| + b$.

8. Muestre que cada función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y acotada es uniformemente continua.

9. Sean f, g funciones uniformemente continuas y acotadas sobre un espacio métrico X. Demuestre que fg es una función uniformemente continua. Mediante un ejemplo demuestre que es necesario suponer que las funciones son acotadas.

10. Demuestre que una función $f \in BC(\mathbb{R})$ es uniformemente continua si y solo si para toda sucesión $x_n \to 0$ se tiene $f(x + x_n) \to f(x)$ uniformemente.

11. Sea X un espacio métrico arbitrario y sea Y un espacio discreto. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que una sucesión (F_n) en $B(X;Y)$ fuera uniformemente convergente.

12. Sean X, Y espacios métricos y sea $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y solo si para cada conjunto cerrado $B \subset Y$ la imagen inversa $F^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en X.

13. ♦ Sean X, Y espacios métricos y sea $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y solo si $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$ para cada $B \subset Y$.

14. ♦ Sean X, Y espacios métricos y sea $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y solo si $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ para cada $A \subset X$.

15. Demuestre que la función $\|\cdot\|$ sobre $L(E,F)$ es una norma y que $\|A\| = \inf\{C > 0 : \forall x \in E\ ; \|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}$.

16. ¿ Averigue si la propiedad "ser acotado.[es] invariante de homeomorfismos?

17. ♦ Demuestre que el cuadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ y el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 2,\ (x+1)^2 + y^2 < 2\}$ son homeomorfos.

18. Sean E, F espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$ y sea $F\colon E \to F$ una aplicación continua y aditiva: $F(x+y) = F(x) + F(y)$.
    Demuestre que F es lineal.

19. ♦ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ una función lineal no identicamente nula. Demuestre que φ es continua si y solo si $\operatorname{Ker}\varphi$ no es denso en E.

20. ♦ Sea (X, d) un espacio métrico y sea u_0 un punto arbitrario en X. Para x, $u \in X$ sea $f_u(x) = d(x, u) - d(x, u_0)$. Demuestre que f_u es una función acotada, continua sobre X y que la aplicación $X \ni u \to f_u \in BC(X)$ es una isometría.
21. ♦ Deduzca Teorema 2.10 del resultado del ejercicio anterior.
22. ♦ Sea $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ - el disco unitario en el plano. Sea $E = CB(\mathbb{R}^2)$ - el espacio de funciones continuas acotadas sobre el plano provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $F = \{f \in E : f|\mathbb{D} \equiv 0\}$. Encuentre una isometría lineal entre el espacio cociente E/F y el espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$.
23. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación continua $f\colon X \to Y$ es *abierta* si para cada $O \subset X$ abierto $f(O)$ es abierto. Demuestre que, si X es de 2^a categoría y $f\colon X \to Y$ es abierto, entonces Y es de 2^a categoría.
24. ♦ Sea $C^1([a, b])$ el espacio de funciones sobre $[a, b]$ que tienen derivada continua. Sea $d(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|$. Investigue la continuidad de la aplicación $T\colon C^1([a, b]) \to C^1([a, b])$ cuando
    1. $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\text{sen}\,(x - t)dt$,
    2. $(Tf)(x) = \int_a^x f^2(t)dt$.

Capítulo 7

Espacios compactos

Cuando se trata de las propiedades de los conjuntos tales como la de ser acotado, conexo, separable, se puede dar una idea de su significado hasta a un láico utilizando ejemplos sencillos de subconjuntos del eje real.

No sucede así cuando se trata de la compacidad. Es una propiedad que posee el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pero la importancia de este hecho salió a la luz apenas en la segunda mitad del siglo XIX, en realidad hasta a los finales del siglo.

La compacidad del intervalo $[a, b]$ constituye exactamente el contenido del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

En el año 1894 Borel formuó otra propiedad del intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ que resulta equivalente a la propiedad de Bolzano-Weierstrass no solamente en el caso del intervalo sino para todos los espacios métricos.

Seguramente el teorema de Borel fue uno de los impulsos más importantes para el nacimiento de una nueva rama de matemáticas, a saber la topologí.

En la topología general la compacidad secuencial del teorema de Bolzano-Weierstrass y compacidad en seco, la del teorema de Botel son conceptos distintos.

1. Compacidad sequencial

Históricamente el concepto de conjunto compacto apareció en relación con los problemas donde se necesitaba encontrar sucesión convergente dentro de un conjunto. Por lo tanto la definición secuencial de compacidad parece más natural y más manejable.

Sin embargo otras descripciones de espacios compactos como Teorema de Heine-Borel, su generalización a espacios métricos generales (Teorema 7.10), Teorema de Borel son de suma importancia no solamente para los estudios de la estructura de estos espacios, sino también para el estudio de funciones y aplicaciones definidas sobre espacios compactos.

Definición 7.1. Un espacio métrico (X, d) es *compacto* si para cada sucesión (x_n) en X existe una subsucesión (x_{n_k}) y $x \in X$ tales que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Un comjunto $K \subset X$ es *compacto* si el espacio (K, d) es compacto.

Observemos inmediatamente que por la definición definición la propiedad "K es compacto" es es intrínsica: no depende del espacio X en el cual K está sumergido, mientras se conserve la métrica en K. Por esta razón no es necesario decir "K es compacto en X".

La compacidad de un intervalo $[a, b]$ es la original causa de nuestro intereés en este concepto. Por lo tanto repetimos aquí su demostración llamada por algunos "la caza del león".

TEOREMA 7.2. (Bolzano-Weierstrass) Sean a, $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. El intervalo $[a, b]$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sean $a_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.

Para un intervalo finito $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$ denotemos por $d(I)$ su diámetro $|d - c|$. Vamos a probar que existe una sucesión descendiente de intervalos $I_k \subset [a, b]$ tal que $d(I_k) \leq \frac{|b-a|}{2^k}$ y tal que cada I_k contiene a x_n para un número infinito de índices.

Al menos uno de los intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ o $[\frac{a+b}{2}, b]$ contiene x_n para un número infinito de índices n. A este intervalo, lo llamamos I_1. Si ya hemos construido intervalos $I_1, \ldots, I_k$, donde I_k contiene a x_n para un número infinito de índices, partimos I_k en dos intervalos de la misma longitud $d(I_k)/2$ y aquell de los dos que contiene x_n para un número infinitos de índices, lo llamamos I_{k+1}. De tal manera obtenemos una sucesión descendiente de intervalos y aseguramos que $d(I_k) \leq \frac{|b-a|}{2^k}$. Además cada intervalo contiene a x_n para un número infinito de índices.

En seguida construimos, también por inducción, una subsucesión x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in I_k$ escogiendo como x_{n_1} cualquier elemento de la sucesión que esté en de I_1. Luego , si ya hemos obtenido $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$, podemos encontrar en I_{k+1} un elemento x_N tal que $N > n_k$, porque I_{k+1} contiene a x_n para un número infinito de los $n's$. Definimos entonces $n_{k+1} = N$. La inducción nos permite obtener la subsucesión deseada.

El hecho de que $|x_k - x_{k+l}| \leq \frac{|b-a|}{2^k}$, k, $l \in \mathbb{N}$ significa que (x_{n_k}) es una sucesión de Cauchy, entonces convergente en $\mathbb{R}$ a un elemento X. El intervalo $[a, b]$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $x \in [a, b]$. El intervalo $[a, b]$ es compacto.

$\square$

Los hechos siguientes son muy útiles para estudiar la compacidad de conjuntos más complicados.

PROPOSICIÓN 7.3. Sean K_n, $n = 1, \ldots, k$ conjuntos compactos. Entonces el producto cartesiano $K_1 \times \cdots \times K_k$ es compacto.

Demostración. En virtud de que

$$K_1 \times \cdots \times K_k \cong K_1 \times (K_2 \cdots \times K_k)$$

es suficiente probar que $K_1 \times K_2$ es compacto y luego aplicar la inducción.

Sea (x_n, y_n) una sucesión en $K_1 \times K_2$. Por la compacidad de K_1 existe una subsucesión $x_{n_k} \to x$. Consideramos en K_2 la subsucesión (y_{n_k}), que por su lado tiene una subsucesión $(y_{n_{k_l}})$ convergente con respecto a l a un elemento $y \in K_2$. Obtenemos $\lim_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) = (x, y)$. La compacidad del producto $K_1 \times K_2$ está probada. $\square$

Proposición 7.4. Si K es un compacto y $A \subset K$ es cerrado en K entonces A es compacto.

La demostración es inmediata directamente por la definición de conjunto compacto y Teorema 3.26.

Como aa aplicación obtenemos inmediatamente el importante Teorema de Heine-Borel.

Teorema 7.5. (Heine, Borel) Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es acotado y cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que K es compacto y que no es acotado. Para cada conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset K$ contenido en una bola $B(0, N)$ existe entonces un elemento $x_{m+1} \in K$ que está fuera de la bola $B(0, N + 1)$. Para cada $1 \leq j \leq m$ tenemos $\|x_j - x_{m+1}\| > 1$.

De tal manera podemos construir por inducción una sucesión (x_m) en K tal que para todos $i \neq j$ se cumple $\|x_i - x_j\| > 1$. Esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergebte. La contradicción demuestra que K es acotado.

Si K no es carrado en $\mathbb{R}^n$, por Teorema 3.26 existe una sucesión (x_n) en K que converge a $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ y cada subsucesión converge al mismo x, entonces no tiene límite en K. Nuevamente, la contardicción demuestra que K tiene que ser cerrado.

Hemos probado: K compacto $\Rightarrow$ K es acotado y cerrado.

Ahora suponemos que K es acotado y cerrado en $\mathbb{R}^n$. Existe una bola $B(0, r)$ que contiena al conjunto K. Por lo tanto $K \subset [-r, r] \times \cdots \times [-r, r] \subset \mathbb{R}^n$. Como un subconjunto cerrado de producto cartesiano de intervalos compactos, K es compacto.

$\square$

En muchos espacios métricos existen conjuntos acotados y cerrados que no son compactos.

Ejemplo 7.6. En el espacio l^1 de sucesiones sumables definamos $C = \overline{B(0, 1)}$ que es un conjunto cerrado y acotado.

Sea $\mathfrak{x}_k = (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{k}, 0, 0 \ldots)$. Tenemos $\|\mathfrak{x}\|_1 = 1$ entonces $\mathfrak{x}_k \in C$. Para $k \neq j$ se cumple $\|\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_j\|_1 = 2$. La sucesión $(\mathfrak{x}_k)$ no tiene ninguna subsucesión convergente, entonces C no es compacto.

$\diamondsuit$

Los conjuntos compactos tienen una propiedad más fuerte que ser acotado y que, suponiendo que el conjunto es además acotado, aseguran su compacidad.

Definición 7.7. Un espacio métrico A es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$ (llamado ε - *red de* A) tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, \varepsilon)$.

Usando el término de la cubierta, un conjunto $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$ es una ε - red de A si las bolas $B(a_j, \varepsilon)$ $1 \leq ik$ forman una cubierta de A.

Cuando A es un subconjunto en un espacio X y estamos preguntando si A es totalmente acotado, puede ser útil la siguiente observación. El hecho de que los elementos de la red $\{a_1, \ldots, a_k\}$ pertenecen a A no es transcendente.

Proposición 7.8. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_k \in X$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon)$. Entonces A es totalmente acotado.

Demostración. La propiedad que satisface A se puede expresar como: para cada $\varepsilon > 0$ existe en X una ε - red de A.

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos en X una $\varepsilon/2$ - red $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de A. Para cada X_j tal que $B(x_j, \varepsilon/2) \cap A \neq \emptyset$, sea a_j cualquier elemento de esta intersección.

Para $a \in A$ arbitrario existe $1 \leq j \leq m$ tal que $a \in B(x_j, \varepsilon/2)$. Se sigue

$$d(a, a_j) \leq d(a, x_j) + d(x_j, a_j) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon..$$

Hemos probado que $a_1, \ldots, a_m$ es una ε - red en A.

$\square$

La última Proposición implica de inmediato que cads subconjunto del conjunto totalmente agotado es totalmente acotado.

La propiedad principal de los conjuntos totalmente acotados esta formulada en el teorema siguiente.

Teorema 7.9. Un conjunto A es totalmente acotado si y solo si cada sucesión (a_n) en A contiene una subsucesión de Cauchy.

Demostración. Sea A un conjunto totalmente acotado y sea (x_n) una sucesión de elementos de A. Procedemos como en la demostración de la compacidad del intervalo. Vamos a construir una sucesión descendiente (B_k) de conjuntos tales que cada B_k está cobtenido en una bola de radio $\frac{1}{k}$ y además para cada k existe un número infinito de índices n para los cuales $x_n \in B_k$. El método de construcción es inductivo. Sabemos que para ciertos $a_1, \ldots, a_k \in A$ se cumple $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, 1)$. Alguna de estas bolas contiene los x_n para un número infinito de índices n y a esta bola la escogemos como B_1.

Supongamos que ya tenemos construidos los conjuntos $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k$, tales que $d(x, y) \leq \frac{1}{m}$ para x, $y \in B_m$, $1 \leq m \leq k$, y que B_k contiene un número infinito de elementos de la sucesión. Como B_k es también totalmente acotado contiene una $\frac{1}{k+1}$ - red $\{a_1^k, \ldots, a_l^k\}$. Uno de los conjuntos $B_k \cap B(a_j^k, \frac{1}{k+1})$ contiene un número infinito de elementos de la sucesión y a este conjunto, lo nombramos B_{k+1}.

Hemos obtenido por inducción la sucesión B_k. Sea (x_{n_k}) una subsucesión de la sucesión (x_n) tal que $x_{n_k} \in B_k$. Para todos k, l naturales tenemos $d(x_{n_k}, x_{n_{k+l}}) < \frac{1}{k+l}$ entonces esta subsucesión es de Cauchy.

Así hemos probado la implicación

(A - totalmente acotado) $\Rightarrow$ (Cada sucesión en A tiene una subsucesión de Cauchy).

Para probar la implicación inversa veremos que cada espacio A que no es totalmente acotado contiene una sucesión de elementos $x_n \in A$ tales que para algún $\varepsilon > 0$ $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Nuevamente la construcción es inductiva y muy parecida a la que hemos usado en la demostración de Teorema de Heine-Borel.

Si A no es totalmente acotado, existe $\varepsilon > 0$ tal que para ningún conjunto finito $\{a_j\}_{j=1}^{k} \subset A$ se logra la contensión $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, \varepsilon)$. Empezando con cualquier $a_1 \in A$, existe $a_2 \in A$ tal que $d(a_1, a_2) > \varepsilon$, porque $A \not\subset B(a_1, \varepsilon)$. Luego, si ya tenemos el conjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$ tal que $d(a_i, a_j) > \varepsilon$, $i \neq j$, existe $a_{k+1} \notin \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, \varepsilon)$. La sucesión (a_n) obtenida inductivamente de esta manera no contiene ninguna subsucesión de Cauchy.

□

Teorema 7.10. Un espacio K es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.

Demostración. Primero probamos que (K compacto) $\Rightarrow$ (K es completo y totalmente acotado)

Si K no es completo, contiene una sucesión de Cauchy (x_n) que no es convergente. Cada subsucesión de esta sucesión tampoco converge, lo que es una contradiccón con la definición de la compacidad. Cada espacio compacto es completo.

Cada sucesión en espacio compacto K contiene a una subsucesión convergente, que es entonces de Cauchy. Teorema 5.9 implica que K es totalmente acotado.

Pasamos a la demostración de la implicación (K es completo y totalmente acotado) $\Rightarrow$ (K compacto).

Cada sucesión (x_n) en K contiene una subsucesión de Cauchy por Teorema 5.9, porque K es totalmente acotado. El espacio K es completo entonces $x_n \to x$ para algún elemento de K. La compacidad de K etá probada.

$\square$

A continuación consideramo el caso cuando K es un subconjunto de un espacio completo.

COROLARIO 7.11. Sea X un espacio métrico completo y sea $K \subset X$. Entonces K es compacto si y solo si es cerrado en X y totalmente acotado.

Este corolario es consecuencia inmediata del teorema anterior, porque un conjunto en un espacio completo X es completo si y solo si es cerrado en X.

Los espacios totalmente acotados tienen otra propiedad muy notable.

TEOREMA 7.12. Cada espacio métrico totalmente acotado, en particular cada espacio compacto, X es separable.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito $A_n = \{x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\} \subset X$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j^n, \frac{1}{n})$. Sea $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. El conjunto C es numerable como unión numerable de conjuntos finitos.

Para probar la densidad del conjunto C es suficiente ver que para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ la bola $B(x, \varepsilon)$ contiene a un elemento de C, es decir uno de los x_j^n. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ entonces $x \in \bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j^n, \frac{1}{n})$ y existe j tal que $x \in B(x_j^n, \frac{1}{n})$. Por lo tanto $x_j^n \in B(x, \frac{1}{n})$, lo que termina la demostración.

$\square$

Obviamente existen espacios separables que no son ni siquiera acotados. El eje real $\mathbb{R}$ es uno de los ejemplos.

2. Teorema de Borel

El teorema de Borel que presentamos a continuación proporciona una condición necesaria y suficiente para la compacidad de un espacio métrico. Como vamos a observar más adelante, el criterio de Borel es muy útil para probar rápido varios teoremas, pero su importancia no termina aqí. En caso de espacios topológicos que no son métricos la compacidad secuencial es una propiedad más débil que la condición encontrada por Borel. El teorema de Borel sugiere la correcta definición de compacidad para los espacios topológicos generales.

Teorema 7.13. (Borel) Un espacio métrico K es compacto si y solo si cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita.

Demostración. Vamos a referirnos a la propiedad: "cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita" como a "la propiedad de Borel".

Empezamos probando que la propiedad de Borel implica la compacidad porque esta demostración es más sencilla.

Suponemos entonces que K tiene la propiedad de Borel y para $\varepsilon > 0$ dado construimos la cubierta abierta $K = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$. Sea $\{B_(x_i, \varepsilon)\}_{i=1}^{k}$ una cubierta finita, que es entonces una ε - red para K. El espacio K es totalmente acotado.

Supongamos que K no es completo. Existe en K una sucesión de Cauchy (x_n) que no tiene límite en K. El conunto de todos los elementos de la sucesión es entonces cerrado, porque contiene a todos sus puntos de acumulación (¡No hay tales!).

Sea $O_k = K \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Usando los mismos argumentos vemos que cada O_k es abierto. Pero $\bigcup_{i=1}^{\infty} O_k = K$, entonces tenemos una cubierta abierta de K del cual podemos escoger una subcubierta finita. Para un conjunto finito $\{x_{k_1}, \dots, x_{k_m}\}$ tenemos $K = \bigcup_{j=1}^{m} O_{k_j}$.

Esto es un absurdo, porque significa que la sucesión de Cauchy divergente (x_n) toma un número finito de valores.

Este absurdo demuestra que K sí es completo y por Teorema 7.10 es compacto.

Ahora probaremos que cada espacio compacto tiene la propiedad de Borel. Sea $\mathcal{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ una cubierta abierta del espacio compacto K. Por Teorema 5.17 esta cubierta contiene una subcubierta numerable que podemos denotar $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Sea $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} O_k$. Visiblemente $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también una cubierta abierta que consta de una sucesión creciente de abiertos. Supongamos que ninguno de los conjuntos U_n cubre a K. Sea $x_n \in K \setminus U_n$. Existe una subsucesión convergente $x_{n_k} \to x \in K$ porque K es compacto. El límite x de esta subsucesión que tiene que pertenecer a uno de los conjuntos de la cubierta, digamos $x \in U_{n_0}$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k > N$ $x_{n_k} \in U_{n_0} \subset U_{n_k}$, que es una obvia contradicción.

Se cumple entonces $K = U_n = \bigcup_{k=1}^{n} O_k$ para n suficientemente grande. La propiedad de Borel está probada.

□

La siguiente consecuencia de Teorema de Borel tiene numerosas aplicaciones en análisis funcional.

Teorema 7.14. Un espacio métrico C es compacto si y solo si para cada familia decreciente de conjuntos cerrados $F_n \subset C$ se cumple $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Demostración. Si C es compacto y la familia F_n de conjuntos cerrados es decreciente, entonces $O_n = F_n^c$ es una familia craciente de conjuntos abiertos. Si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, la familia $O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta que no contiene una ninguna subcubierta finita. Esto es imposible por Teorema de Borel. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

$\square$

Aunque sabemos perfectamente de otros cursos que los números reales forman un conjunto no numerable, es interesante ver que este hecho está relacionado con la compacidad del intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 7.15. El conjunto $[0, 1]$ no es numerable.

Supongamos que los números reales del intervalo $I = [0, 1]$ se pueden ordenar en una sucesión de elementos (x_n). El conjunto $I \setminus \{x_1\}$ contiene a un intervalo cerrado $I_1 = [a_1, b_1]$. El conjunto $I_1 \setminus \{x_2\}$ contiene algún intervalo cerrado I_3 ...

Siguiendo así podemos construir una sucesión decreciente de intervalos compactos tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ no contiene ningún elemento de la sucesión (x_n), entonces es vacío. Por Teorema 7.14 esto es imposible. $\diamondsuit$

Ejercicio 7.16. Utilizando el método aplicado en Ejemplo 7.15 demuestre que el conjunto de Cantor no es numerable.

3. Aplicaciones continuas sobre espacios compactos

Las aplicaciones continuas sobre un dominio compacto tienen muchas propiedades notables. En algunos casos la definición secuencial de la compacidad es mas conveniente para deducir estas propiedades, en otros casos es más convienieete usar Teorema de Borel.

Aquí presentamo algunas de estas propiedades.

Teorema 7.17. Sea K un espacio compacto y sea X un espacio métrico. Si $F \in C(K, X)$ entonces $F(K)$ es un espacio compacto.

Demostración. Si $y_n \in F(K)$, $n \in \mathbb{N}$, existen $a_n \in K$ tales que $F(a_n) = y_n$. La sucesión (a_n) tiene una subsucesión convergente $a_{n_k} \to a \in K$. La aplicación F es continua, entonces $F(a_{n_k}) = y_{n_k} \to F(A)$ es la buscada subsucesión convergente en $F(K)$.

$\square$

En el caso de una función real obtenemos un resultado de suma importancia.

Corolario 7.18. Sea K un espacio compacto. Sea $f \in C(K)$. Entonces existen a, $b \in K$ tales que $f(a) = \max_{x\in K} f(x)$ y $f(b) = \min_{x\in K} f(x)$.

Demostración. El conjunto $f(K) \subset \mathbb{R}$ es compacto entonces $\sup_{x\in K} f(x)$ y $\inf_{x\in K} f(x)$ existen y pertenecen a $f(K)$ siendo su máximo y mínimo, respectivamente. Esto es exactamente lo que dice el anunciado.

□

El anunciado de Corilario 5.12 se puede expresar brevemente: cada función continua sobre un espacio compacto alcanza sus extremos.

Teorema 7.19. Sea K un espacio compacto. Si $F \in C(K, X)$ es una aplicación biyectiva, entonces $F^{-1} \in C(X, K)$.

Demostración. Supongamos que $x_n = F(a_n) \to x = F(a)$. Tenemos que probar que $F^{-1}(x_n) = a_n \to a = F^{-1}(x)$. Si no es así, por la compacidad de K existe una subsucesión $a_{n_k} \to b \neq a$. La aplicación F es continua y se sigue $F(a_{n_k}) \to F(b) \neq F(a)$. Obtenemos una contradicción que termina la demostración. □

Sobre un dominio compacto la continuidad de una aplicación implica su continuidad uniforme.

Teorema 7.20. Sea K un espacio métrico compacto y sea Y un espacio métrico. Cada aplicación continua $F\colon X \to Y$ es uniformemente continua.

Demostración. La demostración es mucho mas sensilla si usamos el teorema de Borel.

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ buscamos $r_x > 0$ tal que $d(x, y) < r$ implica $d(F(x), F(y)) < \varepsilon/2$. Las bolas $B(x, r/2)$, $x \in K$ forman una cubierta abierta del compacto K. Por Teorema de Borel existen $x_1, \ldots, x_k$ tales que $K = B(x_1, r/2) \cup \cdots \cup B(x_k, r/2)$. Sean u, $v \in K$ tales que $d(u, v) < r/2$. El elemento u pertenece a una de las bolas, digamos $u \in B(x_j, r/2)$. Se sigue $d(v, x_j) \le d(v, u) + d(u, x_j) < r$. Por lo tanto

$$d(F(u), F(v)) \le d(F(u), F(x_j)) + d(F(x_j), F(v)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

siempre que $d(u, v) < r/2$.

La continuidad uniforme está probada.

□

El último de los resultados anunciados habla de la convergencia de funciones reales y relaciona la convergencia puntual con la convergencia uniforme que en general es mucho mas fuerte que la primera.

TEOREMA 7.21. (Lema de Dini) Sea K un espacio métrico compacto. Sean $f_n \in C(K)$ tales que para todo $x \in K$ $f_n(x) \searrow 0$. Entonces $f_n \to 0$ en $C(K)$ es decir, la sucesión converge uniformemente.

DEMOSTRACIÓN. Fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que $f_{N_x}(x) < \varepsilon$. Por la monotonía de la sucesión $f_n(x) < \varepsilon$ para todos $n > \mathbb{N}_x$. La función f_{N_x} es continua y existe $r(x) > 0$ tal que en el dominio $B(x, r(x))$ el valor ε mayoriza a f_{N_x} y a todas las fiunciones siguientes.

La cubierta abierta $K = \bigcup_{x\in K} B(x, r(x))$ tiene una subcubierta finita $K = \cup_{j=1}^m B(x_j, r(x_j))$. Sea $N = \max\{N_{x_1}, \ldots, N_{xm}\}$.

Si $x \in K$, existe j tal que $x \in B(x_j, r(x_j))$ y para todo $n > N$ se cumple $0 \leq f_n(x) < \varepsilon$.

Hemos probado que $\sup_{x\in K} f_n \leq \varepsilon$ para $n > N$.

Efectivamente la sucesión (f_n) converge uniformemente a cero.

□

4. Operadores en espacios de dimensión finita

En la sección 3 del Capítulo 6 hemos estudiado la continuidad de aplicaciones lineales en los espacios normados, es decir de operadores. Los resultados de la última sección conducen inmediatamente a resultados importantes cuando adicionalmente los espacios vectoriales son de dimensión finita.

Vamos a demostrar que en este caso cada aplicación lineal (operador) es continuo. Esta conclusión está relacionada con otro hecho importante de que todas las normas en un espacio de dimensión finita conducen a la misma topología y a la misma convergencia.

DEFINICIÓN 7.22. Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en un espacio vectorial E. Decimos que las normas son equivalentes ($\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$) si existen A, $B > 0$ tales que

$$A\|x\| \leq \|x\|' \leq B\|x\|$$

para todos $x \in E$.

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia, hecho cuya demostración dejmos como ejercicio.

Conocemos varios ejemplos de normas en el espacio $\mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq \leq n} |x_j|$, para mencionar las más importantes. Salta a la vista que en todos los casos la convergencia de una sucesión es equivalente a la convergencia de las coordenadas de vector. Este fenómeno es de caracter más general.

Teorema 7.23. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Todas las normas en E son equivalentes.

Demostración. Sea $\{\mathbf{b_j}\}_{j=1}^n$ una base del espacio E. Definimos una aplicación biyectiva entre el espacio $\mathbb{K}^n$ y E:

$$A((a_j)) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{b}_j.$$

Visiblemente A es lineal. Investigamos la continuidad de A considerando $\mathbb{K}^n$ previsto de la norma euclideana $\|(a_j)\|_2 = (\sum_{j=1}^n |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \|A((a_j))\| &= \|\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{b}_j\| \le \sum_{j=1}^n |a_j| \|\mathbf{b}_j\| \\ &\le (\sum_{j=1}^n |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^n \|\mathbf{b}_j\|^2)^{\frac{1}{2}} = B\|(a_j)\|_2. \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz y hemos denotado $B = (\sum_{j=1}^n \|\mathbf{b}_j\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

La esfera unitaria $S^{n-1} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n : \|\mathbf{a}\|_2 = 1\}$ es compacta según Teorema de Heine-Borel. Según Corolario 7.18 la función f alcanza su mínimo en la esfera. Este mínimo, que denotamos por m, es positivo, porque cada norma se anula únicamente en cero.

Sabemos entonces que para cada $\mathbf{a} = (a_j) \in \mathbb{K}^n$ de norma cartesiana igual a 1 se cumple $\| \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{b}_j\| \ge m$. Para cada $\mathbf{a} \ne 0$ tenemos $\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|_2} \in S^{n-1}$, entonces $\|\frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\|\mathbf{a}\|_2}\| \ge m$, lo que demuestra la desigualdad

$$m(\sum_{j=1}^n |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} = m\|\mathbf{a}\|_2 \le \|\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{b}_j\|,$$

para $\mathbf{a}$ arbitrario.

Hemos probado que para $(a_j) \in \mathbb{K}^n$ arbitrario se cumplen dos desigualdades

$$m(\sum_{j=1}^n |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \le \|\sum_{j=1}^n a_j b_j\| \le B(\sum_{j=1}^n |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Si $\|\cdot\|'$ es otra norma en el espacio E se cumple también

$$m'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{b}_j\|' \leq B'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

para constatnes positivas m', B' que dependen únicamente de la norma $\|\cdot\|'$ y de la base $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^n$.

Obtenemos

$$\begin{aligned} m\|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{b}_j\|' &\leq mB'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq B'\|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{b}_j\| \\ &\leq BB'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{BB'}{m'}\|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{b}_j\|'. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{m}{B'}\|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{b}_j\|' \leq \|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{b}_j\| \leq \frac{B}{m'}\|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{b}_j\|'.$$

Las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes.

□

Corolario 7.24. Para cada espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ existe un operador lineal continuo $J\colon E \to \mathbb{K}^n$ cuyo inverso es también continuo.

