UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

EQUILIBRIOS RELATIVOS POLIGONALES EN EL PROBLEMA DE LOS N-VÓRTICES

Presenta
CLAUDIA CONSTANZA TAMAYO VÁSQUEZ
para la obtención del título de
MAESTRA EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)
Asesor
Ph. D. ERNESTO PÉREZ-CHAVELA

CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MÉXICO D.F.
AGOSTO DE 2011

Nota de aceptación

El presente Trabajo cumple con todos los requisitos exigidos por el Posgrado en Ciencias Matemáticas para optar al título de Maestra en Ciencias Matemáticas.

Presidente: DR. ERNESTO PÉREZ-CHAVELA
Secretario: DR. MARTÍN CELLI
Vocal: DR. JORGE VIVEROS ROGEL

Ciudad de México, 5 de Agosto de 2011

ÍNDICE

Introducción **3**

1 Antecedentes **12**
1.1 Descripción del Problema 12
1.2 Resultados para un polígono 16
1.3 Algunos ejemplos 22

2 Dos polígonos regulares concéntricos **25**
2.1 n=2 26
2.2 n=3 29
2.3 n=4 35

3 Configuración de paralelogramo **39**

4 Estabilidad de equilibrios relativos en el problema de $N+1$ vórtices **49**
4.1 Equilibrios relativos 49
4.2 Estabilidad espectral 51
4.3 Calculo de la matriz Hessiana D^2H_1 52
4.4 Estabilidad para un polígono regular. 55
4.5 Estabilidad de un polígono regular con un vórtice en el centro. . . 58
4.6 Equilibrios relativos degenerados 64

Conclusiones y Perspectivas **67**

Apéndice **69**

A Análisis vectorial **69**
A.1 Campos Vectoriales 69
A.2 El teorema de la divergencia 70
A.3 Formas Simplécticas 70
A.4 Función de Green y Ecuación de Poisson 71
A.5 Teorema de la función implícita 73

B Matrices circulantes **74**

Bibliografía **76**

Introducción

Las ecuaciones de movimiento de la interacción de vórtices puntuales fueron introducidas por Helmholtz (1858). En este trabajo, Helmholtz fue el primero en hacer explícitas propiedades clave de aquellas porciones de un fluido en las cuales ocurre la vorticidad. Aunque su investigación estaba motivada en parte por su interés en el efecto de la fricción dentro de un fluido, la teoría desarrollada se restringe a la dinámica de un fluido perfecto incompresible con vorticidad. Hacia el final de su artículo, introduce el concepto de filamentos verticales paralelos infinitamente delgados de vórtices, cada uno de los cuales contiene una cantidad invariante de circulación. En forma equivalente, podemos considerar la traza de esta familia de filamentos, intersectándolos con un plano perpendicular a todos ellos, estos puntos de intersección se conocen como vórtices puntuales, y podemos pensar que juegan un papel análogo al de las masas puntuales en mecánica celeste.

El modelo de vórtices puntuales se ha aplicado también a la descripción de vórtices en helio líquido, el cual se comporta como superfluido. También ha sido aplicado a superconductores.

Los campos de velocidades de fluidos incompresibles no viscosos en el plano se describen como el campo vectorial gradiente antisimétrico del Hamiltoniano de una función cuya derivada es holomorfa (función derivable en todo punto de un abierto con respecto de la variable compleja), como el logaritmo natural. Comenzaremos con los campos de un vértice y de un vórtice puntual en términos del logaritmo, describiendo cómo se extiende a casos más generales. Esta es una consecuencia al uso de las ecuaciones de Euler que describen la dinámica de fluidos incompresibles, que conducen a una ecuación de Laplace o de Poisson. Extendiendo a la interacción de N vórtices para un fluido en el plano, aparece así un Hamiltoniano de tipo logarítmico.

Comenzaremos describiendo la dinámica de un fluido perfecto incompresible para así llegar a las ecuaciones de movimiento de la interacción de vórtices puntuales.

Dado un campo con fluido incompresible y velocidad de distribución $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$, el campo de vorticidad asociado es

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Observemos que si $\mathbf{v} = (x, y)$ entonces ω es un escalar, mientras que si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, ω es un vector.

La condición de incompresibilidad (o conservación de masa) es dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2}$$

Tomando el rotacional y la divergencia de (1) y (2) (ver Apéndice A.1) tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \omega &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{v} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \times \omega. \end{aligned}$$

Si la divergencia de la velocidad es integrable sobre un volumen finito $V \in \mathbb{R}^3$, el teorema de la divergencia nos dice que (ver Apéndice A.2)

$$\int_V \nabla \cdot \omega \, dV = \int_S \omega \cdot n \, dS = 0, \tag{3}$$

donde S es la superficie que acota el volumen V con unidad normal externa n. Esto es, el flujo de vorticidad a través de una superficie cerrada es cero. El mismo razonamiento se tiene para el flujo del campo de velocidades.

El flujo es irrotacional si $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, es decir, si la vorticidad es cero. En este caso existe una función escalar ϕ llamada **potencial de velocidad**, tal que $v = \nabla\phi$ siempre y cuando el flujo esté en todo $\mathbb{R}^3$. De la ecuación (2) se tiene que ϕ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ y escribimos $v = v_\phi$ para el flujo del potencial. En general, el campo de velocidades puede ser descompuesto en términos del potencial de velocidad más un vector potencial solenoidal ψ, donde $\nabla \cdot \psi = 0$ y

$$\mathbf{v} \equiv v_\phi + v_\omega = \nabla\phi + \nabla \times \psi. \tag{4}$$

El segundo término es generado de la distribución de vorticidad.

De la ecuación (1) tenemos que

$$\nabla^2\psi = -\omega. \tag{5}$$

Por lo tanto, el vector potencial satisface la ecuación de Poisson con vorticidad sobre el lado derecho. Podemos escribir la solución de esta ecuación de Poisson en términos de la función de Green para el Laplaciano (ver Apéndice A.4):

$$\psi = \int G(\mathbf{x} - z)\omega(z)dz, \tag{6}$$

donde

$$G(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\|x\| & (\text{en} \quad \mathbb{R}^2), \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|} & (\text{en} \quad \mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{7}$$

con

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x}) = 0, \tag{8}$$

donde $\delta(\mathbf{x})$ es la distribución de Dirac. Luego, como $v_\omega = \nabla \times \psi$, tenemos

$$\begin{aligned} v_\omega(\mathbf{x}) &= \nabla \times \int G(\mathbf{x}-z)\omega(z)\,dz \\ &= \int \nabla \times G(\mathbf{x}-z)\omega(z)\,dz. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \nabla \times G(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\pi}(D_x G_y - D_y G_x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\|x\|^2}(-y, x). \end{aligned}$$

Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \nabla \times G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi}\left((D_y G_z - D_z G_y)\mathbf{i} + (-D_x G_z + D_z G_x)\mathbf{j} + (D_x G_y - D_y G_x)\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|^3}\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde **i,j,k** son los vectores canónicos. Por lo tanto,

$$v_\omega(\mathbf{x}) = \int K(\mathbf{x}-z)\omega(z)\,dz,$$

donde K es el núcleo singular de Biot-Savart definido como

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\|x\|^2}(-y, x) & (\text{en} \quad \mathbb{R}^2) \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|^3}\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0. \end{pmatrix} & (\text{en} \quad \mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Para un fluido incompresible no viscoso en tres dimensiones las ecuaciones de Euler son dadas por

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla p, \tag{9}$$

donde p es la presión.

Una cantidad escalar fundamental asociada con la vorticidad es la circulación $\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot ds$ del fluido alrededor de una curva cerrada. El resultado principal concerniente a la circulación es el **Teorema de circulación de Kelvin**, el cual dice que en un fluido incompresible, regido por fuerzas conservativas, la circulación $\Gamma(t)$ alrededor de una curva cerrada $C(t)$ moviéndose con el fluido es constante, es decir, $d\Gamma/dt = 0$.

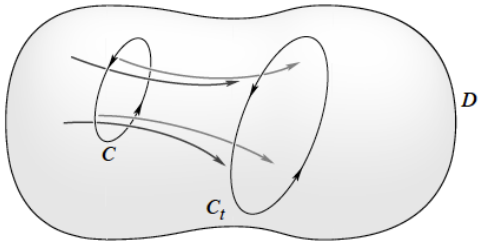


Figura 1: Teorema de Circulación de Kelvin

Lema 0.1 *Sea u el campo de velocidades de un flujo y C_t un anillo cerrado, con $C = \psi_t(C_t)$ el anillo transportado por el flujo (Fig. 1). Entonces*

$$\frac{d}{dt}\int_C \boldsymbol{v} \cdot ds = \int_C \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} ds.$$

Demostración. Sea $\mathbf{x}$(s) una parametrización del lazo C_t, $0 \leq s \leq 1$. Entonces una parametrización de C es $\phi(\mathbf{x}(s), t)$, $0 \leq s \leq 1$. Esto es, por definición de la integral de lina y la derivada material,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_C \mathbf{v} \cdot ds &= \frac{d}{dt}\int_0^1 \mathbf{v}(\phi(\mathbf{x}(s),t),t) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\phi(\mathbf{x}(s),t)ds \\ &= \int_0^1 \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\phi(\mathbf{x}(s),t),t) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\phi(\mathbf{x}(s),t)ds \\ &\quad + \int_0^1 \mathbf{v}(\phi(\mathbf{x}(s),t),t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\phi(\mathbf{x}(s),t)ds.\end{aligned}$$

Como $\partial\psi/\partial t = \mathbf{v}$. el segundo término es igual a

$$\int_0^1 \mathbf{v}(\phi(\mathbf{x}(s),t),t) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{v}\phi(\mathbf{x}(s),t)ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\phi(\mathbf{x}(s),t)ds = 0$$

(ya que C es cerrada). El primer término es igual a

$$\int_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} ds,$$

así queda probado el Lema. □

Teorema 0.1 *(**Teorema de Circulación de Kelvin**).*

$$\frac{d}{dt}\Gamma(C) = 0.$$

Demostración. Utilizando el Lema anterior y el hecho que $D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Gamma(C) &= \frac{d}{dt}\int_C \mathbf{v}\cdot ds = \int_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} ds \\ &= -\int_C \nabla p \cdot ds = 0 \quad \text{(ya que C es cerrada).} \quad \square\end{aligned}$$

El teorema de Stokes nos dice que

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v}\cdot ds = \int_A \omega \cdot n dS, \tag{10}$$

donde A es una superficie abierta acotada por la curva cerrada C. Esta fórmula nos muestra que la circulación es el flujo de la vorticidad a través de una superficie abierta A acotada por la curva.

Tomando el rotacional de la ecuación de Euler (9) y la identidad,

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}\times\omega,$$

obtenemos la ecuación general de evolución para la vorticidad

$$\omega_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\omega = \omega\cdot\nabla\mathbf{v} - \omega\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla p\times\nabla p.$$

En un fluido barotrópico la presión depende solo de la densidad y si esta es constante tenemos que $\nabla p\times\nabla p = 0$, dando en este caso la ecuación de Helmholtz

$$\omega_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\omega = \omega\cdot\nabla\mathbf{v}$$

llegando así a las ecuaciones de evolución de los vórtices,

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega\cdot\nabla\mathbf{v}, \tag{11}$$

la evolución de la vorticidad depende solamente de los valores locales de la velocidad y de la vorticidad del fluido.

En dos dimensiones la vorticidad es un escalar. Ya que la vorticidad es perpendicular a la dirección en la cual el flujo cambia $\omega\cdot\nabla\mathbf{v} = 0$ la ecuación de evolución es

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv 0, \tag{12}$$

donde $\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Además el vector potencial ψ se vuelve una función escalar

$$\mathbf{v} = \nabla \times \psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \psi = (\psi_y, -\psi_x).$$

La ecuación para una partícula de fluido se convierte en

$$\dot{z} = \mathbf{v} = (\psi_y, -\psi_x).$$

Sea $\mathbf{v} \equiv Ham(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$ el campo de velocidades de un fluido y la función $f(z) = -\Gamma \ln z$ en la rama principal $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ donde $\Gamma \in \mathbb{R}$ es diferente de cero. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $f(z) = -\Gamma \ln r - \Gamma i\theta$. Si tomamos $H(\psi) = -\Gamma \ln r = -(\Gamma/2)\ln(x^2 + y^2)$, entonces $Ham(\psi) = \frac{\Gamma}{r^2}(-y, x)$ es un campo de velocidades definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que en cada punto es tangencial a la circunferencia correspondiente con centro en el origen, de aquí tenemos que las ecuaciones canónicas de Hamilton son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y; t), & \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y; t) \\ &= -\Gamma \frac{y}{x^2 + y^2} & &= \Gamma \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Las partículas están recorriendo las circunferencias con velocidad angular $\frac{\Gamma}{r^2}$, lo cual significa que la orientación está determinada por el signo de Γ. Además, la integral de linea tiene valor constante, es decir

$$\oint \frac{\Gamma}{x^2 + y^2}(-ydx + xdy) = \Gamma \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))dt = 2\pi\Gamma.$$

Finalmente, mediante la identificación de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, el campo de velocidades de los vórtices se puede escribir en forma compleja como

$$Ham = \frac{\Gamma}{|z|^2} iz = i\frac{\Gamma}{\bar{z}}. \tag{13}$$

El sistema (13) de ecuaciones diferenciales para el vórtice puntual se escribe en forma compleja como

$$\dot{z} = i\frac{\Gamma}{\bar{z}}.$$

El sistema de N vórtices sobre el plano puede ser descrito de la siguiente forma. Sean $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$ las coordenadas del k-ésimo vórtice con vorticidad $\Gamma_k, k =$

$1, ..., N$. De tal forma que el espacio de configuración es $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Las ecuaciones de movimiento están dadas por la siguiente expresión

$$\dot{z_k} = i \sum_{l \neq k}^{N} \Gamma_l \frac{z_k - z_l}{|z_k - z_l|^2} = i \sum_{l \neq k}^{N} \frac{\Gamma_l}{\bar{z}_k - \bar{z}_l}. \tag{14}$$

Este problema presenta muchas analogías, pero también muchas diferencias con el problema de N cuerpos en mecánica celeste. Una de las principales diferencias es que se trata de un campo vectorial de velocidades y no de aceleraciones como en mecánica celeste. En mecánica celeste las masas son positivas por lo que el centro de masas siempre está definido, en el problema de N vórtices, la vorticidad total puede ser cero, en este caso el centro de vorticidad no está definido. Otra diferencia es el factor i el cual me dice que la configuración esta rotando, al contrario de la mecánica celeste que el movimiento es atractivo. Debido a que el denominador es de grado 2 hay muchos cálculos que podemos simplificar.

Las soluciones más simples de describir para problemas de vórtices puntuales son las que corresponden a configuraciones de vórtices puntuales que puedan moverse sin cambiar de forma, es decir las soluciones de **equilibrio relativo**. En este caso el movimiento del sistema de vórtices consiste de una rotación uniforme respecto de un centro fijo, o de una traslación uniforme. Los equilibrios relativos más simples son aquellos donde la configuración de N vórtices forma un polígono regular de N lados con las vorticidades iguales.

Estamos interesados en los equilibrios relativos en el plano formados por 2 polígonos regulares concéntricos. Los polígonos tienen el mismo número de vórtices $N = 2, 3, 4$. Escribimos $z_{k,d} = s_d \rho^k$, donde $0 \leq k \leq N-1$ y $1 \leq d \leq 2$, es la posición del k vórtice del d-ésimo polígono, s_d es un número complejo distinto de cero y los $\rho = e^{i2\pi/n}$ son las raíces de la unidad. También queremos estudiar los equilibrios relativos en configuración de paralelogramo para determinar cómo pueden ser los valores de las vorticidades y finalmente estudiar la estabilidad espectral de dichos equilibrios relativos para $N + 1$ vórtices.

Un ejemplo de estas configuraciones se puede ver en los huracanes, la formación de polígonos ocurre frecuentemente en las paredes de nubes y relámpagos de huracanes fuertes. Ellos aparecen frecuentemente a causa de configuraciones repentinas de cúmulos de células. La interferencia de modelos producida por un espectro de ondas gravitacionales que se propagan horizontalmente pueden ser una explicación para la formación de polígonos en la pared del ojo (nubes que rodean el ojo, es la parte más fuerte de la tormenta que se compone de los vientos mas fuertes). En la pared del ojo de los huracanes a menudo se observa que se forman completa o parcialmente hexágonos, pentágonos, cuadrados ó triángulos. Estas formas geométricas usualmente rotan ciclónicamente con la circulación de la tormenta.

• Un pentágono se formó en el ojo del huracán Anita en 1977.

• Otro ejemplo fue el modelo pentagonal que tenía la apariencia de una estrella de mar observado en el ojo del huracán Isabel el 12 de septiembre de 2003; el modelo fue debido a 6 distintos mesovórtices, uno de ellos localizado en el centro y los otros 5 organizados simétricamente alrededor del centro y permaneció fijo unas cuantas horas mientras rotaba ciclónicamente dentro del ojo. El 13 de Septiembre se observó un modelo distinto de cuatro mesovórtices formando un cuadrado [11].