Demostración. Sea $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base en E. Para $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n a_j\mathbf{b}_j \in E$ definimos $J(\mathbf{a}) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

El operador inverso tiene la forma $J^{-1}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j\mathbf{b}_j$.

Las desigualdades (3) que obtuvimos en la demostración anterior se traducen en

$$m\|J(\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_E \leq B\|J(\mathbf{a}\|_2.$$

La primera desigualdad expresa emtonces la continuidad del operador J, mientras que la segunda la continuidad del operador inverso.

□

A un operador continuo entre dos espacios normados que tiene el inverso continuo, lo llamamos *isomorfismo* de espacios normados.

Teorema 7.25. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|)_F$ dos espacios normados de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $A\colon E \to F$ un operador lineal. Entonces A es continuo.

Demostración. En principio probaremos que cada operador A entre dos espacios euclidianos $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ es continuo. En ambos espacios denotamos por $\|\cdot\|_2$ la norma euclidiana. Sea $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica en $\mathbb{K}^n$ y sea $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ la base canónica en $\mathbb{K}^m$.

$$A(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_j a_{jk}\mathbf{f}_k.$$

Para $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ obtenemos el valor $\|A(\mathfrak{a})\|^2$ estimado en forma

$$\|A(\mathfrak{a})\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m} |\sum_{j=1}^{n} x_j a_{jk}|^2 \leq \sum_{k=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \|\mathfrak{a}\|_2^2,$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

La desigualdad demuestra la continuidad del operador A.

Dado un espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimensión n podemos construir según 7.24 un isomorfismo de espacios normados $J_n \colon E \to \mathbb{K}^n$. En caso del espacio F de dimessión m existe un isomorfismo $J_m \colon F \to \mathbb{K}^m$.

La composición $\tilde{A} = J_m \circ A \circ J_n^{-1}$ es un operador lineal entre los espacios $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ que es continuo por lo dicho al principio de la demostración.

Por otro lado $A = J_m \circ \tilde{A} \circ J_m^{-1}$ es continuo como composición de operadores continuos.

□

5. Ejercicios

1. Describe los conjuntos compactos en un espacio de métrica discreta.
2. Construya en $\mathbb{R}$ un conjunto numerable compacto con un número infinito de puntos de acumulación.
3. Construya una cubierta abierta del intervalo $[0, 1)$ que no tenga ninguna subcubierta finita.
4. Demuestre que el producto crtesiano de dos conjuntos totamletamente acotadoa es totalmente acotado. Uúsalo para probar que conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado.
5. Demuestre que la relación $\sim$ definida en la sección 4 entre las normas en un espacio vectorial E es una relación de equivalencia.
6. Demuestre que en cada espacio normado $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ una sucesión $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nk})$ converge si y solo si para cada j la sucesión numérica $(b_n) = (a_{nj})$ converge.
7. Demuestre que cada subespacio vectorial en un espacio normado de dimensión finita es cerrado.

8. Sean $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ espacios normados y sea $A\colon E \to F$ un operador lineal. Demuestre que, si E es de dimensión finita, A es continuo.
9. ♦ Demuestre que para cada conjunto A totalmente acotado en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ la cáscara convexa $\mathrm{conv}(A)$ es también totalmente acotada.
10. ♦ Sea A un conjunto compacto en un espacio de Banach E. Demuestre que $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ es un conjunto compacto.
11. ♦ Supongamos que en el espacio métrico X cada subconjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es compacto.
12. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $\phi\colon X \to Y$ se llama *abierta* si para todo conjunto $O \subset X$ su imagen $\phi(O)$ es abierta.

    Demuestre que cada función continua, abierta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona.

Capítulo 8

Espacios conexos

El concepto de conexidad tiene el origen muy natural. Se trata de espacios que son "de una sola pieza".

Sin embargo, ni siquiera en el caso del eje real es obvio cuando debemos considerar que un subconjunto se descompone en dos ó más piezas. Podemos escribir el imtervalo $[0,1]$ en forma $[0,1] = [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 1]$, pero esta descomposición es solo una partición mental, porque no tiene ninguna explicación en la estructura del intervalo. Estas dos piezas están "pegadas" en el punto $\frac{1}{2}$ que pertenece al segundo conjunto, pero se puede aproximar por elementos del primero.

La situación es diferente en el caso del conjunto $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\} = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$, cuando cada elemento de uno de los componentes está separado del otro componente.

La descomposición consta de dos conjuntos no vacíos que son abiertos en el espacio que es la unón de estos conjuntos.

La definición de conjuntos y espacios conexos empieza entonces con la definición de los espacios que no lo son, lo que dificulta al principio el manejo de este concepto. Mucho más transparente es el concepto de conjuntos *conexos por arcos*, entonces ponemos la énfasis en los ejemplos, donde se puede usar este criterio.

1. Espacios conexos

Definición 8.1. Un espacio métrico (X, d) es *disconexo* si se puede representar en forma $X = O_1 \cup O_2$, donde los conjuntos O_1, O_2 son abiertos, disjuntos y no vacíos.

Un espacio es *conexo*, si no es disconexo.

$\diamondsuit$

En los espacios conexos los únicos subconjuntos a la véz abiertos y cerrados son el mismo espacio y el conjunto vacío.

Así como el concepto de compacidad, separabilidad, completez - la conexidad es una más de las propiedades del intervalo finito $[a, b]$ que se observa en casos de otros espacios y se estudia por separado.

Debemos ver primero que el intervalo sí tiene dicha propiedad.

Teorema 8.2. El intervalo $[a, b]$ es conexo.

Demostración. Vamos a llevar a contradicción la suposición de que el intervalo es disconexo. Supongamos que $[a, b] = O_1 \cup O_2$, donde $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, los conjuntos son abiertos y no triviales. Existen entonces $x \in O_1$, $y \in O_2$ y sin perder la generalidad podemos suponner que $x < y$. El conjunto O_1 es abierto entonces para algún $s \in [a, b]$ se cumple $[x, s) \subset O_1$.

Sea $s_M = \sup\{s \in \mathbb{R} : [x, s) \subset O_1\}$.

El número s_M pertenece al intervalo $[a, b]$, entonces está en uno de los conjuntos O_1, O_2.

Si $s_M \in O_1$, entonces $[x, s_M] \in O_1$. Nuevamente, por el hecho de que el conjunto O_1 es abierto, para algún $r > 0$ se cumple $[s_M, s_M + r) \in O_1$. De tal manera $[x, s_M + r) \subset O_1$, que es una contradicción con la definición de s_M.

Queda únicamente la opción $s_M \in O_2$, pero esto implica $(s_m - \varepsilon, s_M] \subset O_2$ para cierto $\varepsilon > 0$, porque O_2 es también abierto. Esto también contradice la definición de s_M. El intervalo no es disconexo.

□

En la última demostración hemos usado como argumento decisivo el orden que está definido en el eje real. ¿Como vamos a proceder por ejemplo en el caso del disco en $\mathbb{R}^2$, que es también un conjunto "de una sola pieza"?

Los resultados siguientes proporcionan un método efectivo.

Teorema 8.3. Sea X un espacio métriuco conexo; Y un espacio métrico y sea $F : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces $F(X)$ es un conjunto conexo.

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea $F(X) = O_1 \cup O_2$, donde O_1, O_2 son conjuntos abiertos en $F(X)$, no vacíos, mutuamente ajenos.

Los conjuntos $U_i = F^{-1}(O_i)$, $i = 1, 2$ son abiertos en X, no vacíos, mutuamente ajenos. Esto es una contradicción que demuestra el teorema.

□

Definición 8.4. Un espacio métrico X es *conexo por arcos* si para cada par x, $y \in X$ existe una aplicación continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Teorema 8.5. Cada espacio métrico *conexo por arcos* es conexo.

Demostración. Supongamos que X es conexo por arcos y sin embargo disconexo con la descomposición correspondiente $X = O_1 \cup O_2$. Existen entonces $x \in O_1$, $y \in O_2$ y una curva continua $\gamma : I := [0, 1] \to X$ que inicia en X y termina en y.

La imagen de γ se descompne entonces en forma siguiente: $\gamma(I) = U_1 \cup U_2$, donde $U_1 = \gamma(I) \cap O_1$, $U_2 = \gamma(I) \cap O_2$. El primer conjunto contiene al punto x y el segundo al punto y, entonces ninguno de los conjuntos es vacío, ambos son abiertos en $\gamma(I)$ y su intersección es vacía. Hemos probado que $\gamma(I)$ es disconexo, lo que es falso por Teorema 8.2 y Teorema 8.5.

El espacio X es conexo.

$\square$

Todos los conjuntos convexos en un espacio normado son obviamente conexos por arcos y por lo tanto son conexos. También lo son los conjuntos llamados *estrellados*.

EJEMPLO 8.6. Sea F un espacio normado y sea $E \subset F$. El conjunto E se dice estrellado si existe $x_0 \in E$ tal que para todo $y \in E$ y $0 \leq t \leq 1$ se cumple $tx_0 + (1-t)y \in E$.

Un conjunto E es estrellado si el segmento lineal que une x_0 con cualquier otro elemento de E pertenece a E.

Cada conjunto estrellado es conexo por arcos y de acuerdo con Teorema 8.5 es conexo.

EJEMPLO 8.7. Sí, existen espacios conexos que no son conexos por arcos.

El subconjunto del plano:

$$C = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 : \, t \in [-1,1]\} \cup \{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}) : \, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

es conexo y no es conexo por arcos, porque los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{\pi}, 0)$ pertenecen a C y no se pueden unir con una curva continua dentro de C.

$\diamondsuit$

Las operaciones de tomar una unión o intersección de econjuntos conexos no respetan la conexidad. Sin embargo existen teoremas sobre este tema, como el resulrado siguiente sobre una çadena"de conjuntos conexos.

TEOREMA 8.8. Sea C_n, $n \in \mathbb{N}$ una familia de conjuntos conexos. Supongamos que $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Si $C = O_1 \cup O_2$ donde $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ y los componentes son abiertos, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $C_n = (O_1 \cap C_n) \cup (O_2 \cap O_2)$ Por la conexidad de C_n uno de los componentes es vacío, lo que significa que $C_n \subset O_1$ o $C_n \subset O_2$.

Si, digamos, $C_1 \subset O_1$, la condición $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ implica por inducción que $C_n \subset O_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $C \subset O_1$, mientras que $O_2 = \emptyset$.

El conjunto C no es disconexo.

□

El hecho de que en el Teorema 8.8 consideramos únicamente una familia numerable de conjuntos representa cierta desventaja. Con los mismos argumentos podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 8.9. Sea C_α, $\alpha \in \Delta$ una familia de conjuntos conexoe en el espacio métrico X. Si $\bigcap_{\alpha\in\Delta} C_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Delta} C_\alpha$ es un conjunto conexo.

EJERCICIO 8.10. Demuestre que en el eje real couinciden los conceptos: conjunto convexo, conjunto conexo, conjunto estrellado.

Una de las consecuencias de Teorema 8.8 es que cada espacio se descompone en una unión de conjuntos conexos mutuamente desjuntos.

DEFINICIÓN 8.11. Sea X un espacio métrico y sea $x \in X$. *La componente conexa* $C(x)$ *de* x es el conjunto conexo más grande que contiene al punto x.

La componente conexa de $C(x)$ está bién definida, porque es igual a la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x (y que por Teorema 8.9 es conexo). Por otro lado, si $C(x) \cup C(y) \neq \emptyset$, entonces $C(x) \cup C(y)$ es conexo, contiene a x y por lo tanto coincide con $C(x)$. De tal manera $X = \bigcup_{x\in X} C(x) = \bigcup_{u\in U} C(u)$, donde U es el conjunto formado a base del axioma de selección, que contiene un solo elemento de cada componente conexa.

2. Funciones sobre espacios conexos

Hasta este momento hemos usado Teorema 8.3 como un medio para el estudio de conexidad de conjuntos. En realidad se trata de una herramienta de análisis de funciones continuas.

TEOREMA 8.12. Sea X un espacio conexo y sea $f \in C(X)$. Si f alcanza en X los valores a, b, entonces alcanza cada valor intermedio.

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $f(X) \subset \mathbb{R}$ es conexo y contiene por suposición a ambos puntos a y b. Contiene entonces a todo el intervalo $[a, b]$.

□

He aquí otra aplicación típica del concepto de conexidad.

Ejemplo 8.13. Funciones localmente constantes

Sea X un espacio métrico. Supongamos que $F\colon X \to Y$ tiene la propiedad siguiente:

$$\forall x \in X \quad \exists\, r > 0,\ c \in Y \quad f|_{B(x,r)} \equiv c.$$

Decimos en este caso que F es *localmente constante.*

Si el dominio X es conexo, cada función localmente constante, es constante.

Sea c un valor que F alcanza en algún punto. El conjunto $O_c := \{x \in X : F(x) = c\}$ es por lo tanto no vacío. Este conjunto es también abierto por el hecho de que F es localmente constante.

Sea B el complemento de O_c en X y sea $y \in B$. Por el mismo argumento de que F es localmente constante vemos que F toma el mismo valor $F(y) \neq c$ en alguna vecindad de y. El conjunto B es abierto. La conexidad de X implica $B = \emptyset$ y en consecuencia $O_c = X$. La función F es constante.

$\diamondsuit$

La conexidad es una propiedad invariante bajo aplicaciones continuas entonces es invariante bajo homeomorfismos. En el ejemplo siguiente podemos ver como se puede aprovechar este hecho para demostrar que algunas espacios no son homeomorfos.

Ejemplo 8.14. ¿ Existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$?

La respuesta es: ¡No!

Supongamos que $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo. La misma aplicación define un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $\mathbb{R} \setminus \{\phi(0)\}$.

Obtenemos una contradicción, porque $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es un conjunto conexo, mientras que $\mathbb{R} \setminus \{\phi(0)\}$ no es conexo.

$\diamondsuit$

3. Ejercicios

1. Sea E un subespacio vectorial de dimensión $n-1$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus E$ es disconexo.
2. Demuestre que un espacio métrico X es conexo si y solo si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un conjunto conexo $C \subset X$ tal que $x, y \in C$.
3. Sea $C \subset X$ un conjunto conexo en un espacio métrico. Demuestre que $\overline{C}$ es conexo.

4. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de conjuntos conexos en un espacio métrico X. Supongamos que para cada par α_1, $\alpha_2 \in \Delta$ se cumple $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Demuestre que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es conjunto conexo.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ una función continua. Supongamos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Demuestre que f es suprayectiva.

6. ♦ Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le |x| \le 2\}$. Sea
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$
Demostrar que el espacio (A,d) es conexo.

7. Demuestre que el conjunto
$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z > 0\}$$
es conexo.

8. ♦ Demostrar que el en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto y conexo es conexo por arcos.

9. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}$ con la métrica
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x-y \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

10. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}^2$ con la métrica
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & (x_1,y_1) = (x_2,y_2), \\ |x_1| + |x_2| + |y_1 - y_2|, & (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2). \end{cases}$$

11. Sea X un espacio métrico. Para x, y, $z \in X$ sean γ_1, $\gamma_2 \in C([0,1],X)$ unas curvas continuas tales que $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = y$, $\gamma_2(1) = z$. Construya una curva continua γ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = z$.

12. Un espacio métrico se llama *sc localmente conexo* si cada punto del espacio tiene una vecindad conexa. Demuestre que cada espacio conexo y localmente conexo es conexo por arcos.

13. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $\phi\colon X \to Y$ se llama *abierta* si para todo conjunto $O \subset X$ su imagen $\phi(O)$ es abierta.

    Demuestre que cada función continua, abierta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona.

14. Sea X un espacio métrico y sea $A \subset X$ un conjunto tal que $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Int}(A^c) \neq \emptyset$. Sea $a \in \mathrm{Int}(A)$, $b \in \mathrm{Int}(A^c)$. Demuestre que cada curva continua que une a con b se intersecta con la frontera de A.
15. Sea A un conjunto conexo en un espacio métrico. ¿Es conexo el conjunto $\mathrm{Int}\, A$?
16. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. ¿Es conexo el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus C$?
17. ⧫ Investigue la conexidad del conjunto
$$A = \quad (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{R}^2.$$
.
18. ⧫ Investigue la conexidad del conjunto
$$B = \quad (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^2.$$
.

Capítulo 9

Teorema de Ascoli

Este capítulo está dedicado al problema de la compacidad de subconjuntos en el espacio de aplicaciones continuas definidas en un dominio compacto o al menos totalmente acotado.

Por razones históricas en esta área se utiliza el término de familias de aplicaciones en vez de conjuntos de aplicaciones.

Para un espacio K compacto y un espacio completo Y el espacio $C(X, Y)$ es métrico y completo. Un subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es compacto si y solo si es cerrado y totalmente acotado (Corolario 7.11).

Tenemos que encontrar un criterio que nos permita averiguar de forma más sencilla cuando la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada.

1. Familias de aplicaciones uniformemente equicontinuas

La propiedad que estamos estudiando en esta sección es local y el concepto tiene sentido para dominios X y codominios Y métricos arbitrarios.

Definición 9.1. Sea $x \in X$. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones $F\colon X \to Y$ es *equicontinua en* x si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_x > 0$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$ se cumple $F(B(x, r_x)) \subset B(F(x), \varepsilon)$.

La última condición equivale a decir

$$d(x, y) < r_x \;\Rightarrow\; d(F(x), F(y)) < \varepsilon.$$

Dicho de forma no muy rigurosa, la equicontinuidad de una familia de aplicaciones en un punto determinado x significa que todos los miembros de la familia son continuos en este punto y además su crecimiento en la vecindad de x es "semejante".

Ejemplo 9.2. Sea $\mathcal{L}$ la familia de todas las funciones lineales sobre $\mathbb{R}$. Esta familia no es equicontinua en ningún punto $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si para algún $C > 0$ consideramos $\mathcal{L}_C = \{f \in \mathcal{L} : f(x) = cx + b, \text{ con } b \in \mathbb{R}, \ |c| \le C\}$ obtenemos una familia de funciones equicontinua en cada punto del dominio.

Este ejemplo se puede generalizar.

En el espacio $C^1(\mathbb{R})$ de funciones derivables con la derivada continua en $\mathbb{R}$ escogemos

$$\mathcal{F}_a = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : |f'(x)| < a \text{ para } x \in [-1,1]\},$$

donde $a > 0$ es una constante.

Supongamos que $0 \leq x < 1$. Por teorema de Fermat para cada $f \in \mathcal{F}$ y $|x-y| < 1-x$ se cumple

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)||x-y| \leq a|x-y|.$$

Dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $r_x = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{a}, 1-x\}$ para cumplir la condición $f((x-r_x, x+r_x)) \subset (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$.

En el caso de $-1 < x < 0$ es suficiente tomar $r_x = x+1$.

La familia $\mathcal{F}_a$ es equicontinua en todos los puntos del intervalo $(-1,1)$. $\diamondsuit$

Definición 9.3. Una familia $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ se llama *uniformemente equicontinua* si para $\varepsilon > 0$ dado existe $r > 0$ tal que para cualesquiera $F \in \mathcal{F}$ y $x \in X$ se cumple $F(B(x,r)) \subset B(F(x),\varepsilon)$.

Todos los elementos de una familia uniformemente equicontinua son entonces funciones uniformemente continuas y además su rapidez"de crecimiento tiene cota que no depende ni del punto ni tampoco del miembro de la familia.

En el teorema siguiente vemos una vez más la importancia del concepto de la compacidad.

Teorema 9.4. Sea K un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Si $\mathcal{F} \subset C(K,Y)$ es una familia equicontinua en cada punto $x \in K$, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

Demostración. En cierto sentido este teorema generaliza Teorema 7.19 entonces el método de demostración será semejante. Nuevamente Teorema de Borel es el argumento más conveniente.

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ tenemos $r_x > 0$ tal que para $F \in \mathcal{F}$ arbitrario

$$d(x,y) < r_x \Rightarrow d(F(x),F(y)) < \varepsilon.$$

La cubierta abierta $K = \bigcup_{x\in K} B(x, r_x/2)$ tiene una subcubierta finita: $K = \bigcup_{1\leq j\leq k} B(x_j, r_{x_j}/2)$.

Escogems como r el valor $\frac{1}{2}\,\text{mín}_{1\leq j\leq k}\, r_{x_j}$.

Si $x \in B(x_j, r_{x_j}/2)$ y $d(x,y) < r$ se sigue

$$d(y, x_{r_j}) \leq d(y,x) + d(x, x_{r_j}) < r_{x_j}.$$

Luego, para elemento arbitrario F de la familia $\mathcal{F}$ obtenemos

$$d(F(x),F(y)) \leq d(F(x),F(x_{r_j})) + d(F(y),F(x_{r_j})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Hemos probado:

$$d(x,y) < r \ \Rightarrow\ d(F(x),F(y)) < 2\varepsilon$$

para cada $F \in \mathcal{F}$.

La familia $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua. $\square$

PROPOSICIÓN 9.5. Sea K un compacto y sea Y un espacio métrico. Si $\mathcal{F} \subset C(K,Y)$ es una familia uniformemente equicontinua entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es también uniformemente equicontinua.

DEMOSTRACIÓN. Para $\varepsilon > 0$ determinado sea $r > 0$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$ y $d(x,y) < r$ se tiene $d(F(x),F(y)) \leq \varepsilon$. Sean $\mathcal{F} \ni F_n \to F$ uniformemente.

En particular para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $d(F_n(x),F_n(y)) \leq \varepsilon$. la distancia es una función continua, entonces pasando al ımite $n \to \infty$ obtenemos $d(F(x),F(y)) \leq \varepsilon$. La cerradura de $\mathcal{F}$ sigue siendo uniformemente equicontinua. $\square$

2. Teorema de Ascoli

Como hemos advertido al principio del capítulo, nuestro propósito principal es determinar cuando una familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(K,Y)$ es compacta con respecto a la métrica

$$d(F,G) = \sup_{x \in K} d(F(x),G(x)).$$

Buscamos primero las condiciones necesariar para la compacidad de $\mathcal{F}$.

TEOREMA 9.6. Sea K un espacio compacto y Y un espacio métrico. Supongamos que $\mathcal{F} \subset C(K,Y)$ es un conjunto compacto.

Entonces

1. para todo $x \in K$ el conjunto $\{F(x) : F \in \mathcal{F}\} \subset Y$ es compacto,
2. la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

DEMOSTRACIÓN. Para $x \in K$ fijo consideramoa la aplicación $\delta_x \colon C(K,Y) \ni F \to F(x) \in Y$ que es obviamente continua. Si $\mathcal{F}$ es compacta en $C(K,Y)$, su imagen bajo δ_x es compacta, lo que demuestra el anunciado 1.

Como cada conjunto compacto la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada. Para $\varepsilon > 0$ determinado existen $F_1,\dots,F_k \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(F_j,\varepsilon)$.

Fijamos ahora un punto $x \in K$ y para cada $1 \leq j \leq k$ por la continuidad de F_j podemos encontrar $r_j > 0$ tal que suponiendo $d(x,y) < r_j$ obtenemos $d(F_j(x),F_j(y)) < \varepsilon$.

Sea $r = \min_{1 \leq j \leq k} r_j$. Obviamente $r > 0$. Si $F \in \mathcal{F}$, existe j tal que $F \in B(F_j, \varepsilon)$, lo que significa que $d(F(u), F_j(u)) < \varepsilon$, $u \in K$.

Obtenemos finalmente para $d(x, y) < r$:

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &\leq d(F(x), F_j(x)) + d(F_j(x), F(y)) \\ &\leq d(F(x), F_j(x)) + d(F_j(x), F_j(y)) + d(F_j(y), F(y)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua y por Teorema 6.4 es uniformemente equicontinua.

□

Teorema de Ascoli es casi exactamente inverso al teorema anterior.

Teorema 9.7. (Ascoli) Sea K un espacio compacto y sea Y un espacio métrico completo. Si $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es un conjunto cerrado, equicontinuo y para todo $x \in K$ el conjunto $\{F(x) : F \in \mathcal{F}\}$ es totalmente acotado, entonces $\mathcal{F}$ es compacto.

Demostración. Como parte introductoria a la demostracion debemos establecer una notación acerca de las aplicaciones entre conjuntos finitos. Sea $\mathcal{Z}$ un conjunto de k elementos: $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_k\}$ y sea $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$ un conjunto de m elementos. El espacio de todas las aplicaciones $\tau \colon A \to B$ consta de m^k elementos. Lo vamos a denotar por T.

El espacio $C(K, Y)$ es completo y por suposición $\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado, entonces para probar que $\mathcal{F}$ es compacto nos falta demostrar que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y procedemos a construir una ε - red para $\mathcal{F}$. Gracias a Proposición 5.8 es suficiente buscar la red $\{F_1, \dots, F_s\}$ de elementos que pertenecen a un espacio métrico en el cual $\mathcal{F}$ se sumerge isométricamente. Escogemos como este espacio $B(K, Y)$ - el espacio de todas las aplicaciones acotadas de K en Y con la misma métrica

$$d(F, G) = \sup_{x \in K} d(F(x), G(x)).$$

Nuevamente, gracias a la compacidad de K, la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua y para cierto $r > 0$ la condición $d(x, y) < r$, $F \in \mathcal{F}$ implica $d(F(x), F(y)) < \varepsilon$. Ahora aprovechamos que K es totalmente acotado y buscamos una $r/2$ - red para K. Existen $x_1, \dots, x_k \in K$ tales que $K = \bigcup_{1 \leq j \leq k} B(x_j, r/2)$.

Necesitamos sin embargo una descomposición de K en conjuntos mutuamente ajenos pero tales que cada uno de ellos esta dentro de alguna de las bolas $B(x_j, r/2)$. Definimos entonces $Z_1 = B(x_1, r/2)$, $Z_2 = B(x_2, r/2) \setminus Z_1$ y así sucesivamente $Z_j = B_j(x_j, r/2) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} Z_i$.

De tal manera aseguramos las propiedades:

1° $Z_j \subset B(x_j, r/2)$, 2° $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ si $i \neq j$, 3° $K = \bigcup_{j=1}^k Z_j$.

En seguida seleccionamos en cada conjunto $z_j \in Z_j$ arbitrario.

Por la suposición $P_j = \{F(z_j) : F \in \mathcal{F}\}$ es un conjunto totalmente acotado y la unión finita $P = \bigcup_{j=1}^k P_j$ es también un conjunto totalmente acotado en Y.

Sea $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ una ε - red para P.

Vamos a definir m^k funciones "escalonadas" en $B(K, Y)$ asociando a cada aplicación $\tau \colon \mathcal{Z} \to \mathcal{P}$ una función $F_\tau \in C(K, Y)$ que toma valores constantes en cada uno de los Z_j.

Sea $F_\tau(x) = \tau(z_j)$ cuando $x \in Z_j$.

La definición es correcta porque cada x pertenece a un único Z_j. La función F_τ es acotada porque toma solo a lo más k valores.

Ahora es suficiente probar que $\{\mathcal{F}_\tau\}_{\tau \in T}$ es una, digamos 2ε - red para el conjunto $\mathcal{F}$.

Dado $F \in \mathcal{F}$ arbitrario tenemos que encontrar τ tal que para cada $x \in K$ se cumpla $d(F(x), F_\tau(x)) < \varepsilon$.

Tenemos que definir el valor $\tau(z_j) \in \mathcal{P}$ para cada $z_j \in \mathcal{Z}$, $1 \leq j \leq k$. Tomamos entonces $F(z_j) \in \mathcal{P}$ y buscamos p_i para el cual $d(F(z_j), p_i) < \varepsilon$.

Luego definimos $\tau(z_j) = p_i$. Finalmente hacemos estimaciones para $x \in Z_j$, recordando que $d(F(x), F(z_j)) < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} d(F(x), F_\tau(x)) &= d(F(x), p_i) \leq d(F(x), F(z_j) + d(F(z_j, p_i) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

$\square$

Vale la pena observar que en la última parte de esta demostración hemos probado un hecho que se puede considerar otra versión de Teorema de Ascoli.

Proposición 9.8. Sea K un espacio compacto y sea Y un espacio métrico. Si $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es una familia equicontinua y para todo $x \in K$ el conjunto $\{F(x) : F \in \mathcal{F}\}$ es totalmente acotado, entonces $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

Entre muchas aplicaciones del Teorema de Ascoli algunas son de caracter general entonces las presentamos como teoremas separados.

Teorema 9.9. Sea $O \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado y sea $K = \overline{O}$. Sea $\mathcal{F}_0 \subset C^{(i)}(K)$ un conjunto acotado. Entonces la cerradura de $\mathcal{F}_0$ en $C(K)$ es compacta.

Demostración. El conjunto F_0 es acotado en el espacio $C^{(i)}(K)$ cuya norma está definida por la fórmula

$$\|f\|_{(1)} = \sup_{x\in K} |f(x)| + \sup_{x\in K} \|f'(x)\|.$$

Existe $A > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}_0$

$$\sup_{x\in K} |f(x)| + \sup_{x\in K} \|f'(x)\| < A.$$

En particular en cada punto $x \in K$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}_0\}$ es acotado en $\mathbb{R}$, entonces totalmente acotado.

Por otro lado tenemos para x, $y \in K$

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{u\in K} \|f'(u)\| \|x - y\| \leq A\|x - y\|,$$

de donde concluimos que la familia es equicontinua.

La familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(K)$ satisface las suposiciones del teorema de Ascoli, entonces es compacta.

□

Ejemplo 9.10. Teorema de Ascoli tiene aplicaciones importantes en la teoría de funciones analíticas. Una de ellas es Teorema de Montel.

Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Una sucesión de funciones $f_n \in \mathbb{C}(\mathbb{D})$ converge a f *casi uniformemente* si para cada $0 < r < 1$ la sucesión de restricciones $f_n|\mathbb{D}_r$ converge a $f|\mathbb{D}_r$ uniformemente.