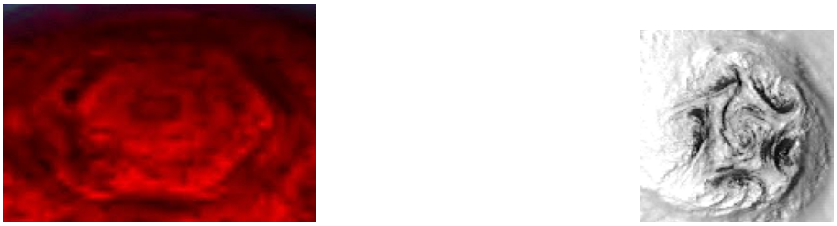


Figura 2: *Hexágono formado en el ojo de un huracan (izquierda), huracán Isabel 12 de Septiembre (derecha).*

Configuraciones con dos polígonos de vórtices fueron estudiadas por muchos autores. Más recientemente, Celli, Lacomba y Pérez-Chavela [5], encontraron las configuraciones de equilibrio relativo para dos polígonos regulares concéntricos suponiendo que las vórticidades sobre cada polígono son iguales.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el capítulo 1, desarrollamos los antecedentes sobre la teoría de vórtices, los resultados encontrados para un polígono regular y estudiaremos algunos ejemplos de configuraciones en equilibrio relativo, el cálculo de la velocidad angular para un polígono regular y las condiciones que deben tener las vorticidades para que la configuración de polígono regular sea un equilibrio relativo.

En el capítulo 2, estudiamos la teoría para dos polígonos regulares concéntricos y calculamos el número exacto de equilibrios relativos cuando los polígonos están formados por $2, 3$ y 4 vórtices.

En el capítulo 3, estudiamos la configuración de paralelogramo en equilibrio relativo con la condición de que las vorticidades G y g ubicadas en la diagonal deben ser iguales, la idea es encontrar las posiciones de los vórtices para saber exactamente cuales son las configuraciones que podemos tener, buscar la relación entre las vorticidades G y g y así encontrar el valor de la velocidad angular. Además enunciaremos y demostraremos un teorema el cual nos dice que cuando $\omega = 0$ las vorticidades ubicadas en la diagonal deben ser iguales y con signo contrario, y cuando $\omega \neq 0$ las vorticidades ubicadas en la diagonal deben ser iguales.

En el capítulo 4 estudiamos la estabilidad de los equilibrios relativos en el problema de $N + 1$ vórtices, es decir, N vórtices ubicados en los vértices de un polígono

regular y otro vórtice ubicado en el centro. En esta parte seguiremos el trabajo de Cabral y Schmidt ([4]). Cabe mencionar que en la segunda parte de este trabajo encontramos un error, por lo cual nuestros resultados no coinciden.

Capítulo 1

Antecedentes

El objetivo de este capítulo es presentar los fundamentos del problema de N-vórtices en el plano que son necesarios para comprender el contenido de este trabajo. Sólo se incluirán los resultados más relevantes de dicha teoría con la finalidad de que el trabajo sea autocontenido.

1.1. Descripción del Problema

Asumiremos que la configuración de los vórtices se mueve como un cuerpo rígido, es decir, la distancia entre los vórtices permanece invariable.

Definición 1.1 *Un movimiento de N vórtices es un equilibrio relativo si y solamente si existe θ, tal que, para todo k, l y para todo t:*

$$z_k(t) - z_l(t) = e^{i\theta(t)}(z_k(0) - z_l(0)),$$

es decir, el movimiento es de cuerpo rígido, donde el vórtice gira un ángulo θ.

Proposición 1.1 *Si un movimiento de N vórtices es un equilibrio relativo entonces, en cierto tiempo, existe un número real ω tal que, para todo k, l : $v_k - v_l = i\omega(z_k(0) - z_l(0))$.*

Entonces una de las siguientes relaciones se satisface:

(a) $v_k(0) = 0$ *para todo k, es decir, el vórtice está en reposo.*

(b) $v_k(0) = v_l(0) \neq 0$, *es decir, el vórtice se translada.*

(c) *Si $\omega \neq 0$, existe un centro de rotación Ω tal que para todo k :*

$v_k(0) = i\omega(z_k(0) - \Omega)$.

Demostración. Por definición si el movimiento es un equilibrio relativo, entonces para todo t

$$z_k(t) - z_l(t) = e^{i\theta}(t)(z_k(0) - z_l(0)),$$

derivando para $t = 0$ tenemos que:

$$v_k(0) - v_l(0) = i\omega(z_k(0) - z_l(0)).$$

Si $\omega = 0$ tenemos $v_k(0) - v_l(0) = 0$ así

$$v_k(0) = v_l(0), \quad \text{para todo} \quad k, l,$$

con lo cual obtenemos (a) o (b).

Si $\omega \neq 0$, existe $\Omega = z_k(0) - \dfrac{v_k(0)}{i\omega}$, veamos que la elección de Ω es independiente del subíndice k:

$$z_k(0) - \frac{v_k(0)}{i\omega} = z_l(0) - \frac{v_l(0)}{i\omega} \Leftrightarrow v_k(0) - v_l(0) = i\omega(z_k(0) - z_l(0)).$$

Con esto tenemos (c).

Proposición 1.2 *Si, en cierto tiempo, existe un número real ω tal que, para todo $k, l : v_k - v_l = i\omega(z_k - z_l)$ entonces el movimiento de los N vórtices es un equilibrio relativo.*

(a) Si en $t = 0$, tenemos que para todo k : $v_k(0) = 0$ (de nuevo ω=0) entonces la posición del k-ésimo vórtice es $z_k(t) = z_k(0)$. Esta condición se satisface en todo tiempo.

(b) Si existe $v \neq 0$, tal que para todo k : $v_k(0) = v$ (en este caso ω =0), entonces $z_k(t) = z_k(0) + tv$. Entonces esta condición se satisface en todo tiempo y v es la velocidad de translación.

(c) Si para $t = 0$, existe Ω tal que para todo k : $v_k(0) = iw(z_k(t) - \Omega)$, donde Ω es el centro de rotación entonces $z_k(t) = \Omega + e^{i\omega t}(z_k(0) - \Omega)$.

Demostración. Debemos ver que en cada uno de los tres casos $z_k(t)$ es solución a las ecuaciones de Helmholtz con condición inicial $z_k(0) = z_k$, esto lo haremos invocando el Teorema de Unicidad de las soluciones.

(a) Si $v_k = 0$, definiendo a $z_k(t)$ por $z_k(t) = z_k(0)$ tenemos que

$$\dot{z}_k(t) = 0 = i\sum_{k\neq l} \Gamma_l \frac{z_k(0) - z_l(0)}{|z_k(0) - z_l(0)|^2} = i\sum_{k\neq l} \Gamma_l \frac{z_k - z_l}{|z_k - z_l|^2}.$$

$z_k(t)$ satisface las ecuaciones de Helmholtz y la condición inicial, por lo tanto el movimiento de equilibrio absoluto es un equilibrio relativo.

(b) Si $v_k = v$ veamos que $z_k(t) = z_k(0) + tv$ satisface las ecuaciones de Helmholtz con condición inicial $z_k(0) = z_k$,

$$\dot{z}_k(t) = v = i\sum_{k\neq l}\Gamma_l \frac{z_k(0) - z_l(0)}{|z_k(0) - z_l(0)|^2} = i\sum_{k\neq l}\Gamma_l \frac{z_k - z_l}{|z_k - z_l|^2}.$$

Por lo tanto una translación rígida es un equilibrio relativo con velocidad angular $\omega = 0$.

(c) Si $v_k(0) = i\omega(z_k(0) - \Omega)$, veamos que $z_k(t) = \Omega + e^{i\omega t}(z_k(0) - \Omega)$ es solución al problema de valor inicial,

$$\begin{aligned}\dot{z}_k(t) &= e^{i\omega t} i\omega(z_k(0) - \Omega) = e^{i\omega t} i\omega(z_k - \Omega),\\ &= ie^{i\omega t}\sum_{k\neq l}\Gamma_l \frac{z_k(0) - z_l(0)}{|z_k(0) - z_l(0)|^2} = ie^{i\omega t}\sum_{k\neq l}\Gamma_l \frac{z_k - z_l}{|z_k - z_l|^2},\end{aligned}$$

cancelando $e^{i\omega t}$ tenemos que $z_k(t)$ es solución para todo t y por lo tanto el movimiento es un equilibrio relativo con centro de rotación Ω. □

El sistema (14) es Hamiltoniano, y tiene la siguiente forma simpléctica Ω: Sea $z_k = (x_k, y_k)$ definimos las nuevas variables

$$\begin{aligned}q_k &= \sqrt{|\Gamma_k|}sgn\Gamma_k x_k,\\ p_k &= \sqrt{|\Gamma_k|}sgn\Gamma_k y_k.\end{aligned}$$

entonces

$$\Omega = \sum_k dq_k \wedge dp_k = \sum_k \Gamma_k dx_k \wedge dy_k,$$

por lo tanto las ecuaciones de Hamilton toman la forma

$$\Gamma_k \dot{z}_k = -i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}_k}\,,\ k = 0, ..., N-1, \tag{1.1}$$

donde

$$H = -\sum_{k=1, l>k}^{N} \Gamma_k\Gamma_l \ln|z_k - z_l|. \tag{1.2}$$

Definición 1.2 *Las siguientes cantidades son definidas:*

Vorticidad total	$\Gamma = \sum \Gamma_l$
Momento angular	$L = \sum_{l<k} \Gamma_l\Gamma_k$
Momento lineal	$M = \sum \Gamma_l z_l$
Centro de vorticidad	$C = M/\Gamma$ *(cuando* $\Gamma \neq 0$*)*
Momento de inercia	$S = \sum \Gamma_l |z_l|^2$

La energía H es una cantidad conservada ya que depende únicamente de las distancias entre los vórtices y de las vorticidades, el sistema tiene otras integrales primeras independientes: el momento lineal y el momento de inercia. Estas integrales primeras corresponden a la invariancia de las ecuaciones diferenciales (14) bajo traslaciones o rotaciones de coordenadas. Por otro lado, el virial o momento angular

$$L = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k z_k \times \dot{z}_k = \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l,$$

es una invariante del sistema, es decir, una constante que depende solo de las vorticidades.

De las ecuaciones (14) es posible derivar ecuaciones de movimiento para las distancias mutuas de los vórtices, sin referirnos a las posiciones absolutas de los vórtices. Sea $w_{ij} = z_i - z_j$ y $b_{ij} = |w_{ij}|^2$. De las ecuaciones de movimiento (14) obtenemos

$$\dot{w}_{ij} = i\left(\left(\sum_{k\neq i,j}\left(\frac{\Gamma_k}{\bar{w}_{ik}} - \frac{\Gamma_k}{\bar{w}_{jk}}\right)\right) + \frac{\Gamma_j}{\bar{w}_{ij}} + \frac{\Gamma_i}{\bar{w}_{ij}}\right)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{ij} &= \dot{w}_{ij}\bar{w}_{ij} + w_{ij}\dot{\bar{w}}_{ij} \\
&= i\left(\sum_{k\neq i,j}\left(\frac{\Gamma_k}{\bar{w}_{ik}} - \frac{\Gamma_k}{\bar{w}_{jk}}\right) + \frac{\Gamma_j}{\bar{w}_{ij}} + \frac{\Gamma_i}{\bar{w}_{ij}}\right)\bar{w}_{ij} - i\left(\sum_{k\neq i,j}\left(\frac{\Gamma_k}{w_{ik}} - \frac{\Gamma_k}{w_{jk}}\right) + \frac{\Gamma_j}{w_{ij}} + \frac{\Gamma_i}{w_{ij}}\right)w_{ij} \\
&= -2\sum_k \Gamma_k Im\left(\frac{w_{ij}}{w_{ik}} + \frac{w_{ij}}{w_{jk}}\right).
\end{aligned}$$

Como $w_{ij} = -(w_{ik} + w_{jk})$,

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{ij} &= 2\sum \Gamma_k Im\left(\frac{(w_{ik}+w_{jk})^2}{w_{ik}w_{jk}}\right) = 2\sum \Gamma_k Im\left(\frac{w_{ik}}{w_{jk}} + \frac{w_{jk}}{w_{ik}}\right) \\
&= 2\sum \Gamma_k Im(\bar{w}_{ik}w_{jk})\left(\frac{1}{|w_{ik}|^2} - \frac{1}{|w_{jk}|^2}\right),
\end{aligned}$$

donde

$$Im\left(\frac{w_{ik}}{w_{jk}} + \frac{w_{jk}}{w_{ik}}\right) = Im\left(\frac{w_{ik}}{w_{jk}} - \frac{\bar{w}_{jk}}{\bar{w}_{ik}}\right) = Im(\bar{w}_{ik}w_{jk})\left(\frac{1}{|w_{ik}|^2} - \frac{1}{|w_{jk}|^2}\right).$$

Sea A_{ijk} el área orientada de el triángulo formado por los vórtices localizados en $z_i, z_j, z_k \in \mathbb{C}$. Por la fórmula de Herón, podemos calcular la superficie del triángulo

en términos de las longitudes de sus lados,

$$A_{ijk} = \frac{1}{4}\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & b_{ij} & b_{jk} & 1 \\ b_{ij} & 0 & b_{ik} & 1 \\ b_{jk} & b_{ik} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4}\sqrt{b_{ij}^2 + b_{jk}^2 + b_{ik}^2 - 2(b_{ij} + b_{jk} + b_{ik})}$$
$$= \frac{1}{4}(b_{ij} - b_{jk} - b_{ik}),$$

como $w_{ij} = -(w_{ik} + w_{jk})$, $A_{ijk} = Im(\bar{w}_{ik}w_{jk})/2$. Entonces,

$$\dot{b}_{ij} = 4\sum_{k\neq i,j} \Gamma_k \sigma_{ijk} A_{ijk}\left(\frac{1}{b_{ik}} - \frac{1}{b_{kj}}\right), \tag{1.3}$$

la cantidad σ_{ijk} es la orientación del triángulo comprendido por los vórtices ijk, definida como $+1$ si ijk esta en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y como -1 si ijk aparece en sentido a las manecillas.

1.2. Resultados para un polígono

A continuación veremos los resultados obtenidos para el caso de un polígono regular y las condiciones para que en el caso de $N \geq 4$ vórtices tengamos una configuración de equilibrio relativo, las cuales se tienen siguiendo las técnicas usadas por Celli, Lacomba y Pérez-Chavela [5] quienes a su vez siguieron las técnicas usadas por Perko y Walter (1985) [19] y Elmabsout (1988) [7]. Finalmente veremos las configuraciones de equilibrio relativo que se tienen para 2 y 3 vórtices.

Podemos expresar la velocidad angular de un polígono regular de la siguiente manera:

Proposición 1.3 *Para un equilibrio relativo, tenemos que los vórtices se mueven con una velocidad angular*

$$\omega = \frac{N-1}{2N|s|^2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\Gamma_k\right).$$

Demostración. Supongamos $\omega \neq 0$, entonces para cierto Ω y todo $k \in \{0, ..., N-1\}$

$$\omega(s\rho^k - \Omega) = \sum_{l\in\{0,\cdots,N-1\}\setminus k} \frac{\Gamma_l}{\bar{s}\rho^{-k} - \bar{s}\rho^{-l}},$$

dividiendo entre ρ^k y sumando sobre k ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega(s - \Omega\rho^{-k}) = \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma_l}{\bar{s}(1-\rho^{k-l})},$$

por las propiedades de las raíces de la unidad tenemos que $\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k = \frac{e^{2\pi i N/N} - 1}{e^{2\pi i/N} - 1} = 0$, así que

$$n|s|^2\omega = \sum_{l=0}\sum_{k'=1} \frac{\Gamma_l}{1-\rho^{k'}},$$

donde $k' = k - l$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_l \Gamma_l\right)\left(\sum_{k=1} \frac{1}{1-\rho^k} + \sum_{k=1} \frac{1}{1-\rho^{-k}}\right),$$

ya que $\{\rho^{-k}, 1 \le k \le N-1\} = \{\rho^k, 1 \le k \le N-1\}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_l \Gamma_l\right)\left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{1-\rho^k} + \frac{\rho^k}{\rho^k - 1}\right),$$

por lo tanto:

$$\omega = \frac{N-1}{2N|s|^2}\left(\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l\right).$$

□

Proposición 1.4 *El campo de velocidades generado por un polígono regular cuando las vorticidades son iguales a 1 tiene la siguiente expresión:*

$$v_s(z) = \frac{iN\bar{z}^{N-1}}{\bar{z}^N - \bar{s}^N} = \frac{iN\frac{z}{|z|^2}}{1 - (\frac{\bar{s}}{\bar{z}})^N}.$$

Demostración. Usamos las ecuaciones de movimiento para $s = 1$:

$$v_1(z) = i\sum_{k=0}^{N-1} \frac{z - \rho^k}{|z-\rho^k|^2} = i\sum_{k=0}^{N-1} \nabla(\ln|z-\rho^k|) = i\nabla \ln|P(z)|,$$

donde $P(z) = \Pi_{k=0}^{N-1}(z - \rho^k)$. Los $z - \rho^k$ son primos relativos y dividen $z^N - 1$, así $P(z)$ divide a $z^N - 1$. Ahora $P(z)$ y $z^N - 1$ tienen el mismo grado por lo que $P(z) = z^N - 1$. Luego $v_1(z) = i\nabla \ln|z^N - 1|$. Suponiendo $z \neq 0$:

$$\frac{d}{dz}\ln|z^N - 1| = \frac{z^N - 1}{|z^N - 1|^2} \cdot Nz^{N-1} = n|z|^{N-1}\left(\left(\frac{z}{|z|}\right)^{N-1} \frac{1}{\bar{z}^N - 1}\right)$$

$$= N|z|^{N-1}\left(\left(\frac{|z|}{z}\right)^{N-1} \frac{1}{\bar{z}^N - 1}\right),$$

luego

$$v_1(z) = iN|z|^{N-1}\frac{|z|^{N-1}}{z^{N-1}}\frac{1}{\bar{z}^N-1} = \frac{in\bar{z}^{N-1}}{\bar{z}^N-1}.$$

Generalizando para todo s tenemos:

$$v_s(sz) = \frac{1}{\bar{s}}v_1(z),$$

entonces

$$v_s(z) = \frac{1}{\bar{s}}v_1\left(\frac{z}{s}\right) = \frac{iN\bar{z}^{N-1}}{\bar{z}^N-\bar{s}^N}.$$

□

Proposición 1.5 *Un equilibrio relativo de p polígonos regulares concéntricos de N lados con las mismas vorticidades sobre cada polígono no es una traslación rígida.*

Demostración. Debemos probar que $v_{k,d} = iwz_{k,d}$, para todo polígono $d \in \{1,...,p\}$ y todo vórtice $k \in \{0,...,N-1\}$ del polígono. Sea $d \neq d_0$

$$\begin{aligned} A_{d_0,d} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{z_{k,d_0}-z_{l,d}}{|z_{k,d_0}-z_{l,d}|^2} &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{s_{d_0}\rho^k - s_d\rho^l}{|s_{d_0}\rho^k - s_d\rho^l|^2} = \sum_{k=0}^{N-1}\rho^k\sum_{l=0}^{N-1}\frac{s_{d_0}-s_d\rho^{l-k}}{|s_{d_0}-s_d\rho^{l-k}|^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$B_{d_0} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{z_{k,d_0}-z_{l,d_0}}{|z_{k,d_0}-z_{l,d_0}|^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} v_{k,d_0} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{d\in\{1,...,p\}\setminus\{d_0\}}\sum_{l=0}^{N-1} i\Gamma_d\frac{z_{k,d_0}-z_{l,d}}{|z_{k,d_0}-z_{l,d}|^2} + \sum_{l\in\{0,...,N-1\}\setminus\{k\}} i\Gamma_{d_0}\frac{z_{k,d_0}-z_{l,d_0}}{|z_{k,d_0}-z_{l,d_0}|^2}\right), \\ &= \sum_{d\in\{1,...,p\}\setminus\{d_0\}}\sum_{l=0}^{N-1} i\Gamma_d A_{d_0,d} + i\Gamma_{d_0}B_{d_0} = 0. \end{aligned}$$

Entonces para todo $k_0 \in \{0,...,N-1\}, d_0 \in \{1,...,p\}$:

$$v_{k_0,d_0} = v_{k_0,d_0} - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} v_{k,d_0} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(v_{k_0,d_0}-v_{k,d_0}) = \frac{i\omega}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(z_{k_0,d_0}-z_{k,d_0}) = i\omega z_{k_0,d_0}.$$

□

Ahora veamos que para $N \geq 4$, las únicas soluciones de equilibrio relativo poligonal ocurren cuando todas las vorticidades son iguales, para demostrar esto

necesitamos la teoría de matrices circulantes, donde una **matriz circulante** es una matriz nxn donde cada renglón es un desplazamiento cíclico del renglón anterior (ver Apéndice B).

Usamos las matrices C y C_0 cuyo primer renglón es

$$\left(\frac{N-1}{2N}, \frac{1}{1-\rho^{-1}} + \frac{N-1}{2N}\rho, \frac{1}{1-\rho^{-2}} + \frac{N-1}{2N}\rho^2, \ldots, \frac{1}{1-\rho^{-(N-1)}} + \frac{N-1}{2N}\rho^{N-1}\right)$$

y

$$\left(0, \frac{1}{1-\rho^{-1}}, \frac{1}{1-\rho^{-2}}, \ldots, \frac{1}{1-\rho^{-(N-1)}}\right)$$

respectivamente.

Además utilizamos los siguientes lemas:

Lema 1.1 *Las matrices C y C_0 son diagonalizables. Los vectores propios de C y sus correspondientes valores propios son dados por $\boldsymbol{v}_k = (1, \rho^k, \rho^{2k}, \ldots \rho^{(N-1)k})$ y $\lambda_k = \frac{(N-1)}{2} - k$ para $0 \leq k \leq N-2$, $\lambda_{N-1} = 0$. Los vectores propios de C_0 y sus correspondientes valores propios son dados por $\boldsymbol{v}_k = (1, \rho^k, \rho^{2k}, \ldots, \rho^{(N-1)k})$ y $\lambda_k = \frac{(N-1)}{2} - k$ para $0 \leq k \leq N-1$.*

Demostración. Por las propiedades de las matrices circulantes, la matriz C es diagonalizable con vectores propios $v_k = (1, \rho^k, \rho^{2k}, \ldots, \rho^{(N-1)k})$. Además tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \sum_{l=0}^{N-1} c_l \rho^{kl} = \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\rho^{kl}}{1-\rho^l} + \frac{N-1}{2N} \sum_{l=0}^{N-1} \rho^{(k+1)l}, \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{N-1} \frac{\rho^{kl}}{1-\rho^{-l}} + \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\rho^{-kl}}{1-\rho^l}\right) + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1},
\end{aligned}$$

cuando $\{\rho^{-l}, 1 \leq l \leq N-1\} = \{\rho^l, 1 \leq l \leq N-1\}$ ($\delta_{p,q}$ es la función delta de Kronecker)

$$= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N-1}\left(\frac{\rho^{(k+1)l}}{\rho^l - 1} + \frac{\rho^{-kl}}{1-\rho^l}\right) + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N-1}\frac{\rho^{(k+1)l} - \rho^{-kl}}{\rho^l - 1} + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1},$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N-1}\frac{1}{\rho^l - 1}\sum_{m=-k}^{k}(\rho^{(m+1)l} - \rho^{ml}) + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1} = \frac{1}{2}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{l=1}^{N-1}\rho^{ml} + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1},$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=-k}^{k} f(m) + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1} = \frac{N-1}{2} - k + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1},$$

donde $f(m) = -1$ si $m \neq 0$ y $f(0) = N-1$. El mismo razonamiento se tiene para C_0, solo que en este caso no tenemos el término:

$$\frac{N-1}{2N}\sum_{l=0}^{N-1}\rho^{(k+1)l} = \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1}$$

en la expresión de λ_k. Así que obtenemos

$$\lambda_k = \frac{N-1}{2} - k,$$

en lugar de

$$\lambda_k = \frac{N-1}{2} - k + \frac{N-1}{2}\delta_{k,N-1}.$$

□

Lema 1.2 *Si $av_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ para algún $a \in \mathbb{C}$ distinto de cero, entonces $N = 2$. Si N es impar y $av_{N-1} + bv_{(N-1)/2} \in \mathbb{R}$ para algún $a, b \in \mathbb{C}$ no simultaneamente cero, entonces $N = 3$.*

Demostración. De la forma del vector propio $\mathbf{v}_{N-1} = (1, \rho^{-1}, \rho^{-2}, \ldots, \rho^{-(N-1)})$, vemos que $a\mathbf{v}_{N-1}$ solo es real para los casos en que $N = 2$ ó $a = 0$.

Para N impar, haciendo $j = (N-1)/2$, reescribimos los vectores en términos de j como $\mathbf{v}_{N-1} = (1, \rho^{2j}, \rho^{4j}, \ldots, \rho^{2(N-1)j})$ y $\mathbf{v}_{(N-1)/2} = (1, \rho^{j}, \rho^{2j}, \ldots, \rho^{(N-1)j})$. Vamos a demostrar que $a\mathbf{v}_{N-1} + b\mathbf{v}_{(N-1)/2} \in \mathbb{R}^N$ tiene solamente la solución trivial $a = b = 0$ si $j \geq 2$. Esto es equivalente a decir que las ecuaciones escalares $-\bar{a}\bar{\rho}^{2kj} - \bar{b}\bar{\rho}^{kj} + a\rho 2kj + b\rho^{kj} = 0$ para $k = 0, \ldots, N-1$ tienen una única solución compleja $a = b = 0$ si $j \geq 2$. Así tenemos un sistema de $N = 2j+1$ ecuaciones y 4 variables. Consideremos el subsistema que consiste de las primeras 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\bar{a} - \bar{b} + a + b &= 0,\\
-\bar{a}\bar{\rho}^{2j} - \bar{b}\bar{\rho}^{j} + a\rho^{2j} + b\rho^{j} &= 0,\\
-\bar{a}\bar{\rho}^{4j} - \bar{b}\bar{\rho}^{2j} + a\rho^{4j} + b\rho^{2j} &= 0,\\
-\bar{a}\bar{\rho}^{6j} - \bar{b}\bar{\rho}^{3j} + a\rho^{6j} + b\rho^{3j} &= 0.
\end{aligned}$$

Utilizando la identidad $2j + 1 = N$, podemos escribir la matriz de este sistema en las variables $-\bar{a}, -\bar{b}, a, b$ como:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1\\
\rho & \rho^{-j} & \rho^{-1} & \rho^{j}\\
\rho^{2} & \rho^{-2j} & \rho^{-2} & \rho^{2j}\\
\rho^{3} & \rho^{-3j} & \rho^{-3} & \rho^{3j}
\end{pmatrix}.$$

Esta es una matriz de Vandermonde la cual es degenerada si y solamente si, dos términos del segundo renglón son iguales, lo cual es imposible. Por lo tanto hay una única solución $N = 3$. □

Teorema 1.1 *Para un polígono regular con vorticidades no todas iguales existen soluciones de equilibrio relativo solo en los casos de $N = 2$ y $N = 3$. En particular, para un equilibrio relativo con $N \geq 4$, la vorticidad total y por consiguiente la velocidad angular no se anulan.*

Demostración. Sea ρ^k las posiciones de las vorticidades. Si la vorticidad total no desaparece, tenemos que para todo k:

$$i\omega(\rho^k - \Omega) = i \sum_{l\in\{0,\ldots,n-1\}\setminus\{k\}} \frac{\Gamma_l}{\rho^{-k} - \rho^{-l}},$$

donde el centro de rotación Ω es el centro de vorticidad:

$$\Omega = \frac{\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l \rho^l}{\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l}.$$

Esto es equivalente a:

$$\begin{aligned} \omega\rho^k &= \sum_{l\in\{0,\ldots,N-1\}\setminus\{k\}} \frac{\Gamma_l}{\rho^{-k} - \rho^{-l}} + \omega\Omega \\ &= \sum_{l\in\{0,\ldots,N-1\}\setminus\{k\}} \frac{\Gamma_l}{\rho^{-k} - \rho^{-l}} + \frac{N-1}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l\right) \left(\frac{\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l \rho^l}{\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l}\right), \end{aligned}$$

sustituyendo el valor de ω:

$$\sum_{l\in\{0,\ldots,N-1\}\setminus\{k\}} \frac{\Gamma_l}{\rho^{-k} - \rho^{-l}} + \frac{N-1}{2N} \sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l \rho^l = \rho^k \frac{N-1}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l\right).$$

Dividiendo entre ρ^k, obtenemos:

$$\sum_{l\in\{0,\ldots,N-1\}\setminus\{k\}} \frac{\Gamma_l}{1 - \rho^{k-l}} + \frac{N-1}{2N} \sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l \rho^{l-k} = \frac{N-1}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l\right).$$

Como consecuencia de esto tenemos el siguiente sistema:

$$C \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{N-1}{2N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l\right) C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

por el Lema 1.2. Así $(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{N-1}) - (1/N)(\sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_l)\mathbf{v}_0$ pertenece al kernel de C. Este vector distinto de cero, cuyas componentes son reales, es colineal a $\mathbf{v}_{N-1}$

si N es par, y es una combinación lineal de $\mathbf{v}_{N-1}$ y $\mathbf{v}_{(N-1)/2}$ si N es impar. Por el Lema 1.3, esto solo ocurre para $N = 2$ ó 3.

Supongamos ahora que la vorticidad total es cero y que las vorticidades son arbitrarias, es decir, que el movimiento es una traslación rígida, por definición para todo k

$$v_k = \sum_{l\in\{0,\dots,N-1\}\setminus\{k\}} \frac{\Gamma_l}{\rho^{-k}-\rho^{-l}} = v,$$

dividimos entre ρ^k y sumamos sobre k para obtener

$$C_0 \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1 \\ \rho^{-1} \\ \vdots \\ \rho^{-(N-1)} \end{pmatrix} = C_0 \left(\frac{-2v}{N-1} \mathbf{v}_{N-1} \right),$$

por el Lema (1.1). Así que $(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{N-1}) + (2v/(N-1))\mathbf{v}_{N-1}$ esta en el núcleo de C_0. Es decir que $(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{N-1})$ es colineal a v_{N-1} si n es par, y es una combinación lineal de v_{N-1} y $v_{(N-1)/2}$ si N es impar. Luego por el Lema (B.1), solo existen soluciones para $N = 2$ ó 3. □

1.3. Algunos ejemplos

Veamos algunos ejemplos de configuraciones de equilibrio relativo para 2 y 3 vórtices:

Ejemplo 1 *Para **N=2** cualquier configuración es un equilibrio relativo.*

Demostración. Lo que debemos demostrar es que $\frac{d}{dt}(|z_1 - z_2|) = 0$, es decir, que $|z_1(t) - z_2(t)|$ =cte, para esto necesitamos las ecuaciones de movimiento

$$\dot{z_1}(t) = i\frac{\Gamma_2}{\bar{z_1}(t) - \bar{z_2}(t)}, \qquad \dot{z_2}(t) = i\frac{\Gamma_1}{\overline{z_2}(t) - \bar{z_1}(t)}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(|z_1(t) - z_2(t)|^2) &= (\dot{z_1}(t) - \dot{z_2}(t))(\bar{z_1}(t) - \bar{z_2}(t)) + (z_1(t) - z_2(t))(\dot{\bar{z}_1}(t) - \dot{\bar{z}}_2(t)) \\ &= i(\Gamma_2 + \Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_1) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $|z_1(t) - z_2(t)|$ es constante a lo largo de cualquier solución.

Ahora con este resultado, resolveremos el problema de los 2 vórtices.

Sea $|z_1(t) - z_2(t)| = R$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales para las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{z_1}(t) = i\frac{\Gamma_2}{R^2}(z_1(t) - z_2(t)) \tag{1.4}$$

$$\dot{z_2}(t) = i\frac{\Gamma_1}{R^2}(z_2(t) - z_1(t)) \tag{1.5}$$

que lo podemos ver de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1}(t) \\ \dot{z_2}(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{R^2}\begin{pmatrix} \Gamma_2 & -\Gamma_2 \\ -\Gamma_1 & \Gamma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

los valores y vectores propios son: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \dfrac{i}{R^2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ y $K_1 = (1,1), K_2 = (-\Gamma_2/\Gamma_1, 1)$ respectivamente.

Cuando $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$, los vectores propios no son colineales, así que podemos escribir a $z_1(t), z_2(t)$ en términos de la base K_1, K_2,

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \alpha(t)K_1 + \beta(t)K_2 = \begin{pmatrix} \alpha(t) - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\beta(t) \\ \alpha(t) + \beta(t) \end{pmatrix}$$

En la base (K_1, K_2) tenemos

$$\dot{\alpha}(t) = 0 \qquad \text{entonces} \quad \alpha(t) = c_1,$$

$$\dot{\beta}(t) = \frac{i}{R^2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\beta(t) \qquad \text{entonces} \quad \beta(t) = c_2 e^{i/R^2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}$$

Por lo tanto, las soluciones al problema de dos vórtices son:

$$z_1(t) = c_1 - c_2\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}e^{i/R^2(\Gamma_1+\Gamma_2)t} \quad \text{y} \quad z_2(t) = c_1 + c_2 e^{i/R^2(\Gamma_1+\Gamma_2)t}$$

esto quiere decir que los dos vórtices rotan sobre círculos concéntricos alrededor de c_1 (centro de vorticidad).

Cuando $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ (no hay centro de vorticidad), $\dot{z_1}(t) = \dot{z_2}(t) = v = constante$, integrando tenemos que las posiciones de los vórtices son

$$z_1(t) = z_1(0) + tv \quad \text{y} \quad z_2(t) = z_2(0) + tv.$$

Ejemplo 2 *Para **N=3** la configuración colineal y la de triángulo equilátero son los únicos equilibrios relativos.*

Demostración. Sea $j_i = z_l - z_k$, $b_i = |j_i|^2$, donde (i, j, k) es una permutación cíclica de $(1, 2, 3)$. De las ecuaciones de movimiento (1.3) tenemos

$$\dot{b}_i = 2\Gamma_i A \left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) = 0,$$

donde A es el área del triángulo. Esta ecuación se satisface cuando uno de los dos productos es cero, es decir, cuando $A = 0$ ó cuando $\left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) = 0$.

Si $A = 0$ estamos en el caso de las configuraciones colineales. Si $A \neq 0$ tenemos que $b_j = b_k$ es decir estamos en el caso de las configuraciones de triángulo equilátero.