Esta convergencia no corresponde a una convergencia en un espacio normado, pero sí podemos construir una métrica d en $C(\mathbb{D})$ tal que $d(f_n, f) \to 0$ si sy solo si $f_n \to f$ casi uniformemente.

Sea $r_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ y sea $d_n(f, g) = \sup_{z\in\mathbb{D}_{r_n}} |f(z) - g(z)|$.

A esta métrica, le corresponde la convergencia uniforme sobre el espacio $\mathbb{D}_{r_n}$.

La función d_n es una métrica sobre $C(\mathbb{D}_{r_n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la función definida por

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}$$

es una métrica en $C(\mathbb{D})$.

La convergencia con respecto a esta métrica significa la convergencia casi uniforme.

Denotemos por $A(\mathbb{D})$ tan llamada álgebra del disco, es decir el subespacio de $C(\overline{\mathbb{D}})$ de funciones que son analíticas en $\mathbb{D}$ y continuas sobre su frontera. El espacio $A(\mathbb{D})$ hereda la norma del espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$.

TEOREMA 9.11. (Montel) Sea $\mathcal{F} \subset A(\mathbb{D})$ un subconjunto acotado. Entonces cada sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ tiene una subsucesión f_{n_k} que converge casi uniformemente a una función f acotada y analítica en $\mathbb{D}$.

DEMOSTRACIÓN. Existe $A > 0$ tal que para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ y $f \in \mathcal{F}$ se cumple $|f(z)| \leq A$.

Teorema integral de Cauchy nos permite representar cada elemento de $A(\mathbb{D})$ como $f(z) = \int_{\mathcal{T}} \frac{f(w)dw}{z-w}$, de donde $f'(z) = -\int_{\mathcal{T}} \frac{f(w)dw}{(z-w)^2}$. Para $0 < r < 1$ y $z \in \mathbb{D}_r$ obtenemos

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left|\int_{\mathcal{T}} \frac{f(w)dw}{(z-w)^2}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}dt}{(z-e^{it})^2}\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{it})|dt}{|z-e^{it}|^2} \leq \frac{A}{|1-r|^2}. \end{aligned}$$

La familia $\mathcal{F}_r$ de resticciones al conjunto $\overline{\mathbb{D}_r}$ de los elementos de $\overline{\mathcal{F}}$ es acotada y tiene las derivadas acotadas entonces por Teorema 9.9 la familia $\overline{\mathcal{F}_r}$ es compacta. Existe una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente en $C(\overline{\mathbb{D}_r})$ entonces tiene un límite que es una función analítica en $\mathbb{D}_r$ y continua en $\overline{\mathbb{D}_r}$,.

Aplicamos estos argumentos al caso $r_1 = \frac{1}{2}$ y denotamos por f_n^1 la sucesión obtenida. Para $r_2 = \frac{2}{3}$ existe una subsucesión de (f_n^1) que converge uniformemente en $\mathbb{D}_{r_2}$.

Siguiendo así podemos definir por inducción funciones f_n^k de tal manera que para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión (f_n^k) de variable n es una subsucesión de (f_n^{k-1}) que converge uniformenmente en $\mathbb{D}_{r_k}$ cuando $n \to \infty$. En cada $\mathbb{D}_{r_k}$ la función $f_k = \lim_{n\to\infty} f_n^k$ es una acotada por A y analítica en $\mathbb{D}_{r_k}$. De tal manera obtenemos una sola función f analítica, acotada definida univocamente en todo $\mathbb{D}$.

Vamos a probar que $f_n^n \to f$ casi uniformemente en $\mathbb{D}$. Para $0 < r < 1$ existe $r_k > r$ entonces es suficiente demostrar que f_n^n converge uniformemente sobre cada D_{r_k}.

Existe N_k tal que para $n > N_k$ $|f(z) - f_n^k(z)| < \varepsilon$. Obviamente podemos escoger $N_k > k$. Por la definición de una subsucesión para cada $m > N_k$ el elemento f_m^m es de forma $f_{N_k}^n$ para algún $n > N_k$. Por lo tanto $|f(z) - f_m^m(z)| < \varepsilon$ cuando $m > N_k$.

□

3. Ejercicios

1. Sean X, Y espacios métricos. Para cada $x \in X$ definimos una aplicación $\delta_x\colon BC(X,Y) \to Y$ por la fórmula $\delta_x(f) = f(x)$.
   - Demuestre que δ_x es una aplicación continua.

- Sea $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una familis equicontinua en $x_0 \in X$ si y solo si la aplicación
$$X \ni x \to \delta_x|_{\mathcal{F}} \in BC(\mathcal{F}, Y)$$
es continua en x_0.
- Muestre que si $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua, dicha aplicación es uniformemente continua.

2. ♦ Sea $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$ una familia equicontinua. Sea
$$U = \{x \in X : \{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \text{ es totalmente acotado}\}.$$
Muestre que U es un conjunto abierto y cerrado en X. Supongamos que $U \neq \emptyset$. Muestre que para X compacto y conexo la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada.
3. Sea V un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}$. Sea $k(\cdot,\cdot) \in BC(V \times V)$. Denotamos por K el operador integral definido sobre $CB(U)$ por la fórmula:
$$Kf(x) = \int_V f(x,y)f(y)dy.$$
Demuestre que $K(B(0,1))$ es un conjunto totalmente acotado en $BC(U)$.
4. Sea $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Utilizando Teorema de Ascoli describa los conjuntos compactos en $C(X)$.
5. Para $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ demuestre que $\{f \in C(X) : |f(x)| \leq |x|\}$ es compacto.

Capítulo 10

Teorema de Stone-Weierstrass

El teorema clásico de Weierstrass afirma que cada función real continua sobre un intervalo finito $[a, b]$ se puede aproximar uniformemente por polinomios.

Su generalización, Teorema de Stone-Weierstrass generaliza este resultado en dos aspectos. Resulta que el mismo fenómeno se observa en el espacio de funciones continuas sobre cualquier espacio compacto, si en lugar de los polinomios usamos un álgebra de funciones que contiene a la función constante y separa los puntos del dominio.

Cuando consideramos el espacio de funciones continuas complejas hay que añadir otra condición: de que dicha álgebra es invariante bajo la operación de la conjugación compleja.

Como vemos, la estructura algebraica del espacio de funciones continuas tiene papel importante en esta área, entonces dedicamos la primera sección del capítulo a la presentación de elementos de estructura del espacio $C(K)$.

1. La retícula de funciones continuas

Sea (K, d) un espacio métrico compacto y sea $C(K)$ el espacio de todas las funciones continuas reales sobre K.

El conjunto $C(K)$ es:

1. un espacio normado con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Además,

2. $C(K)$ es un álgebra con el producto de la multiplicación punto por punto:

$$fg(x) = f(x)g(x).$$

La multiplicación considerada como operación

$$C(K) \times C(K) \ni (f, g) \to fg \in C(K)$$

es continua. La desigualdad $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ conduce a

$$\begin{aligned} \|fg - hk\|_\infty &= \|fg - fk + fk - hk\|_\infty \leq \|f(g-k)\|_\infty + \|(f-h)k\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty \|g - k\|_\infty + \|k\|_\infty \|f - h\|_\infty. \end{aligned}$$

La convergencia $(h_n, k_n) \to (f, g)$ en $C(K) \times C(K)$ implica efectivamente la convergencia $h_n k_n \to fg$.

3. $C(K)$ es una *retícula* lo que significa, que para cada $f \in C(K)$ la función

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$$

pertenece al espacio $C(K)$.

La misma propiedad del espacio $C(K)$ se puede expresar en otra forma.

Si definimos

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0, \end{cases}$$

obtenemos las relaciones $f^- = -(-f)^+$ y $f = f^+ - f^-$, mientras que $|f| = f^+ + f^-$.

De tal manera, el hecho de que $C(K)$ es una retícula significa que es un espacio cerrado con respecto a cualquiera de las operaciones: $f \to f^+$, $f \to f^-$ o $f \to |f|$.

Sean f, $g \in C(K)$ y sean

$$f \wedge g(x) := \text{mín}\{f(x), g(x)\},$$

$$f \vee g(x) := \text{máx}\{f(x), g(x)\}.$$

Observemos la relación que tienen estas operaciones con las anteriores. A saber:

$$f \wedge g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|,$$

$$f \vee g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|.$$

La forma más sencilla de probar estas relaciones es verificarlas punto por punto considerando los casos $f(x) \leq g(x)$ y $f(x) > g(x)$.

El hecho de que $C(K)$ es una retícula significa que las operaciones $\wedge$, $\vee$ actuan dentro de este espacio.

Teorema 10.1. Cada subálgebra cerrada de $C(X)$ es una retícula.

Demostración. El primer paso en la demostración es la prueba que la función $[0, 1] \ni t \to \sqrt{t} \in \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios de la variable t. Este hecho es interesante por si mismo, cuanto más que la prueba es constructiva.

Lema 10.2. Existe una sucesión de polinomios p_n que converge a la función $\sqrt{t}$ uniformemente sobre $[0, 1]$.

Demostración del Lema. Definimos $p_1(t) = \frac{t}{2}$, $p_2(t) = t - \frac{t^2}{8}$, y luego $p_{n+1}(t) = p_n(t) + (t - p_n^2(t))/2$.

Primero veamos que en el dominio $[0, 1]$ se cumple $p_n(t) \leq 1$. Para este fin calculamos

$$1 - p_{n+1}(t) \;=\; 1 - p_n(t) - (t - p_n^2(t))/2 = \frac{1}{2}(1 - p_n(t))^2 + \frac{1}{2}(1 - t) \geq 0,$$

mientras $0 \leq t \leq 1$. Al mismo tiempo la sucesión p_n es monótona creciente. Lo probamos por inducción.

Efectivamente, se cumple $p_2(t) - p_1(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} \geq 0$. Luego

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= p_n + \frac{1}{2}(t - p_n^2) - p_{n-1} - \frac{1}{2}(t - p_{n-1}^2) \\ &= (p_n - p_{n-1})(1 - \frac{1}{2}(p_n + p_{n-1}). \end{aligned}$$

El segundo factor es no negativo en $[0, 1]$, entonces, si por la hipótesis inductiva tenemos $p_n - p_{n-1} \geq 0$, la fórmula implica $p_{n+1} - p_n \geq 0$ para todo n. La sucesión p_n es monótona creciente, acotada por el valor 1, entonces converge puntualmente. Por Lema de Dini obtenemos que la convergencia es uniforme a una función continua, no negativa $q(t)$.

Queda por probar que $q(t) = \sqrt{t}$. En la relación $p_{n+1}(t) = p_n(t) + (t - p_n^2(t))/2$ pasamos al límite $n \to \infty$ y obtenemos $q(t) = q(t) + (t - q(t)^2)/2$, que implica inmediatamente $q(t) = \sqrt{t}$.

$\diamondsuit$

Ahora, si $f \in C(K)$ y p es un polinomio, denotamos

$$p(f)(t) = p(f(t)).$$

Cuando una sucesión de polinomios p_n converge uniformemente sobre el ontervalo $[a, b]$ y $f \in C(K)$ toma valores en el mismo intervalo, la función $p_n(f)$ converge uniformemente sobre K.

Para cada $f \in C(K)$ la función $f/\|f\|_\infty$ toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Tomando la sucesión de polinomios p_n convergente a $\sqrt{t}$ en este intervalo obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{f(t)^2}{\|f\|_\infty^2}\right) = \sqrt{\frac{(f(t)^2}{\|f\|_\infty^2}} = \frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty},$$

donde la convergencia es uniforme sobre K.

Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(K)$ que contiene a la función constante y $f \in \mathcal{A}$, para cada polinomio p el elemento $p(f^2)$ pertenece a $\mathcal{A}$. Luego, como hemnos visto $|f|/\|f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right)$.

Si $\mathcal{A}$ es además cerrada, el valor absoluto de f pertenece a $\mathcal{A}$ como límite uniforme de elementos de $\mathcal{A}$.

$\square$

Teorema 10.1 implica que cada subalgebra cerrada de $C(K)$ es cerrada también con tespecto a las operaciones $\wedge$ y $\vee$.

Terminamos los preparativos relacionados con Teorema de Stone-Weierstrass con un resultado muy sencillo pero importante.

Proposición 10.3. Sea $\mathcal{A}$ una subalgebra de $C(K)$. Entonces la cerradura de $\mathcal{A}$ en $C(K)$ es también un álgebra.

Demostración. Si $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, existen $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ y $g_g \to g$. Como hemos visto en la misma sección, $f_n g_n \to fg$, entonces $fg \in \overline{\mathcal{A}}$. El espacio $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra.

$\square$

Recordemos que una familia $\mathcal{F} \subset C(K)$ *separa los puntos de* K, si para cada par de puntos $x \neq y$ en K existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

2. Teorema de Stone-Weierstrass. Versión real.

Teorema 10.4. Sea K un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{A}$ es una subalgebra de $C(K)$ que contiene a la función 1 y separa los puntos de K, entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C(K)$.

Demostración. Primero, dados dos números reales $a \neq b$ y $x \neq y$ en K, construimos una función $h \in \mathcal{A}$ tal que $h(x) = a$, $h(y) = b$. Existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$, porque la familia $\mathcal{A}$ separa los puntos del dominio. La función

$$h(u) = a + \frac{(b-a)(g(u) - g(x))}{g(y) - g(x)}$$

tiene las propiedades deseadas. (Solo en este momento usamos la suposición de que $\mathcal{A}$ contiene a la función constante.)

Sea $f \in C(K)$ y sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar un elemento g del álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ que satisfaga $f - \varepsilon \leq g \leq f + \varepsilon$.

Fijamos $x_0 \in K$ y sea $z \in K$. Buscamos $h_z \in \mathcal{A}$ tal que $h_z(x_0) = f(x_0)$ y $h_z(z) = f(z)$. La función $h_z - f$ es continua y se anula en z, entonces existe un radio $r(z) > 0$ tal que para y en la bola $B(z, r(z))$ se cumple $h_z(y) - f(y) < \varepsilon$.

Después de haber construido las funciones h_z y los radios correspondientes $r(z)$ para todos $z \in K$, representamos $K = \bigcup_{z \in K} B(z, r(z))$.

El espacio K es compacto, así que esta cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita:

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} B(z_j, r(z_j)).$$

Sea $g_{x_0} = h_{z_1} \wedge \cdots \wedge h(z_n)$. Esta función pertenece a $\overline{\mathcal{A}}$ y satisface las condiciones $g_{x_0} = f(x_0)$ y $g_{x_0}(y) < f(y) + \varepsilon$ para todos $y \in K$. Por la continuidad de las funciones existe $R(x_0)$ tal que para $u \in B(x_0, R(z_0))$ se cumple $f(u) - \varepsilon < g_{x_0}(u)$.

Ahora consideramos la familia de todas las funciones g_{x_0} y los radios $R(x_0) >$ para todos $x_0 \in K$.

La cubierta $K = \bigcup_{x \in K} B(x, R(x))$ tiene una subcubierta finita $K = \bigcup_{m=1}^{k} B(x_m, R(x_m))$.

La función $g = g_{x_1} \vee \cdots \vee g_{x_k}$ que es elemento de $\overline{\mathcal{A}}$ satisface para $u \in K$ arbitrario $f(u) - \varepsilon < g(u) < f(u) + \varepsilon$.

Los elementos del álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ aproximan a cada elemento de $C(K)$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$ y, como $\overline{\mathcal{A}}$ es cerrado en esta norma, obtenemos

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K).$$

$\square$

3. Teorema de Stone-Weierstrass. Versión compleja.

El hecho de que las funciones consideradas en la sección anterior eran reales fue usado en la demostración del teorema. Esto no significa todavía que realmente la suposición era necesaria. Para darse cuenta de que en el caso de álgebra $C(K, \mathbb{C})$ se necesita agregar otras suposiciones para obtener subálgebras densas, veamos un ejemplo clásico.

Ejemplo 10.5. Tomemos como dominio de funciones el disco unitario cerrado en $\mathbb{C}$: $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Sea $\mathcal{A}$ el algebra de funciones polinomiales de variable z restringidas al disco con la norma $\|\cdot\|_\infty$ que es una subálgebra en $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ que contiene a las funciones constantes y obviamente separa los puntos del disco. Las funciones que son límites uniforme sde elementos de $\mathcal{A}$ son analíticas en el interior del disco. Obviamente no todos los elementos de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ son analíticos, entonces $\overline{\mathcal{A}} \neq C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$.

$\diamondsuit$

Teorema 10.6. Sea K un espacio métrico compacto. Una subálgebra $\mathcal{A} \subset C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ es densa si y solo si separa los puntos de K, contiene a las funciones constantes y es cerrada con respecto a la operación de la conjugación compleja $f \to \overline{f}$.

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es cerrada respecto a la conjugación compleja, las operaciones de tomar las partes real e imaginaria de funciones:

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \qquad \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}),$$

actuan también dentro de $\mathcal{A}$.

Si denotamos $\widetilde{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{A} : \overline{f} = f\}$, se cumple $\mathrm{Re}(\mathcal{A}) \cup \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$.

El espacio $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra real, subalgebra de $C(K)$. Además, $\widetilde{\mathcal{A}}$ separa los puntos de K, porque para $x \neq y$ existe $f \in \mathcal{A}$, que separa eatos puntos. Tenemos $f(x) = \mathrm{Re}\, f(x) + i\, \mathrm{Im}\, f(x) \neq \mathrm{Re}\, f(y) + i\, \mathrm{Im}\, f(y)$ y por lo tanto $\mathrm{Re}\, f(x) \neq \mathrm{Re}\, f(y)$ ó $\mathrm{Im}\, f(x) \neq \mathrm{Im}\, f(y)$. En qualquier caso algún elemento de $\widetilde{\mathcal{A}}$ separa los puntos.

Por Teorema 10.4 obtenemos $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}} = C(X)$. Para elemento arbitrario $g = \mathrm{Re}\, g + i\, \mathrm{Im}\, g$ existen $f_1,\ f_2 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ tales que $\|\mathrm{Re}\, g - f_1\|_\infty < \varepsilon/2$ y $\|\mathrm{Im}\, g - f_2\|_\infty < \varepsilon/2$, de tal manera que $\|g - (f_1 + i\, f_2)\|_\infty < \varepsilon$, donde $f_1 + i\, f_2 \in \mathcal{A}$.

□

4. Aplicaciones

Teorema de Stone-Weierstrass proporciona un método de construir subconjuntos densos en espacios de funciones lo que crea una relación con el estudio de la separabilidad de estos espacios.

TEOREMA 10.7. Sea (K, d) un espacio métrico compacto. El espacio $C(K)$ es separable.

DEMOSTRACIÓN. El espacio K es separable de acuerdo con Teorema 7.12. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en K y sea $f_n(x) = d(x, x_n)$. Los elementos de la familia defunciones f_n, $n \in \mathbb{N}$ son continuas y separan los puntos de X.

Efectivamente, si $d = d(x, y)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < d/3$. Por la desigualdad de triangulo $f_n(y) = d(y, x_n) \geq d(x, y) - d(x, x_n) > d - d/3 = \frac{2}{3}d$. La función f_n separa los puntos x y y porque $f_n(y) - f_n(x) > \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}d$.

Sea $\mathcal{A}$ el espacio vectorial generado linealmente por funciones de forma

$$f_{n_1}^{k_1} \cdots f_{n_N}^{k_N}, \tag{4}$$

donde $n_j,\ k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Visiblemente la suma y producto de dos combinaciones siguen teniendo la misma forma, entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones, que contiene a funciones constantes.

Por Teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}$ es denso en $C(K)$. Sea $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ el subconjunto de estos elementos de $\mathcal{A}$ que son combinaciones lineales con coeficientes racionales.

Si $g \in \mathcal{A}$ se puede representar en forma $g = \sum_{j=1}^m a_j g_j$, donde cada función g_j es de forma (4), podemos encontrar $q_1, \ldots, q_m$ tales que

$|a_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{m\|g_j\|_\infty}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Se sigue

$$\|g - \sum_{j=1}^{m} q_j g_j\|_\infty = \|\sum_{j=1}^{m}(a_j - q_j)g_j\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j - q_j|\|g_j\|_\infty < \varepsilon.$$

El espacio $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ es denso en $\mathcal{A}$ y por lo tanto es denso en $C(K)$.

Queda por probar que el conjunto $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ es numerable.

Un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ es numerable si y solo si su base es numerable. La base de $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ está formada por funciones de forma (4). Es suficiente demostrar que el número de estas funciones es numerable. Cada una de estas funciones está determinada por dos sistemas de números enteros no negativos $(n_1, \ldots, n_N)$, $(k_1, \ldots, k_N)$, donde N recorre el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

La base del espacio no es más numerosa que $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2N}$ y este espacio es numerable como afirman Corolario 5.4 y 5.5.

□

Los teoremas famosos como Teorema de Stone-Weierstrass deben su importancia al hecho de que encuentran muchas aplicaciones en análisis y en otras áreas de matemáticas. Sin embargo la mayoría de las aplicaciones no consiste en el uso directo del Teorema sino necesitan la creación de un vínculo - un "puente" entre el problema original y el Teorema.

Tratandose del Teorema original de Weierstrass podemos formular varios problemas a los cuales a primera vista no se aplica el Teorema.

Si una función continua sobre el intervalo $[-1, 1]$ se anula en cero, ¿es posible aproximarla solo por polinomios que se anulan en cero?

Si la función del espacio $C[-1, 1]$ es simétrica (o antisimétrica), ¿podemos aproximarla por polinomios simétricos? (resp. antisimétricos?)

Las funciones que se anulan en cero, sí forman un álgebra, pero dicha álgebra no contiene la unidad y sus elementos no separan los puntos del intervalo $[-1, 1]$. Las funciones simétricas tampoco separan los puntos, mientras que las funciones antisimétricas ni siquiera forman un algebra.

Sin embargo la solución de estos problemas está a mano gracias al Teorema de Weierstrass.

Teorema 10.8. Sea K un espacio métrico compacto y sea $x_0 \in K$. Sea $\mathcal{A} \subset C(K)$ un algebra que separa los puntos de K y contiene a la función constante 1. Si $\mathcal{A}_0 = \{f \in \mathcal{A} : f(x_0) = 0\}$, entonces

$$\overline{\mathcal{A}_0} = \{f \in \mathcal{A} : f(x) = 0\}.$$

Demostración. Sea $f \in C(K)$ tal que $f(x_0) = 0$. Por Teorema de Stone-Weierstrass existen $f_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente.

En particular $f_n(x_0) \to 0$. Sean $g_n = f_n - f_n(x_0)$. Se cumple entonces $g_n \in \mathcal{A}_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g_n \to f$ uniformemente.

$\square$

Otros problemas mencionados arriba también se pueden formular y resolver en forma más general. Para una función f sobre un espacio vectorial E denotemos $\breve{f}(x) = f(-x)$. Una función es *simétrica o par* si $\breve{f} = f$ y *antisimétrica o impar* si $\breve{f} = -f$.

Teorema 10.9. Sea K un conjunto compacto en un espacio normado E y tal que $-K = K$. Sea $\mathcal{A} \subset C(K)$ un algebra que separa los puntos de K, contiene a la función 1 y satisface $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \breve{f} \in \mathcal{A}$.

Cada función simétrica (antisimétrica) de $C(K)$ se puede aproximar uniformemente por elementos simétricos (resp. antisimétricos) de $\mathcal{A}$.

Demostración. Cada función f sobre K se puede representar en forma única como suma de componente simétrica é antisimétrica:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f_s(x) + f_a(x).$$

Una función es simétrica si $f = f_s$ y es antisimétrica si $f = f_a$.

Sean $f_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente. Sea sigue, $(f_n)_s \to f_s$ y $(f_n)_a \to f_a$. Si f es simétrica obtenemos $f = f_s = \lim_{n\to\infty}(f_n)_s$ y en caso de una función antisimétrica $f = f_a = \lim_{n\to\infty}(f_n)_a$.

$\square$

La compacidad del dominio es una suposición importante para la validez del Teorema de Stone-Weierstrass. Sin embargo, en el caso de algunos dominios no compactos el Teorema proporciona resultados interesantes sobre la aproximación uniforme de funciones continuas.

Antes de presentar estos corolarios formulamos un lema sencillo sobre la convergencia uniforme.

Lema 10.10. Sea (X, d_X) un espacio métrico y sea (f_n) una sucesión de funciones acotadas sobre X convergente uniformemente a la función f. Sea (Y, d_Y) y sea $\phi\colon Y \to X$ una aplicación suprayectiva. Entonces la sucesión $f_n \circ \phi$ converge uniformemente a $f \circ \phi$.

Sea $C_\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}$. El espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es obviamente una subalgebra cerrada del álgebra (vea Ejercicio 10.11) $BC(\mathbb{R})$ que no contiene a la función 1.

Teorema 10.11. Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa los puntos de $\mathbb{R}$ y cuyos elementos no tienen ningún cero común en $\mathbb{R}$. Entonces $\overline{\mathcal{A}} = C_\infty(\mathbb{R})$.

Demostración. La función de variable compleja $\tau(z) = \frac{iz-1}{iz+1}$ transforma el eje real en la circunferencia $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Su imagen es $\mathbb{S} \setminus \{1\}$ y cuando $x \to \pm\infty$ se tiene $\tau(x) \to 1$.

La función inversa que es de forma $\tau^{-1}(w) = \frac{i(w+1)}{w-1}$ satisface entonces $e^{i\alpha} \to 1 \Rightarrow |\tau^{-1}(e^{i\alpha})| \to \infty$. De tal manera τ define un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}\setminus\{1\}$ y además para $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ se cumple $\lim_{z\to 1} f \circ \tau^{-1}(z) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Para $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ la composición $f \circ \tau^{-1}$ es una función continua en $\mathbb{S} \setminus \{1\}$ que tiene límite cero en 1, entonces se extienda a una función continua sobre $\mathbb{S}$ y nula en 1.

Denotando $C_1(\mathbb{S}) = \{f \in \mathbb{C}(\mathbb{S}) : f(1) = 0\}$ definimos una aplicación $T\colon C_\infty(\mathbb{R}) \to C_1(\mathbb{S})$ por la fórmula

$$Tf(z) = \begin{cases} f(x), & z = \tau(x),\ x \in \mathbb{R}, \\ 0, & z = 1. \end{cases}$$

Visiblemente T es una isometría lineal suprayectiva, porque su inverso es el operador que asocia a $g \in C_1(\mathbb{S})$ la composición $g \circ \tau$.

Las funciones de forma Tf, $f \in \mathcal{A}$ forman en $C_1(\mathcal{S})$ una subalgebra $\mathcal{B}$ que separa los puntos de $\mathbb{S}$. (Suponiendo que en ningún punto de $\mathbb{R}$ se anulan todos los elementos de $\mathcal{A}$ hemos asegurado que el punto 1 se puede separar de otros elementos del círculo por argún elemento Tf, $f \in \mathcal{A}$).

Por teorema 10.8 el álgebra $\mathcal{B}$ es densa en $C_1(\mathbb{S})$ y como T es una isometría, $\mathcal{A}$ es denso en $C_\infty(\mathbb{R})$.

□

Definición 10.12. Un espacio métrico (X, d) se llama *σ-compacto* si existe una familia numerabla de conjuntos compactos $K_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

El ejemplo principal de un espacio σ-compacto es el espacio euclidiano que se puede representar como $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{B(0, m)}$.

Definición 10.13. Una sucesión de funciones (f_m) continuas sobre un espacio σ-compacto $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$ converge a la función f *casi uniformemente* si para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K_m} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

En otras palabras, $f_n \to f$ casi uniformemente si para cada $m \in \mathbb{N}$ $f_n|_{K_m} \to f|_{K_m}$ uniformemente.

Teorema de Stone-Weierstrass conduce a un teorema sobre la aproximación casi uniforme de funciones continuas sobre un espacio σ-compacto.

Teorema 10.14. Sea X un espacio σ-compacto y sea $\mathcal{A} \subset C(X)$ una subálgebra unital que separa los puntos de X. Para cada $f \in C(X)$ existe una sucesión $f_n \in \mathcal{A}$ tal que $f_n \to f$ casi uniformemente.

Demostración. Sea $C_m = \bigcup_{j=1}^m K_j$. Obviamente los conjuntos C_m son compactos y $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$.

Denotamos: $\mathcal{A}_m = \{f|_{C_m} : f \in \mathcal{A}\}$.

Por Teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}_m$ es una subálgebra densa en $C(C_m)$. Existe $f_m \in \mathcal{A}$ tal que

$$\sup_{x\in C_m} |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{m}.$$

Así, inductivamente ubtenemos una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$. Gracias a que C_m es una sucesión creciente se sigue para cada $m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\sup_{x\in C_m} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

La sucesión f_n converge casi uniformemente con respecto a la familia de compactos C_m. Por el hecho de que $K_m \subset C_m$ la sucesión converge casi uniformemente con respecto a la familia original K_m.

$\square$

La convergencia casi uniforme, así como la hemos definido no corresponde a la convergencia con respecto a una norma determinada sino a un sistema de normas en los espacios $C(K_m)$. Sin embargo sí se puede introducir en el espacio $C(X)$ una métrica D tal que la convergencia casi uniforme $f_n \to f$ tenga lugar si y solo si $D(f_n, f) \to 0$.

Esta métrica se define de la manera siguiente: sea $\|f\|_n = \sup_{x\in K_m} |f(x)|$ y sea

$$D(f,g) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \frac{\|f-g\|_m}{1 + \|f-g\|_m.}$$

Utilizando los resultados de Problemas resueltos 12.2, 12.3 y 12.7 es fáacil demostrar que efectivamente D es una métrica en $C(X)$ y que la convergencia en el espacio $(C(X), D)$ coincide con la convergencia casi uniforme.

5. Ejercicios

1. Encuentre una subálgebra de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa los puntos de $\mathbb{R}$ y cuyos elementos se anulan en cero.