Por lo tanto para el problema de 3 vórtices, las configuraciones de equilibrio relativo son las colineales y las de triángulo equilátero, estas pueden ocurrir para valores arbitrarios de las vorticidades. Para $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \neq 0$ el triángulo rota con respecto al centro de vorticidad del sistema con velocidad angular $i(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)/R^2$. Si $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0$, el triángulo se traslada uniformemente.

Con esto vemos que para 2 y 3 vórtices tenemos un equilibrio relativo para cualquier elección de las vórticidades.

Capítulo 2

Dos polígonos regulares concéntricos

En este capítulo deduciremos las ecuaciones que deberemos resolver para calcular el número exacto de equilibrios relativos para el caso de 2, 3 y 4 vórtices iguales sobre cada uno de los polígonos regulares, las cuales resolveremos con ayuda de la resultante de dos polinomios.

Definición 2.1 *(Resultante) Sean p y q dos polinomios, donde*

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) \quad y \quad q(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \beta_i).$$

La resultante de dos polinomios sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ se define como el producto

$$res(p, q) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i - \beta_j),$$

de las diferencias de sus raíces.

En las siguientes 3 secciones consideraremos dos polígonos regulares concéntricos, con un vórtice en cada vértice en equilibrio relativo. El número total de vórtices sera $N = 2n$, además, asumiremos que los vórtices de el mismo polígono tienen la misma vorticidad distinta de cero Γ_1 o Γ_2. Sea $x = \dfrac{s_2}{s_1}$, si el argumento de x es $2K\pi/n$, es decir el ángulo de desfase es 0, donde K es un entero, tenemos una configuración simétrica, es decir, los vórtices del segundo polígono están alineados con los vórtices del primer polígono; si el argumento de x es $2(K + 1/2)\pi/n$, los vórtices del segundo polígono están ubicados sobre los rayos que pasan por los puntos medios de los lados del primer polígono, en este caso el ángulo de desfase en π/n y tenemos una configuración antisimétrica como se muestra en la gráfica 2.1.

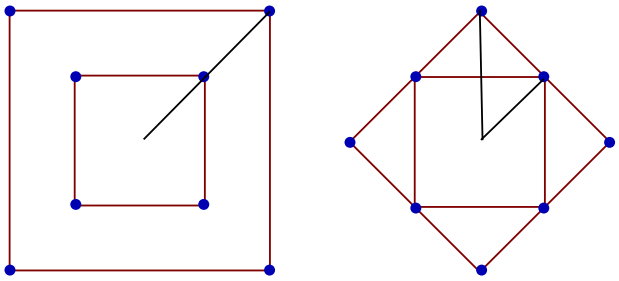


Figura 2.1: Configuración simétrica (derecha) y configuración antisimétrica (izquierda)

2.1. n=2

Para todo $k \in \{0,1\}$, usando la Proposición 1.4, tenemos:

$$\frac{v_{k,1}}{z_{k,1}} = \Gamma_2 \frac{v_{s_2}(z_{k,1})}{z_{k,1}} + \Gamma_1 \frac{i}{2|z_{k,1}|^2} = \frac{2i\Gamma_2}{|s_1|^2\left(1-\left(\frac{\bar{s_2}}{\bar{s_1}}\right)^2\right)} + \frac{i\Gamma_1}{2|s_1|^2},$$

y

$$\frac{v_{k,2}}{z_{k,2}} = \Gamma_1 \frac{v_{s_1}(z_{k,2})}{z_{k,2}} + \Gamma_2 \frac{i}{2|z_{k,2}|^2} = \frac{2i\Gamma_1}{|s_2|^2\left(1-\left(\frac{\bar{s_1}}{\bar{s_2}}\right)^2\right)} + \frac{i\Gamma_2}{2|s_2|^2}.$$

Así, para todo $k,l \in \{0,1\}$, tenemos:

$$\frac{v_{k,1}}{z_{k,1}} = \frac{v_{l,1}}{z_{l,1}}, \quad \frac{v_{k,2}}{z_{k,2}} = \frac{v_{l,2}}{z_{l,2}}.$$

Por la Proposición 1.5, la configuración es un equilibrio relativo si y solamente si:

$$\frac{v_{0,1}}{z_{0,1}} = \frac{v_{0,2}}{z_{0,2}} \in i\mathbb{R}.$$

Que $\frac{v_{0,1}}{z_{0,1}} \in i\mathbb{R}$ implica $(s_2/s_1)^2 \in \mathbb{R}$. Si la configuración es simétrica el ángulo de desfase es 0, entonces s_2/s_1 tiene argumento $K\pi$, la identidad $v_{0,1}/z_{0,1} = v_{0,2}/z_{0,2}$ multiplicada por $|s_2|^2$ es equivalente a:

$$\frac{2\Gamma_2 x^2}{1-x^2} + \frac{\Gamma_1 x^2}{2} = \frac{2\Gamma_1 x^2}{x^2-1} + \frac{\Gamma_2}{2},$$

multiplicando ambos lados de esta ecuación por $-(1-x^2)$ obtenemos:

$$-2\Gamma_2 x^2 - \frac{\Gamma_1 x^2 - \Gamma_1 x^4}{2} - 2\Gamma_1 x^2 - \frac{\Gamma_2 - \Gamma_2 x^2}{2} = 0,$$

$$x^4 - 5\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right)x^2 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \;=\; 0,$$

factorizando obtenemos la ecuación:

$$\left(x^2 - \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+4\right)\right)\left(x^2 - \left(4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right)\right) = 4\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2 + 4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right).$$

Si la configuración es antisimétrica el ángulo de desfase es $\pi/2$, así s_2/s_1 tiene argumento $(K+1/2)\pi$ la identidad $v_{0,1}/z_{0,1} = v_{0,2}/z_{0,2}$ es equivalente a:

$$x^4 + 3\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}-1\right)x^2 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 0$$

ó

$$\left(x^2 - \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+4\right)\right)\left(x^2 + \left(4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right)\right) = -4\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2 + 4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right)$$

con lo anterior obtenemos la siguiente Proposición:

Proposición 2.1 *Consideremos las configuración de dos polígonos regulares concéntricos con las mismas vorticidades sobre cada polígono. La configuración es un equilibrio relativo si, y solamente si, una de las siguientes condiciones se satisface:*

- *La razón s_2/s_1 tiene argumento $K\pi$ y la siguiente identidad se satisface:*

$$\left(x^2 - \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+4\right)\right)\left(x^2 - \left(4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2}+1\right)\right) = 4\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2 + 4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right). \qquad (2.1)$$

- *La razón s_2/s_1 tiene argumento $(K+1/2)\pi$ y la siguiente identidad se satisface:*

$$\left(x^2 - \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+4\right)\right)\left(x^2 + \left(4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2}+1\right)\right) = -4\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2 + 4\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right). \qquad (2.2)$$

Ahora podemos calcular el número exacto de equilibrios relativos exactos de dos polígonos regulares concéntricos con las mismas vorticidades sobre cada polígono.

Teorema 2.1 *Consideremos la configuración de dos polígonos regulares concéntricos con las mismas vorticidades sobre cada polígono.*

- *Supongamos que Γ_1 y Γ_2 tienen el mismo signo. Entonces existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento $K\pi$. Y existe exactamente un equilibrio relativo con argumento $(K+1/2)\pi$.*

- *Supongamos* Γ_1 *y* Γ_2 *de signo opuesto. Entonces existe exactamente un equilibrio relativo con argumento* $K\pi$*. Y existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento* $(K + 1/2)\pi$*.*

Demostración. La ecuación es de la forma $(x^2 - \alpha)(x^2 - \beta) - \gamma = 0$, que es un polinomio de grado 4, es decir, que lo podemos resolver como un polinomio cuadrático, cuyo discriminante es de la forma $\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma) = (\beta-\alpha)^2+4\gamma$, donde $\alpha = \Gamma_2/\Gamma_1+4$, $\beta = 4\Gamma_2/\Gamma_1+1$ y $\gamma = 4((\Gamma_2/\Gamma_1)^2+4\Gamma_2/\Gamma_1+1)$.

- Si $\Delta < 0, \gamma < -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$ entonces no hay solución $x > 0$.
- Si $\Delta = 0, \gamma = -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$ y $\alpha + \beta \leq 0$ entonces no hay solución $x > 0$.
- Si $\Delta = 0, \gamma = -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$ y $\alpha + \beta > 0$ entonces hay exactamente una solución $x > 0$, cuya expresión es $x = \frac{(\alpha+\beta)}{2}$.
- Si $\Delta > 0, -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4} < \gamma \leq \alpha\beta$ y $\alpha + \beta < 0$ entonces hay una solución $x > 0$.
- Si $\Delta > 0$ y $\alpha + \beta = 0$ o $\gamma > \alpha\beta$, hay una solución $x > 0$.
- Si $\Delta > 0, -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4} < \gamma < \alpha\beta$ y $\alpha+\beta > 0$ entonces hay dos soluciones $x > 0$.

Para la ecuación (2.1) , si las vorticidades tienen el mismo signo $\Delta > 0$ y $\alpha+\beta > 0$, por lo tanto hay dos soluciones de equilibrio relativo:

$$x = \sqrt{\frac{5(\Gamma_2/\Gamma_1 + 1) \pm \sqrt{25(\Gamma_2/\Gamma_1)^2 + 46\Gamma_2/\Gamma_1 + 25}}{2}}.$$

Si las vorticidades tienen signos contrarios $\Delta > 0, \alpha + \beta < 0$, hay una solución de equilibrio relativo:

$$x = \sqrt{\frac{5(\Gamma_2/\Gamma_1 + 1) + \sqrt{25(\Gamma_2/\Gamma_1)^2 + 46\Gamma_2/\Gamma_1 + 25}}{2}}.$$

Si $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0, \Delta > 0$ y $\alpha + \beta = 0$, por lo tanto tenemos un equilibrio relativo $x = 1$.

Para la ecuación (2.2), si $\Gamma_2/\Gamma_1 > 1, \Delta > 0$ y $\alpha - \beta < 0$, hay una solución de equilibrio:

$$x = \sqrt{\frac{3(-\Gamma_2/\Gamma_1 + 1) + \sqrt{9(\Gamma_2/\Gamma_1)^2 - 14\Gamma_2/\Gamma_1 + 9}}{2}}.$$

Si $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1, \Delta > 0$ y $\alpha - \beta = 0$, una solución de equilibrio relativo $x = 1$.

Si $\Gamma_2/\Gamma_1 < 1, \Delta > 0$ y $\alpha - \beta > 0$, dos soluciones de equilibrio relativo:

$$x = \sqrt{\frac{3(-\Gamma_2/\Gamma_1 + 1) \pm \sqrt{9(\Gamma_2/\Gamma_1)^2 - 14\Gamma_2/\Gamma_1 + 9}}{2}}.$$

2.2. n=3

Proposición 2.2 *Consideremos la configuración de dos triángulos equiláteros concéntricos con las mismas vorticidades sobre cada polígono. La configuración es un equilibrio relativo si, y solamente si, una de las siguientes condiciones se cumplen:*

- *La razón s_2/s_1 tiene argumento $2K\pi/3$ y la siguiente identidad se satisface:*

$$\left(x^2-\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+3\right)\right)\left(x^3-\left(3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2}+1\right)\right)=3\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2+3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right). \tag{2.3}$$

- *La razón s_2/s_1 tiene argumento $2(K+1/2)\pi/3$ y la siguiente identidad se satisface:*

$$\left(x^2-\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+3\right)\right)\left(x^3+\left(3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2}+1\right)\right)=-3\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2+3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}+1\right). \tag{2.4}$$

Demostración. Para todo $k\in\{0,1,2\}$, usando la Proposición 1.4, tenemos:

$$\frac{v_{k,1}}{z_{k,1}}=\Gamma_2\frac{v_{s_2}(z_{k,1})}{z_{k,1}}+\Gamma_1\frac{i}{|z_{k,1}|^2}=\frac{3i\Gamma_2}{|s_1|^2\left(1-\left(\frac{\bar{s_2}}{\bar{s_1}}\right)^3\right)}+\frac{i\Gamma_1}{|s_1|^2},$$

y

$$\frac{v_{k,2}}{z_{k,2}}=\Gamma_1\frac{v_{s_1}(z_{k,2})}{z_{k,2}}+\Gamma_2\frac{i}{|z_{k,2}|^2}=\frac{3i\Gamma_1}{|s_2|^2\left(1-\left(\frac{\bar{s_1}}{\bar{s_2}}\right)^3\right)}+\frac{i\Gamma_2}{|s_2|^2}.$$

Así, para todo $k,l\in\{0,1,2\}$, tenemos:

$$\frac{v_{k,1}}{z_{k,1}}=\frac{v_{l,1}}{z_{l,1}},\frac{v_{k,2}}{z_{k,2}}=\frac{v_{l,2}}{z_{l,2}}.$$

Por la Proposición 1.5, la configuración es un equilibrio relativo si y solamente si:

$$\frac{v_{0,1}}{z_{0,1}}=\frac{v_{0,2}}{z_{0,2}}\in i\mathbb{R}.$$

Que $\dfrac{v_{0,1}}{z_{0,1}}\in i\mathbb{R}$ implica $(s_2/s_1)^3\in\mathbb{R}$. Si s_2/s_1 tiene argumento $2K\pi/3$, la identidad $v_{0,1}/z_{0,1}=v_{0,2}/z_{0,2}$ multiplicada por $|s_2|^3$ es equivalente a:

$$\frac{3\Gamma_2x^2}{1-x^3}+\Gamma_1x^2=\frac{3\Gamma_1x^3}{x^3-1}+\Gamma_2,$$

multiplicando ambos lados de esta ecuación por $-(1-x^3)$ obtenemos:

$$\Gamma_1x^5-(3\Gamma_1+\Gamma_2)x^3-(3\Gamma_2+\Gamma_1)x^2+\Gamma_2 \;=\; 0,$$

$$x^5 - \left(3 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right) x^3 - \left(3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right) x^2 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \;\; = \;\; 0.$$

Si s_2/s_1 tiene argumento $2(K+1/2)\pi/3$ la identidad $v_{0,1}/z_{0,1} = v_{0,2}/z_{0,2}$ es equivalente a:

$$x^5 - \left(3 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right) x^3 + \left(3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right) x^2 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 0.$$

□

El número de equilibrios relativos los calculamos con el siguiente resultado.

Teorema 2.2 *Consideremos la configuración de dos triángulos equiláteros concéntricos con las mismas vorticidades sobre cada polígono.*

- *Si* Γ_1 *y* Γ_2 *tienen el mismo signo. Entonces existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento* $2K\pi/3$. *Y existen exactamente* 3 *equilibrios relativos si* $\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \in (0, 0.02012752805)$ *y* $\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \in (49.68317522, +\infty)$, 2 *equilibrios relativos si* $\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 0.02012752805$ *y* $\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 49.68317522$ *y 1 equilibrio relativo si* $\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \in (0.02012752805, 49.68317522)$ *con argumento* $2(K+1/2)\pi/3$.

Definimos:

$$\mu_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad , \quad 1/\mu_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

- *Si* $-1/\mu_3 < \Gamma_2/\Gamma_1 < 0$. *Entonces existe exactamente un equilibrio relativo con argumento* $2K\pi/3$. *Y existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento* $2(K+1/2)\pi/3$.
- *Si* $\Gamma_2/\Gamma_1 = -\mu_3$ *ó* $-1/\mu_3$. *Entonces existe exactamente un equilibrio relativo con argumento* $2K\pi/3$. *Y existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento* $2(K+1/2)\pi/3$.
- *Si* $-\mu_3 < \Gamma_2/\Gamma_1 < -1/\mu_3$. *Entonces existe exactamente un equilibrio relativo con argumento* $2K\pi/3$. *Y existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento* $2(K+1/2)\pi/3$.
- *Si* $\Gamma_2/\Gamma_1 < -\mu_3$. *Entonces existe un equilibrio relativo con argumento* $2K\pi/3$. *Y existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento* $2(K+1/2)\pi/3$.
- *Si* $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$. *No existen equilibrios relativos con argumento* $2K\pi/3$. *Y existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento* $2(K+1/2)\pi/3$.

Demostración. Tenemos el polinomio $G_3 = (x^2 - \alpha)(x^3 - \beta) - \gamma$, donde $\alpha = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 3, \beta = 3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1$ y $\gamma = 3\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2 + 3\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right)$, la derivada de G_3 es

$F_3 = x(5x^3 - 3\alpha x - 2\beta)$.

Para la configuración simétrica tenemos que si $\Gamma_2/\Gamma_1 > 0 : \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha\beta > \gamma$, debemos estudiar el signo del discriminante de F_3, el cual es $\Delta = \beta^2 + \alpha^3/5$, pero este siempre es positivo, por lo cual F_3 tiene una única raíz real, la cual al evaluarla en el polinomio da negativa, el límite en 0 es $\alpha\beta - \gamma > 0$ y el límite en $+\infty$ es $+\infty$. Por lo tanto G_3 tiene dos equilibrios relativos, que se ven como 2 triángulos equiláteros encajados, donde la razón entre los radios es mayor que 1 y menor que 1, en cada caso.

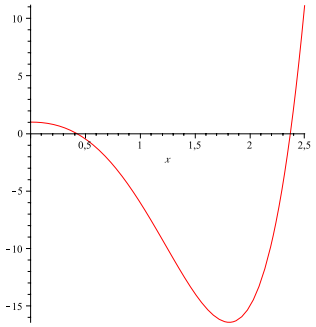


Figura 2.2: $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1, x = 0.4220824404$ y 2.369205407

Si $\Gamma_2/\Gamma_1 < 0$ tenemos los siguientes casos:

- Si $-1/\mu_3 < \Gamma_2/\Gamma_1 < 0, \alpha > 0, \beta < 0, \gamma > 0, \alpha\beta < \gamma$. Tenemos:
  $\{x \in \mathbb{R}_+^* : x^2 > \alpha \wedge x^3 > \beta\} = (\sqrt{\alpha}, +\infty) \vee (\beta^{1/3}, +\infty)$. La función G_3 es estrictamente creciente, en este intervalo, su límite en 0 es $\alpha\beta - \gamma < 0$, su límite en $\sqrt{\alpha}$ es $-\gamma < 0$ y su límite en $+\infty$ es $+\infty$. Así que solo hay una configuración de equilibrio relativo.

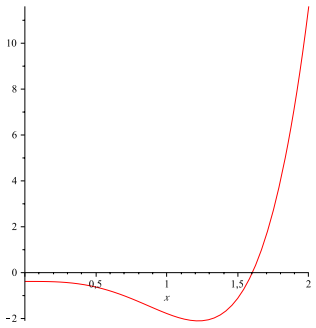


Figura 2.3: $\Gamma_2/\Gamma_1 = -0.1495916631, x = 1.870296023$

- Si $\Gamma_2/\Gamma_1 = -\mu_3$ ó $-1/\mu_3, \alpha > 0, \beta < 0, \gamma = 0$. El polinomio tiene dos posibles soluciones $x = \sqrt{\alpha}, x = \beta^{1/3}$ pero como $\beta < 0$, solo hay una solución positiva. Así que tenemos un solo equilibrio relativo.

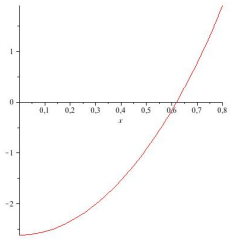


Figura 2.4: $\Gamma_2/\Gamma_1 = -\mu_3, x = 0.6180339880$

- Si $-\mu_3 < \Gamma_2/\Gamma_1 < -1/\mu_3, \alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \alpha\beta < \gamma$. Debemos analizar el signo de $\Delta = \beta^2 - \alpha^3/5$. Solo hay 1 valor para el cual $\Delta = 0$ que es $\Gamma_2/\Gamma_1 = -0.814854$, evaluando este valor en G_3, tenemos un solo equilibrio relativo $x = 1.478223934$. Para $\Gamma_2/\Gamma_1 \in (-\mu_3, -0.814854)$, $\Delta > 0$, existe una única raíz real la cual es negativa, por lo tanto G_3 tiene un solo equilibrio relativo. Para $\Gamma_2/\Gamma_1 \in (-0.814854, -1/\mu_3), \Delta < 0$, así que hay 3 raíces reales, no pueden haber 1 ó 3 positivas porque G_3 se ira para $-\infty$, si 2 son positivas podrían haber $1, 2, 3$ equilibrios relativos, para esto calculamos

$$res[G_3, F_3, x] = -g(-(324/3125)g^6 + (16119/3125)g^5 - (486/3125)g^4 - (5859/625)g^3 - (486/3125)g^2 + (16119/3125)g - 324/3125),$$

así nos queda un polinomio en términos de $g = \Gamma_2/\Gamma_1$ y lo igualamos a 0 para encontrar los valores de las vorticidades donde el polinomio y su derivada tienen una raíz común obteniendo los valores $\Gamma_2/\Gamma_1 = 0.02012752805 \wedge 49.68317522$ vemos que no tienen raíces comunes para vorticidades de signo opuesto, por lo tanto no podemos tener 2 equilibrios relativos, analizamos como es G_3 en los valores donde el discriminante es menor que 0, y vemos que $G_3 < 0$ en los dos puntos críticos, finalmente puede que no hayan raíces positivas para lo cual tenemos 1 equilibrio relativo. Por lo tanto para $-\mu_3 < \Gamma_2/\Gamma_1 < -1/\mu_3$ tenemos 1 solo equilibrio relativo.

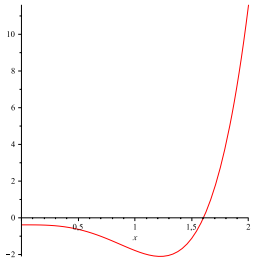


Figura 2.5: $\Gamma_2/\Gamma_1 = -0{,}4, x = 1.603825813$

- Si $\Gamma_2/\Gamma_1 < -\mu_3, \alpha < 0, \beta < 0, \gamma > 0, \alpha\beta < \gamma$. Solo tenemos 1 cambio de signo, así que G_3 tiene 1 equilibrio relativo.

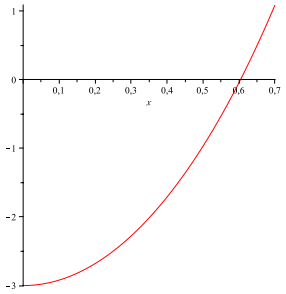


Figura 2.6: $\Gamma_2/\Gamma_1 = -3, x = 0.6041050488$

- Si $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, evaluamos esto en el polinomio y vemos que hay 1 solución $x = 1$, pero esto quiere decir que los triángulos tienen radios iguales, por lo tanto no tenemos una configuración de equilibrio relativo.

Para la ecuación (2.4), tenemos que si $\Gamma_2/\Gamma_1 > 0 : \alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \alpha\beta < \gamma$. El límite de G_3 en 0 es $\alpha\beta - \gamma < 0$, y el límite en $+\infty$ es $+\infty$. Estudiamos el signo del discriminante de F_3 y tenemos lo siguiente:
$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 36.0663$ ó 0.748586, para estos dos valores tenemos 2 equilibrios relativos.
$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \in (0.748586, 36.0063)$, pero esta raíz es negativa, por lo tanto tenemos 1 equilibrio relativo.
$\Delta < 0 \Leftrightarrow \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} < 0.748586$ y $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} > 36.0063$, aquí existen 3 raíces reales, no puede ser 1 ó 3 positivas porque el polinomio tendería a $-\infty$, si no tuviéramos raíces positivas ya tenemos 1 equilibrio relativo, si tenemos 2 positivas, podemos tener 1,2 ó 3 equilibrios relativos, para esto calculamos la resultante del polinomio y su derivada eliminando la variable x, es decir, obteniendo un polinomio en Γ_2/Γ_1

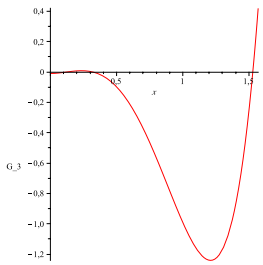
$$Res[G_3, F_3] = 0 \Leftrightarrow \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 0.02012752805 \wedge 49.68317522$$

para estos valores tenemos 2 equilibrios relativos, si $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \in (0.02012752805, 49.68317522)$ tenemos 1 equilibrio relativo, y para $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} < 0.02012752805$ y $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} > 49.68317522$ tenemos 3 equilibrios relativos.

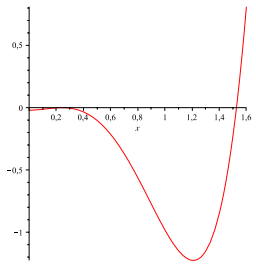
Por lo tanto en $(0, 0.02012752805)$ hay 3 configuraciones de equilibrio relativo, en 0.02012752805 y 49.68317522 tenemos 2 configuraciones de equilibrio relativo, en $(0.02012752805, 49.68317522)$ 1 equilibrio relativo y en $(49.68317522, +\infty)$ 3 configuraciones de equilibrio relativo.

Si $\Gamma_2/\Gamma_1 < 0$ tenemos los siguientes casos:

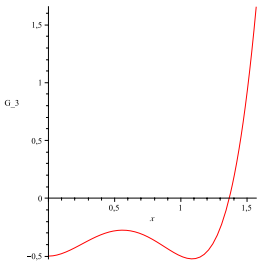
- Si $-1/\mu_3 < \Gamma_2/\Gamma_1 < 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma < 0, \alpha\beta > \gamma$. Tenemos 2 equilibrios relativos.



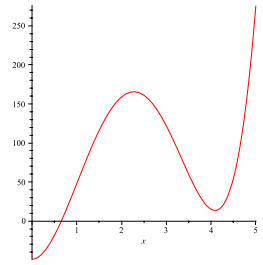
$\Gamma_2/\Gamma_1 \in (0,\ 0.02012752805)$



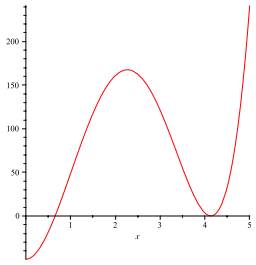
Γ_2/Γ_1=0.02012752805



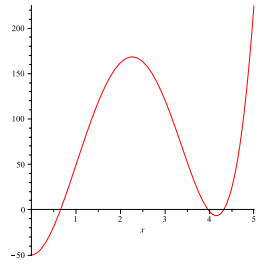
$\Gamma_2/\Gamma_1 \in (0.02012752805,\ 49.68317522)$



$\Gamma_2/\Gamma_1 \in (0.02012752805,\ 49.68317522)$



Γ_2/Γ_1=49.68317522



$\Gamma_2/\Gamma_1 \in (49.68317522,+\infty)$

Figura 2.7: *Comportamiento de G_3 para $\Gamma_2/\Gamma_1 > 0$*

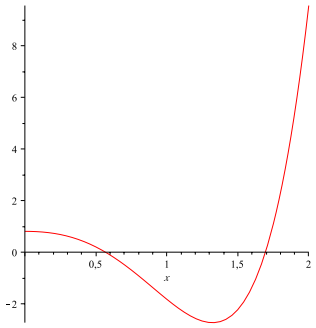


Figura 2.8: $\Gamma_2/\Gamma_1 = -0{,}3, x = 0.2470066076$ y 1.260262104

- Si $\Gamma_2/\Gamma_1 = -\mu_3$ ó $-1/\mu_3, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma = 0$. El polinomio tiene dos soluciones $x = \sqrt{\alpha}, x = \beta^{1/3}$. Por lo tanto tenemos 2 equilibrios relativos.
- Si $-\mu_3 < \Gamma_2/\Gamma_1 < -1/\mu_3, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha\beta > \gamma$, estamos en el caso simétrico cuando las vorticidades tienen el mismo signo, el razonamiento es similar y tenemos 2 configuraciones de equilibrio relativo.
- Si $\Gamma_2/\Gamma_1 < -\mu_3, \alpha < 0, \beta > 0, \gamma < 0, \alpha\beta < \gamma$. Aquí tenemos que $\Delta > 0$, así que hay una sola raíz positiva que al evaluarla en el polinomio toma valor negativo. Por lo tanto tenemos 2 equilibrios relativos.
- Si $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ el polinomio nos queda de la forma

$$x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

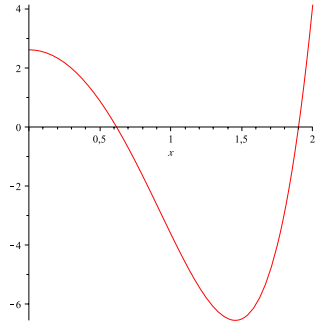


Figura 2.9: $\Gamma_2/\Gamma_1 = -\mu_3$

esta ecuación tiene dos soluciones reales positivas $x = 0.580692, x = 1.72208$.

□

2.3. n=4

Proposición 2.3 *Consideremos la configuración de dos cuadrados concéntricos con las mismas vorticidades sobre cada polígono. La configuración es un equilibrio relativo si, y solamente si, una de las siguientes condiciones se cumplen:*

- *La razón s_2/s_1 tiene argumento $K\pi/2$ y la siguiente identidad se satisface:*

$$\left(x^2 - \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + \frac{8}{3}\right)\right)\left(x^4 - \left(\frac{8}{3}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right)\right) = \frac{8}{3}\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2 + \frac{8}{3}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right). \tag{2.5}$$

- *La razón s_2/s_1 tiene argumento $(K + 1/2)\pi/2$ y la siguiente identidad se satisface:*

$$\left(x^2 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)\left(x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 1\right) = 0. \tag{2.6}$$

Demostración. Para todo $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, usando las Proposición 1.4, tenemos:

$$\frac{v_{k,1}}{z_{k,1}} = \Gamma_2 \frac{v_{s_2}(z_{k,1})}{z_{k,1}} + \Gamma_1 \frac{3i}{2|z_{k,1}|^2} = \frac{4i\Gamma_2}{|s_1|^2\left(1 - \left(\frac{\bar{s_2}}{\bar{s_1}}\right)^4\right)} + \frac{3i\Gamma_1}{2|s_1|^2},$$

y

$$\frac{v_{k,2}}{z_{k,2}} = \Gamma_1 \frac{v_{s_1}(z_{k,2})}{z_{k,2}} + \Gamma_2 \frac{3i}{2|z_{k,2}|^2} = \frac{4i\Gamma_1}{|s_2|^2\left(1 - \left(\frac{\bar{s_1}}{\bar{s_2}}\right)^4\right)} + \frac{3i\Gamma_2}{2|s_2|^2}.$$

Así, para todo $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$, tenemos:

$$\frac{v_{k,1}}{z_{k,1}} = \frac{v_{l,1}}{z_{l,1}}, \frac{v_{k,2}}{z_{k,2}} = \frac{v_{l,2}}{z_{l,2}}.$$

Por la Proposición 1.5, la configuración es un equilibrio relativo si y solamente si:

$$\frac{v_{0,1}}{z_{0,1}} = \frac{v_{0,2}}{z_{0,2}} \in i\mathbb{R}.$$

Que $\dfrac{v_{0,1}}{z_{0,1}} \in i\mathbb{R}$ implica $(s_2/s_1)^4 \in \mathbb{R}$. Si s_2/s_1 tiene argumento $K\pi/2$, la identidad $v_{0,1}/z_{0,1} = v_{0,2}/z_{0,2}$ multiplicada por $|s_2|^4$ es equivalente a:

$$\frac{4\Gamma_2 x^2}{1-x^4} + \frac{3\Gamma_1 x^2}{2} = \frac{4\Gamma_1 x^4}{x^4-1} + \frac{3\Gamma_2}{2},$$

multiplicando ambos lados de esta ecuación por $-(1-x^4)$ obtenemos:

$$x^6 - \left(\frac{8}{3} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right) x^4 - \left(\frac{8}{3}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right) x^2 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \;=\; 0.$$

Si s_2/s_1 tiene argumento $(K+1/2)\pi/2$ la identidad $v_{0,1}/z_{0,1} = v_{0,2}/z_{0,2}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} x^6 - \left(\frac{8}{3} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right) x^4 + \left(\frac{8}{3}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right) x^2 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \quad &= \\ x^2\left(x^4 - \frac{8}{3}x^2\right) - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\left(x^4 - \frac{8}{3}x^2\right) + x^2 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \quad &= \\ \left(x^2 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)\left(x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 1\right) \quad &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3 *Consideremos la configuración de dos cuadrados concéntricos con las mismas vorticidades sobre cada polígono.*

- *Si Γ_1 y Γ_2 tienen el mismo signo. Entonces existen exactamente dos equilibrios relativos con argumento $K\pi/2$. Y existen exactamente 3 equilibrios relativos con argumento $(K+1/2)\pi/2$.*
- *Para cualquier otro valor de las vorticidades existen exactamente 2 equilibrios relativos con argumento $(K+1/2)\pi/2$*

Definimos:

$$\mu_4 = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \quad , \quad 1/\mu_4 = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

- *Si $-1/\mu_4 < \Gamma_2/\Gamma_1 < 0$. Entonces existen exactamente un equilibrio relativo con argumento $K\pi/2$.*
- *Si $\Gamma_2/\Gamma_1 = -\mu_4$ ó $-1/\mu_4$. Entonces existe exactamente un equilibrio relativo con argumento $K\pi/2$.*

- *Si* $-\mu_4 < \Gamma_2/\Gamma_1 < -1/\mu_4$. *Entonces existe exactamente un equilibrio relativo con argumento* $K\pi/2$.
- *Si* $\Gamma_2/\Gamma_1 < -\mu_4$. *Entonces existe un equilibrio relativo con argumento* $K\pi/2$.
- *Si* $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$. *No existen equilibrios relativos con argumento* $K\pi/2$.

Demostración. Tenemos el polinomio $G_4 = (x^2 - \alpha)(x^4 - \beta) - \gamma$, donde $\alpha = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + \frac{8}{3}$, $\beta = \frac{8}{3}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1$ y $\gamma = \frac{8}{3}\left(\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)^2 + \frac{8}{3}\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} + 1\right)$, la derivada de G_4 haciendo $t = x^2$, es $F_4 = t^2 - \frac{2}{3}\alpha t - \frac{\beta}{3}$ donde las soluciones son de la forma $\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2+3\beta}}{3}$.