2. Demuestre que el espacio vectorial de funciones de forma $p(x)e^{-a^2x^2}$, donde p es un polinomio y $a \in \mathbb{R}$ es un número fijo, es denso en $C_\infty(\mathbb{R})$.
3. Sea $f \in C[a,b]$. Demuestre que si para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$, entonces $f = 0$.
4. Una función f sobre $\mathbb{R}$ se dice periodica con periodo a si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x+a) = f(x)$. Demueste que cada función continua, periodica con periodo 2π se puede aproximar uniformemente por combinaciones lineales de funciones 1, $\operatorname{sen} nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$.
5. Demuestre que cada función periódica continua es acotada é úniformemente continua.
6. Demuestra que cada función continua sobre el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ se puede aproximar uniformemente por funciones de forma $P(z, \overline{z})$, donde P es un polinomio de dos variables.
7. Demuestre que los polinomios de forma $P(z)$ no son densos en $C(\overline{\mathbb{D}})$.
8. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es separable.
9. Obtenga las versiones complejas de los teoremas de la última sección.
10. Sean X, Y espacios métricos compactos. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de funciones sobre $X \times Y$ de forma
$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x)\psi_i(y),$$
donde $\psi_i \in C(X)$, $\psi_i \in C(Y)$. Demueste que $\mathcal{A}$ es denso en $C(x \times Y)$.
11. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es cerrado en $BC(\mathbb{R})$.
12. Demuestre Lema 10.10.
13. Demueste que para cada espacio σ-compacto X la función $D(\cdot,\cdot)$ definida al final del cap´ítulo es una métrica en el espacio $C(X)$ y que la convergencia en esta métrica coincide con la convergencia casi uniforme.
14. ♦ Formule y demuestre la versión vectorial de Teorema de Weierstrass para el espacio $C(K, \mathbb{R}^m)$, donde K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 11

Sugerencias y soluciones

1. Espacios métricos

1. ♦ En el espacio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la función:

$$d(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m. \end{cases}$$

Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{N}$.

En el espacio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la función:

$$d(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m. \end{cases}$$

Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{N}$.

Solución. Únicamente la desigualdad de triangulo necesita la demostración. Si entre los tres números m, n, k dos de ellos coinciden, la desigualdad 4° se cumple.
Suponemos que los tres números son distintos y debemos probar que

$$1 + \frac{1}{n+m} \leq 1 + \frac{1}{n+k} + 1 + \frac{1}{k+m},$$

lo que equivale a que

$$\frac{1}{n+m} \leq 1 + \frac{1}{n+k} + \frac{1}{k+m}$$

y finalmente a

$$(n+k)(k+m) \leq (n+m)(n+k)(k+m) + (n+m)(k+m) + (n+m)(n+k).$$

Desarrollando la expresión que aparece del lado izquierdo obtenemos el valor

$$nk + k^2 + mn + km.$$

En la expresión del lado derecho entre otros términos positivos sí aparecen el valor nk, el valor km y el valor nm. Además aparece el término nk^2 que no es menor de k^2. Sin hacer más cálculos vemos que la desigualdad es cierta.
■

2. Demuestre que las siguientes funciones son métricas en el espacio $\mathbb{R}^n$ y en el caso de $\mathbb{R}^2$ traza las bolas unitarias correspondientes.
   a. $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|$.
   b. $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \text{máx}_{1 \le j \le n} |a_j - b_j|$.
   c. $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j |a_j - b_j|^2}$, donde $c_j > 0$, $1 \le j \le n$.

   Sugerencia:
   En los tres casos se trata de métricas asociadas a una norma. Es suficiente demostrar que las funciones
   a. $\|\mathfrak{a}\| = \sum_{j=1}^n |a_j|$,
   b. $\|\mathfrak{a}\| = \text{máx}_{1 \le j \le n} |a_j|$,
   c. $\|\mathfrak{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j |a_j|^2}$
   son normas.
   Únicamente la desigualdad de triangulo en el caso c. no es obvia. Sin embargo, conocemos esta desigualdad en caso de la norma euclidiana

$$(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{j=1}^n |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j=1}^n |b_j|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

   Aplícala a los vectores
   $\mathfrak{a}' = (\sqrt{c_1}a_1, \sqrt{c_2}a_2, \dots, \sqrt{c_n}a_n)$ *y* $\mathfrak{b}' = (\sqrt{c_1}b_1, \sqrt{c_2}b_2, \dots, \sqrt{c_n}b_n)$.

3. La métrica *del bosque.*
   Demueste que la siguiente función en el plano es una métrica.
   Para $\mathfrak{a} = (a_1, a_a)$, $\mathfrak{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sea

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} |a_1| + |a_1 - b_1| + |b_2|, & a_1 \ne b_1, \\ |a_2 - b_2|, & a_1 = b_1. \end{cases}$$

   Dibuja la bola centrada en el punto $(1, 1)$ y de radio 2.
   Sugerencia:
   Como sugerencia agregamos el comentario sobre la interpretación geométrica de esta métrica.
   El eje horizontal X se interpreta como el terreno de un bosque compuesto de "árboles": los ejes verticales. (Un bosque bastante espeso).
   Si los puntos $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ se encuentran sobre la misma recta vertical (sobre el mismo "árbol"), la distancia entre ellos se mide a lo largo del "árbol": $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |a_2 - b_2|$. *Cuando $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ se encuentran sobre "árboles"distintos ($a_1 \ne b_1$), para medir su distancia tenemos que bajar del "arbol"al terreno recorriendo la distancia $|a_2|$, luego sobre el terreno cubrimos la distancia entre los dos "árboles"que es igual a $|a_1 - b_1|$ y finalmente llegamos al punto $\mathfrak{b}$ recorriendo a lo largo del "árbol"la distancia $|b_2|$. En este caso entonces* $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |a_1| + |a_1 - b_1| + |b_2|$.

4. Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$, explique su nombre "la metrica de puente" y traza la bola centrada en $(1, -1)$ de radio $1 + \sqrt{2}$.

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{si } (a_2 \geq 0,\ b_2 \geq 0) \\ & \text{ó } (a_2 < 0,\ b_2 < 0), \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si } (a_2 \geq 0,\ b_2 < 0) \\ & \text{ó } (a_2 < 0,\ b_2 \geq 0). \end{cases}$$

Sugerencia:
El eje horizontal tiene el papel del "río" y el punto $(0, 0)$ es el "puente". Si los puntos $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ se encuentran del mismo lado del "río", medimos su distancia eucidiana. Si estos puntos están de lados opuestos del "río", para llegar del punto $\mathfrak{a}$ al punto $\mathfrak{b}$ tenemos que llegar primero al puente recorriendo la distancia $\|\mathfrak{a}\|$ y luego cubrir la distancia del puente a $\mathfrak{b}$ que es igual a $\|\mathfrak{b}\|$.

5. Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$:

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{si existe } t \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} = t\mathfrak{b}, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si tal número no existe.} \end{cases}$$

Sugerencia:
Si dos puntos son proporcionales, su distancia coincide con $\|a - \mathfrak{b}\|$, es decir con su distancia euclidiana. En caso contrario la distancia es igual a $\|\mathfrak{a}\| + \mathfrak{b}\|$.
Para probar la desigualdad de triangulo

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leq d(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + d(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$$

debemos considerac los casos siguientes:
a) los tres puntos son proporcionales y entonces la desigualdad coincide con la del eje real,
b) los puntos $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son proporcionales y $\mathfrak{c}$ es linealmente independiente. En este caso la desigualdad toma la forma

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{c}\| + \|b\| + \|\mathfrak{c}\|$$

así que es obvia.
c. $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$ son proporcionales y $\mathfrak{a}$ es independiente. La desigualdad que queremos probar dice:

$$\|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{c}\| + \|\mathfrak{b} - \mathfrak{c}\|$$

y esta se verifica fácilmente.

6. Traza las siguientes bolas en el espacio métrico del ejercicio anterior: $B((0, 0), 1)$, $\quad B((1, 1), 1)$, $\quad B((1, 1), 2)$.

7. En el espacio $\mathbb{R}^3$ con la norma $\|(x,y,z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$ describa la bola unitaria $B(0,1)$.

   Sugerencia:
   Entre muchos posibles métodos de describir esta bola, podemos empezar investigando su intersección con el octante $O = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.
   La condición $\|(x,y,z)\|_1 < 1$ *se vuelve más sencilla tomando la forma:* $x + y + z < 1$. *Como* $O \cap B(0,1)$ *obtenemos el conjunto de puntos de* O *por debajo del plano de ecuación* $z = 1 - x - y$.
   Recorriéndo otros octantes del espacio obtenemos como $B(0,1)$ *el octágono de vértices* $(1,0,0)$. $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ *y que tiene forma de dos pirámides pegados con sus bases cuadradas.*

8. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2,\ x \neq 1\}$. Sea

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

   Demuestre que d es una métrica en A.

   Sugerencia:
   El espacio (A,d) *es muy peculiar. Aunque, aparentemente* A *consta de dos piezas separadas, el espacio es conexo. (Vea Capítulo 12, Problema 12.x)*
   Visiblemente la función es no negativa en su dominio, es simétrica y se anula únicamente para $x = y$.
   En forma explícita $A = [-2,-1] \cup [1,2]$. *En cada conjunto por separado la métrica está definida como la métrica natural del eje real. Queda por probar la desigualdad de triangulo* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *en los casos, cuando los argumentos* x, y, z *no pertenecen al mismo intervalo. Observe que la distancia no cambia si cambiamos a la vez los signos de ambos argumentos. Por lo tanto es suficiente considerar dos casos:*
   1. $x = 1 + u$, $y = 1 + v$ *con* u, $v \geq 0$, $z \in [-2,-1]$.
   2. $x = 1 + u$, y, $z \in [-2,-1]$. *Escriba las desigualdades deseadas en cada caso y verás que se cumplen trivialmente.*

9. Demuestre que si una bola de radio 7 está contenida en una bola de radio 3, ambas son iguales.

   Sugerencia:
   Suponemos que $B(x,7) \subset B(y,3)$. *Tomamos* $u \in B(y,3)$ *y queremos probar que* u *está en la bola* $B(x,7)$, *es decir que* $d(u,x) < 7$. *Por suposición* $d(x,y) < 3$. *Aplica la desigualdad de triangulo.*
   Busca una versión mas general de este ejercicio.

10. Sea (X, d) un espacio métrico. En el mismo conjunto $X \times X$ definimos

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{cuando} \quad d(x,y) \le 1, \\ 1, & \text{cuando} \quad d(x,y) > 1. \end{cases}$$

Demuestre que $\tilde{d}$ es una métrica en X y que $x_n \to x$ en (X, d) si y solo si $x_n \to x$ en $(X, \tilde{d})$.

Sugerencia:
Partimos de la desigualdad detriangulo para la métrica original d:

$$d(x,y) \le d(x,u) + d(u,y).$$

Primero pensamos en el caso de $d(x,y) \ge 1$, cuando $\tilde{d}(x,y) = 1 \le d(x,y)$. Si al menos uno e los valores $d(x,u)$, $d(u,y)$ supera a 1, la desigualdad $1 = \tilde{d}(x,y) \le \tilde{d}(x,u) + \tilde{d}(u,y)$ es obvia, porque del lado derecho tambén aparece el valor 1.
En caso contrario

$$\tilde{d}(x,y) = 1 \le d(x,y) \le d(x,u) + d(u,y) = \tilde{d}(x,u) + \tilde{d}(u,y).$$

El caso de $d(x,y) < 1$ es más sencillo todavía, entonces hazlo tu mismo.

11. ♦ Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$, x, $y \in X$. Demuestre que δ es una métrica en X.

Solución. Las propiedades 1°, 2°, 3° de la métrica se cumplen visiblemente. Queda por probar la desigualdad de trángulo 4°:

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,u)}{1+d(x,u)} + \frac{d(u,y)}{1+d(u,y)}$$

Para este fin es suficiente demostrar que, dados los números nonegativos a, b, c tales que $a \le b + c$, se cumple

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Partimos de la desigualdad $a \le b + c$ y continuamos:

$$\begin{aligned} a(1+b)(1+c) &= a + ab + ac + abc \\ &\le b + c + ab + ac + abc + bc + abc + bc \\ &= b(1+a)(1+c) + c(1+b)(1+a). \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad entre $(1+a)(1+b)(1+c)$ obtenemos la fórmula deseada.

12. ♦ Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa que se anula únicamente en cero. Sea $\delta(x, y) = f(x - y)$. ¿Cuando δ es una métrica?

    Solución. Ya hemos asegurado que δ es una función no-negativa que se anula únicamente cuando $x = y$. Para asegurar la propiedad 3° de la métrica tenemos que suponer que f es simétrica, es decir $f(-x) = f(x)$.
    Supungamos ahora que δ es una métrica, es decir $f(x - y) \leq f(x - u) + f(u - y)$ para x, y, $u \in \mathbb{R}$ arbitrarios. En particular, poniendo $u = 0$ obtenemos $f(x - y) \leq f(x) + f(-y)$ para todos x, y, entonces también $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.
    La última desigualdad es entonces la condición necesaria para que δ fuera una métrica.
    Supongamos que f es positiva, simétrica, se anula únicamente en cero y satisface $f(a + b) \leq f(a) + f(a)$ para todos a, $b \in \mathbb{R}$.
    Tomando $a = x - u$, $b = u - y$ se sigue

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= f(x - y) = f(a + b) \leq f(a) + f(b) = f(x - u) + f(u - y) \\ &= \delta(x, u) + \delta(u, y). \end{aligned}$$

    La función δ es una métrica.
    Hemos obtenido el siguiente resultado:
    Una función de forma $\delta(x, y) = f(x - y)$ define una métrica sobre el eje real si y solo si es no-negativa, simétrica, se anula únicamente en cero, y es subaditive, es decir satisface $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para todos x, $y \in \mathbb{R}$.
    ■

13. ♦ Sean $\delta_1(x, y) = |x - y|^2$, $\delta_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$. Cual de estas funciones define una métrica en $\mathbb{R}$?

    Solución.
    En ambos casos podemos usar el resultado que obtuvimos resolviendo el problema anterior.
    La función x^2 no es subaditiva, porque $(1 + 1)^2 > 1^2 + 1^2$, entonces δ_1 no es una métrica.
    La función $\sqrt{|x|}$ es creciente y para x, y del mismo signo se tiene

$$\sqrt{|x + y|} \leq \sqrt{|x| + 2\sqrt{|x|}\sqrt{|y|} + |y|} = \sqrt{(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2} = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

    Si x y y son de signos opuestos, tenemos $\sqrt{|x + y|} \leq \sqrt{|x| + |y|}$ entonces la desigualdad sigue válida.
    La función $\sqrt{|x|}$ es subaditiva y δ_2 es una métrica.
    ■

14. ⧫ Para $0 < p < \infty$ sea l^p el espacio de sucesiones reales (a_n) tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$.
a. Demuestre que para $0 < p < 1$ la función $d_p((a_n),(b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p$ es una métrica.
b. Demuestre que para $1 \le p < \infty$ la función $\|(a_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ es una norma.

Solución.
a. Vamos a usar el resultado probado en Ejercicio 12 para mostrar que para $0 < p < 1$ la función $(x,y) \to |x-y|^p$ es una métrica en $\mathbb{R}$. Debemos verificar la desigualdad $|x+y|^p \le |x|^p + |y|^p$. En el caso de $p = \frac{1}{2}$ lo hemos hecho resolviendo Ejercicio 13. Ahora necesitamos un método más general.
Para $y \ge 0$ fijo consideramos la función $f(x) = |x|^p + |y|^p - |x+y|^p$. La función f es derivable con derivada continua $f'(x) = p|x|^{p-1} - p|x+y|^{p-1}$. Cuando $p <|$ la función $u \to u^{p-1}$ es decreciente sobre $\mathbb{R}_+$. Obtenemos

$$f'X) = p(|x|^{p-1} - |x+y|^{p-1}) > 0$$

para x, $y > 0$. La función f se anula en cero y es creciente, entonces

$$0 \le |x|^p + |y|^p - |x+y|^p,$$

que es la desigualdad buscada.
Por el resultado probado en Ejercicio 12 obtenemos la desigualdad

$$|a-b|^p \le |a-c|^p + |c-b|^p$$

que podemos aplicr a las coordenadad de los elementos (a_n), (b_n), $(c_n) \in l^p$. Sumando las series obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - c_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - b_n|^p.$$

b. El propósito es demostrar que para $p \ge 1$ se cumple

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

suponiendo que las sumas del lado derecho son finitas.
Esta desigualdad se llama la desigualdad de Minkowski. Para obtenerla tenemos que probar otras desigualdades importantes, a saber la desigualdad de Young y la desigualdad de Hölder.
Para $p = 1$ la desigualdad es conocida. Suponemos entonces que $p > 1$.

Desigualdad de Young

Como sabemos del curso de Cálculo la función exponencial e^x es convexa pues tiene la segunda derivada positiva en todo su dominio. La convexidad significa que para todos x, $y \in \mathbb{R}$ $0 \le t \le 1$ se cumple

$$e^{tx+(1-t)y} \le te^x + (1-t)e^y.$$

Al denotar $a = e^x$, $b = e^y$, $t = \frac{1}{p}$, $q = 1 - t = \frac{p}{p-1}$ obtenemos la *desigualdad de Young*:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b,$$

para a, $b > 0$ y $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Desigualdad de Hölder

Supongamos ahora que $\|(a_n)\|_p < \infty$ y $\|(b_n)\|_q < \infty$.
Hacemos $a = \frac{|a_n|^p}{p}$ y $b = \frac{|b_n|^q}{\|(b_n)\|_q^q}$ y aplicamos la desigualdad de Young para obtener

$$\frac{|a_n b_n|}{\|(a_n)\|_p \|(b_n)\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{|a_n|^p}{\|(a_n)\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_n|^q}{\|(b_n)\|_q^q}.$$

Sumamos en ambos lados de la desigualdad se llega a:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|}{\|(a_n)\|_p \|(b_n)\|_q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

que se puede escribir como

$$\|(a_n b_n)\|_1 \le \|(a_n)\|_p + \|(b_n)\|_q,$$

y que es precisamente *la desigualdad de Hölder.*

Desigualdad de Minkowski

En el último paso suponemos que $\|(a_n)\|_p < \infty$ y $\|(b_n)\|_p < \infty$. Primero verificamos que $\|(a_n + b_n)\|_p < \infty$.
Estimamos:

$$\begin{aligned} |a_n + b_n|^p \le (|a_n| + |b_n|)^p &\le (2 \max\{|a_n|, |b_n|\})^p \\ &\le 2^p (|a_n|^p + |b_n|^p). \end{aligned}$$

Sumando de ambos lados la desigualdad vemos que al menos

$$\|(a_n + b_n)\|_p \le 2^p (\|(a_n)\|_p + \|(b_n)\|_p) < \infty.$$

Ahora buscamos una estimación más fina.

$$\begin{aligned} \|(a_n+b_n)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|a_n+b_n| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|a_n|^p+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|b_n|^p \end{aligned}$$

Ahora viene la parte más ingeniosa de esta demostración. Nuevamente, sea $q=\frac{p}{p-1}$. Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n+b_n|^{p-1}\right)^q=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p<\infty.$$

Tenemos un par de sucesiones $(|a_n|)\in l^p$, $(|b_n|)\in l^p$ y $(|a_n+b_n|^{p-1})\in l^q$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Podemos aplicar la desigualdad de Hölder en ambos casos. Obtenemos

$$\begin{aligned} \|(a_n+b_n)\|_p^p &\le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|a_n|^p+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|b_n|^p \\ &\le \|((a_n+b_n)^{p-1})\|_q\|(a_n)\|_p+\|((a_n+b_n)^{p-1})\|_q\|(b_n)\|_p \\ &= \|(a_n+b_n)\|_p^{p-1}(\|(a_n)\|_p+\|(b_n)\|_n). \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados entre $\|(a_n+b_n)\|_p^{p-1}$ obtenemos la desigualdad de Minkowski que es la desigualdad de triangulo para la función $\|\cdot\|_p$. A diferencia del caso de $p<1$ la función $\|\cdot\|_p$ es positivamente homogénea: $\|t(a_n)\|_p=|t|\|(a_n)\|_p$, entonces esta función es una norma. ■

15. Sea $C([a,b])$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Para $f\in C([a,b])$ sea

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt.$$

Demuestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $C([a,b])$.

Sugerencia:
Todas las propiedades de esta función son consequencias de la positividad de la integral y de la función valor absoluto.
Para una función no negativa y continua f se cumple $\int_a^b f(t)dt\ge$.
Además la integral es lineal con respecto a la variable f.
Las propiedades 1, 3, 4 *se deducen de inmediato.*
Para obtener la propiedad 2 *tenemos que aprovechar la continuidad de la función.*

Si $f \neq 0$ la función $|f|$ toma en algún punto el valor positivo. Si $|f(x)| = r > 0$en algún intervalo $[x-\delta, x+\delta]$ se cumple $|f(t)| \geq r/2$ y $\int_a^b |f(t)dt \geq r\delta$. Efectivamente $\|f\|_1 = 0$ implica $f = 0$.

16. Demuestre que la función definida en el espacio $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ de matrices complejas $n \times n$ por la fórmula $\|A\| = (\mathrm{tr}(AA^*))^{\frac{1}{2}}$ es una norma. (Para $A = (a_{ij})$ se define $A^* = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \overline{a_{ji}}$ y $\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$.)

    Sugerencia:
    El espacio de matrices $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ como espacio vectorial es lo mismo que $\mathbb{C}^{n^2}$. Calcula $(tr(AA^*))^{\frac{1}{2}}$ usando las definiciones correspondientes y verás que $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, lo que es la norma conocida en el espacio euclidiano de dimensión n^2.

17. Sea X un espacio métrico arbitrario y sea Y un espacio métrico discreto. Pruebe que $B(X,Y)$ es un espacio discreto.

    Sugerencia:
    El espacio Y es acotado, entonces en este caso el espacio $B(X,Y)$ coincide con el espacio de todas las aplicaciones $F\colon X \to Y$.
    La norma en $B(X,Y)$ está definida como $D(F,G) = \sup_{x\in X} d_Y(F(x), G(y))$ y en nuestro caso d_Y toma únicamente los valores 0 y 1.
    ¿Te falta algo para terminar?

18. ⧫ Sea (X,d) un espacio métrico y sea $a \in X$. Sea $\mathfrak{X}$ el espacio de todas las sucesiones $\mathfrak{a} = (a_j)$ con valores en X y tales que $\sum_{j=1}^\infty d(a_j, a) < \infty$. Demuestre que la función $D\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula

    $$D(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^\infty d(a_j, b_j),$$

    está bién definida y es una métrica en $\mathfrak{X}$.

    Solución Por la desigualdad de triangulo que satisface la métrica d tenemos

    $$\sum_{j=1}^\infty d(a_j, b_j) \leq \sum_{j=1}^\infty (d(a_j, a) + d(a, b_j)) = \sum_{j=1}^\infty d(a_j, a) + \sum_{j=1}^\infty d(a, b_j) < \infty,$$

    entonces la función D está bién definida.

La función es no negativa y se anula solo si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. La desigualdad de triangulo para D también se deduce de inmediato:

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) &= \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, b_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (d(a_j, c_j) + d(c_j, b_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, c_j) + \sum_{j=1}^{\infty} d(c_j, b_j) = D(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + D(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}). \end{aligned}$$

■

19. Pruebe que en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ para cada $x \in E$ se tiene

$$\|x\| = \text{ínf}\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}.$$

Sugerencia:
Sea $A = \{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}$. Verifique que para $t > \|x\|$, tenemos $\|\frac{1}{t}x\| < 1$, y por lo tanto $t \in A$. Esto implica $\|x\| \leq \text{ínf}\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}$. Luego considera $t_n \searrow \|x\|$ para obtener la igualdad.

20. ♦ Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el espacio de todas las sucesiones reales con su estructura natural de espacio vectorial. Demuestre que en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no existe ninguna norma tal que $(a_{jn}) = \mathfrak{a}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{a} = (a_j)$. implique $a_{jn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Solución. Supongamos lo contrario: que para cierta función $\|\cdot\|$ el espacio $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|\cdot\|)$ es normado y que la convergencia en esta norma implica la convergencia puntual.
Esta última suposición significa que las formas lineales φ_j, $j \in \mathbb{N}$ definidas por la fórmula $\varphi_j((a_k)) = a_j$ son continuas. Obviamente estas formas son lineales, entonces para cada j existe $C_j > 0$ tal que $|a_j| = |\varphi_j(\mathfrak{a})| \leq C_j\|\mathfrak{a}\|$ (vea Ejemplo 6.16).
Sea $\mathfrak{c} = (jC_j)$. Para cada j se cuple entonces $jC_j \leq C_j\|\mathfrak{c}\|$ y como $C_j > 0$, se obtiene una contardicción $j < \|(c)\|$, $j \in \mathbb{N}$.
No existe ninguna norma de propiedades indicadas.

21. Demuestre que el espacio $\mathfrak{D}$ de todas las métricas definidas en el conjunto X es un *cono convexo*, es decir para todos d, $d' \in \mathfrak{D}$ y para todos $s \geq 0$, $t > 0$ se cumple $sd + td' \in \mathfrak{D}$.

Sugerencia:
Hemos supuesto que el coeficiente s de la combinación lineal no es nulo, lo que asegura que la función $D = sd + td'$, obviamente no negativa se anula únicamente para $x = y$. Para obtener la desigualdad de triangulo para D la escribimos para d y d', en seguida multiplicamos ambos lados de los dos por coeficientes adecuados y las sumamos.

22. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sean (x_n), (y_n) sucesiones convergentes en E. Demuestre que para a, $b \in \mathbb{K}$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = a \lim_{n\to\infty} x_n + b \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Sugerencia:

Denotamos $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$*. Luego calculamos*

$$\|ax + by - (ax_n + by_n\| \leq |a|\|x - x_n\| + b\|y - y_n\|$$

y usamos las suposiciones.

23. Sean A, B conjuntos convexos en un espacio vectorial E. Demuestre que el conjunto $A + B := \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$ es convexo.

Sugerencia:

Toma $a, x \in A$ *y* $b, y \in B$*. Considera la combinación convexa de* $a+b$, $x + y \in A + B$: $t(a + b) + (1 - t)(x + y)$ *Y aprovecha la convexidad de los conjuntos* A, B*.*

2. Espacios completos

1. Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Demuestre que $(d(x_n, y_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

   Sugerencia:
   La estimación del valor $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m|$ se obtiene inmediatamente utilizando Proposición 1.3.

2. ♦ Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones en un espacio métrico (X, d). Sea

$$u_n = \begin{cases} x_k, & \text{si } n = 2k - 1, \\ y_k, & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

   Demuestre que la sucesión (u_n) es de Cauchy si y solo si ambas sucesiones son de Cauchy y

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

   Solución $\Rightarrow$ La sucesión u_n es de Cauchy entonces

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N\; d(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

   Para los valores $k \in \mathbb{N}$ tales que $n = 2k - 1 > N$ y $m = 2k$ obtenemos exactamente la afirmación: la sucesión $d(x_k, y_k)$ converge a cero.
   Si consideramos únicamente los
   $\Leftarrow$ Ahora partimos de la información de que:

$$\varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall n > N\; d(x_n, y_n) < \varepsilon.$$

   Además sabemos que las sucesiónes (x_n) y (y_n) son de Cauchy.
   En el caso de la sucesión (x_n) esto quiere decir que

$$\varepsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}\, \forall\, n,\; m > K\; d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

   Sean $m \geq n > 2 \max\{K, N\}$. Si ambos números son impares $n = 2k - 1$, $m = 2l - 1$ obtenemos que $u_n = x_k$, $u_m = x_l$, donde k, $l > K$ y por lo tanto $d(u_n, u_m) < \varepsilon$.
   En el caso de los valores $n = 2k$, $m = 2l$ se cumple

$$d(u_n, u_m) = d(y_k, y_l) \leq d(y_k, x_k) + d(x_k, x_l) + d(x_l, y_l) < 3\varepsilon.$$

   Estamos buscando una estimación para $d(u_n, u_m)$ para n, m suficientemente grandes. El caso de los n, m de paridad opuesta se procesde analógamente.
   La sucesión (u_n) es de Cauchy.
   Observemos que en realidad hemos utilizado únicamente la suposición de que una de las sucesiones es de Cauchy.

3. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Supongamos que la sucesión (y_n) en X satisface $d(x_n, y_n) < |a_n|$, donde (a_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$ convergente a cero. Demuestre que (y_n) es una sucesión de Cauchy.

   Sugerencia:
   Utilize el hecho de que $d(x_n, x_m)\varepsilon$ para n, m suficientemente grandes y la desigualdad de rectángulo en forma

   $$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n.x_m) + d(x_n, y_m).$$

4. ♦ En el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ introducimos la métrica

   $$d((a_n),(b_n)) = \begin{cases} 0, & (a_n) = (b_n), \\ \frac{1}{m}, & m = \text{mín}\{n : a_n \neq b_n\}. \end{cases}$$

   Demuestre que d es una métrica y que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio completo.