Para la configuración simétrica tenemos que si $\Gamma_2/\Gamma_1 > 0 : \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha\beta > \gamma$, debemos estudiar el signo del discriminante de F_4, $\Delta = \alpha^2 + 3\beta$, pero este siempre es positivo, por lo cual F_4 tiene una raíz real positiva, el límite en 0 es $\alpha\beta - \gamma > 0$, el límite en $\frac{\alpha}{3} + \frac{\sqrt{\alpha^2+3\beta}}{3}$ es < 0, y el límite en $+\infty$ es $+\infty$. Por lo tanto G_4 tiene dos equilibrios relativos, que se ven como dos cuadrados concéntricos.

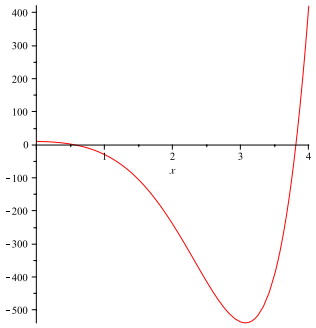


Figura 2.10: Γ_2/Γ_1=10

Si $\Gamma_2/\Gamma_1 < 0$ tenemos los siguientes casos:

- Si $-1/\mu_4 < \Gamma_2/\Gamma_1 < 0, \alpha > 0, \beta < 0, \gamma > 0, \alpha\beta < \gamma$. Tenemos: $\{x \in \mathbb{R}_+^* : x^2 > \alpha \wedge x^n > \beta\} = (\sqrt{\alpha}, +\infty) \vee (\beta^{1/4}, +\infty)$. Así que solo hay una configuración de equilibrio relativo.
- Si $\Gamma_2/\Gamma_1 = -\mu_4$ ó $-1/\mu_4, \alpha > 0, \beta < 0, \gamma = 0$. El polinomio tiene dos posibles soluciones $x = \sqrt{\alpha}, x = \beta^{1/4}$ pero como $\beta < 0$, solo hay una solución positiva. Así que tenemos un solo equilibrio relativo.
- Si $-\mu_4 < \Gamma_2/\Gamma_1 < -1/\mu_4, \alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \alpha\beta < \gamma$. Tenemos 1 solo equilibrio relativo.
- Si $\Gamma_2/\Gamma_1 < -\mu_4, \alpha < 0, \beta < 0, \gamma > 0, \alpha\beta < \gamma$. Solo tenemos 1 cambio de signo, así que G_4 tiene 1 equilibrio relativo.

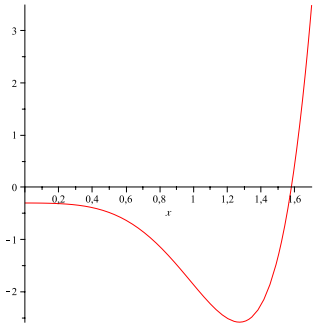


Figura 2.11: Γ_2/Γ_1=-0.3

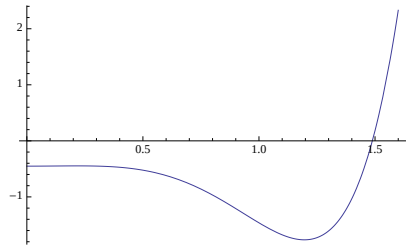


Figura 2.12: $\Gamma_2/\Gamma_1 = -1/\mu_4$

- Si $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, evaluamos esto en el polinomio y vemos que hay 1 solución $x = 1$, pero esto quiere decir que los cuadriláteros tienen radios iguales, por lo tanto no tenemos una configuración de equilibrio relativo.

Para el caso antisimétrico tenemos que las soluciones positivas de la ecuación (2.6) son

$$x = \sqrt{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}},$$

Si las vorticidades son del mismo signo y $\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \neq \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ tenemos 3 soluciones reales positivas, si estas cantidades son iguales tenemos 2 soluciones (una la inversa de la otra) y si las vorticidades son de signo contrario tenemos 2 soluciones reales positivas

$$x = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}}.$$

Capítulo 3

Configuración de paralelogramo

En este capítulo presentaremos un teorema que nos muestra, como las configuraciones de paralelogramo en equilibrio relativo deben tener las vorticidades iguales cuando la suma de estas es distinta de cero. Cuando la suma de las vorticidades es cero, las vorticidades ubicadas en los vértices opuestos deben ser iguales en valor absoluto pero con signos opuestos. También calcularemos las posiciones de los vórtices para tener dicha configuración de paralelogramo en equilibrio relativo.

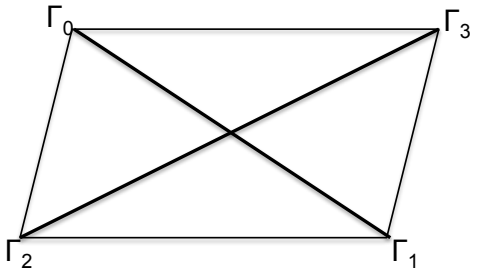
Una de las preguntas que nos podemos hacer es que si tenemos un equilibrio relativo de 4 vórtices en configuración de paralelogramo, ¿las vorticidades pueden ser distintas?, la respuesta la tenemos en el siguiente Teorema:

Teorema 3.1 *Supongamos que tenemos una configuración de paralelogramo en equilibrio relativo:*

i. las vorticidades localizadas en los vórtices opuestos son iguales cuando $\Gamma \neq 0$,

ii. las vorticidades localizadas en los vórtices opuestos son iguales en valor absoluto pero con signos opuestos cuando $\Gamma = 0$.

Demostración. *i.* Sea $b_{ij} = |z_i - z_j|^2$ con $b_{02} = b_{13}$, $b_{03} = b_{12}$ entonces $\dot{b}_{02} = \dot{b}_{13}$, $\dot{b}_{03} = \dot{b}_{12}$.



En general por la Ec. (1.3),

$$\dot{b}_{ij} = 4 \sum_{k \neq i,j} \Gamma_k A_{ijk} \left(\frac{1}{b_{kj}} - \frac{1}{b_{ki}} \right).$$

En el caso del paralelogramo

$$\begin{aligned} \dot{b}_{02} &= \Gamma_1 A_{021} \left(\tfrac{1}{b_{12}} - \tfrac{1}{b_{10}} \right) + \Gamma_3 A_{023} \left(\tfrac{1}{b_{32}} - \tfrac{1}{b_{30}} \right) = 0, \\ \dot{b}_{13} &= \Gamma_0 A_{130} \left(\tfrac{1}{b_{03}} - \tfrac{1}{b_{01}} \right) + \Gamma_2 A_{132} \left(\tfrac{1}{b_{23}} - \tfrac{1}{b_{21}} \right) = 0, \end{aligned}$$

como $\dot{b}_{02} = \dot{b}_{13}$ y $A_{021} = A_{130} = A_{023} = A_{132} = A$ tenemos

$$A \left[\Gamma_1 \left(\frac{1}{b_{03}} - \frac{1}{b_{01}} \right) + \Gamma_3 \left(\frac{1}{b_{23}} - \frac{1}{b_{21}} \right) \right] = A \left[\Gamma_0 \left(\frac{1}{b_{03}} - \frac{1}{b_{01}} \right) + \Gamma_2 \left(\frac{1}{b_{23}} - \frac{1}{b_{21}} \right) \right],$$

luego

$$A \left[(\Gamma_1 - \Gamma_0) \left(\frac{1}{b_{03}} - \frac{1}{b_{01}} \right) + (\Gamma_3 - \Gamma_2) \left(\frac{1}{b_{23}} - \frac{1}{b_{21}} \right) \right] = 0. \tag{3.1}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \dot{b}_{03} &= \Gamma_1 A_{031} \left(\tfrac{1}{b_{13}} - \tfrac{1}{b_{10}} \right) + \Gamma_2 A_{032} \left(\tfrac{1}{b_{23}} - \tfrac{1}{b_{20}} \right) = 0, \\ \dot{b}_{12} &= \Gamma_0 A_{120} \left(\tfrac{1}{b_{02}} - \tfrac{1}{b_{01}} \right) + \Gamma_3 A_{123} \left(\tfrac{1}{b_{32}} - \tfrac{1}{b_{31}} \right) = 0, \end{aligned}$$

como $\dot{b}_{02} = \dot{b}_{13}$ y $A_{031} = A_{120} = A_{032} = A_{123} = A$ tenemos

$$A \left[\Gamma_1 \left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{01}} \right) + \Gamma_2 \left(\frac{1}{b_{23}} - \frac{1}{b_{02}} \right) \right] = A \left[\Gamma_0 \left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{01}} \right) + \Gamma_3 \left(\frac{1}{b_{23}} - \frac{1}{b_{02}} \right) \right],$$

luego

$$A \left[(\Gamma_1 - \Gamma_0) \left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{01}} \right) + (\Gamma_3 - \Gamma_2) \left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{23}} \right) \right] = 0. \tag{3.2}$$

Las soluciones para las ecuaciones (3.1) y (3.2) son:

- $A = 0$ que es el caso colineal,
- si $A \neq 0$ tenemos $\Gamma_0 = \Gamma_1$ y $\Gamma_2 = \Gamma_3$,
- $b_{01} = b_{02} = b_{03} = b_{23}$,
- $b_{02} = b_{01} = b_{23}$, $b_{03} = b_{01} = b_{23}$, $\Gamma_0 = \Gamma_3$ y $\Gamma_1 = \Gamma_2$ con $b_{01} = b_{23}$, $-\Gamma_0 = \Gamma_2$ y $\Gamma_1 = -\Gamma_3$ con $b_{01} = b_{23}$.

Ahora vamos a analizar cuales de estas soluciones son soluciones de equilibrio relativo en configuración de paralelogramo:

1. $A = 0$ caso colineal, para el cual existen 12 configuraciones en equilibrio relativo (ver Hampton y Moeckel [9]).
2. $\Gamma_0 = \Gamma_1$ y $\Gamma_2 = \Gamma_3$, vorticidades opuestas iguales, satisface la Proposición 1.1 y sigo teniendo una configuración de paralelogramo.
3. $b_{01} = b_{02} = b_{03} = b_{23}$ no se tiene ya que contradice nuestra hipótesis de tener una configuración en paralelogramo al no satisfacer la desigualdad del triángulo.
4. $b_{03} = b_{01} = b_{23}$, $\Gamma_0 = \Gamma_3$ y $\Gamma_1 = \Gamma_2$ con $b_{01} = b_{23}$, $-\Gamma_0 = \Gamma_2$ y $\Gamma_1 = -\Gamma_3$ con $b_{01} = b_{23}$ son configuraciones de paralelogramo pero no satisfacen la hipótesis de estar en equilibrio relativo.

Ahora analicemos las distancias mutuas entre los vórtices ubicados en las diagonales tenemos:

$$\dot{b}_{01} = A\Big[\Gamma_2\left(\frac{1}{b_{03}} - \frac{1}{b_{02}}\right) + \Gamma_3\left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{03}}\right)\Big] = A\Big[(\Gamma_3 - \Gamma_2)\left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{03}}\right)\Big] = 0, \tag{3.3}$$

$$\dot{b}_{23} = A\Big[\Gamma_0\left(\frac{1}{b_{03}} - \frac{1}{b_{02}}\right) + \Gamma_1\left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{03}}\right)\Big] = A\Big[(\Gamma_1 - \Gamma_0)\left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{03}}\right)\Big] = 0, \tag{3.4}$$

la solución para estas ecuaciones son $\Gamma_0 = \Gamma_1, \Gamma_2 = \Gamma_3$ y $b_{02} = b_{03}$, es decir el caso del rombo.

Veamos ahora como deben ser las vorticidades para la configuración romboidal en equilibrio relativo.

Para esta configuración en equilibrio relativo obtengo las ecuaciones

$$(\Gamma_2 - \Gamma_1)\left(\frac{1}{b_{02}} - \frac{1}{b_{01}}\right) = 0, \qquad (\Gamma_4 - \Gamma_3)\left(\frac{1}{b_{23}} - \frac{1}{b_{02}}\right) = 0,$$

las soluciones a estas ecuaciones son:

a. $\Gamma_1 = \Gamma_2$ y $\Gamma_3 = \Gamma_4$ no satisface la Proposición 1.1,
b. $b_{02} = b_{23} = b_{01}$ no cumple con la hipótesis de tener una configuración en paralelogramo,
c. $\Gamma_1 = \Gamma_2$ y $b_{02} = b_{23}$ y $\Gamma_3 = \Gamma_4$ y $b_{02} = b_{01}$, pero estas soluciones no satisfacen las ecuaciones en equilibrio relativo.

Por lo tanto la configuración romboidal no es una solución de equilibrio relativo, la única solución de equilibrio relativo en configuración de paralelogramo para $A \neq 0$ la tenemos en el inciso 2.

ii. Si $\Gamma = 0$**,** el movimiento es una traslación rígida, los vórtices se mueven con una velocidad común v.

Sea $|z_0-z_2|^2=a$, $|z_0-z_3|^2=b$, $|z_0-z_1|^2=c$, $|z_2-z_3|^2=d$, como se trata de una configuración de paralelogramo tenemos que $z_0-z_2=z_3-z_1$ y $z_0-z_3=z_2-z_1$. Así nuestras ecuaciones de equilibrio son de la forma:

$$\begin{aligned}(\Gamma_0+\Gamma_3)\frac{z_0-z_3}{b}+(\Gamma_2-\Gamma_1)\frac{z_0-z_2}{a}+\Gamma_1\frac{z_0-z_1}{c}-\Gamma_2\frac{z_3-z_2}{d} &= 0, \quad (3.5)\\ -\Gamma_0\frac{z_0-z_1}{c}+(\Gamma_0-\Gamma_2)\frac{z_0-z_3}{b}-(\Gamma_1+\Gamma_3)\frac{z_0-z_2}{a}-\Gamma_2\frac{z_3-z_2}{d} &= 0, \quad (3.6)\\ (\Gamma_0+\Gamma_1)\left(-\frac{z_0-z_1}{a}+\frac{z_0-z_3}{b}\right)-(\Gamma_2+\Gamma_3)\frac{z_3-z_2}{d} &= 0. \quad (3.7)\end{aligned}$$

Igualamos (3.5) y (3.6) obteniendo:

$$(\Gamma_0+\Gamma_1)\frac{z_0-z_1}{c}+(\Gamma_2+\Gamma_3)\left(\frac{z_0-z_2}{a}+\frac{z_0-z_3}{b}\right)=0,$$

Con esta ecuación y la ecuación (3.7) tenemos un sistema de dos ecuaciones, las soluciones a este sistema son: $\Gamma_0=-\Gamma_1$ y $\Gamma_2=-\Gamma_3$.

$\frac{z_0-z_1}{a}=\frac{z_0-z_3}{b}$, $z_0=z_1$, $z_2=z_3$ y $\frac{z_0-z_2}{a}=\frac{z_3-z_0}{b}$, pero con esto tendríamos que los vórtices están en colisión, lo cual no es cierto en este caso.

Por lo tanto para la configuración de paralelogramo en equilibrio relativo cuando la suma de las vorticidades es cero, las vorticidades ubicadas en la diagonal son iguales con signo contrario. □

Proposición 3.1 *Supongamos que tenemos una configuración de paralelogramo en equilibrio relativo donde las vorticidades sobre cada diagonal son iguales, es decir,* $\Gamma_0=\Gamma_2$ *y* $\Gamma_1=\Gamma_3$ *entonces los vórtices tienen posiciones:*

$$z_0=\pm i \text{ y } z_1=1\pm i,\ z_0=\pm\frac{1}{2} \text{ y } z_1=\frac{1}{2} \text{ o } z_1=\frac{3}{2},\ z_0=\frac{\pm 1\pm(-1{,}388597577)i}{2} \text{ y}$$

$$z_1=\frac{1\pm(-1{,}388597577)i}{2} \text{ ó } z_1=\frac{3\pm(-1{,}388597577)i}{2},\ z_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } z_1=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2},$$

$$z_0=\pm\frac{-3+5\sqrt{3}}{2} \text{ y } z_1=\frac{5(1+\sqrt{3})}{2} \text{ ó } z_1=\frac{-1+5\sqrt{3}}{2},$$

$$z_0=\frac{g+G\pm\sqrt{9G^2-14Gg+9g^2}}{4(g-G)}\pm\frac{1}{2}i \text{ y } z_1=1+\frac{g+G\pm\sqrt{9G^2-14Gg+9g^2}}{4(g-G)}\pm\frac{1}{2}i,$$

$$z_0=\frac{g+G\pm\sqrt{9G^2-14Gg+9g^2}}{4(g-G)}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ y } z_1=1+\frac{g+G\pm\sqrt{9G^2-14Gg+9g^2}}{4(g-G)}\pm\frac{1}{2}i$$

donde $z_2=1$ *y* $z_3=0$ *son posiciones fijas para todas las configuraciones.*

Demostración. Lo que queremos buscar es dónde deben estar ubicadas $z_0 = (a, b)$ y $z_1 = (1 + a, b)$ de tal forma que se tenga una configuración de equilibrio relativo, es decir, encontrar los valores de a y b, donde estos son números reales. De la Proposición 1.1 utilizamos la definición de equilibrio relativo para cualquier valor de w y las ecuaciones de movimiento para 4 vórtices, vemos que tenemos 6 ecuaciones, pero 3 de ellas son combinación lineal de las otras, así que realmente nos quedan 3 ecuaciones $v_i - v_0$, $i = 1, 2, 3$.