   Solución
   La desigualdad de triangulo es la única propiedad de la métric que en este caso no es obvia a primera vista.
   Sean (a_n), (b_n), $(c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Sea k el primer índice para el cual $c_k \neq b_k$.
   Sea l el primer índice para el cual $c_l \neq a_l$.
   Sea m el primer índice para el cual $a_m \neq b_m$.
   Si $j < k$ y $j < l$ se cumple $a_j = c_j = b_j$. Por lo tanto $m \geq k$ o $m \geq l$ y obtenemos

   $$\frac{1}{m} \leq \text{máx}\{\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\} < \frac{1}{k} + \frac{1}{l}.$$

   En el espacio métrico $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ dos elementos de cualquier bola de radio $r > 0$ coinciden para todos los índices menores que $\frac{1}{r}$.
   Si $(\mathfrak{a}_n)$ es una sucesión de Cauchy en este espacio, el límite $\mathfrak{a} = (a_k)$ de esta sucesión lo encontramos de la manera siguiente.
   Para definir el elemento a_k buscamos N tal que para m, $l > N$ se cumple $d(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_l) < \frac{1}{k}$. Ponemos $a_k :=$ el elemento de índice k en la sucesión $\mathfrak{a}_m$ para cualquier valor $m > N$.
   Por la definiciín de la métrica $\mathfrak{a} = \text{lím}_{n\to\infty} \mathfrak{a}_n$.
   El espacio es completo.
   ■

5. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ que se anulan fuera de cierto intervalo. Demuestre que $C_0(\mathbb{R})$ no es espacio completo con respecto a la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. y tampoco con respecto a la norma $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$.

Sugerencia:
Podemos construir la aproximación de la función $g(x) = e^{-x^2}$ *(que no es elemento de* $C_0(\mathbb{R})$*) por medio de elementos de* $C_0(\mathbb{R})$ *y que funciona para ambas normas.*
Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq n, \\ 0, & \text{si } |x| > n+1, \\ 1 - |x-n|, & n \leq |x| < n+1. \end{cases}$$

La función $f_n g$ *es no negativa, continua, coincide con* g *en el intervalo* $[-n, n]$*, es nula fuera del intervalo* $-n-1, n+1]$ *y en todas partes no supera a la función* g*.*
Demuestre que

$$\|g - gf_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(g - gf_n)(x)| \to 0$$

y que

$$\|g - gf_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |(g - gf_n)(x)| dx \to 0.$$

6. ♦ Con el fin de probar que el espacio de las funciones polinomiales sobre el intervalo $[-1, 1]$ no es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ considera los polinomios

$$w_n(t) = \frac{1}{p_n} \int_0^t (1-x^2)^n dx,$$

donde $p_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ y pruebe que $w_n \to \operatorname{sgn}$ uniformemente sobre cada conjunto de forma $[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$.
Deduzca que los polinomios $v_n(t) = \int_0^t w_n(x)dx$ aproximan uniformemente sobre $[-1, 1]$ a la función $t \to |t|$.

Solución Vamos a probar primero que en el intervalo $[\varepsilon, 1]$ las funciones $1 - w_n$ convergen uniformemente a la función constante 1. Calculamos:

$$1 - w_n(t) = 1 - \frac{\int_0^t (1-x^2)^n dx}{\int_0^1 (1-x^2)^n dx} = \frac{\int_t^1 (1-x^2)^n dx}{\int_0^1 (1-x^2)^n dx}.$$

La función $1 - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ es monótona decreciente y no negativa, entonces $\int_t^1 (1-x^2)^n \leq (1-t)(1-t^2)^n$, mientras que $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq s(1-s^2)^n$ para qualquier $0 < s < 1$.
Para $\varepsilon > 0$ dado fijamos $s < \varepsilon$ y para todo $t \in [\varepsilon, 1]$ obtenemos

$$1 - w_n(t) \leq \frac{(1-t)(1-t^2)^n}{s(1-s^2)^n} \leq \frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^n}{s(1-s^2)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

porque $\frac{(1-\varepsilon^2)}{(1-s^2)} < 1$.

La convergencia uniforme $w_n \to 1$ en el intervalo $[\varepsilon]$ está probada. Además hemos obtendo la información de que $1 - w_n > 0$ en dicho intervalo. Tomando en cuenta que $w_n(-x) = -w_n$ en el intervalo $[0, 1]$ tenemos también la convergencia uniforme $w_n \to -1$ en el intervalo $[-1, -\varepsilon]$. Finalmente $w_n \to \operatorname{sgn}$ uniformemente en cada conjunto $[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$.
Ahora observemos que

$$|t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \lim_{n\to\infty} w_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 w_n(x).$$

Vertifique que esta convergencia es también uniforme. Una función que no es polinomial es límite uniforme de funciones polinomiales. ■

7. Demuestre que los espacios métricos (l^p, d_p), $0 < p < 1$ y los espacios normados $(l^p, \|\cdot\|_p)$ para $1 \leq p < \infty$ definidos en Ejercicio 14 del Capítulo 1 son completos.

   Sugerencia:
   Siga la idea de la demostración de la completez del espacio l^1 demostrada en Ejemplo 2.6.

3. Conjuntos abiertos. Conjuntos cerrados

1. ♦ Demuestre que cada conjunto abierto en $\mathbb{R}$ se puede representar como una unón numerable de intervalos abiertos mutuamente ajenos.

   Solución
   Sea O el conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y sea $O_{\mathbb{Q}}$ el subconjunto de elementos racionales de O. Como subconjunto del conjunto numerable $\mathbb{Q}$, también $O_{\mathbb{Q}}$ es numerable.
   Para cada $q \in O$ cierto intervalo de forma $(q-r, q+r)$ pertenece a O, porque O es abierto. Sea I_q la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a q y están contenidos en O. El conjunto I_q pertenece a O, como unión de intervalos abiertos es abierto y tiene forma de intervalo. Por lo tanto $I_q = (\text{ínf}\, I_q, \sup I_q)$, donde los extremos pueden tomar valor $-\infty$ o ∞, respectivamente.
   Para cada $x \in O$ existe $d > 0$ tal que $(x-d, x+d) \subset O$. El intervalo $(x-d, x+d)$ contiene algún elemento racional q y entonces $x \in I_q$. Resulta que $O = \bigcup_{q \in O_q} I_q$.
   Ya hemos representado al conjunto O como unión de un número numerable de intervalos abiertos.
   Sin embargo los intervalos I_q no son mutuamente ajenos. Supongamos que $I_q \cap I_p \neq \emptyset$. La unión de dos intervalos abiertos que se intersectan, es un intervalo abierto, entonces $I_q \cup I_p$ es un intervalo abierto contenido en O y que contiene a ambos puntos q y p. Según la definición de I_q obtenemos $I_q \cup I_p \subset I_q$, entonces $I_p \subset I_q$. Repitiendo estos argumentos en el caso del punto p obtenemos $I_q \subset I_p$ y finalmente $I_p = I_q$.
   Hemos observado que dos conjuntos de forma I_q, o son ajenos, o son iguales. Podemos escoger los números racionales q_j de tal manera que $O = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_{q_j}$ y para $i \neq j$ $I_{q_i} \cap I_{q_j} = \emptyset$.
   El conjunto O es una unión numerable de conjuntos abiertos mutuamente ajenos.
   ■

2. Pruebe que en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto es una unión numerable de bolas.

   Sugerencia:
   En el caso de $n > 1$ y de un conjunto $O \subset \mathbb{R}^n$ abierto no disponemos del orden en el espacio $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto el resultado es más débil.

Considera las bolas $B(\mathfrak{q}, p)$ tales que $\mathfrak{q} \in \mathbb{Q}^n \cap O$ y $p > 0$ son racionales. Prueba que la familia de estas bolas cubre a O y que es numerable.

3. En cada espacio métrico los conjunto finitos son cerrados.

   Sugerencia:
   ¿Es necesaria alguna sugerencia?
   Por si acaso. Sabemos que unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Es suficiente entonces demostrar que un conjunto de un solo punto $\{x\}$ es cerrado, es decir $X \setminus \{x\}$ es abierto. Si $y \neq x$ ¿cual debe ser $r > 0$ que satisfaga $x \notin B(y, r)$?

4. Encuentre un espacio métrico (X, d) distinto del espacio discreto y una bola $B(x, r) \subset X$ tal que $\overline{B(x, r)} \neq \overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$.
   Sugerencia:
   Lo puedes lograr en el espacio $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ y con una bola adecuada de radio 1.

5. ♦ Sean d, δ dos métricas en el mismo espacio X. Demuestre que las métricas d, δ son equivalentes ($d \sim \delta$) si y solo si para cada sucesión (x_n) en X se cumple ($x_n \to x$ en (X, d)) $\Longleftrightarrow$ ($x_n \to x$ en (X, δ)).

   Solución. Supongamos primero que $d \sim \delta$, es decir que un conjunto $O \subset X$ es abierto en el espacio (X, d) si y solo si es abierto en (X, δ).
   Sea $x_n \to x$ en (X, d). Por la definición de la convergencia sabemos que
   $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \;\; d(x_n, x) < \varepsilon.$$
   En otras palabras, cualquier que sea $\varepsilon > 0$, solo un número finito de elementos de la sucesión queda fuera de la bola $B_d(x, \varepsilon)$.
   Supongamos que la misma sucesión no converge a x en (X, δ). Sucede que
   $$\exists\, r > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, M > N \quad \delta(x_M, x) \geq r.$$
   La última afirmación significa que para este particular radio r un número infinito de elementos de la sucesión está fuera de la bola $B_\delta(x, r)$.
   Sin embargo la última bola es un conjunto abierto en (X, δ) y por la suposición es también un conjunto abierto en (X, d). En particular, existe ε tal que $B_d(x, \varepsilon) \subset B_\delta(x, r)$.
   Hemos probado que un número infinito de elementos de la sucesión se encuentra fuera de la bola $B_d(x, \varepsilon)$, contrario a la suposición.
   Finalmente, $x_n \to x$ en $(X, d)) \Longrightarrow (x_n \to x$ en $(X, \delta))$.

Cambindo los papeles de de d y δ concluimos

$$d \sim \delta \quad \Longrightarrow \quad (x_n \to x \text{ en } (X,d)) \Longleftrightarrow (x_n \to x \text{ en } (X,\delta)).$$

Ahora pasamos a la demostración de la implicación contraria:

$$(x_n \to x \text{ en } (X,d)) \Longleftrightarrow (x_n \to x \text{ en } (X,\delta)) \quad \Longrightarrow \quad d \sim \delta.$$

Suponiendo que la convergencia $x_n \to x$ en (X,d) no implica $x_n \to x$ en (X,δ) vamos a concluir que existe un conjunto que es abierto en (X,δ) y no es abierto en (X,d).
Nuevamente tenemos una sucesión (x_n) y x tales que para todo $\varepsilon > 0$ solo un número finito de $x_n's$ está fuera de $B_d(x,\varepsilon)$ y por otro lado existe $r > 0$ tal que un número infinito de los $x_n's$ está fuera de $B_\delta(x,r)$.
¡La bola $B_\delta(x,r)$ no es abierta en (X,d)!
Efectivamente, si fuera abierta en este espacio, para algún $\varepsilon > 0$ tuvieramos $B_d(x,\varepsilon) \subset B_\delta(x,r)$ entonces solo un número finito de elementos de la sucesión estaría fuera de $B_\delta(x,r)$.
La contradicción termina toda nuestra demostración.
■

6. Sean d, $\tilde{d}$ dos métricas en el mismo espacio X. Supongamos que existen a, $b \in \mathbb{R}$ tales que para todos x, $y \in X$
$$a\,d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y) \leq b\,d(x,y).$$
Demuestre que las métricas d, $\tilde{d}$ son equivalentes.
Mediante un ejemplo demuestre que esta condición no es necesaria para la equivalencia de las métricas,

Sugerencia:
Según la definición de la equivalencia de métricas debemos probar que los espacios (X,d) y $(X,\tilde{d})$ tienen la smismas familias de conjumtos abiertos. Observa que para este fin es suficiente probar que cada bola $B_d(x,r)$ contiene a una bola $B_{\tilde{d}}(x,\rho)$ y que cada bola $B_{\tilde{d}}(x,\rho)$ contiene $B_d(x,r_1)$ para r_1 adecuado.
Las desigualdades que aparecen como suposición lo aseguran.
Para encontrar dos espacios de métricas equivalentes que no cumplen dichas desigualdades piensa en $\mathbb{Z}$ con la métrica discreta y con la métrica natural.

7. ♦ Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, x, $y \in X$. Demuestre que δ es una métrica equivalente a la métrica d.

Solución. Recordemos que las métricas definidas en el mismo espacio X son equivalentes si conducen a las mismas familias de conjuntos abiertos.

Tenemos que probar que un conjunto $O \subset X$ es abierto en el espacio (X,d) si y solo si es abierto en el espacio (X,δ).
Directamente por la definición de la métrica δ vemos que $\delta(x,y) \leq d(x,y)$, entonces $d(x,y) < r$ implica $\delta(x,y) < r$ y de tal manera para cualquier radio r y $x \in X$ se cumple $B_d(x,r) \subset B_\delta(x,r)$. Si un conjunto O es abierto en el espacio (X,δ), para cada $x \in O$ existe $\rho > 0$ tal que $B_d(x,\rho) \subset O$. Por la observación anterior obtenemos $B_d(x,\rho) \subset B_\delta(x,\rho) \subset O$, entonces O es abierto en (X,d).
La función $f\colon\ t \to \frac{t}{1+t}$ es creciente estrictamente en el semieje $[0,\infty)$ (verificalo calculando su derivada) y su ímite en el infinito es 1, entonces la función inversa existe en el dominio $[0,1)$ y es también creciente. Explícitamente $f^{-1}(s) = \frac{s}{1-s}$.
De tal manera $d(x,y) = f^{-1}(\delta(x,y)) = \frac{\delta(x,y)}{1-\delta(x,y)}$ y para $\delta(x,y) < r < 1$ se cumple

$$d(x,y) < f^{-1}(r) = \frac{r}{1-r}.$$

Supongamos que O es abierto en el espacio (X,d) y que para $x \in O$ se cumple $B_d(x,r) \subset O$. Sea $\delta(x,y) < \frac{r}{1+r} = f(r)$. Se sigue $d(x,y) < f^{-1}(f(r) = r$, por lo cual $B_\delta(x, \frac{r}{1+r}) \subset B_d(x,r) \subset O$.
El conjunto O es abierto en el espacio (X,δ).
■

8. ♦ En el espacio $\mathbb{R}$ definimos la métrica:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x,y \in \mathbb{Q} \ o \ x,y \in \mathbb{Q}^c, \\ |x|+|y|, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

a. Demuestre que d es una métrica.
b. Verifique si el espacio $(\mathbb{R},d)$ es completo.
c. Describa las bolas en este espacio.
d. Encuentre $\operatorname{Int}\mathbb{Q}$, $\operatorname{Int}\mathbb{Q}^c$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}^c}$.

SOLUCIÓN
a. Restringida al conjunto $\mathbb{Q}$ o al conjunto $\mathbb{Q}^c$ la métrica coincide con la métrica de $\mathbb{R}$ entonces tiene las propiedades deseadas. Debemos probar la desigualdad de triangulo en el caso de x, y, z tomados de subconjuntos distintos.
Si $x,\ y \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{Q}^c$ tenemos $d(x,y) = |x-y|$, mientras que $d(x,z) = |x|+|z|$, $d(y,z) = |y|+|z|$.
Obviamente $|x-y| \leq |z|+|z|+|y|+|z|$.
Ahora consideramos el caso $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}^c$, $z \in \mathbb{Q}$. La desigualdad

$$d(x,y) = |x|+|y| \leq |x-z|+|y|+|z| = d(x,z)+d(z,y)$$

sí, es válida.

Si suponemos que $z \in \mathbb{Q}^c$, el lado izquierdo de la desigualdad no cambia, mientras que el lado derecho aumenta del valor.
Los demás casos corresponden a las mismas estimaciones.

b. Sea (a_n) una sucesión en $\mathbb{Q} \cap [1,2]$ que converge a $\sqrt{2}$ en el espacio $\mathbb{R}$ con su metrica natural. La sucesión (a_n) es entonces también una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d)$. Para cualquier $x\mathbb{Q}^c$ tenemos $d(x, x_n) = |x| + |x_n| > 1$. La sucesión (x_n) no converge entonces a ningún elemento de $\mathbb{R}$. El espacio $(\mathbb{R}, d)$ no es completo.

c.
Sea $x \in \mathbb{Q}$ y sea $r > 0$. En la bola $B_d(x, r)$ se encuentran todos los elementos racionales del segmento $(x - r, x + r)$ y además todos los puntos irracionales p tales que $|x| + |p| < r$.
Si $r \leq |x|$ la bola $B_d(x, r)$ no contiene ningún elemento irracional.
La bola $B_d(0, r)$ es un caso especial porque es igual al todo segmento $(-r, r)$.
Cuando $x \in \mathbb{Q}^c$ la situación es análoga.

d. El punto $x = 0$ no pertenece al interior de $\mathbb{Q}$, porque cada de sus vecindades contiene algunos elementos irracionales.
Tenemos $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $\operatorname{Int} \mathbb{Q}^c = \mathbb{Q}^c$. Además $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ y $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{Q}^c$.

Nótese que podemos visualizar el espacio $(\mathbb{R}, d)$ como el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de elementos racionales del eje horizontal X y elementos irracionales del eje Y.
■

9. ♦ En el espacio l^1 de las sucesiones sumables tenemos la norma natural de este espacio: $\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y la estructura métrica dada por la fórmula $d_1((a_n), (b_n)) = \|(a_n) - (b_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$.
Demuestre que la métrica $d_\infty((a_n), (b_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ no es eqivalente a la métrica d_1.

Solución. Nuestra tarea es encontrar un conjunto abierto en alguno de los espacios (l^1, d_1), (l^1, d_∞) que no es abierto en el otro.
La obvia desigualdad $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = \|(a_n)\|_1$ significa que la inmersión natural del espacio $(l^1, d_1) \to (l^1, d_\infty)$ es continua, por lo tanto cada conjunto abierto en (l^1, d_∞) es abierto en (l^1, d_1).
Vamos a probar que la bola unitaria en el espacio (l^1, d_1) no es un conjunto abierto en (l^1, d_∞).

Sea $B_1 = \{(a_n) \in l^1 : \|(a_n)\|_1 < 1\}$. Como sabemos B_1 es un conjunto abierto en (l^1, d_1) (Proposición 3.8). El elemento nulo pertenece a B_1.
Para $r > 0$ arbitrario, sea $B_\infty(r) = \{(b_n) \in l^1 : \|(b_n)\|_\infty < r\}$, es decir la bola centrada en cero y de radio r con respecto a la métrica d_∞.
Sea N un número natural mayor que $\frac{1}{r}$.
La bola $B_\infty(r)$ contiene el elemento

$$\mathfrak{a} = (\underbrace{\frac{r}{N}, \dots, \frac{r}{N}}_{N}, 0, 0, \dots),$$

que no pertenece a B_1.
Hemos probado que en el espacio (l^1, d_∞) ninguna bola centrada en $0 \in B_1$ está contenida en B_1. Por lo tanto el conjunro B_1 no es abierto en (l^1, d_∞), aunque sí lo es en (l^1, d_1).
Para construir nuestro ejemplo hemos aprovechado el hecho de que l^1 es un espacio vectorial de dimensión infinita.
Recordemos que en los espacios vectoriales de dimensión finita todas las normas y las métricas correspondientes son equivalentes (Ejemplo 7.20).
■

10. Sea (x_n) una sucesión en un espacio métrico (X, d) convergente a x. Sea $Y = \{x\} \cup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Describa los conjuntos cerrados en (Y, d) y los conjuntos abiertos en (Y, d).

    Sugerencia:
    En el espacio Y existe un solo punto que es punto de acumulación de Y, a saber el punto x.
    Demuestre que C es cerrado en $Y \iff C$ es finito o $x \in C$.
    Por lo tanto O es abierto en $Y \iff O$ no contiene x o su complememto es finito.
11. Demuestre que para cada familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de subconjuntos de un espacio métrico se cumple

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}} = \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$$

    Sugerencia:
    En Ejemplo 3.35 hemos probado la contención $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$.
    Por Teorema 3.32, incisos 2 y 3 obtenemos $\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$.
    La contención opuesta es obvia.

12. ⧫ En el plano $\mathbb{R}^2$ definamos

$$A = \{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} :\ x > 0\}.$$

Describe la cerradura de A.

Solución. El conjunto A se encuentra en el semiplano S definido por la la ecuación $x > 0$ entonces la cerradura de A está en la cerradura de S que es el semiplano $\overline{S} = \{(x, y) :\ x \geq 0\}$.
Los puntos de A tienen como segundas coordenadas los valores de la función sen entonces los puntos de la cerradura tienen tambén sus valores en el intervalo $[-1, 1]$.
Vamos a probar que

$$\overline{A} = A \cup \{(0, y) :\ y \in [-1, 1]\}.$$

Para cada $y \in [-1, 1]$ los elementos de la forma $x_k = \frac{1}{\operatorname{arcsen}(y)+2\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$, son soluciones de la ecuación $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$. De tal manera los puntos (x_k, y) pertenecen a A y convergen al límite $(0, y)$, lo que aprueba que $(0, y) \in \overline{A}$ para todo $y \in [-1, 1]$.
■

13. ⧫ Demuestre que el espacio l^1 no es cerrado en el espacio $\mathbf{c}$, el último provisto de la norma $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

Solución.Partiendo de la definición de conjunto cerrado, debemos probar que $A = \mathbf{c} \setminus l^1$ no es abierto. Para algún $\mathfrak{a} \in A$ y para $r > 0$ arbitrario debemos encontrar en la bola $B(\mathfrak{a}, r)$ un elemento $\mathfrak{b}$ l^1.
El problema se resuelve con la observación de que cualquier elemento en $\mathfrak{a} = (a_j) \in \mathbf{c}$ es límite de elementos de l^1. Sea $\mathbf{a}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$.
Obtenemos $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_\infty = \sup_{k>n} |a_k| \to 0$, porque $a_n \to 0$.
■

14. ⧫ Los espacios l^p, $0 < p < \infty$ están definidos en Ejercicio 14 del Capítulo 1. Sean

$$A_p = \{(a_n) \in l^p : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,\ a_n \geq 0\}.$$

Investigue si los conjuntos A_p son cerrados en los espacio l^p correspondiente.

Solución
Vamos a probar que en el caso de $p \leq 1$ el conjunto es cerrado y en los demás casos no lo es.

Cuando $p \leq 1$ tomemos $(a_n) \in l^p$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ y $(b_n) \in l^p$ tal que $d_p((a_n),(b_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p < 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} |1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n| &= |\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n| = |\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p = d_p((a_n),(b_n)). \end{aligned}$$

Si tenemos $\mathfrak{a}_k \in A_p$ y $\mathfrak{a}_k \to \mathfrak{b} = (b_n)$ obtenemos $|1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n| \leq d_p(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}) \to 0$, por lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ y $\mathfrak{b} \in A_p$. El conjunto A_p es cerrado.

Pasamos al caso $p > 1$ y probaremos que A_p no es cerrado. Como sabemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente, mientras que $S(k) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ tiende al infinito cuando $k \to \infty$. Sea

$$\mathfrak{a}_k = \frac{1}{S(k)}(1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{k^p}, 0, 0, \dots).$$

La sucesión $\mathfrak{a}_k$ pertenece a A_p y converge la sucesión cero que no es elemento de A_p. Cuando $p > 1$ el conjunto A_p no es cerrado.
■

15. Sea A un conjunto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que

$$x \in \overline{A} \iff \inf_{y \in A} d(x,y) = 0.$$

Sugerencia:

Si $x \in \overline{A}$, existen $x_n \in A$ tales que $x_n \to x$.¿Que dice esto sobre el valor $\inf_{y \in A} d(x,y)$?
Si $\inf_{y \in A} d(x,y) = 0$, los valores $d(y,x)$, $y \in A$ se acercan a cero. Para n cualquiera existe $y_n \in A$ que satisface $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$. ¿Que podemos decir sobre la convergencia de la sucesión (y_n)?

16. Demuestre que en un espacio normado la cerradura de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial.

Sugerencia:

Como se ha mostrado en el Ejercicio 22 del Capítulo 1 en los espacios normados se cumple la fórmula $\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = a \lim_{n\to\infty} x_n + b \lim_{n\to\infty} y_n$. De esta fórmula se deduce de inmediato, que si x, y pertenecen a la cerradura de un subespacio vectorial F, su combinación lineal pertenece a dicha cerradura.

17. Sea C un conjunto en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ tal que $B(0,r) \subset C \subset \overline{B(0,r)}$. Demuestre que C es convexo. ¿Es cierta esta afirmación si en lugar de la norma euclidiana consideramos otra norma en $\mathbb{R}^n$? Encuentre un ejemplo positivo y un contraejemplo.

Sugerencia:
Fijese que en la bola euclidiana ningún punto de la esfera se puede representar como combinación convexa no trivial de otros puntos de la esfera. Piensa en otras normas que conducen a esta propiedad y de otras que no lo cumplen.

18. Sean A, B dos subconjuntos de un espacio normado. Denotamos: $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Supongamos que A es abierto. Demuestre que $A + B$ es abierto.

Sugerencia:

Sea $y \in B$ y sea $y + A := \{y + a : a \in A\}$. Demuestre que $y + A$ es abierto y luego aprovecha la representación $A + B = \bigcup_{y \in B}(y + A)$.

19. Sea A un subconjunto en un espacio métrico X. Demuestre que el interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A.

Sugerencia:
Si se cumple que $B(x.r) \subset A$, entonces todos los elementos de la bola abierta $B(x,r)$ son elementos del interior.
La misma definición $\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : \exists r > 0, \ B(x,r) \subset A\}$ *presenta el interior de A como unión de bolas abiertas, entonces* $\mathrm{Int}(A)$ *es conjunto abierto contenido en A.*
Por la misma definición cada abierto contenido en A pertenece al interior de A, entonces $\mathrm{Int}(A)$ *es efectivamente el mayor de los abiertos contenidos en A.*

20. Demuestre las siguientes propiedades del interior de conjunto:
1. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.
2. $\mathrm{Int}(A^c) = (\overline{A})^c$.
3. $(\mathrm{Int}(A))^c = \overline{A^c}$.
4. ¿Es cierto que $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$ para A, B arbitrarios?

Sugerencias:

Se puede justificar la igualdad 1. verificando que un punto dado $x \in X$ pertenece a uno de los conjuntos si y solo si pertenece al otro.

Podemos también utilizar el resultado del ejercicio anterior que describe $\mathrm{Int}(A)$ *como el mayor de los conjuntos abiertos en* X *y contenidos en* A.
El conjunto $\mathrm{Int}(A \cap B)$ *es abierto, contenido en* A *y contenido en* B*, entonces está en la intersección de ambos interiores.*
Por otro lado $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ *es un conjunto abierto contenido en* $A \cap B$*, entonces está en* $\mathrm{Int}(A \cap B)$.
La igualdad 1. está probada.
2. El conjunto del lado derecho es un subconjunto abierto del complemento de A*, entonces pertenece a* $\mathrm{Int}(A^c)$*. Por otro lado un elemento* $x \in \mathrm{Int}(A^c)$ *está aislado de* A*, entonces pertenece a* $(\overline{A})^c$.
3. Tenemos: $\mathrm{Int}(A) \subset A$*, entonces* $A^c \subset (\mathrm{Int}(A))^c$*. Se sigue* $\overline{A^c} \subset \overline{(\mathrm{Int}(A))^c} = (\mathrm{Int}(A))^c$*, porque el último conjunto es cerrado. Si* $x \in \overline{A^c}$*, entonces* x *no está aislado de* A^c *y por lo tanto no está en el interior de* A*. Sí, está en* $(\mathrm{Int}(A))^c$.
4. Piensa en subconjuntos A*,* $B \subset \mathbb{R}$ *que tienen interiores vacíos, pero tales que* $A \cup B = \mathbb{R}$.

21. Para un subconjunto $A \subset X$ de un espacio métrico (X, d) se define *la frontera* de A como $\overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.
Demuestre las relaciones:

a. $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A^c}$, **b**. $X = \overset{\circ}{A} \cup \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(A^c)$,
c. $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overset{\circ}{A}$, **d**. $\overset{\circ}{\mathrm{Int}(A)} \subset \overset{\circ}{A}$,
e. $\overset{\circ}{(A \cup B)} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, **f**. $\overset{\circ}{(A \cap B)} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

En los casos **c**., **d**., **e**., **f**. demuestre que las igualdades no son válidas.

Sugerencias:
El inciso **a** *es obvio por la definición, porque* $A^{cc} = A$.
b.
Si $x \notin \mathrm{Int}(A)$*, quiere decir que pertenece a* $\overline{A^c}$*. Si además* $x \notin \mathrm{Int}(A^c)$*, quiere decir que* $x \in \overline{A}$*. Finalmente* $x \in \overset{\circ}{A}$*. Cada elemento de* X *pertenece a uno de los tres componentes de la unión.*
c.
Partimos de la contensión obvia $A \subset \overline{A}$ *y continuamos:* $\overline{A}^c \subset A^c$ $\Rightarrow \overline{\overline{A}^c} \subset \overline{A^c} \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{\overline{A}^c} \subset \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overset{\circ}{A}$.
d.
El inciso 3. del ejercicio anterior afirma que $(\mathrm{Int}(A))^c = \overline{A^c}$*, entonces* $\overline{\mathrm{Int}(A)^c} = \overline{\overline{A^c}} = \overline{A^c}$*. Tenemos también la relación* $\overline{\mathrm{Int}(A)} \subset$

$\overline{A}$. *Concluimos*

$$\overset{\circ}{\mathrm{Int}(A)} = \overline{\mathrm{Int}(A)} \cap \overline{\mathrm{Int}(A)^c} \subset \overline{A} \cap \overline{A^c} = \mathring{A}.$$

e.
Recordemos la relación probada en Ejemplo 3.36: $\overline{C \cap D} \subset \overline{C} \cap \overline{D}$ *y la fórmula* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *que vamos a usar a continuación. Ahora calculamos:*

$$\begin{aligned} (A \overset{\circ}{\cup} B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)^c} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A^c \cap B^c} \\ &\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A^c} \cap \overline{B^c} = (\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cup (\overline{B} \cap \overline{B^c}) = \mathring{A} \cup \mathring{B}. \end{aligned}$$

Para ver un caso donde la igualdad no se da, piensa en dos semiejes en $\mathbb{R}$ *que se complementan.*
f.
El cálculo usa los mismos argumentos, entonces lo dejamos al lector.
El contraejemplo a la igualdad se puede construir también en el espacio $\mathbb{R}$ *usando semiejes adecuados.*

22. Sea V un abierto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que para todo $A \subset X$ se tiene $V \cap \overline{A} \subset \overline{A \cap V}$. ¿Sigue siendo válida la relación si no se supone que V es abierto?

    Sugerencia:
    Si $x \in V \cap \overline{A}$, *existen* $x_n \in A$ *tales que* $x_n \to x$. *El conjunto* V *es abierto y salvo un número finito de elementos esta sucesión pertenece a* V. *Estos elementos satisfacen* $x_n \in V \cap A$ *lo que significa que* $x \in \overline{V \cap A}$.
    Para el caso de V *que no es abierto busca contraejemplo en el eje real tomando como* V *un intervalo cerrado y como* A *un adecuado intervalo abierto.*

23. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$ un conjunto convexo. Demuestre que la cerradura $\overline{C}$ es también un conjunto convexo.

    Sugerencia:
    Para puntos $x, y \in \overline{C}$ *y* $0 \leq t \leq 1$ *hay que probar* $tx + (1-t)y \in \overline{C}$. *Sabemos que* x *se puede representar como* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *con* $x_n \in C$ *y* $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.
    Por la convexidad de C *tenemos para cada* $n \in \mathbb{N}$ $tx_n + (1-t)y_n \in C$. *Es suficiente demostrar que* $tx_n + (1-t)y_n - tx + (1-t)y \to 0$ *estimando la norma de elementos de lado izquierdo.*

24. Sea $\mathbf{c}$ el espacio de todas sucesiones reales convergentes con la norma y sea $\mathbf{c}_0$ el espacio de sucesiones convergentes a cero. Demuestre que ambos espacios son cerrados en l^∞.

Sugerencia:
Estamos en el espacio $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. *Cada sucesión convergente es acotada, entonces* $\mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c} \subset l^\infty$.
Para probar que el conjunto $\mathbf{c}$ *es cerrado en* l^∞ *podemos usar la definición de conjunto cerrado como complemento de un abierto, ó podemos aprovechar el método de sucesiones - Teorema 3.36.*
Consideramos más divertida la primera opción. Probaremos que el conjunto $l^\infty \setminus \mathbf{c}$ *es un conjunto abierto.*
Una sucesión acotada (x_n) *en* $\mathbb{R}$ *es convergente si y solo si* $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$.
Para una sucesión $(x_n) \in l^\infty \setminus \mathbf{c}$ *se cumple entonces:*

$$\delta = \limsup_{n\to\infty} x_n - \liminf_{n\to\infty} x_n > 0.$$

Probaremos que $B((x_n), \delta/3) \subset l^\infty \setminus \mathbf{c}$.
Sea $(y_n) \in B((x_n), \delta/3)$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple* $x_n - \delta/3 \leq y_n \leq x_n + \delta/3$.
De aquí se sigue

$$\limsup_{n\to\infty} y_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_n - \delta/3, \quad \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n + \delta/3,$$

de donde obtenemos $\limsup_{n\to\infty} y_n - \liminf_{n\to\infty} y_n \geq \delta/3$. *Cada elemento de* $B((x_n), \delta/3)$ *es divergente.*
Dejamos al lector la segunda parte de este ejercicio recomendando que lo haga aplicando Teorema 3.36 para variar.

25. ♦ (Teorema de Cantor) Sea F_n una familia descendiente de conjuntos no vacíos cerrados en un espacio completo y tal que $d(F_n) = \sup_{x,\, y\in F_n} d(x,y) \to 0$. Demuestre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ consta de un punto,

SOLUCIUÓN. De cada conjunto F_n escogemos un elemento x_n. La sucesión $d(F_n)$ es monótona descendiente a cero. Si $d(F_N) < \varepsilon$ y n, $m > N$, se tiene $d/x_n, x_m) < \varepsilon$. La sucesión (x_n) es de Cauchy. Por la completez del espacio existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo y $n > m$ se cumple $x_n \in F_m$. El conjunto F_m es cerrado, entonces $x \in F_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
Hemos probado que la intersección no es vacía. Si la intersección contiene otro punto y, entonces y, $x \in F_n$ para todo n. Por consiguiente $d(x,y) \leq d(F_n) \to 0$, así que $d(x,y) = 0$ y $x = y$.
■

26. ♦ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado completo (espacio de Banach) y sea $F \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Demuestre que el espacio E/F es completo.

SOLUCIUÓN. Por la definición de la norma en el espacio cociente $\|[x]\| = \text{ínf}_{h\in F}\|x+h\|$ vemos que $\|[x]\| \leq \|x\|$, entonces para una sucesión de Cauchy (x_n) en E, la sucesión de clases $([x_n])$ es también de Cauchy y para una sucesión convergente $x_n \to x$ en E tenemos $[x_n] \to [x]$ en E/F.
Si $([y_n])$ es una sucesión de Cauchy en E/F, la sucesión y_n, no necesariamente es de Cauchy. Sin embargo, es posible construir en E una sucesión de Cauchy (x_n) tal que $[x_n] = [y_n]$.
Lo hacemos por inducción.
Sea $x_1 = y_1$. Por la misma definición de la norma en E/F existe $h \in F$ tal que $\|x_1 - y_2 + h\| < \|x_1 - y_2\| + \frac{1}{2}$. Con $x_2 = y_2 - h$ obtenemos las propiedades $[x_2] = [y_2]$ y $\|x_1 - x_2\| < \|x_1 - y_2\| + \frac{1}{2}$
Hagamos la siguiente hipótesis inductiva:
(H_n) Existen $x_1,\ x_2,\dots,x_{n+1} \in E$ tales que $[x_j] = y_j]$ para $j = 1,2,\dots,n+1$ y además $\|x_{j+1} - x_j\| < \|y_{j+1} - y_j\| + \frac{1}{2^j}$ para $j = 1,2,,\dots,n$.
Hemos verificado esta hipótesis para $n = 1$. Supongamos que la afirmación (H_n) está verificada.
Existe $h \in F$ tal que $\|x_n - y_{n+1} + h\| < \|x_n - y_{n+1}\| + \frac{1}{n^{n+1}}$. So definimos $x_{n+1} = y_{n+1} - h$, obtenemos la propiedad $(H_{n+1}$.
Por la inducción obtenemos una sucesión (x_n) en E que satisface (H_n) para cada $n \in \mathbb{N}$.
Los elementos de esta sucesión satisfacen:

$$\begin{aligned}\|x_{n+k} - x_n\| &= \|(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \dots \\ &+ (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\| \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n+j-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

La sucesión (x_n) es de Cauchy y E es completo. Existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ y luego $[y_n] = [x_n] \to [x]$ en E/F.
El espacio E/F es completo.
■

27. ♦ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $F \subset E$ un subespacio vectorial. Supongamos que F y E/F son espacios completos. Demuestre que el espacio E es completo.
SOLUCIÓN. Sea (a_n) una sucesión de Cauchy en E. Por la desigualdad $\|[a]\| \leq \|a\|$ es obvio que la sucesión $([a_n])$ es de Cauchy en el espacio completo E/F, entonces existe $a \in E$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty}[a_n] = [a]$.
De la definición $\|[a_n - a]\| = \text{ínf}_{h\in F}\|a_n - a + h\|$ se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $h_n \in F$ tal que

$\|a_n - a + h_n\| < \|[a_n - a]\| + \frac{1}{n}$.
La sucesión $(a_n - a)$ es de Cauchy, antonces (h_n) es también una sucesión de Cauchy en F. Este espacio es completo por suposición y existe $h = \text{lím}_{n\to\infty} h_n \in F$.
Obtenemos

$$\begin{aligned}\|a_n - (a-h)\| = \|a_n - (a-h_n) - h_n + h\| &\leq \|a_n - (a-h_n)\| + \|h_n - h\| \\ &\leq \ \|[a_n - a]\| + \frac{1}{n} + \|h_n - h\|.\end{aligned}$$

Todos los términos del lado derecho tienden a cero, entonces la cucesión (a_n) tiene límite $(a - h)$.
El espacio E es completo.
■

4. Teorema de Baire

1. Demuestre que en el espacio $C([-a,a])$, $a > 0$ los conjuntos de funciones lineales, de funciones polinomiales, de funciones, de funciones pares, tienen complementos densos.

   Sugerencia:
   En el primer caso debemos probar que cada función lineal es límite uniforme de funciones continuas que no son lineales. Sea $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\cos x$. *Los elementos de la sucesión no son funciones lineales y la sucesión converge uniformemente a cero. Si* f *es una función lineal,* $g_n = f + \varphi_n$ *no es lineal y converge uniformemente a* f. *El complemento del conjunto de funciones lineales es denso en* $C([-a,a])$ *en su métrica natural de convergencia uniforme. En fomma análoga se puede tratar los demás casos.*

2. Utiliza Teorema de Baire para demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo.

   Sugerencia:
   Los conjuntos de un solo punto son cerrados en cada espacio métrico. En el caso del espacio de los racionales estos conjuntos son densos en ninguna parte. Forman una familia numerable. ¿Si $\mathbb{Q}$ *fuera completo, que pasaría según Teorema de Baire?*

3. Demuestre que, si $Y \subset X$ es de 2^a categoría en X entonces X es de 2^a categoría en si mismo.

   Sugerencia:
   Supongamos que X *es de* 1^a *categoría en si mismo. Existen conjuntos* A_j, $j = 1, 2, \ldots$ *cerrados en* X *tales que* $Int\, Aj = \emptyset$ *y* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$. *Considera la familia* $B_j = A_j$ *y busca una contardicción.*

4. Sea X un espacio métrico completo. Sea $O \subset X$ un subconjunto abierto. Demuestre que O es de segunda categoría en X.

   Sugerencia:
   El espacio $Y = \overline{O}$ *es también completo y por lo tanto es de* 2^a *categoría en si mismo, mientras que* O *es abierto en* Y. *Si* O *es de* 1^a *categoría en* X, *se puede representar como* $O = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$ *donde las cerraduras de* C_j*'s en* X *tienen interiores vaciíos. Observe que las cerradura de cada* C_j *en* Y *también tienen interiores vacíos y que* $Y \setminus O$ *tiene interior vacío. La contradicción está a mano.*

5. ♦ Demuestre que existen funciones continuas sobre $[a,b] \subset \mathbb{R}$ que no son derivables en ninguna parte.

Solución Este ejercicio es una aplicación clásica de Teorema de Baire. La demostración consiste en probar que las funciones que son derivables al menos en un punto forman un conjunto de 1^a categoría en el espacio $C([a,b])$, mientras que este espacio escompleto y por Teorema de Baire es de 2^a categoría en si mismo.
Para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\begin{aligned} C_n = \{f \in C([a,b]) \quad : \quad & |f(x+h) - f(x)| \le n|h|, \text{ para algún } x \\ & \text{y para todo } h \text{ tal que } x+h \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Si una función $f \in C([a,b])$ tiene derivada en un solo punto, pertenece a uno de los conjuntos C_n.
Vamos a ver que cada conjunyo C_n es cerrado y denso en ninguna parte.
Sean $f_k \in C_n$ y supongamos que $f_k \to f$ uniformemente. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe x_k tal que $|f_k(x_k+h) - f(x_k)| \le n|h|$.
La sucesión (x_k) tiene una subsucesión convergente, porque el intervalo $[a,b]$ es compacto. Para simplificarla notación vamos suponer que $x_k \to x \in [a,b]$. Para probar que $f \in C_n$ calculamos:

$$\begin{aligned} |f(x+h) \quad - \quad f(x)| &= |f(x+h) - f(x_k+h) + f(x_k+h) - f_k(t_k+h) \\ &+ f_k(x_k+h) - f_k(x_k) + f_k(x_k) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\ &\le |f(x+h) - f(x_k+h)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &+ \quad |f_k(x_k+h) - f(x_k+h)| + |f_k(x_k) - f(x_k)| \\ &+ \quad |f_k(x_k+h) - f_k(x_k)|. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$ cualquiera los primeros dos términos de la suma son menores que ε para k suficiemntemente grandes porla continuidad de la función f. Los términos tercero y cuarto se puede dominar por ε por la convergencia uniforme $f_k \to f$. El último término es menor o igual a $n|h|$, porque todas las funciones pertenecen a C_n.
Obtuvimos la desigualdad

$$|f(x+h) - f(x)| \le n|h| + 2\varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrario, así que $f \in C_n$.
Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\operatorname{Int} C_n \ne \emptyset$, existe una bola $B(f,r) = f + B(0,r) \subset C_n$.
Para probar que cada C_n es denso en ninguna parte es suficiente probar que para cada n, $r > o$ y $f \in C_n$ existe una función $g \notin C_n$ que satisface $\|f-g\|_\infty < r$.
Primero construimos una función sobre $\mathbb{R}$ que sobre unos intervalos de longitud 1 cambia su valor por 1.
Sea $h(2k+x) = |x|$ para $-1 \le x \le 1$ y $k \in \mathbb{N}$. La función es no negativa de forma de sierra; en cada intervalo $[n, n+1]$ cambia el

valor linealmente entre 0 y 1. Si definimos ahora $h_r, p(x) = rh(px)$ obtenemos una función que cambia de valor entre cero y r sobre intervalos de longitud $\frac{1}{p}$.
Si $f \in C_n$, entonces $g = f + h_{r,2n+1}$ pertenece a la bola $B(f, r)$, pero $g \notin C_n$, porque sobre intervalos pequeños esta funciín alcanza incrementos de tamaño $(n+1)|h|$.
Resumimos: los conjuntos C_n son cerrados, densos en ninguna parte en $C([a, b])$ y por Teorema de Baire $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq C([a, b])$. Todas las funciones que tienen la derivada al menos en un punto están contenidas en Y. Por lo tanto existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto.
■

6. ⧫ Demuestre que en cada espacio métrico, completo y numerableel conjunto de elementos aislados es denso.

   Solución Sea X un espacio métrico, completo y numerable y sea A el conjunto de elementos aislados en X. Supongamos que $O = X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$.
   El conjunto O no contiene elementos aislados en X y es abierto, entonces tampoco contiene elementos aislados en O. Sea $x_0 \in O$ y sea $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset O$. Consideramos el conjunto $C = \overline{B(x_0, r/2)}$, donde la cerradura es tomada en X. Obviamente $C \subset B(x_0, r) \subset O$. Como un subconjunto cerrado de un espacio completo, C es completo y es numerable. Por Corolario 4.3 existe en C un elemento aislado a. Como elemento aislado de la cerradura $a \in B(x_0, r/2)$. Resulta que $B(x_0, r/2)$ contiene un elemento aislado en O que es una contradicción.
   Obtenemos la conclusión $\overline{A} = X$.
   ■

5. Espacios separables

1. ¿Cuando un espacio discreto es separable?

   ¿Que pregunta? Obviamente si y solo si es numerable.

2. Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ no es numerable.

   Sugerencia:
   Sea $\mathfrak{N}$ *la familia de todos los subconjuntos* $\mathbb{N}$*. Para cada* $C \in \mathfrak{N}$ *definimo la cucesión*

$$a_C(n) = \begin{pmatrix} 1, & \text{si } n \in C, \\ 0, & \text{si } n \notin C. \end{pmatrix}$$

   Aprovecha Ejemplo 5.8.

3. ♦ Sea (X, d) un espacio métrico separable y sea $C \subset X$ un conjunto que no es numerable. Demuestre que C contiene un número no numerable de sus puntos de acumulación.

   Solución. Como subconjunto de un espacio separable, C es un espacio separable. Sea N un conjunto numerable y denso en C. Supongamos que C contiene solo un número numerable de sus puntos de acumulación. Sin embargo

$$C = \overline{N} = N \cup \{\text{puntos de acumulación de } N\}.$$

   El último conjunto es numerable. Obtuvimos una contradicción. ■

4. ♦ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $A \subset E$ un conjunto separable. Demuestre que la la cáscara convexa de A es separable.

   Solución. Recordemos que la cáscara convexa de A denotada por $\text{conv}(A)$ está definida como el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto A. La cáscara $\text{conv}(A)$ se puede describir como

$$\{x \in E : \, x = t_1x_1 + \cdots + t_kx_k, \;\; x_1, \ldots, x_k \in A, \; 0 \leq t_j, \; \sum_{j=1}^{k} t_j = 1\}.$$

   Sea A_0 el conjunto a lo más numerable y denso en A. Denotemos

$$\begin{aligned} C(A) = \{x \in E : x \;\; &= \;\; \sum_{j=1}^{k} q_j a_j, \;\; a_1, \ldots, a_k \in A_0, \\ & \quad\quad 0 \leq q_j \in \mathbb{Q}, \; \sum_{j=1}^{k} q_j = 1\}. \end{aligned}$$

Obviamente $C(A) \subset \operatorname{conv}(A)$. Cada elemento de $C(A)$ está definido por un par $(\mathbf{a}, \mathbf{q})$, donde $\mathbf{a} \in A_0^k$, $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^k$. Por lo tanto $C(A)$ se sumerge en el espacio $\cup_{k=1}^{\infty} A_0 \times \cup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}^k$ que es numerable, así que $C(A)$ es numerable (vea Capítulo 5, sectión 1).
Es suficiente probar que $C(A)$ es denso en $\operatorname{conv}(A)$.
Sean $x = \sum_{j=1}^k t_j x_j \in \operatorname{conv}(A)$ y $r > 0$. La aplicación $\mathbb{R}^k \times A^k \ni (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \to \sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j \in E$ es continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que, si para todo $1 \le j \le k$ se cumple $|q_j - t_j| < \delta$, $\|a_j - x_j\| < \delta$, entonces $\| \sum_{j=1}^k t_j x_j - \sum_{j=1}^k q_j a_j \| < r/2$.
La continuidad de la función $\frac{1-s}{s}$ en $s = 1$ significa que existe también $\rho > 0$ tal que para $|s| < \rho$ se cumple $\frac{|1-s|}{s} < \frac{r}{2(\|x\| + \frac{r}{2})}$.
Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y de A_0 en A podemos encontrar $q_j \in \mathbb{Q}$ y $a_j \in A_0$ tales que $|q_j - t_j| < \min\{\delta, \rho/k\}$ y $\|a_j - x_j\| < \delta$, lo que asegura que $\|x - \sum_{j=1}^k q_j a_j\| < r/2$.
Sin embargo, $\sum_{j=1}^k q_j a_j$ no necesariamente es elemento de $C(A)$, porque no hemos asegurado la condición $\sum_{j=1}^k q_j = 1$. Sí, sabemos que $| \sum_{j=1}^k q_j - 1| < \rho$, entonces para $q_j' = \frac{q_j}{\sum_{j=1}^k q_j}$ se tiene $\sum_{j=1}^k q_j' a_j \in C(A)$ y

$$\| \sum_{j=1}^k q_j a_j - \sum_{j=1}^k q_j' a_j \| = \frac{|1 - \sum_{j=1}^k q_j|}{\sum_{j=1}^k q_j} \| \sum_{j=1}^k q_j a_j \|.$$

Según nuestra construcción $|1 - \sum_{j=1}^k q_j| < \rho$ y $\| \sum_{j=1}^k q_j a_j \| < \|x\| + \frac{r}{2}$, entonces

$$\| \sum_{j=1}^k q_j a_j - \sum_{j=1}^k q_j' a_j \| < \frac{r}{2}.$$

Obtuvimos $\sum_{j=1}^k q_j' a_j \in C(A)$ tal que $\|x - \sum_{j=1}^k q_j' a_j\| < r$.
El conjunto $\operatorname{conv}(A)$ contiene a $C(A)$ que es numerable y denso en $\operatorname{conv}(A)$. La cáscara $\operatorname{conv}(A)$ es separable.
■

5. ♦ La siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$: (vea Capítulo 1, Ejercicio 6)

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{si existe } t \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} = t\mathfrak{b}, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si tal número no existe.} \end{cases}$$

Demuestre que el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ no es separable.

Solución La prueba sería complicada si partimos de la definición original de la separabilidad.

En cambio, la prueba es inmediata si aprovechamos Teorema 5.14. Vamos a demostrar que en este espacio existe una familia no numerable de bolas mutuamente ajenas. Por Teorema 5.14 esto es imposible en un espacio separable.
Vamos a denotar por $\|\cdot\|$ la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$ y por $B(\mathfrak{a}, r)$ la bola euclidiana (que en este caso es un disco).
La observación más importante para resolver el problema es que para $r \leq \|\mathfrak{a}\|$ la bola $B_d(\mathfrak{a}, r)$ es un segmento lineal:

$$B_d(\mathfrak{a}, r) = \{t\mathfrak{a} : 1 - r < t < 1 + r\}.$$

Cuando $r > \|\mathfrak{a}\|$ tenemos la bola en forma de una "paleta":

$$B_d(\mathfrak{a}, r) = \{t\mathfrak{a} : 1 - r < t < 1 + r\} \cup B((0,0), \|\mathfrak{a}\| - r).$$

De tal manera la familia de los segmentos de forma $I_{\mathfrak{a}} = \{t\mathfrak{a} : 0 < t < 2\}$, donde $\|a\| = 1$ consta de bolas abiertas mutuamente ajenas y está parametrizada por los puntos de la circunferencia unitaria, así que es no numerabla. El espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ no es separable.
■

6. ♦ Supongamos que en el espacio métrico X cada conjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es separable.

Solución Sea $r > 0$. Por nuestra suposición en el espacio X no existe ninguna sucesión x_n tal que $d(x_n, x_{n+k}) \geq r$ para todos n, $k \in \mathbb{N}$, porque una sucesión de estas propiedades no tiene puntos de acumulación.
El hecho de que tal sucesión no se puede construir significa que para todo $r > 0$ existe número finito de bolas $B(x_{r,1}, r), \ldots, B(x_{r,m_r}, r)$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{m_r} B(x_{r,j}, r)$.
Tomamos los radios de valores $\frac{1}{k}$, para $k \in \mathbb{N}$ y construimos las bolas correspondientes:

$$B_{k,j} = B(x_{\frac{1}{k},j}, \frac{1}{k}),$$

que tienen la propiedad de que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{j=1}^{m_{\frac{1}{k}}} B_{k,j} = X.$$

Afirmamos que la sucesión compuesta de los centros de estas bolas es densa en X.
Efectivamente, para cada $x \in X$ y para cada $r > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\imath k < r$. Para algún valor j se cumple $x \in B_{k,j}$. En otras palabras $x_{\frac{1}{k},j} \in B(x, \frac{1}{k}) \subset B(x, r)$.

El conjunto $C = \{x_{\frac{1}{k},j} : k \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le m_{\frac{1}{k}}\}$ es numerable y denso en X. El espacio X es separable. ■

7. Para $A \subset \mathbb{R}$ definimos la función característica del conjunto A como
$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$
Demuestre que las combinaciones lineales de las funciones características forman un conjunto denso en el espacio $B(\mathbb{R})$ de funciones acotadas sobre el eje.

   Sugerencia:
   Para $f \in B(\mathbb{R})$ dada y $\varepsilon > 0$ arbitrario debemos encontrar una función de forma $g = \sum_{j=1}^{n} a_n 1_{A_n}$ tal que $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$.
   Como una función acotada, la función f toma valores en cierto intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que por su lado está contenido en algún intervalo de forma $[N\varepsilon, M\varepsilon)$ con N, $M \in \mathbb{Z}$. Sea $A_j = \{x \in \mathbb{R} : j\varepsilon \le f(x) < (j + 1)\varepsilon\}$, $N \le j \le M - 1$.
   Demuestre que $g = \sum_{N \le j \le M-1} f(j\varepsilon) 1_{A_j}$ aproxima a f adecuadamente.

8. Sea G un subgrupo del grupo additivo $(\mathbb{R}, +)$. Demuestre que G es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = 0$.

   Sugerencia:
   La condición es obviamente necesaria, Porque la densicad de G en $\mathbb{R}$ implica que para cada $\varepsilon > 0$ algún elemento de G se encuentra en el intervalo $(0,)$.
   Supongamos ahora que $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = 0$.
   Sea $\varepsilon > 0$. Existe $0 < p \in G$ tal que $p < \varepsilon$. Los elementos $\{np : n \in \mathbb{Z}$ también pertenecen a G.

9. Sea $r \in \mathbb{Q}^c$. Demuestre que el conjunto $\{m + nr : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

   Sugerencia:
   Podemos usar el resultado del ejercicio anterior. El conjunto $G = \{m + nr : m, n \in \mathbb{Z}\}$ forma un subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{R}$. Es suficiente demostrar que los elementos positivos del conjunto G aproximan a cero. Observe que, si $a < b \in G$ y $b - a < \varepsilon$, se tiene $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) \le b - a$, porque el último elemento es positivo i pertenece a G. La condición $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = r > 0$ implica que $|a - b| > r$ para cualquier par de elementos de G. Considera ahora el grupo cociente $G/\mathbb{Z}$ que se puede identificar con un subconjunto del intervalo $[0, 1]$ y que por lo dicho tiene que ser finito. Deduzca que r es racional, obteniendo una contradicción.

10. Demuestre que la métrica en un espacio métrico (X, d) es equivalente a la métrica discreta si y solo si el único subconjunto denso en X es el mismo X.
    Sugerencia:
    Una métrica δ es equivalente a la métrica discreta d si y solo si en el espacio (X, δ) todos los conjuntos son abiertos. Si $A \subset X$ es un conjunto denso en X, cada abierto contiene a un elemento de A. ¡Pero cada conjunto de un punto es abierto!

6. Espacios de funciones y aplicaciones

1. De un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en un solo punto.

   Sugerencia:
   Construya una función acotada y discontinua en todas partes y luego multiplícala por la función $f(x) = x$.

2. ♦ Sea
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n},\ n > 0,\ n, m \text{ primos relativos,} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Demuestre que f es continua en cero y en los puntos irracionales y es discontinua en puntos racionales $\neq 0$.

   SOLUCIÓN. Empezamos con el estudio de la continuidad en cero. El valor de la función en $x = 0$ es cero y el mismo valor toma la función en los puntos irracionales. Es suficiente estudiar la continuidad en cero de la función restringida a $\mathbb{Q}$.
   Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ y efectivamente para $x = \frac{m}{n}$ la condición $|x| = \frac{|m|}{|n|} < \delta$ implica $f(x) = \frac{1}{|n|} < \delta$ porque $|m| \geq 1$. La función es continua en cero.
   Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supongamos primero que $x > 0$. Tenemos nuevamente $f(x) = 0$ por la definición. Supongamos que la función es discontinua en x.
   Existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ en el intervalo $(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ existe $y_k = \frac{m_k}{n_k}$, m, $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(y_k) = \frac{1}{n_k} > \varepsilon$. Para estos puntos "malos" se cumple $n_k < \frac{1}{\varepsilon}$. Existe solo un número finito de los valores n_k, $m_k \in \mathbb{N}$ que satisfacen a la vez condición $n_k < \frac{1}{\varepsilon}$ y además $\frac{m_k}{n_k} < x + 1$. La sucesión (y_k) toma solo un número finito de valores racionales. Su límite es entonces un número racional.
   Sin embargo $y_k \to x$ por su definición, lo que es una contradicción.
   La función f es continua en los puntos irracionales positivos.
   La función f es par, entonces es continua también en los puntos irracionales negativos.
   La discontinuidad en cada punto racionales $x \neq 0$ es obvia, porque en este caso $f(x) > 0$, mientras que existen puntos irracionales $x_k \to x$ y $f(x_k) = 0$.
   ■

3. El eje real $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$. Sabemos del curso de álgebra lineal que existe una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ tal que el número 1 es uno de los elementos de la base que denotamos por r_0. Representamos esta base como $\{r_0\} \cup \{r_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos la descomposición única:

$$x = q_0(x) + \sum_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(x) r_\alpha,$$

donde $q_0(x)$ $q_\alpha(x) \in \mathbb{Q}$ y solo un número finito de los coeficientes q es distinto de cero.
Sea $f(x) := q_0(x)$. Demuestre que la función f es aditiva ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) y discontinua en todos los puntos del dominio.

Sugerencia:
La representación de un vector como combinación lineal de elementos de una base es única. De aquí deduzca que la función f es aditiva y $\mathbb{Q}$ - lineal.
¿Que forma tiene la función f sobre $\mathbb{Q}$? Suponiendo que f es continua demuestre que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Porque esto es una contradicción?

4. Construye una isometría del espacio
$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2, \ x \neq 1\}$ con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

sobre el intervalo $[0,2]$ con su métrica natural.

Sugerencia:
Intentalo con la aplicación $\phi(x) = x - \operatorname{sgn}(x)$.

5. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ un conjunto no cerrado. Construya una función continua no acotada sobre A.

Sugerencia:
Si A no es cerrado en X, existe $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. ¿Que propiedades tiene la función $f(x) = d(x, x_0)$? ¿Que propiedades tiene $g = \frac{1}{f}$?

6. ♦ Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$. Demuestre que la función sobre X definida por la fórmula

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

es uniformemente continua.

Solución Sean x, $y \in A$. Sin afectar generalidad podemos suponer que $d_A(x) \leq d_A(y)$.
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $d(x,a) \leq \inf_{u \in A} d(x,u) + \varepsilon$, es decir $d(x,a) \leq d_A(x) + \varepsilon$. Se sigue por la desigualdad de triangulo: $d_a(y) \leq d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) \leq d(x,y) + d_A(x) + \varepsilon$.
Obtenemos así para ε arbitrario:

$$|d_A(y) - d_A(x)| \leq d(x,y) + \varepsilon$$

y la continuidad uniforme está probada.
■

7. Muestre que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, existen a, $b > 0$ tales que $|f(x)| \leq a|x| + b$.

   Sugerencia:
   Por la continuidad uniforme en el dominio $\mathbb{R}$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1$. *Sea* $b = |f(0)|$ *y sea* $a = \frac{1}{\delta}$. *Representa* $x = n\delta + c$ *con* $0 < c < \delta$ *y para terminar la demostración muy formalmente aplique la inducción con respecto a* n.