$$v_1 - v_0 \quad = \omega = (\Gamma_0 + \Gamma_1) + \Gamma_2 \left(\tfrac{a+ib}{a^2+b^2} + \tfrac{1-a-ib}{(1-a)^2+b^2} \right) + \Gamma_3 \left(\tfrac{1+a+ib}{(1+a)^2+b^2} - \tfrac{a+ib}{a^2+b^2} \right),$$

$$v_2 - v_0 \quad = \omega(1 - a - ib) = (\Gamma_0 + \Gamma_2) \left(\tfrac{1-a-ib}{(1-a)^2+b^2} \right) + (\Gamma_1 + \Gamma_3) \left(1 - \tfrac{a+ib}{a^2+b^2} \right),$$

$$v_3 - v_0 \quad = -\omega(a + ib) = -(\Gamma_0 + \Gamma_3) \left(\tfrac{a+ib}{a^2+b^2} \right) + \Gamma_1 \left(1 - \tfrac{1+a+ib}{(1+a)^2+b^2} \right) + \Gamma_2 \left(\tfrac{1-a-ib}{(1-a)^2+b^2} - 1 \right).$$

Multiplicando por los denominadores obtenemos:

$$\begin{aligned} w(a^2+b^2)[(1+a)^2+b^2][(1-a)^2+b^2] &= (\Gamma_0+\Gamma_1)(a^2+b^2)[(1+a)^2+b^2][(1-a)^2+b^2] \\ &+ \Gamma_2[(1+a)^2+b^2][(a+ib)[(1-a)^2+b^2] + (1-a-ib)(a^2+b^2)] \\ &+ \Gamma_3[(1-a)^2+b^2][[(1+a)^2+ib](a^2+b^2) - (a+ib)[(1+a)^2+b^2]], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(1-a-ib)(a^2+b^2)[(1-a)^2+b^2] &= (\Gamma_0+\Gamma_2)(a^2+b^2)(1-a-ib) \\ &+ (\Gamma_1+\Gamma_3)[(1-a)^2+b^2][a^2+b^2-(a+ib)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -w(a+ib)(a^2+b^2)[(1+a)^2+b^2][(1-a)^2+b^2] &= -(\Gamma_0+\Gamma_3)(a+ib)[(1+a)^2+b^2][(1-a)^2+b^2] \\ &+ \Gamma_1(a^2+b^2)[(1-a)^2+b^2][(1+a)^2+b^2-(1+a+ib)] \\ &+ \Gamma_2(a^2+b^2)[(1+a)^2+b^2][1-a-ib-(1-a)^2-b^2]. \end{aligned}$$

A los términos que están a la derecha del igual en las tres ecuaciones anteriores los llamaremos G_1, G_2 y G_3 respectivamente. De la última ecuación despejamos ω

$$\omega = \frac{-G_3}{(a+ib)(a^2+b^2)[(1-a)^2+b^2][(1+a)^2+b^2]}$$

y sustituimos su valor en las dos primeras ecuaciones obteniendo:

$$\frac{-G_3}{a+ib} = G_1 \quad \text{y} \quad -\frac{(1-a-ib)G_3}{(a+ib)[(1+a)^2+b^2]} = G_2,$$

despejamos el valor de $-G_3$ de cada ecuación y las igualamos para obtener:

$$(1-a-ib)G_1 = [(1+a)^2+b^2]G_2, \tag{3.8}$$

para resolverla igualamos las partes reales y las partes imaginarias, además suponemos que las vorticidades de las diagonales son iguales, es decir, $\Gamma_0 = \Gamma_2 = G$, $\Gamma_1 = \Gamma_3 = g$ obteniendo el siguiente sistema de polinomios en términos de a y b:

$$\begin{aligned} P_1(a,b) = {} & G(a - a^2 - 5a^3 + 5a^5 + a^6 - a^7 + b^2 - ab^2 - 6a^2b^2 + 2a^3b^2 + 3a^4b^2 \\ & - 3a^5b^2 + 2b^4 - 3ab^4 + 3a^2b^4 - 3a^3b^2 + b^6 - ab^6) + g(a + a^2 - 5a^3 + 5a^5 \\ & - a^6 - a^7 - b^2 - ab^2 + 6a^2b^2 + 2a^3b^2 + 3a^4b^2 - 3a^5b^2 - 2b^4 - 3ab^4 - 3a^2b^4 \\ & - 3a^3b^2 - b^6 - ab^6) \\ = {} & 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(a,b) = {} & G(b - 2ab - 3a^2b + 6a^3b + 7a^4b - a^6b + b^3 - 2ab^3 + 6a^2b^3 - 3a^4b^3 - b^5 \\ & - 3a^2b^5 - b^7) + g(b + 2ab - 3a^2b - 6a^3b + 7a^4b - a^6b + b^3 + 2ab^3 + 6a^2b^3 \\ & - 3a^4b^3 - b^5 - 3a^2b^5 - b^7) \\ = {} & 0, \end{aligned}$$

ahora calculamos la resultante de P_1, P_2 dejando constante a b

$$\begin{aligned} res[P_1, P_2, b](a) = {} & -65536a^9(a-1)(1+a)(2a-1)^2(1+2a)^2G^2g^2(2a(G-g) - G - g)^2 \\ & (2a^2(G-g) + a(G+g) - G + g)(g^2 + 4Gg + G^2)^2, \end{aligned}$$

obtenemos un polinomio en términos de a y lo igualamos a 0 para obtener los valores reales de a, los cuales son

$$0, \pm 1, \pm 1/2, a = \frac{G+g}{2(G-g)}, a = -\frac{G+g \mp \sqrt{9g^2 - 14Gg + 9G^2}}{4(-g+G)}$$

; ahora sustituimos estos valores en los polinomios anteriores para hallar los valores comunes de b.

- Para $a = 0$ los posible valores de b son ± 1 y $G = g$, o sea que tenemos la configuración del cuadrado con todas las vorticidades iguales.
- Si $a = -1$ obtenemos $b = \pm 1{,}210000668$ y $G = \pm\frac{1{,}210000668}{2}g - g$.

- Si $a = 1$ entonces $b = \pm 1{,}210000668$ y $g = \pm\dfrac{1{,}210000668}{2}G - G$.
- Si $a = -1/2$ entonces $b = 0, G = (9/11)g$ y $b = \pm\dfrac{1{,}388597577}{2}$, $G = \left(\dfrac{\pm 1{,}388597577}{4} - \dfrac{3}{4}\right)g$.
- Si $a = 1/2$ entonces $b = 0, G = (11/9)g$ y $b = \pm\dfrac{1{,}388597577}{2}, G = \left(-\dfrac{\pm 1{,}388597577}{4} - \dfrac{13}{4}\right)g$.
- Si $a = \dfrac{G+g}{2(g-G)}$ entonces $b = 0$ y $G = 3g, G = g/3, G = -g, G = (3 \pm 2\sqrt{2})g$, $G = \left(\dfrac{13 \pm 4\sqrt{3}}{11}\right)g$.
- Si $a = \dfrac{1}{4}\dfrac{g + G - \sqrt{9G^2 - 14Gg + 9g^2}}{g - G}$ entonces $b = -\dfrac{1}{2}$ y $G = (-2 \pm \sqrt{3})g$, $b = \dfrac{1}{2}$ y $G = (-2 \pm \sqrt{3})g$, $b = \sqrt{2/3}$ y $G = (-2 \pm \sqrt{3})g$, $b = \sqrt{1/2}$ y $G = -g$.
- Si $a = \dfrac{1}{4}\dfrac{g + G + \sqrt{9G^2 - 14Gg + 9g^2}}{g - G}$ entonces $b = -\dfrac{1}{2} yG = (-2 \pm \sqrt{3})g$, $b = \dfrac{1}{2}$ y $G = (-2 \pm \sqrt{3})g$, $b = \sqrt{2/3}$ y $G = (-2 \pm \sqrt{3})g$, $b = \sqrt{1/2}$ y $G = -g$.

Tenemos un conjunto de posibles valores solución de configuraciones de equilibrio relativo, debemos verificar cuales de estos valores son realmente equilibrios relativos:

• Para $a = 0$ y $b = 1$ con $G = g$ las ecuaciones son de la forma:

$$v_1 - v_0 = i\left(G + Gi + g\frac{1+i}{2} + g + G\frac{1-i}{2} - gi\right) = i\left(\frac{3}{2}(G+g)\right) = i3G = iw,$$
$$v_2 - v_0 = i\left(2G\frac{1-i}{2} - 2gi + 2g\right) = i((G+2g)(1-i)) = i3g(1-i) = iw(1-i),$$
$$v_3 - v_0 = i\left(-Gi - g\frac{1+i}{2} - G + g + G\frac{1-i}{2} - gi\right) = -i3G(i) = -iw(i),$$

con $w = 3G$.

Hacemos el mismo análisis para $b = -1$ así la configuración del cuadrado está en equilibrio relativo cuando las vorticidades son iguales.

• Para $a = -1/2$ y $b = 0$ con $G = 9/11g$ las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} v_1 - v_0 &= i(-G/3 + 5g) = i(52/11g) = iw, \\ v_2 - v_0 &= i(4/3G + 6g) = i(78/11g) = iw(3/2), \\ v_3 - v_0 &= i(5/3G + g) = i(26/11g) = iw(1/2), \end{aligned}$$

donde $w = 52/11$ y tenemos la configuración colineal en equilibrio relativo cuando las vorticidades de la diagonal son iguales.

• Si $a = -1/2$ entonces $b = -\dfrac{1{,}388597577}{2}$ y $G = \left(\dfrac{-1{,}388597577}{4} - \dfrac{3}{4}\right) g$ las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} v_1 - v_0 &= i(2{,}366025404g + 0{,}8660254041G) = i(1{,}415866157g) = iw, \\ v_2 - v_0 &= i((1{,}098076211 + {,}5082619886i)G + (3{,}366025404 + 1{,}896859565i)g) \\ &= i((2{,}161271755 + 1{,}339220232i)g) = iw\left(3/2 + i\frac{1{,}388597577}{2}\right), \\ v_3 - v_0 &= i((1 + 1{,}896859565i)g + (0{,}2320508071 + 1{,}202560777i)G) \\ &= i((2{,}670{,}9065181918 + 1{,}412407228i)g) = -iw\left(-1/2 - i\frac{1{,}388597577}{2}\right), \end{aligned}$$

donde $w = -1{,}415866157g$.

Hacemos lo mismo para $b = \dfrac{1{,}388597577}{2}$ y $G = \left(\dfrac{1{,}388597577}{4} - \dfrac{3}{4}\right) g$ obteniendo un paralelogramo en equilibrio relativo girando en el sentido de las manecillas del reloj.

• Para $a = 1/2$ y $b = 0$ con $G = 11/9g$ las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} v_1 - v_0 &= i(5G - g/3) = i(52/9g) = iw, \\ v_2 - v_0 &= i(4G - 2g) = i(26/9g) = iw(1/2), \\ v_3 - v_0 &= i(-G - 5/3g) = -i(26/9g) = -iw(1/2), \end{aligned}$$

donde $w = 52/9$ y tenemos la configuración colineal en equilibrio relativo cuando las vorticidades de la diagonal son iguales.

• $a = 1/2$ entonces $b = -\dfrac{1{,}388597577}{2}$ y $G = \left(-\dfrac{-1{,}388597577}{4} - \dfrac{13}{4}\right) g$ las

ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
v_1 - v_0 &= i(2{,}366025404G + 0{,}8660254041g) = i(-6{,}002192871g) = iw,\\
v_2 - v_0 &= i((1{,}366025403 + 1{,}896859565i)G + (0{,}6339745970 + 1{,}896859565i)g)\\
&= i((-3{,}331393071 - 3{,}609440371i)g) = iw\left(1/2 + i\frac{1{,}388597577}{2}\right),\\
v_3 - v_0 &= i((-1 + 1{,}896859565i)G + (-{,}2320508071 + 1{,}202560777i)g)\\
&= i((2{,}670799798 - 4{,}303739159i)g) = -iw\left(1/2 - i\frac{1{,}388597577}{2}\right),
\end{aligned}$$

donde $w = -6{,}002192871g$.

Hacemos el mismo análisis para $b = \dfrac{1{,}388597577}{2}$ y $G = \left(-\dfrac{1{,}388597577}{4} - \dfrac{13}{4}\right)g$ obteniendo paralelogramos en equilibrio relativo cuando las vorticidades son iguales y el polígono gira en el sentido de las manecillas del reloj.

• Si $a = \dfrac{(G+g)}{2(g-G)}$ y $b = 0$ con $G = (3 + 2\sqrt{2})g$ entonces $a = -\sqrt{2}/2$:

$$\begin{aligned}
v_1 - v_0 &= i((3 - 2\sqrt{2})G + (3 + 2\sqrt{2})g) = i(2(2 + \sqrt{2})g) = iw,\\
v_2 - v_0 &= i((4 - 2\sqrt{2})G + (2 + 2\sqrt{2})g) = i(6 + 4\sqrt{2})g = iw(2 + \sqrt{2}/2),\\
v_3 - v_0 &= i(-2(1 + \sqrt{2})g) = -iw(\sqrt{2}/2),
\end{aligned}$$

donde $w = 2(2 + \sqrt{2})g$. Igual procedimiento para $G = (3 - 2\sqrt{2})g$.

Si $G = (\dfrac{13 + 4\sqrt{3}}{11})g, a = \dfrac{-1}{2}(-3 + 5\sqrt{3})$ tenemos:

$$\begin{aligned}
v_1 - v_0 &= i(4028/2035 + (1664/6105)\sqrt{3})g = iw,\\
v_2 - v_0 &= i(910/407 + (700/1221)\sqrt{3})g = iw1/2(-1 + 5\sqrt{3}),\\
v_3 - v_0 &= i(-4112/2035 + (752/2035)\sqrt{3})g = iw(-3 + 5\sqrt{2}/2),
\end{aligned}$$

donde $w = (4028/2035 + (1664/6105)\sqrt{3})g$.

Igual procedimiento para $G = (13 - 4\sqrt{3})/11g$ estas son configuraciones colineales en equilibrio relativo con las vorticidades de la diagonal iguales.

Si $G = 3g, g/3$ y $-g$, $a = -1, 1$ y 0 respectivamente, pero en estos casos tendremos colisión de dos vórtices, por lo tanto no podemos tener estas configuraciones.

• Ahora para $a = \dfrac{1}{4}\dfrac{g + G - \sqrt{9G^2 - 14Gg + 9g^2}}{g - G}$ con $b = \dfrac{1}{2}$ y $G = (-2 + \sqrt{3})g$

tenemos:

$$v_1 - v_0 = i(-1{,}414213562)g = iw,$$
$$v_2 - v_0 = i(3{,}676244986 - 1{,}933234267i)g = iw(0{,}2928932190 - 0{,}7071067810i),$$
$$v_3 - v_0 = i(0{,}8383900287 - 1{,}672623376i)g = -iw(-0{,}4896680294 + 0{,}5i).$$

Para concluir analicemos $b = \sqrt{2}/2$ y $G = -g$, con esta restricción obtenemos $a = \sqrt{2}/2$ y las ecuaciones serian:

$$v_1 - v_0 = i(-1{,}414213562)g = iw,$$
$$v_2 - v_0 = i(-0{,}414213562 + i)g = iw(0{,}2928932190 - 0{,}7071067810i),$$
$$v_3 - v_0 = i(1 + i)g = -iw(0{,}707106781 + 0{,}707106781i),$$

• Si $a = \dfrac{1}{4}\dfrac{g + G + \sqrt{9G^2 - 14Gg + 9g^2}}{g - G}$ y $b = \sqrt{2}/2$ con $G = -g$ tenemos $a = -\sqrt{2}/2$:

$$v_1 - v_0 = i(1{,}414213562)g = iw,$$
$$v_2 - v_0 = i(2{,}414213562 - i)g = iw(1{,}707106781 - 0{,}7071067810i),$$
$$v_3 - v_0 = i(1 - i)g = -iw(-0{,}707106781 + 0{,}707106781i),$$

estos últimos valores forman configuraciones de paralelogramo en equilibrio relativo cuando las vorticidades de las diagonales son iguales.

En conclusión las posiciones para configuración de paralelogramo en equilibrio relativo con las vorticidades de la diagonal iguales que estábamos buscando son:

1. $a = 0$ con $b = \pm 1$ y $G = -g$,
2. $a = \pm 1/2$ con $b = 0$ y $G = (11/9)g$, $(9/11)g$,
3. $a = \pm 1/2$ con $b = \pm\dfrac{1{,}388597577}{2}$ y $G = \left(\pm\dfrac{\pm 1{,}388597577}{4} - \dfrac{13}{4}\right)g$,
4. $a = \dfrac{(G+g)}{2(g-G)}$ y $b = 0$ con $G = (3 \pm 2\sqrt{2})g$ y $G = (13 \pm 4\sqrt{3})/11g$,
5. $a = \dfrac{1}{4}\dfrac{g + G \pm \sqrt{9G^2 - 14Gg + 9g^2}}{g - G}$, con $b = \pm\dfrac{1}{2}$ y $G = (-2 \pm \sqrt{3})g$ y $b = \sqrt{1/2}$ con $G = -g$.