8. Muestre que cada función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y acotada es uniformemente continua.

   Sugerencia:
   Consideramos el caso de una función f *monótona creciente. Siendo además acotada la función tiene los límites en el* $\pm$ *infinito iguales a* $m = \text{ínf}\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ *y* $M = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, *respectivamente.*
   Para $\varepsilon > 0$ *arbitrario existen* $a < b$ *tales que para* $x < a$ *ó* $b < x$ *se cumple* $f(x) - m < \varepsilon/2$ *ó* $M - f(x) < \varepsilon$, *respectivamente.*
   En el intervalo $[a, b]$ *la función es continua entonces es uniformemente continua y existe* δ *tal que* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, *mientras ambos puntos estén en* $[a, b]$ *y* $|x - y| < \delta$.
   Con estos datos en la mano demuestre que para x, $y \in \mathbb{R}$ *tales que* $|x - y| < \delta$ *se cumple* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *sin más restricciones sobre los puntos.*
   El caso de una función monótona decreciente g *se resuelve considerando la función* $-g$.

9. Sean f, g funciones uniformemente continuas y acotadas sobre un espacio métrico X. Demuestre que fg es una función uniformemente continua. Mediante un ejemplo demuestre que la suposición de que las funciones sean acotadas es necesaria.

   Sugerencia:
   El incremento del producto se puede representar de forma siguiente:

$$\begin{aligned} |f(y)g(y) - f(x)g(x)| &= |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| = \\ &= |f(y)(g(y) - g(x)) + (f(y) - f(x))g(x)| \\ &\leq |f(y)||g(y) - g(x)| + |f(y) - f(x)||g(x)|. \end{aligned}$$

   Ahora es suficiente aprovechar ambas suposiciones y la continuidad uniforme está probada.

Para ver que ambas funciones deben ser acotadas piensa en las funciones $f(x) = \cos x$, $g(x) = x$ *y el dominio* $\mathbb{R}$.

10. Demuestre que una función $f \in BC(\mathbb{R})$ es uniformemente continua si y solo si para toda sucesión $x_n \to 0$ se tiene $f(x + x_n) \to f(x)$ uniformemente.

    Sugerencia:
    Este ejercicio es principalmente para recordar las dos definiciones involucradas.
    La función f *es uniformemente continua si*

    $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \;\; \forall |h| < \delta,\; x \in \mathbb{R} \quad d(f(x+h), f(x)) < \varepsilon.$$

    Si para $|h| < \delta$ *calculamos* $\sup_{x\in\mathbb{R}} d(f(x+h), f(x))$ *obtenemos el valor* $\leq \varepsilon$.
    Si $h_n \to 0$, *para* n *suficientemente grandes se cumple* $|h_n| < \delta$ *y denotando* $f_h(x) = f(x+h)$ *obtenemos* $d_\infty(f_{h_n}, f) \leq \varepsilon$, *lo que significa la convergencia uniforme de la sucesión.*
    La implicación opuesta también consiste en leer con atención la definición de la convergencia uniforme.

11. Sea X un espacio métrico arbitrario y sea Y un espacio discreto. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que una sucesión (F_n) en $B(X, Y)$ sea uniformemente convergente.

    Sugerencia:
    En un espacio discreto la condición $d(x, y) < 1$ *implica* $x = y$. *La convergencia uniforme* $F_n \to F$ *implica* $F_n = F$ *para* n *grandes.*

12. Sean X, Y espacios métricos y sea $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y solo si para cada conjunto cerrado $B \subset Y$ la imagen inversa $F^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en X.

    Sugerencia:
    La operación de tomar la imagen inversa tiene la propiedad $F^{-1}(A) = F^{-1}(A^c)^c$ *(¡verificalo!).*
    Si O *es un abierto, su complemento es cerrado y por lo tanto* $F^{-1}(O) = F^{-1}(O^c)^c$ *es abierto como complemento del conjunto* $F^{-1}(O^c)$ *cerrado por suposición.*

13. ♦ Sean X, Y espacios métricos y sea $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y solo si $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$ para cada $B \subset Y$.

    Solución. La operación de tomar la imagen inversa tiene la propiedad $F^{-1}(D^c) = F^{-1}(D)^c$ que es obvia directamente por la definición.

$\Rightarrow$ Si $F \in C(X,Y)$, entonces $F^{-1}(\overline{B}^c) = F^{-1}(\overline{B})^c$ es un conjunto abierto como imagen inversa de un abierto. Por lo tanto $F^{-1}(\overline{B})$ es cerrado.
Aplicamos la cerradura a ambos lados de la relación $F^{-1}(B) \subset F^{-1}(\overline{B})$ obteniendo $\overline{F^{-1}(B)} \subset \overline{F^{-1}(\overline{B})} = F^{-1}(\overline{B})$, porque este conjunto es cerrado.
$\Leftarrow$ Ahora observemos que para probar la continuidad de F es suficiente ver que la mimagen inversa de cada conjunto cerrado es conjunto cerrado.
Efectivamente, si F tiene la última propiedad y $O \subset Y$ es abierto, entonces $F^{-1}(O^c) = F^{-1}(O)^c$ es un conjunto cerrado y por lo tanto $F^{-1}(O)$ es abierto, probando la continuidad de F.
Suponemos ahora que $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$ para cada $B \subset Y$. Tomamos B cerrado (entonces tal que $\overline{B} = B$) y obtenemos $F^{-1}(B) = F^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{F^{-1}(B)}$, lo que implica que $F^{-1}(B)$ es cerrado. La continuidad de F está probada.
Nota. En esta demostración no henmos usado el resultado del ejercicio anterior sino repetimos la demostración del mismo.
■

14. ♦ Sean X, Y espacios métricos y sea $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y solo si $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ para cada $A \subset X$.

    Solución. $\Rightarrow$ Sea $F(X,Y)$ y sea $x \in \overline{A}$. Existen $a_n \in A$ tales que $a_n \to x$. Por la continuidad de F se sigue $F(A) \ni F(a_n) \to F(x)$, entonces $x \in \overline{F(A)}$. Hemos probano que $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.
    $\Leftarrow$ Ahora partimos de la propiedad $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ que se cumple para cada $A \subset X$. Sea $B \subset Y$ cerrado $(\overline{B} = B) ysea$A=F$^{-1}(B)$. Obtenemos

    $$F(\overline{F^{-1}(B)}) \subset \overline{F(F^{-1}(B))} = \overline{B} = B.$$

    Resulta que cada elemento de $\overline{F^{-1}(B)}$ se transforma en B bajo F, es decir pertenece a $F^{-1}(B)$, así que $\overline{F^{-1}(B)} = F^{-1}(B)$. La imahen inversa bajo F de cada conjunto cerrado es conjunto cerrado. Como hemos probado en el ejercicio anterior esta propiedad implica la continuidad de F.
    ■

15. Demuestre que la función $\|\cdot\|$ sobre $L(E,F)$ es una norma y que $\|A\| = \text{ínf}\{C > 0 : \forall x \in E \; ; \|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}$.

    Sugerencia:

La norma definida como $\|A\| = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|A(x)\|_F$ *es un caso particular de norma en el espacio de aplicaciones acotadas, solo que no se la calcula en el dominio entero sino sobre la bola unitaria.*
Sea $D = \inf\{C > 0 : \forall x \in E\ ; \|A(x)\|_F \le C\|x\|_E\}$. *Es obvio que el número* D *satisface también la desigualdad* $\|A(x)\|_F \le D\|x\|_E$ *para todo* $x \in E$. *Tomando el supremo del valor del lado izquierdo sobre la bola unitaria de obtiene* $\|A\| \le D$.
La misma definición de la norma $\|A\|$ *implica que para cada* $x \ne 0$ *en* E *se cumple* $\|A(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \le \|A\|$ *y luego* $\|A(x)\|_F \le \|A\|\|x\|_E$.
Por lo tanto $D \le \|A\|$. *La igualdad* $D = \|A\|$ *está probada.*

16. ¿ Averigue si la propiedad "ser acotado" es invariante de homeomorfismos?

    Sugerencia:
    Consulta la solución del Ejercicio 3.6.

17. ♦ Demuestre que el cuadrante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0\}$ y el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 < 2,\ (x+1)^2 + y^2 < 2\}$ son homeomorfos.

    Solución Obviamente existen muchos homeomorfismos entre estos espacios. Una forma elegante de construir uno de ellos se basa en la teoría de funciones analíticas ó más exactamente las transformaciones de Möbius.
    Vamos a aprovechar la estructura compleja que existe en el plano escribiendo el elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ como $z = x + iy$. Para una matríz no singular $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $c \ne 0$ definimos la tranformación de Möbius del plano como

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

    El dominio de esta aplicación es igual a $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{c}{d}\}$ y en este dominio la aplicación es obviamente continua. Cuando z tiende $-\frac{c}{d}$ el valor $|m_A(z)|$ tiende al infinito.
    De las transformadas de Möbius se sabe que transforman el conjunto de lineas rectas y círculos en si mismo. En otras palabras, si C es una recta ó un círculo, $m_A(C)$ es también una recta o un círculo.
    De este punto de vista una recta en $\mathbb{R}^2$ no es otra cosa sino un círculo que pasa por "el punto en infinito".
    El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2+y^2 < 2,\ (x+1)^2+y^2 < 2\}$ tiene como frontera dos arcos que se intersectan en los puntos $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$ y que pasan por los puntos 1 y -1, respectivamente.

Vamos a buscar la tranformación de Möbius que envía el punto $\sqrt{2}i$ al infinito y transforma el punto $-\sqrt{2}i$ en cero. La transformación $m(z) = \frac{z+\sqrt{2}i}{z-\sqrt{2}i}$ satisface ambas condiciones. Las circunferencias que forman la frontera de la región A se transforman en dos rectas que pasan por el punto 0. Tenemos además $m(1) = \frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{1}{3}(-1+2\sqrt{2}i)$ y $m(-1) = \frac{-1+\sqrt{2}i}{-1-\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(-1-2\sqrt{2}i)$, además $m(0) = -1$. El conjunto $m(A)$ está entonces contenido en el semiplano izquierdo entre los semiejes que parten de cero y pasan por los puntos $-1+2\sqrt{2}i$ y $-1-2\sqrt{2}i$, respectivamente. Si definimos $f(z) = (-1-2\sqrt{2}i)m(z)$ obtenemos como imagen $f(A)$ la región entre el semieje real positivo y el semieje que pasa por el punto $-7+4\sqrt{2}i$. Si *álpha* es el argumento de $-7+4\sqrt{2}i$, definimos finalmente el homeomorfismo buscado por la fórmula:

$$\phi(z) = \left((-1-2\sqrt{2}i)\frac{z+\sqrt{2}i}{z-\sqrt{2}i}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

■

18. Sean E, F espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$ y sea $F\colon E \to F$ una aplicación continua y aditiva: $F(x+y) = F(x) + F(y)$. Demuestre que F es lineal.

Sugerencia:
Para tener la linealdad nos falta unicamente la propiedad $F(tx) = tF(x)$ para todos $x \in E$, $t \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando la aditividad de la función tenemos:

$$nF(\frac{1}{n}x) = F(\frac{1}{n}x) + \cdots + F(\frac{1}{n}x) = F(\frac{1}{n}x + \cdots + \frac{1}{n}x) = F(x),$$

de donde $F(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}F(x)$. También para cada $m \in \mathbb{Z}$ se sigue por el mismo argumento: $F(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}F(x)$.
Ya hemos probado que para cada $q \in \mathbb{Q}$ se cumple $F(qx) = qF(x)$. Ahora es tiempo de aprovechar la continuidad de la aplicación F. Para $t \in \mathbb{R}$ escogemos una aproximación $\mathbb{Q} \ni q_j \to T$ y obtenemos $F(tx) = F(\lim_{j\to\infty} q_j x) = \ldots$ Terminalo.

19. ♦ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ una función lineal no identicamente nula. Demuestre que φ es continua si y solo si $\operatorname{Ker}\varphi$ no es denso en E.

Solución. Existe un elemento de $y \in E$ tal que $\varphi(y) \neq 0$. Para $x \in E$ arbitrario se cumple

$$\varphi(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}y) = 0,$$

es decir $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} y \in \operatorname{Ker}\varphi$ para cada $x \in E$.
Cada elemento x de E se descompone en forma única como $x = ty + h$, donde $t \in \mathbb{K}$, $h \in \operatorname{Ker}\varphi$.
El espacio E tiene la forma de suma directa $E = \mathbb{K}y + \operatorname{Ker}\varphi$.
El kernel de una función lineal es de codimensión 1.
Si φ es una función continua, $\operatorname{Ker}\varphi$ es un conjunto cerrado como imagen inversa del conjunto cerrado $\{0\}$ y por lo tanto no es denso en E.
Ahora supongamos que $E \neq \overline{\operatorname{Ker}\varphi}$. Sea $y \in \overline{\operatorname{Ker}\varphi} \setminus \operatorname{Ker}\varphi$. Tenemos entonces $\varphi(y) \neq 0$ y por la observaciones hechas al principio $E = \mathbb{K}y + \operatorname{Ker}\varphi$ que es una contradicción demostrando que $\overline{\operatorname{Ker}\varphi} = \operatorname{Ker}\varphi$. Acabamos de probar que $\operatorname{Ker}\varphi \neq E$ implica que $\operatorname{Ker}\varphi$ es cerrado en E.
El espacio cociente $E/\operatorname{Ker}\varphi$ es un espacio normado de dimensión 1 y la aplicación $p\colon E \ni x \to [x] \in E/\operatorname{Ker}\varphi$ es continua. La función $\tilde{\varphi}$ sobre $E/\operatorname{Ker}\varphi$ definida por la fórmula $\tilde{\varphi}([x]) = \varphi(x)$ está bién definida y es lineal entre dos espacios de dimensión uno. Por consiguiente $\tilde{\varphi}$ es una función continua.
Obtenemos $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$ que demuestra la continuidad de φ como de la suposición de dos aplicaciones continuas.
Hemos probado: ($\operatorname{Ker}\varphi$ no es denso en E) $\Longrightarrow$ (φ es continua).
El mismo resultado se puede formular en otra forma:
Una aplicación lineal sobre un espacio normado es discontinua si y solo si su kernel es denso en el dominio.
■

20. ♦ Sea (X, d) un espacio métrico y sea u_0 un punto arbitrario en X. Para x, $u \in X$ sea $f_u(x) = d(x, u) - d(x, u_0)$. Demuestre que f_u es una función acotada, continua sobre X y que la aplicación $X \ni u \to f_u \in BC(X)$ es una isometría.

Solución La continuidad de la función f_u es obvia, porque la distancia es una función continua (vea Ejemplo 6.3). Por Proposición 1.2 sabemos que $|f_u(x)| \leq d(u, u_0)$, así que efectivamente $f_u \in BC(X)$.
Queda por probar que la aplicación $X \ni u \to f_u \in CB(X)$ es isométrica, es decir

$$\|f_u - f_v\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_u(x) - f_v(x)| = d(u, v).$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} |f_u(x) - f_v(x)| &= |d(x, u) - d(x, u_0) - (d(x, v) - d(x, u_0)| = \\ &= |d(x, u) - d(x, v)| \leq d(u, v), \end{aligned}$$

nuevamente por Proposición 1.2.
En los puntos $x = u$ y en $x = v$ la función $|d(x,u) - d(x,v)|$ alcanza el valor deseado $d(u,v)$.
■

21. ♦ Deduzca Teorema 2.10 del resultado del ejercicio anterior.

Solución. Teorema 2.10 dice que cada espacio métrico X se sumerge isométricamente en un espacio completo en el cual forma un subconjunto denso.
En Problema 12.16 hemos construido (sin mucho esfuerzo) una inyección isométrica $\phi\colon X \to BC(X)$. Este el espacio es completo, entonces la cerradura de $\phi(X)$ en $BC(X)$ es la completación buscada.
■

Nota Inmediatamente surge la pregunta porque en Capítulo 2 hemos usado una demostración tan larga y complicada en lugar de la que acabamos de hacer en media página.
La respuesta es muy sencilla. Uno de los casos más importantes de la completación es la construcción de los números reales como la completación del campo de los racionales. Para este fin no sirve la última demostración en la cual se aprovecha la completez del eje real.
Este momento es buena oportunidad para darse cuenta de la exepcional importancia de los números reales en el análisis.
Tal vez el hecho de que cada espacio métrico está contenido en el espacio $BC(X)$ no es tan sorprendente, pero según teorema de Banach y Mazur (1932) cada espacio métrico seprable se sumerge isométricamente en el espacio $C[0,1]$ de funciones continuas sobre el intervalo.
Después de "crear" un enorme mundo de todos los espacios métricos (separables) de repente constatamos que todo este "cosmos" ya existió dentro de un espacio tan sencillo como él de $C[0,1]$ conocido de los cursos del cálculo. No se puede evitar la comparación con el caso de los fractales...
■

22. ♦ Sea $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ - el disco unitario en el plano. Sea $E = CB(\mathbb{R}^2)$ - el espacio de funciones continuas acotadas sobre el plano provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $F = \{f \in E : f|\mathbb{D} \equiv 0\}$. Encuentre una isometría lineal entre el espacio cociente E/F y el espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$.

Solución. Sea $A(f) = f|\overline{\mathbb{D}}$. Si $A(f) = 0$, la función f se anula en el disco, entonces $f \in F$. Cada función continua g que se anula

dentro del disco, es nula en el disco serrado. Tenemos entonces la igualdad $\ker A = F$. La definición $\tilde{A}([f]) = A(f)$ es correcta.
El operador $\tilde{A}\colon E/F \to C(\overline{\mathbb{D}})$ es lineal é inyectivo. Vamos a probar que $\tilde{A}$ es suprayectivo.
Para $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ arbitrario debemos encontrar una función continua acotada tal que $f|\overline{\mathbb{D}} = g$. Existen teoremas generales sobre las extensiones continuas de funciones continuas (Teorema de Tietze), pero en nuesto caso podemos construir tal extensión en forma muy sencilla. Sea

$$\mathcal{E}(g) := \begin{cases} g(\mathfrak{a}), & \|\mathfrak{a}\| \le 1, \\ g(\frac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|}), & \|\mathfrak{a}\| > 1. \end{cases}$$

Fuera del disco la función $\mathcal{E}(g)$ es constante sobre cada rayo que parte de la circunferencia.
La función $\mathcal{E}(g)$ es continua, acotada y satisface $A(\mathcal{E}(g)) = g$. Además se cumple la fórmula $\sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |\mathcal{E}(g)(\mathfrak{a})| = \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{D}} |g(\mathfrak{a})|$.
La última observación es importante para probar que $\tilde{A}$ es una isometría. La norma en el espacio cociente tiene en nuestro caso la forma

$$\|[f]\| = \inf_{h\in F} \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |(f+h)(\mathfrak{a})|,$$

por lo cual $\|[f]\| \le \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |(f)(\mathfrak{a})|$.
La función $h_0 = \mathcal{E}(A(f)) - f$ es elemento del subespacio F (se anula sobre el disco).
Se cumple

$$\|[f]\| \le \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |f+h_0|(\mathfrak{a})| = \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |\mathcal{E}(A(f))| = \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{D}} |f(\mathfrak{a})| = \|A(f)\|_\infty.$$

Para cada h que se anula sobre $\mathbb{D}$ tenemos

$$\sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |(f+h)(\mathfrak{a})| \ge \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{D}} |(f)(\mathfrak{a}),$$

de donde se sigue tomando el ínfimo con respacto a $h \in F$:

$$\|[f]\| \ge \|A(f)\|_\infty.$$

Las dos desigualdades implican que efectivamente $\|[f]\| = \|A(f)\|_\infty$.
■

23. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación continua $f\colon X \to Y$ es *abierta* si para cada $O \subset X$ abierto $f(O)$ es abierto. Demuestre que, si X es de 2^a categoría en si mismo y $f\colon X \to Y$ es abierto, entonces Y es de 2^a categoría en si mismo.

    Sugerencia:

Sea C_n una familia de conjuntos cerrados en Y tales que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
Debemos probar que uno de los conjuntos C_n tiene interior no vacío.
Los conjuntos $f^{-1}(C_n)$ son cerrados en X y cubren el espacio X. Si X es de 2^a categoría, existe n_o tal que $\operatorname{Int} C_{n_o} \neq \emptyset$. *Ahora llega el momento de aprovechar el hecho de que f es una aplicación abierta.*

24. ♦ Sea $C^1([a,b])$ el espacio de funciones sobre $[a,b]$ que tienen derivada continua. Sea $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|$. Investigue la continuidad de la aplicación $T\colon C([a,b]) \to C^1([a,b])$ cuando
1. $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\text{sen}\,(x-t)dt$,
2. $(Tf)(x) = \int_a^x f^2(t)dt$.

Solución 1. La métrica en el espacio $C^{(1([a,b])}$ está relacionada con la norma $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|+|f'(x)|$. Para obtener el valor $\|(Tf)\|$ tenemos que calcular la derivada de la función Tf.
Como recordamos del curso del cálculo para derivar una función de este tipo debemos introducir una función de dos variables $F(x,y) = \int_a^x f(t)\text{sen}(y-t)dt$ y entonces se cumple

$$(Tf)'(x) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,x) + \frac{\partial}{\partial y}F(x,x).$$

Por Teorema principal de Cálculo $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = f(x)\text{sen}(y-x)$. La segunda derivada parcial es la derivada de una integral a un parámetro y tiene valor $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \int_a^x f(t)\frac{\partial}{\partial y}(\text{sen}(y-t)) = \int_a^x f(t)\cos(y-t)dt$.
De tal manera

$$(Tf)'(x) = \int_a^x f(t)\cos(x-t)dt.$$

En este caso el operador T es lineal, entonces su continuidad en todas partes equivale a la continuidad en cero.
Calculamos:

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \sup_{x\in[a,b]} |\int_a^x |f(t)dt| + |\int_a^x |f(x)\cos(x-t)dt| \\ &\leq 2(b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = 2(b-a)\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Este operador es continuo como operador del espacio $C([a,b])$ into $C^1([a,b])$..

2. En este caso $(Tf)'(x) = f^2(x)$ por Teorema Principal del Cálculo. El operador no es lineal, entonces calculamos

$$\begin{aligned} d(Tf,Tg) &= \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dt\right| \\ &\leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}(f-g)^2(x) \leq (b-a)(\sup_{x\in[a,b]}|f-g|(x))^2 \\ &= (b-a)\|f-g\|_\infty. \end{aligned}$$

Esta desigualdad demuestra la continuidad de la aplicación $T\colon C([a,b]) \to C^1([a,b])$.

7. Espacios compactos

1. Describe los conjuntos compactos en un espacio de métrica discreta.

   Sugerencia:
   Si en un espacio de métrica discreta X disponemos de un número infinito de elementos, podemos construir en X una sucesión en la cual ningún elemeno se repite. Tal sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente. ¿Conclusión?
2. Construya en $\mathbb{R}$ un conjunto numerable compacto con un número infinito de puntos de acumulación.

   Sugerencia:
   El ejemplo sencillo de un conjunto infinito compacto en $\mathbb{R}$ es $C = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto tiene un solo punto de acumulación en cero. Si construimos $C_1 = C \cup (1 + C)$, obtenemos un conjunto con dos puntos de acumulación. Siga así...

3. Construya una cubierta abierta del intervalo $[0, 1)$ que no tenga ninguna subcubierta finita.
   Sugerencia:
   Agregando el punto 1 al intervalo $[0, 1)$ obtenemos un conjunto compacto, y según Teorema de Borel cada cubierta de un compacto tiene una subcubierta finita. Construyendo una cubierta de propiedades deseadas tenemos que aprovechar la falta del punto 1 en nuestro conjunto. Sean $[0, 1) \ni x_n \nearrow 1$ y sean $O_n = [0, x_n)$. ¿Que tiene que ver esta familia de conjuntos con nuestro problema?

4. Demuestre que el producto crtesiano de dos conjuntos totamletamente acotadoa es totalmente acotado. Uúsalo para probar que conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado.

   Sugerencia:
   En el producto cartesiano de espacios (X, d_X), (Y, d_Y) usamos la métrica $d((x, y), (u, v)) = d_X(x, u) + d_Y(y, v)$.
   Si para $\varepsilon >$ dado tenemos $X = \sum_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon/2)$, $Y = \sum_{k=1}^{m} B(y_k, \varepsilon/2)$, demuestra eue $\{(x_j, y_k) : 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq\}$ es una ε-red para el producto $X \times Y$.
   Extienda este resultado a un producto $X_1 \times \cdots \times X_n$.
   En el caso de un subconjunto A acotado en $\mathbb{R}^n$ aprovecha el hecho de que A es un subconjunto de un producto de forma $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, recordando también que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

5. Demuestre que la relación $\sim$ definida en la sección 4 entre las normas en un espacio vectorial E es una relación de equivalencia.

   Sugerencia:
   La relación $\sim$ entre dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ tiene lugar cuando existen constantes A, $B > 0$ tales que para $x \in E$ cualquiera
   $$A\|x\| \leq \|x\|' \leq B\|x\|.$$
   A primera vista se puede dudar si esta relación es simétrica. Sin embargo, si se cumplen las dos igualdades, tenemos también
   $$\frac{1}{B}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{A}\|x\|',$$
   entonces la simetría sí tiene lugar. La transitividad también se demuestra facilmente.
6. Demuestre que en cada espacio normado $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ una sucesión $\mathfrak{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nk})$ converge si y solo si para cada j la sucesión numérica $(b_n) = (a_{nj})$ converge.

   Sugerencia:
   Teorema 7.23 afirma que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes. La equivalencia de las normas significa que una sucesión convergente en una norma sigue siendo convergente en cualquier otra norma. Por lo tanto es suficiente demostrar el hecho que nos interesa utilizando la norma más conveniente. Usa la norma euclidiana.

7. Demuestre que cada subespacio vectorial en un espacio normado de dimensión finita es cerrado.

   Sugerencia:
   Por Teorema 7.24 sabemos que cada operador lineal entre dos espacios normados de dimensión finita es continuo. Si E es un espacio normado de dimensión n y $F \subset E$ es un subespacio vectorial de dimensión k, podemos construir el espacio cociente E/F que es de dimensión $n - k$. Por la misma definición del espacio cociente existe el operador lineal $A\colon E \to F$, cuyo kernel es exactamenye el espacio F. Este operador es continuo, por lo tanto $F = A^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado como imagen inversa de un conjunto cerrado bajo una aplicación continua.
   Si esta demostración te parece demasiado complicada - busca otra. Hay muchas formas de demostrar este hecho.

8. Sean $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ espacios normados y sea $A\colon E \to F$ un operador lineal. Demuestre que, si E es de dimensión finita, A es continuo.

Sugerencia:
Este hecho está probado como Teorema 7.24 en el caso cuando ambos espacios son de dimensión finita. Sin embargo, incluso cuando $\dim F = \infty$*, el subespacio* $F' = A(E) \subset F$ *es un espacio normado de dimensión finita. Aplica Teorema 7.24 al operador* A *tratado como operador de* E *en* F'*.*

9. ♦ Demuestre que para cada conjunto A totalmente acotado en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ la cáscara convexa $\mathrm{conv}(A)$ es también totalmente acotada.

Solución. En Proposición 1.21 hemos obtenido la descripción de la cáscara $\mathrm{conv}(A)$ como del conjunto combinaciones convexas de elementos de A, es decir vectores de forma: $\sum_{j=1}^k t_j a_j$, donde $\sum_{j=1}^k t_j = 1$ y todos los coeficientes t_j no negativos.
Si A es un conjunto acotado, $\mathrm{conv}(A)$ es también acotado, porque suponiendo que $\|a\| \leq C$ para todos $a \in A$ obtenemos

$$\|\sum_{j=1}^k t_j a_j\| \leq \sum_{j=1}^k t_j \|a_j\| \leq \sum_{j=1}^k t_j C = C.$$

Por la definición de un conjunto acotado (resp. totalmente acotado) se observa que si $A \subset E_1 \subset E$ donde A es un subconjunto acotado (resp. totalmente acotado) en E_1, entonces es A también acotado (totalmente acotado) en E.
En un espacio normado de dimensión finita un conjunto es totalmente acotado si y solo si es acotado.
Un conjunto finito en un espacop normado tiene cáscara convexa totalmente acotada.
Efectivamente, para un conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset E$, la cáscara convexa $\mathrm{conv}(\{a_1, \ldots, a_N\})$ pertenece al subespacio de domensión finita $E_1 \subset E$ generado por estos vectores y en este espacio su cáscara es totalmente acotada. Pero esto implica que la cáscara es totalmente acotada también como subconjunto de de E.
Volvamos al caso general de un conjunto A totalmente acotado en un espacio normado E. Para $\varepsilon > 0$, sea $R = \{a_1, \ldots, a_N\}$ una ε-red de elementos de A. El conjunto $\mathrm{conv}(R)$ es totalmente acotado en E y existe una ε-red $\{x_1, \ldots, x_M\}$ de $\mathrm{conv}(R)$.
Vamos a probar que el mismo conjunto $\{x_1, \ldots, x_M\}$ es una 2ε-red para A.
Sea $u = \sum_{j=1}^k t_j u_j \in \mathrm{conv}(A)$. Para cada j existe $a_{i_j} \in R$ tal que $\|a_{i_j} - u_j\| < \varepsilon$. Sea $a = \sum_{j=1}^k t_j a_{i_j}$. Tenemos entonces un elemento

$a \in \operatorname{conv}(R)$ que satisface

$$\|u-a\| = \|\sum_{j=1}^{k} t_j(u_j - a_{i_j}\| \leq \sum_{j=1}^{k} t_j\|u_j - a_{i_j}\| \leq \sum_{j=1}^{k} t_j\varepsilon = \varepsilon.$$

Por otro lado existe

$$x_m \in R$$

tal que $\|a - x_m\| < \varepsilon$. Por consiguiente $\|u - x_m\| \leq \|u-a\| + \|a - x_m\| < 2\varepsilon$.
Hemos probado que para cada ε existen $\{x_1, \ldots, x_M\} \subset \operatorname{conv}(A)$ tales que $\operatorname{conv}(A) \subset \bigcup_{m=1}^{M} B(x_m, 2\varepsilon)$. La cáscara $\operatorname{conv}(A)$ es totalmente acotada.
■

10. ♦ Sea A un conjunto compacto en un espacio de Banach E. Demuestre que $\overline{\operatorname{conv}(A)}$ es un conjunto compacto.

    Solución. Por Corolario 7.11, en un espacio completo cada conjunto cerrado y totalmente acotado es compacto. En el problema anterior hemos probado que $\operatorname{conv}(A)$ es un conjunto totalmente acotado. Para probar que su cerradura es compacta basta observar que la cerradura de un conjunto totalmente acotado sige siendo totalmente acotada.
    ■

11. ♦ Supongamos que en el espacio métrico X cada subconjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es compacto.

    Solución Sea (x_n) una sucesión en X. Sea $Y = \{\mathrm{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si este conjunto es finito, la sucesión contiene una subsucesión constante que obviamente es convergente en X.
    Si el conjunto Y es infinito, existe por nuestra suposición $x \in X$ que es un punto de acumulación de Y. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_{n_k} \neq x$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. La subsucesión (x_{n_k}) converge a x. El espacio X es compacto.
    ■

12. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $\phi\colon X \to Y$ se llama *abierta* si para todo conjunto $O \subset X$ su imagen $\phi(O)$ es abierta. Demuestre que cada función continua, abierta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona.

    Sugerencia:
    Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es abierta, continua y no es monótona.

Una función abierta no puede ser constante. Supongamos que para algunos x, $y \in \mathbb{R}$ se cumple $f(x) < f(y)$. Si para algún $z > y$ tenemos $f(z) < f(y)$, la función alcanza en el intervalo $[x, z]$ su máximo M que es mayor que $f(x)$ y $f(z)$. ¿Es abierto el conjunto $f((x, z))$?
La contradicción obtenida demuestra que la función es monótona creciente.
Si en principio tenemos $x < y$ con $f(x) > f(y)$, en forma análoga probaremos que f es monótona decreciente.

8. Espacios conexos

1. Sea E un subespacio vectorial de dimensión $n-1$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus E$ es disconexo.

   Sugerencia:
   Consideramos el espacio $\mathbb{R}^n$ con su estructura natural euclidiana. Cada subespacio vectorial E es cerrado y la proyección natural $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E$ es continua. Si $\dim E = n-1$, tenemos $\dim \mathbb{R}^n/E = 1$ y $p(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que es un conjunto disconexo. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus E$ es disconexo, porque las aplicaciones continuas conservan la conexidad de conjuntos.

2. Demuestre que un espacio métrico X es conexo si y solo si para cada par de puntos $x,\, y \in X$ existe un conjunto conexo $C \subset X$ tal que $x,\, y \in C$.

   Sugerencia:
   Si el espacio es conexo, obviamente cumple esta condición con $C = X$ para cualquier par de puntos $x,\, y \in X$.
   Para probar la implicación inversa supongamos que un espacio X que cumple dicha condición es disconexo con la descomposición $X = O_1 \cup O_2$ en dos conjuntoa abiertos, disjuntos no triviales. Toma $x \in O_1$, $y \in O_2$ y sea C el conjunto conexo que contiene a ambos puntos. Su descomposición $C = (O_1 \cap C) \cup (O_2 \cap C)$ contradice la conexidad de C, entonces X tiene que ser conexo.

3. Sea $C \subset X$ un conjunto conexo en un espacio métrico. Demuestre que $\overline{C}$ es conexo.

   Sugerencia:
   Si el espacio X es conexo, tiene obviamente la propiedad descrita. Supongamos que en X cada par de puntos está contenido en algún conjunto conexo. Supongamos que X es disconexo y sea $X = O_1 \cup O_2$ con O_i, $i = 1, 2$ abiertos disjuntos, no vacíos.
   Sean $x \in O_1$, $y \in O_2$ y sea C el conjunto conexo que contiene a ambos puntos. ¿Que propiedades tienen los conjuntos $O_1 \cap C$ y $O_2 \cap C$?

4. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de conjuntos conexos en un espacio métrico X. Supongamos que para cada par $\alpha_1,\, \alpha_2 \in \Delta$ se cumple $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Demuestre que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es conjunto conexo.

   Sugerencia:
   Supongamos nuevamente que el conjunto $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es disconexo y se descompone en $O_1 \cup O_2$ con O_i, $i = 1, 2$ abiertos disjuntos, no vacíos.

Observe que por la conexidad de cada componente, para cada $\alpha \in \Delta$ *el conjunto* A_α *esta en* O_1 *o está en* O_2. *Ahora es pácil encontrar la contradicción con el hecho de que* $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \neq \emptyset$ *para cada par* $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \Delta$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ una función continua. Supongamos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Demuestre que f es suprayectiva.

   Sugerencia:
   El eje real es conexo y la función f *es continua, entonces* $f(\mathbb{R})$ *es un subconjunto conexo en* $(-1,1)$. *Todos los conjuntos conexos en* $\mathbb{R}$ *son de forma de un intervalo. Encuentre los extremos del intervalo* $f(\mathbb{R})$.

6. ♦ Sea $A = \{x \in \mathbb{R} :\ 1 \le |x| \le 2\}$. Sea

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

   Demostrar que el espacio (A,d) es conexo.

   Solución. El conjunto A es unión de dos intervalos:

$$A = [-2,-1] \cup (1,2].$$

   Dentro de cada intervalo la métrica coincide con la métrica natural de $\mathbb{R}$, entonces ambos intervalos con la métrica d son conexos. Si O_1, O_2 son conjuntos abiertos y $A = O_1 \cup O_2$, las intersecciones $U_i = O_i \cap [-2,-1]$, $i = 1,2$ son conjuntos abiertos en $[-2,-1]$ y $U_1 \cup U_2 = [-2,-1]$, entonces por la conexidad del intervalo uno de los conjuntos, digamos U_2 es vacío. Por lo tanto $[-2,-1] \subset O_1$ y $O_2 \subset (1,2]$. La bola centrada en -1 y de radio r en A es igual a $(-1-r,-1] \cup (1,1+r)$. El conjunto O_1 es abierto en A entonces contiene un intervalo $(1,1+r)$ para algún $r > 0$. Obtenemos $(1,2] = (O_1 \cap (1,2]) \cup O_2$ y sabemos que $O_1 \cap (1,2]\emptyset$. Por lo tanto $O_2 = \emptyset$. El espacio A es conexo.
   ■

7. Demuestre que el conjunto

$$S = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$$

   es conexo.

   Sugerencia:
   Hay muchas formas de demostrarlo. La semiesfera es una unión de "meridianos"que se intersectan en el "polo norte".

8. ♦ Demostrar que el en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto y conexo es conexo por arcos.

   Solución Sea $O \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo y sea $x_0 \in O$. Denotamos por D el conjunto de puntos de O que se pueden unir con x_0 por medio de una curva continua:

   $$D = \{x \in O : \exists\, \gamma_x \in C([0,1], O),\ \gamma_x(0) = x_0,\ \gamma_x(1) = x\}.$$

   Para $x \in D$ existe $r >$ tal que $B(x, r) \subset O$, porque O es abierto. Dado $y \in B(x, r)$, construimos una curva que una x_0 con y de la manera siguiente:

   $$\gamma_y(t) = \begin{cases} \gamma_x(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (2-2t)x + (2t-1)y, & \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

   Esta curva es continua, porque en cada uno de intervalos es continua y el final del primer tramo coincide con el inicio del segundo. De tal manera vemos que si $x \in D$, entonces $B(x, r) \subset D$. Hemos probado que el conjunto D es abierto.
   Ahora supongamos que existe $y_0 \in O \setminus D$. Nuevamente podemos encontrar $r' > 0$ tal que $B(y_0, r') \subset O$. Si $y \in B(y_0, r')$ y $y \in D$, entonces de la misma manera como arriba podemos unir y_0 con x_0 usando como arriba primero la curva γ desde x_0 hasta y y el segmento lineal que une y con y_0. Esto es una contradicción, que demuestra que $B(y_0, r') \subset O \setminus D$.
   Así resulta que $O \setminus D$ es también un conjunto abierto. Sin embargo, O es conexo, y como $D \neq \emptyset$ obtenemos $D = O$, lo que termina la demostración.
   ■

9. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}$ con la métrica

   $$d(x, y) = \begin{cases} |x-y|, & x - y \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Sugerencia:
   Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ es abierto y cerrado en el espacio $(\mathbb{R}, d)$. Para este fin describa $B(x, 1)$ cuando $x \in \mathbb{Q}$ y cuando $x \in \mathbb{Q}^c$.

10. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}^2$ con la métrica

    $$d(x, y) = \begin{cases} 0, & (x_1, y_1) = (x_2, y_2), \\ |x_1| + |x_2| + |y_1 - y_2|, & (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2). \end{cases}$$

    Sugerencia:

Se trata de la "métrica del bosque". Acuerdate de su interpretación geométrica y demuestre que este espacio es conexo por arcos.

11. Sea X un espacio métrico. Para x, y, $z \in X$ sean γ_1, $\gamma_2 \in C([0,1], X)$ unas curvas continuas tales que $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = y$, $\gamma_2(1)0z$. Construya una curva continua γ tal que $\gamma(09 = x$, $\gamma(1) = z$.

    Sugerencia:
    Aprovecha la construcción usada en la demostración anterior.

12. Un espacio métrico se llama *sc localmente conexo* si cada punto del espacio tiene una vecindad conexa. Demuestre que cada espacio conexo y localmente conexo es conexo por arcos.
    Sugerencia:
    Observe que la demostración del Problema 7 usa exactamente la conexidad local del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces se adapta perfectamente al caso general.
13. Sea X un espacio métrico y sea $A \subset X$ un conjunto tal que $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Int}(A^c) \neq \emptyset$. Sea $a \in \mathrm{Int}(A)$, $b \in \mathrm{Int}(A^c)$. Demuestre que cada curva continua que une a con b se intersecta con la frontera de A.

    Sugerencia:
    Suponga lo contrario. Recuerda que $X = \overset{\circ}{A} \cup \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(A^c)$. Si una curva continua $c\colon [a,b] \to X$ une un punto $x \in \mathrm{Int}(A)$ con $y \in \mathrm{Int}(A^c)$ y no se intersecta con la frontera $\overset{\circ}{A}$ podemos descomponer el intervalo $[a,b]$ en $O_1 = \{t \in [a,b] : c(t) \in \mathrm{Int}(A)\}$ y $O_2 = \{t \in [a,b] : c(t) \in \mathrm{Int}(A^c)\}$. La contradicción está a mano.

14. Sea A un conjunto conexo en un espacio métrico. ¿Es conexo el conjunto $\mathrm{Int}\, A$?

    Sugerencia:
    Considera el conjunto
    $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + t^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + t^2 \leq 1\}$.

15. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. ¿Es conexo el conjunto $\mathbb{R}^2 \backslash C$?

    Sugerencia:
    Toma en cuenta dos ejemplos:
    $A = \mathbb{R}^2\mathbb{Q}^2$ *y* $B = \mathbb{R} \setminus \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$.
    Demuestre que A es disconexo y que B es conexo.

16. ⧫ Investigue la conexidad del conjunto

$$A = (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{R}^2.$$

Solución

La diagonal $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ que no se intersecta con A. Su complemento es un conjunto abierto y disconexo con la descomposición $\Delta^c = D_1 \cup D_2$, donde $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ y $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$. Obtenemos $A = (A \cap D_1) \cup (A \cap D_2)$, que es una descomposición en partes abiertas, no vacías. El conjunto A no es conexo.

■

17. ⧫ Investigue la conexidad del conjunto

$$B = \quad (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^2.$$

.

Solución

Supongamos que $B = O_1 \cup O_2$, donde O_i, $i = 1, 2$ es abierto en B, no vacío.

El conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}^2$, entonces es denso en B. Los conjuntos $O_1 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, $i = 1, 2$ no son vacíos.

Sea $\mathbf{a} = (x,y) \in O_1 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ y $\mathbf{b} = (s,t) \in O_2 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. El segmento en $\mathbb{R}^2$ que une los puntos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ tiene la forma $I(t) = (tx + (1-t)u, ty + (1-t)v)$, $t \in [0,1]$.

Las coordenadas $x,\ y,\ u, v$ son racionales entonces para $t \in \mathbb{Q}$ tenemos $I(t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset B$ y para $t \in \mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c$ se cumple $I(t) \in \mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c \in B$. El segmento está totalmente contenido en B. Considerando $T_i = \{t \in [0,1] : I(t) \in O_1\}$, $i = 1, 2$ obtenemos la descomposición del intervalo $[0,1]$ en dos conjuntos no vacíos, abiertos lo que es una contradicción, porque el intervalo es conexo. La contardicción demuestra que el conjunto B es conexo.

■

9. Teorema de Ascoli

1. Sean X, Y espacios métricos. Para cada $x \in X$ definimos una aplicación $\delta_x \colon BC(X,Y) \to Y$ por la fórmula $\delta_x(f) = f(x)$.
   - Demuestre que δ_x es una aplicación continua.
   - Sea $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una familis equicontinua en $x_0 \in X$ si y solo si la aplicación

     $$X \ni x \to \delta_x|_{\mathcal{F}} \in BC(\mathcal{F}, Y)$$

     es continua en x_0.
   - Muestre que si $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua, dicha aplicación es uniformemente continua.

   Sugerencia:
   - *La convergencia uniforme implica la convergencia puntual.*
   - *Directo por la definición escribimos que significa que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en $x_0 \in X$:*

   $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in \mathcal{F}, \; d_X(y, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(y), f(x_0)) < \varepsilon.$$

     Ahora afirmamos en forma explícita que la aplicación $X \ni x \to \delta_x|_{\mathcal{F}} \in BC(\mathcal{F}, Y)$ es continua en x_0:

     $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall d_X(y, x_0) < \delta \; \sup_{f \in \mathcal{F}} d_Y(f(y), f(x_0)) < \varepsilon.$$

     ¿Acaso no es lo mismo?
   - *En ambos casos agregando el adjetivo* "uniformemente" *decimos que la misma $\delta >$ sirve para todos x_0.*

2. ♦ Sea $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$ una familia equicontinua. Sea

   $$U = \{x \in X : \, \{f(x) : \, f \in \mathcal{F}\} \text{ es totalmente acotado}\}.$$

   Muestre que U es un conjunto abierto y cerrado en X. Supongamos que $U \neq \emptyset$. Muestre que para X compacto y conexo la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada.

   Solución Sea $x \in U$. Existe una $\varepsilon/3$ - red del conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ que es de forma $\{f_j(x) : \, 1 \leq j \leq N\}$, donde $f_j \in \mathcal{F}$.
   La equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$ en el punto x significa que existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x, y) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ qualquier que sea $f \in \mathcal{F}$.
   Sea $f \in \mathcal{F}$ y sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $d_Y(f(x), f_j(x)) < \varepsilon$. Obtenemos:
   $d_Y(f(y), f_j(y)) \leq d_Y(f(y), f(x)) + d_Y(f(x), f_j(x)) + d_Y(f_j(x), f_j(y)) < \varepsilon$.
   De esta manera hemos probado que, si $x \in U$ y $d_X(x, y) < \delta$, entonces $y \in U$, es decir el conjunto U es abierto.

Ahora vamos a ver que U es cerrado, porque su complemento es abierto.
Sea $v \in U^c$. Existe un $\varepsilon > 0$ para el cual el conjunto $\{f(v) : f \in \mathcal{F}\}$ no tiene ninguna ε - red.
Sin embargo la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en el punto v y existe $r > 0$ tal que $d_Y(v, u) < r$ implica $d_Y(f(v), f(u)) < \varepsilon/3$, $f \in \mathcal{F}$.
Si el conjunto $\{f(u) : f \in \mathcal{F}\}$ tuviera una $\varepsilon/3$ - red, por el mismo cálculo que hicimos arriba, tuvieramos una ε red en v, que es una contradicción.
Así, hemos probado que U^c es abierto y que U es cerrado.
Suponiendo que el conjunto X es conexo y $U \neq \emptyset$, obtenemos que $U = X$. Si además X es compacto, por Teorema 9.4 la familia es uniformemente continua. Proposición 9.8 afirma que $\mathcal{F}$ es una familia totalmente acotada.
$\blacksquare$

3. Sea V un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}$. Sea $k(\cdot,\cdot) \in BC(\overline{V}\times\overline{V})$. Denotamos por K el operador integral definido sobre $CB(\overline{V})$ por la fórmula:
$$Kf(x) = \int_{\overline{V}} k(x, y)f(y)dy.$$
Demuestre que $K(B(0, 1))$ es un conjunto totalmente acotado en $CB(U)$.

Sugerencia:
Es conveniente aplicar Proposición 9.8 a la familia $\mathcal{F} = K(B(0, 1))$. La parte esencial de la demostración es la verificación de que la familia es equicontinua.
La función $k(\cdot,\cdot)$ es continua en un dominio compacto entonces es uniformemente continua. Sea $\delta > 0$ tal que
$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |k(x, y) - k(u, v)| < \varepsilon$$
.
Calculamos para $f \in K(B(0, 1))$:
$$\begin{aligned} |Kf(x) - Kf(u)| &= \left|\int_{\overline{V}} (k(x, y) - k(u, y))f(y)dy\right| \\ &\leq \int_{\overline{V}} |k(x, y) - k(u, y)|dy \\ &\leq \int_{\overline{V}} dy\varepsilon, \end{aligned}$$
cuando $|x - u| < \delta$. La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.

4. Sea $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Utilizando Teorema de Ascoli describa los conjuntos compactos en $BC(X)$.

   Sugerencia:
   El espacio X tiene un solo punto que no es aislado y cada elemento $f \in C(X)$ se puede identificar con una sucesión convergente $a_n = f(\frac{1}{n})$ tal que $f(0) = \lim_{n\to\infty} a_n$.
   Cada familia de funciones $\mathcal{F}$ es equicontinua en los puntos aislados, entonces la equicontinuidad uniforme es asegurada si $\mathcal{F}$ es equicontinua en cero.
   Por Teorema de Ascoli la familia $\mathcal{F}$ es compacta si y solo si es cerrada, acotada y equicontinua en cero.
5. Para $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ demuestre que $\{f \in C(X) : |f(x)| \leq |x|\}$ es compacto.
   Sugerencia:
   Usa el resultado del ejercicio anterior.

10. Teorema de Stone-Weierstrass

1. Encuentre una subálgebra de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa los puntos de $\mathbb{R}$ y cuyos elementos se anulan en cero.

   Sugerencia:
   El espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ consta de funciones continuas que tienden a cero en el infinito.
   Sea $a > 0$ y sea $\mathcal{A} = \{p(x)e^{-ax^2} : p \text{ -- un polinomio}\}$.
   El espacio $\mathcal{A}$ es un álgebra. La funciíon xe^{-ax^2} es impar entonces separa los puntos de signos diferentes y separa cero de los demás puntos. Es suficiente probar que cada par de dos puntos positivos se puede separar por un elemento de $\mathcal{A}$.
   Solo queda por probar que para $x \neq y$ positivos existe un polinomio p tal que $p(x)e^{-ax^2} \neq p(y)e^{-ay^2}$.

2. Demuestre que el espacio vectorial de funciones de forma $p(x)e^{-a^2x^2}$, donde p es un polinomio y $a \in \mathbb{R}$ es un número fijo, es denso en $C_\infty(\mathbb{R})$.

   Sugerencia:
   Utiliza el resultado del ejercicio anterior y Teorema 10.11.

3. Sea $f \in C[a, b]$. Demuestre que si para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$, entonces $f = 0$.

   Sugerencia:
   Por teorema de Weierstrass existe una sucesión de polinomios $p_n \to f$ uniformemente. Por lo tanto $p_n f \to f^2$ también uniformemente.
   La suposicion implica que para cada polinomio $\int_a^b p_n(x)f(x)dx = 0$, ¿entonces?

4. Una función f sobre $\mathbb{R}$ se dice periodica con periodo a si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x + a) = f(x)$. Demueste que cada función continua periodica con periodo 2π se puede aproximar uniformemente por combinaciones lineales de funciones 1, $\operatorname{sen} nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$.

   Sugerencia:
   Sea $\mathcal{P}$ el espacio de funciones complejas, continuas, periodicas de periodo 2π sobre $\mathbb{R}$. A cada $f \in \mathcal{P}$ le corresponde una única función $\tilde{f}$ sobre la circunferencia unitaria $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ por la fórmula $\tilde{f}(e^{ix}) = f(x)$.
   La operación $\mathcal{P} \ni f \to \tilde{f} \in C(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ es un homomorfismo de álgebras. Observa que esta aplicación es biyectiva. Además $\sup_{|z|=1} |\tilde{f}(z)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ entonces se trata de un isomorfismo isométrico de álgebras.

El espacio $C(\mathbb{S},\mathbb{C})$ es un álgebra compleja completa con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\mathcal{A}$ el espacio vectorial de combinaciones lineales de funciones sobre $\mathbb{S}$ de forma $e_n(z)=z^n$, donde $n\in\mathbb{Z}$. El espacio $\mathcal{A}$ contiene a las funciones constantes, separa los puntos de $\mathbb{S}$ y es cerrada con respecto a la conjugación compleja, porque $\overline{e_n}=e_{-n}$.. Por teorema de Stone-Weierstrass en su versión 10.6, el álgebra $\mathcal{A}$ es densa en $C(\mathbb{S},\mathbb{C})$.

Por lo tanto cada cada función $\tilde{f}\in C(\mathbb{S},\mathbb{C})$ se puede aproximar uniformemente por funciones de forma

$$g=a_{-k}e_{-k}+a_{-k+1}e_{-k+1}+\cdots+a_{-1}e_{-1}+a_0+a_1e_1+\cdots+a_me_m.$$

Por la fórmula de de Moivre $e_n(e^{ix})=e^{inx}=\cos nx+i\operatorname{sen} nx$, obtenemos

$$g(e^{ix})=\sum_{-k\le n\le m}a_n(\cos nx+i\operatorname{sen} nx).$$

La aplicación $f\to\tilde{f}$ es una isometría, entonces $\|g-\tilde{f}\|_\infty<\varepsilon$ implica

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-\sum_{-k\le n\le m}a_n(\cos nx+i\operatorname{sen} nx|<\varepsilon.$$

5. Demuestre que cada función periódica continua es acotada é uniformemente continua.

   Sugerencia:
   Utiliza la aplicación $f\to\tilde{f}$ definida en la sugerencia anterior.

6. Demuestra que cada función continua sobre el disco unitario $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$ se puede aproximar uniformemente por funciones de forma $P(z,\overline{z})$, donde P es un polinomio de dos variables.

   Sugerencia:
   Solo queda probar que el conjunto de funciones de esta forma es un álgebra que satisface las supocsiciones de Teorema 10.6.

7. Demuestre que los polinomios de forma $P(z)$ no son densos en $C(\overline{\mathbb{D}})$.

   Sugerencia:
   Busque a un funcional lineal continuo que no es nulo sobre el espacio $CB(\overline{\mathbb{D}})$ pero se anula sobre las funciones z^n, $n=1,2,\ldots$.

8. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es separable.

   Sugerencia:

Aprovecha el hecho probado en Ejercicio 2 y siga las ideas de la demostración de Teorema 10.7.

9. Obtenga las versiones complejas de los teoremas de la última sección.

   TEOREMA 11.1. Sea (K, d) un espacio métrico compacto. El espacio $C(K, \mathbb{C})$ es separable.

   Sugerencia:
   Cada función $f \in C(K, \mathbb{C})$ se puede representar como $f = f_1 + i f_2$, donde f_1, $f_2 \in C(K)$. Sabemos que el espacio $C(K)$ es separable. Si $C \subset C(K)$ es un subconjunto numerable y denso, entonces $C + iC$ es denso en $C(K, \mathbb{C})$ y obviamente es numerable.
   El mismo argumento funciona para demostrar las versiones complejas de los Teoemas 10.8 - 10.13.

10. Sean X, Y espacios métricos compactos. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de funciones sobre $X \times Y$ de forma

    $$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x)\psi_i(y),$$

    donde $\psi_i \in C(X)$, $\psi_i \in C(Y)$. Demueste que $\mathcal{A}$ es denso en $C(x \times Y)$.

    Sugerencia:
    Se trata de una aplicación directa de Teorema de Stone-Weierstrass. Esta familia de funciones es una álgebra, contiene a la función 1. Es suficiente demostrar que la familia separa los puntos del producto $X \times Y$.
    Para este fin, dados $(x, y) \neq (u, v)$ tenemos $x \neq u$ ó $u \neq v$ entonces es suficiente aprovechar el hecho de que $C(x)$ y $C(Y)$ separan los puntos de su dominio.

11. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es cerrado en $BC(\mathbb{R})$.

    Sugerencia:
    Si $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$ y $f_n \to f$, la función f es continua y acotada, porque $BC(\mathbb{R})$ es un espacio completo. Queda por probar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
    Para $\varepsilon > 0$ dado existe n tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n| \leq \varepsilon$. Por otro lado existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{|x|\geq|y|} |f_n(x)| \leq \varepsilon$, porque $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$. Falta poco para concluir que $\sup_{|x|\geq|y|} |f(x)| \leq \varepsilon$.

12. Demuestre Lema 10.10.

    Sugerencia:

La afirmación se deduce de inmedisto de la observación de que la aplicación $\psi\colon B(X) \ni f \to f \circ \phi \in B(Y)$ es uns isometría. Efectivamente,

$$\|f \circ \phi\| = \sup_{y \in Y} |f \circ \phi(y)| = \sup_{y \in Y} |f(\phi(x))| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|,$$

porque ϕ es suprayectiva.
Observe que si la aplicación ψ no es suprayectiva, no tiene que ser isométrica, sin embargo por la misma estimación $\|f \circ \phi\| \leq \|f\|$, entonces la convergencia uniforme en $B(X)$ implica la convergencia uniforme en $B(Y)$.

13. Demueste que para cada espacio σ-compacto X la función $D(\cdot, \cdot)$ definida al final del capítulo es una métrica en el espacio $C(X)$ y que la convergencia en esta métrica coincide con la convergencia casi uniforme.

 Sugerencia:
 Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, donde la familia $\{K_n\}$ es creciente y consta de conjuntos compactos. En la solución de ejercicio 5, Capítulo 3 hemos probado que la métrica $\|f - g\|_n = \sup_{x \in K_n} |f(x) - g(x)|$ sobre $C(K_n)$ es equivalente a la métrica $\frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n}$.
 Cada suma finita $\sum_{n<N} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n}$ satisface la desigualdad de triangulo y pasando al límite $N \to \infty$ se concluye que $D(f,g)$ satisface también la desigualdad de tiangulo.
 Si dos funciones continuas f, g satisfacen $D(f,g) = 0$ se sigue que $f|_{K_n} = g|_{K_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
 La simetría de la función D es obvia, así que D es una métrica.
 La condición $D(f_n, f) \to 0$, equivale a que $\|f_n - f\|_n \to 0$ para cada n, que es exactamente la convergencia casi uniforme de la sucesión (f_n) a f.

14. ♦ Formule y demuestre la versión vectorial de Teorema de Weierstrass para el espacio $C(K, \mathbb{R}^m)$, donde K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y finalmente $f = g$.

 Solución. Cada función continua sobre K valuada en $\mathbb{R}^m$ tiene forma $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, donde las funciones f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ son continuas. Por teorema de Weierstrass clásico para cada $\varepsilon > 0$ y cada $1 \leq j \leq m$ existen polinomios p_j de grado r_j tales que $\sup_{x \in K} |f_j(x) - p_j(x)| < \varepsilon$.

Sea $r = \max\{r_1, \ldots, r_j\}$. Cada uno de los polinomios p_j se puede representar en la forma

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^{r} a_{jk} x^k,$$

donde los coeficientes a_{jk} son números reales.

Denotamos: $\mathfrak{a}_k = (a_{1k}, \ldots, a_{mk}) \in \mathbb{R}^m$ y sea $\mathfrak{p}$ la función valuada en $\mathbb{R}^m$ dada por la fórmula:

$$\mathfrak{p}(x) = \sum_{k=0}^{r} \mathfrak{a}_k x^k.$$

A una función de esta forma, la llamamos un polinomio con coeficientes vectoriales.

Obtenemos así la estimación.

$$\|F - \mathfrak{p}\|_\infty = \sup_{x \in K} \|F(x) - \mathfrak{p}\| = \sup_{x \in K} \left(\sum_{j=1}^{m} (f_j(x) - p_j(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq m^{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema de Weierstrass vectorial. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Cada aplicación $F \in C(K, \mathbb{R}^m)$ puede aproximarse por polinomios de valores vectoriales uniformemente sobre K.

Bibliografía

[JW] J. M. Jedrzejewski, W. Wilczyński, Przestrzenie metruczne w zadaniach, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1999.

[E] R. Engelking, General Topology, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[PS] W. Pusz, A. Strasburger, Zbiór zadań z analizy matematycznej, Uniwersytet Warszawski, 1982.

[S] A. Sołtysiak, Analiza Matematyczna, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2000.

[So] A. Sołtysiak, Notas, Información privada.

[T] V. Tkachuk, Curso básico de topología general, Ed. UAM Iztapalapa, 1999.

[WD] A. Wawrzyńczyk, J. Delgado, Introducción al Análisis, Ed. UAM - Iztapalapa, 1993.

[Z] F. Zaldívar, Fundamentos de álgebra, UAM, FCE, 2005.