□

Capítulo 4

Estabilidad de equilibrios relativos en el problema de $N+1$ vórtices

En este capítulo seguiremos el método utilizado por Cabral y Schmidt [4] para estudiar la estabilidad de una configuración de polígono regular de N vórtices y la de un polígono regular de N vórtices con un vórtice central. Para la configuración de N vórtices tenemos estabilidad espectral para valores de $N \leq 7$, en el caso de $N+1$ vórtices, cuando la fuerza del vórtice central tiene un valor en cierto intervalo, la configuración es espectralmente estable. Para esto se siguen las técnicas usadas en mecánica celeste ([20]). También analizaremos para que valores de las vorticidades los equilibrios relativos formados por un polígono regular de vórtices son degenerados.

4.1. Equilibrios relativos

Sean $N+1$ vórtices con posiciones $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^{2N}$ y vorticidades Γ_k con $k = 0, \ldots, N$. En la Sección 1.1 definimos las ecuaciones de Hamilton (1.1)

$$\Gamma_k \dot{z}_k = -i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_k}.$$

Además llamaremos a $H = -\sum_{k=1, l>k}^{N} \Gamma_k \Gamma_l \ln |z_k - z_l|$ la función potencial logarítmica. Sean el vector columna
$z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)^T$, la matriz diagonal $M = diag(\Gamma_0, \Gamma_0, \ldots, \Gamma_n, \Gamma_n)$, y la matriz simpléctica

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & 0 \end{pmatrix},$$

la ecuación anterior puede ser escrita también como

$$M\dot{z} = \mathbf{J}\nabla H,$$

donde, $\nabla \equiv (\partial_{z_1}, \cdots, \partial_{z_{2_N}})$ es el operador gradiente sobre $\mathbb{R}^2$.

Sea $\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de manera que $e^{w\mathbf{J}_2 t} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$. Definamos un nuevo vector coordenado $x \in \mathbb{R}^{2N}$, el cual rota uniformemente con velocidad angular ω alrededor del origen, así que la tranformación es dada por $z = e^{w\mathbf{J}t}x$. Cambiando al sistema de coordenadas rotatorias

$$e^{\omega\mathbf{J}t}M(\omega\mathbf{J}x + \dot{x}) = e^{\omega\mathbf{J}t}\mathbf{J}\nabla H(x),$$

las ecuaciones de movimiento son

$$M\dot{x} = \mathbf{J}(-\omega Mx + \nabla H(x)). \tag{4.1}$$

Una solución estacionaria $\tilde{x}$ satisface

$$0 = -\omega M\tilde{x} + \nabla H(\tilde{x}). \tag{4.2}$$

Proposición 4.1 *Una configuración $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ es un **equilibrio relativo** del problema de $N-$vórtices si y solamente si satisface la ecuación algebraica (4.2) para algún valor de ω.*

Demostración. La $i-$ésima componente en (4.2) es dada por

$$\omega\Gamma_i\tilde{x}_i = \sum_{i\neq k}\Gamma_i\Gamma_k\frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_k)}{\|\tilde{x}_i - \tilde{x}_k\|^2},$$

lo que es igual al inciso $(c.)$ de la Proposición 1.1 cuando el centro de rotación está ubicado en el origen, así la configuración es un equilibrio relativo.

Ahora, si la configuración es un equilibrio relativo, es decir, si para todo k, i:

$$v_i - v_k = i\omega(z_i - z_k),$$

por la Proposición 1.2 tenemos que se satisface $(c.)$, pero como estamos suponiendo que el centro de rotación está fijo en el origen, tenemos que $v_i = i\omega z_i$, multiplicando ambos lados de esta ecuación por Γ_i tenemos que

$$\sum_{i\neq k}\Gamma_i\Gamma_k\frac{(x_i - x_k)}{\|x_i - x_k\|^2} = \omega\Gamma_i x_i,$$

que es la i-ésima componente de la ecuación (4.2). □

Con esto concluimos que la Proposición 4.1 puede ser tomada como una nueva definición de equilibrio relativo ya que es equivalente con la Definición 1.1 dada en el Capítulo 1.

Ahora, hacemos producto escalar de la ecuación anterior con $\tilde{x} = (1, \rho, \ldots, \rho^{N-1})$ para encontrar el valor de ω

$$\omega = \frac{\tilde{x}^T \nabla H(\tilde{x})}{\tilde{x}^T M \tilde{x}}. \tag{4.3}$$

Como

$$H(\lambda x) = -\ln \lambda \sum \Gamma_i \Gamma_k + H(x), \quad \lambda > 0,$$

derivando con respecto a λ y fijando $\lambda = 1$, obtenemos

$$x^T \cdot \nabla H(x) = -\sum_{i<k} \Gamma_i \Gamma_k,$$

la cual nos da una expresión más simple para el numerador en (4.3). Sea $S(\tilde{x})$ el momento de inercia,

$$S(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} \Gamma_k \|x_k\|^2 = \frac{1}{2} \tilde{x}^T M \tilde{x}.$$

Entonces la velocidad angular para el sistema coordenado rotando uniformemente se puede escribir como

$$\omega = \frac{-\sum_{i<k} \Gamma_i \Gamma_k}{2S(\tilde{x})}. \tag{4.4}$$

4.2. Estabilidad espectral

La linealización del sistema (4.1) alrededor del punto de equilibrio $\tilde{x}$ con $x = \tilde{x} + \xi$ es:

$$M\dot{\xi} = \mathbf{J}(-\omega M + D^2 H_0)\xi. \tag{4.5}$$

Supongamos que $\xi = e^{\lambda t} Z$ es solución de la ecuación (4.5)

$$M\lambda e^{\lambda t} Z = \mathbf{J}(-\omega M + D^2 H_0) e^{\lambda t} Z,$$

$$(\lambda \mathbf{J} - \omega \mathbf{I} + M^{-1} D^2 H_0) Z = 0.$$

Soluciones de la forma $\xi = e^{\lambda t} Z$ existen cuando

$$det[\mathbf{J}(-\omega + M^{-1} D^2 H_0) - \lambda \mathbf{I}] \equiv det[\lambda \mathbf{J} - \omega \mathbf{I} + M^{-1} D^2 H_0] = 0.$$

Llamamos a un número complejo λ un *valor propio del equilibrio relativo* $\tilde{x}$ si:

$$det[\lambda \mathbf{J} - \omega \mathbf{I} + M^{-1} D^2 H_0] = 0, \tag{4.6}$$

con

$$\begin{aligned} H(\xi) &= -\frac{\omega}{2}(\tilde{x}+\xi)^T M(\tilde{x}+\xi) + H(\tilde{x}+\xi), \\ \nabla H(0) &= -\omega M\tilde{x} + \nabla H(\tilde{x}) = 0, \\ D^2H(0) &= -\omega M + D^2H_0, \end{aligned}$$

donde D^2H_0 es la Hessiana de H en $\tilde{x}$.

Definición 4.1 *Un equilibrio relativo $\tilde{x}$ de (4.1) es* ***espectralmente estable*** *si los valores propios del polinomio característico son todos cero o imaginarios puros.*

El problema a ser considerado es un polígono regular de N vórtices iguales con un vórtice adicional en el origen. Como habíamos definido al principio ρ es la N-ésima raíz de la unidad. La posición del k-ésimo vórtice es ρ^k y su vorticidad es Γ_0. La vorticidad del vórtice en el origen es Γ_N. La función potencial (1.2) se escribe

$$H = \Gamma_0^2 H_1 + \Gamma_0\Gamma_N H_2,$$

donde las dos funciones son dadas por

$$H_1 = -\sum_{0<i<k<N} ln|x_i - x_k| = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} ln|x_i - x_{i+k}|, \tag{4.7}$$

consideramos $i+k$ (mód N) y

$$H_2 = -\sum_{k=0}^{N-1} ln|x_j - x_N|. \tag{4.8}$$

Sin perdida de generalidad podemos tomar $\Gamma_0 = 1$ y escribir $\Gamma = \Gamma_N$, con esto tenemos que la función potencial a ser considerada es $H = H_1 + \Gamma H_2$.

El momento de inercia es entonces $S(\tilde{x}) = N/2$ y la velocidad angular es

$$\omega = -\frac{N-1}{2} - \Gamma. \tag{4.9}$$

4.3. Calculo de la matriz Hessiana D^2H_1

Las raíces n-ésimas de la unidad se pueden usar para formar una matriz $2N \times 2N$ cuyo elemento $W_{j,k}$ es $\sqrt{N}^{-1/2} e^{-2\pi ijk/N}$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \rho & \dots & \rho^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^{N-1} & \dots & \rho^{(N-1)^2}. \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Las columnas de esta matriz son ortogonales y por tanto la matriz es unitaria y por consiguiente define una transformación simpléctica en $\mathbb{R}^{2N}$. Esto es débido a que se puede interpretar cada complejo ρ^k como una submatriz 2×2 con números reales como entradas que rotan los puntos del plano. Cada una de estas submatrices tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi k/N & -\sin 2\pi k/N \\ \sin 2\pi k/N & \cos 2\pi k/N \end{pmatrix},$$

con entradas reales. Además cada entrada de la primera columna y primer reglón de $\mathbf{W}$ lo podemos identificar con la submatriz identidad 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos el cambio de coordenadas $\xi = \mathbf{W}q$ ó $x = \tilde{x}+\mathbf{W}q$, donde $x = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ es el vector posición y los vórtices están localizados en $\tilde{x} = (1, \rho, \ldots, \rho^{N-1})$.

Como M es la matriz identidad, y $\mathbf{W}$ es una matriz unitaria ($\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{I}_{2N\times 2N}$) la ecuación (4.5) en las nuevas coordenadas es

$$\dot{q} = (-\omega\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{W}^T D^2H_1\mathbf{W})q,$$

para obtener la Hessiana en $\tilde{x}$ calcularemos las derivadas parciales de $H_1(x_0+\mathbf{W}q)$ en el origen $q = 0$.

Primero consideraremos una función $f(q) = \log\phi(q)$ donde ϕ es una función auxiliar que definiremos más adelante, con la variable compleja $q = a+ib$, sabemos que log es una función analítica multivaluada que se escribe como

$$\log\phi = \log|\phi| + i\arg\phi. \tag{4.11}$$

De la definición de x tenemos que:

$$x_k = \rho^k + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}\rho^{kj}q_j,$$

así

$$\begin{aligned} x_i - x_{i+k} &= \rho^i - \rho^{i+k} + \frac{1}{\sqrt{N}}(\rho^{ij} - \rho^{(i+k)j})q_j, \\ &= \rho^i\left(1 - \rho^k + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}(\rho^{i(j-1)} - \rho^{kj+i(j-1)})\right)q_j, \\ &= \rho^i\left(d_k + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}d_{kj}\rho^{i(j-1)}\right)q_j, \end{aligned}$$

con $d_k = 1 - \rho^k$. Como $|\rho| = 1$ para ϕ en (4.11) usamos

$$\phi = (x_i - x_{i+k})\rho^{-i} = d_k + \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} d_{kj}\rho^{i(j-1)}\right) q_j,$$

así que

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_j} = \frac{d_{kj}}{\sqrt{N}}\rho^{i(j-1)}. \tag{4.12}$$

Para $f = \log \phi$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q_r} &= \frac{\partial \log \phi}{\partial q_r} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial q_r}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial q_s} &= \frac{-1}{\phi^2}\frac{\partial \phi}{\partial q_r}\frac{\partial \phi}{\partial q_s}. \end{aligned}$$

Cuando $q = 0, \phi(0) = d_k$ y las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q_r} &= \frac{1}{\sqrt{N}}\rho^{i(r-1)}\frac{d_{kr}}{d_k}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial q_s} &= \frac{-1}{d_k^2}\frac{d_{kr}}{\sqrt{N}}\rho^{i(r-1)}\frac{d_{ks}}{\sqrt{N}}\rho^{i(s-1)} = \frac{-1}{N}\rho^{i(r+s-2)}\frac{d_{kr}d_{ks}}{d_k^2}. \end{aligned}$$

Sea $g = \log |\phi|$, entonces

$$\frac{\partial^2 g}{\partial a_r \partial a_s} = \frac{-1}{N}\mathrm{Re}\left(\rho^{i(r+s-2)}\frac{d_{kr}d_{ks}}{d_k^2}\right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial b_r \partial a_s} = \frac{1}{N}\mathrm{Im}\left(\rho^{i(r+s-2)}\frac{d_{kr}d_{ks}}{d_k^2}\right)$$

y

$$\frac{\partial^2 g}{\partial b_r \partial b_s} = -\frac{\partial^2 g}{\partial a_r \partial a_s}.$$

Como ρ es la N-ésima raíz de la unidad

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho^{i(r+s-2)} = \begin{cases} N & \text{para} \quad r+s \equiv 2 \pmod N, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

así que

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial a_r \partial a_s} = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial^2 g}{\partial a_r \partial a_s} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\mathrm{Re}\left(\frac{d_{kr}d_{ks}}{d_k^2}\right)$$

si $r + s \equiv 2 \pmod N$ y cero en cualquier otro caso. Además

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{d_{kr}d_{ks}}{d_k^2} = \sum_{k=1}^{N-1}\frac{(1-\rho^{kr})(1-\rho^{ks})}{(1-\rho^k)^2} = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{(1-\rho^{kr})}{(1-\rho^k)}\cdot\frac{(1-\rho^{ks})}{(1-\rho^k)}\right);$$

si $r = 0$ ó $s = 0$ la suma es cero, mientras que en los otros casos es igual a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1}(1+\rho^k+\cdots+\rho^{k(r-1)})(1+\rho^k+\cdots+\rho^{k(s-1)}) &= \sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{\tau=0}^{r-1}\rho^{k\tau}\sum_{\sigma=0}^{s-1}\rho^{k\sigma}\right),\\ &= \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{r+s-2}\varphi(m)\cdot\rho^{km},\\ &= \sum_{m=0}^{r+s-2}\sum_{k=1}^{N-1}\rho^{km}\varphi(m),\end{aligned}$$

donde $\varphi(m)$ es el número de pares (τ,σ) con $0 \le \tau \le r-1$ y $0 \le \sigma \le s-1$ tales que $\tau + \sigma = m \equiv 0 \pmod N$, como

$$\sum_{k=1}^{N-1}\rho^{km} = \begin{cases} N-1 & \text{para} \quad m \equiv 0 \pmod N,\\ -1 & \text{otro caso,}\end{cases}$$

obtenemos que

$$\sum_{m=0}^{r+s-2}\varphi(m)\sum_{k=1}^{N-1}\rho^{km} = (N-1)\sum_{\substack{m=0\\ N|m}}^{r+s-2}\varphi(m) - \sum_{\substack{m=0\\ N\nmid m}}^{r+s-2}\varphi(m)$$

$$= (N-1)\Gamma(r,s) - (rs - \Gamma(r,s)) = N\,\Gamma(r,s) - rs.$$

donde $\displaystyle\sum_{m=0}^{r+s-2}\varphi(m) = \Gamma(r,s)$. Esta igualdad se tiene solo en dos casos: uno es cuando $r = s = 1$ con $\Gamma(1,1) = 1$ y el otro es $r + s = N + 2$ cuando r o s son más grandes que 1, lo cual nos da $\Gamma(r,s) = 2$.

Así que,

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial a_1^2} = -\frac{\partial^2 H_1}{\partial b_1^2} = \frac{N-1}{2}, \tag{4.13}$$

para $r + s \equiv 2 \pmod N$ con $rs \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial a_r \partial a_s} = -\frac{\partial^2 H_1}{\partial b_r \partial b_s} = \frac{2N - rs}{2}, \tag{4.14}$$

mientras que para $r + s \neq 2 \pmod N$ las derivadas parciales de segundo orden son cero.

4.4. Estabilidad para un polígono regular.

Analicemos primero el caso de N vórtices formando un polígono regular, por lo estudiado en la sección anterior en este caso tenemos $\Gamma = 0$ y consideraremos el problema en $\mathbb{R}^{2N}$.

En esta sección estudiaremos los casos en los cuales los equilibrios relativos de la configuración de polígono regular son espectralmente estables. Para esto analizaremos la ecuación (4.14) la cual llamaremos de aquí en adelante $c_r = \frac{1}{2}(2N - rs)$, como esto lo tenemos cuando $r + s = 2 + N$

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{1}{2}(2N - r(2 + N - r)) = \frac{1}{2}(r^2 - rN - 2r + 2N) \\ &= -\frac{1}{2}(r-2)(N-r), \end{aligned} \tag{4.15}$$

para $r = 2, 3, \ldots$, para $r = 1$ tenemos el valor de (4.13), así que (4.15) se cumple en todos los casos.

N	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
3	1	0					
4	1.5	0	-0.5				
5	2	0	-1	-1			
6	2.5	0	-1.5	-2	-1.5		
7	3	0	-2	-3	-3	-2	
8	3.5	0	-2.5	-4	-4.5	-4	-2.5
9	4	0	-3	-5	-6	-6	-5
10	4.5	0	-3.5	-6	-7.5	-8	-7.5
11	5	0	-4	-7	-9	-10	-10
12	5.5	0	-4.5	-8	-10.5	-12	-12.5

Cuadro 4.1: Valores de c_r para N vórtices

Así que la matriz Hessiana es

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial a_r \partial a_s}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz del determinante (4.6) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega\mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\omega\mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & -\mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\mathbf{I} + \mathbf{C} & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & -\omega\mathbf{I} - \mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

donde la matriz identidad $\mathbf{I}$ es $N \times N$. El determinante de la matriz (4.16) lo podemos calcular por bloques para los distintos valores de r.

Bloque $r = 0$ y $r = 2$: En estos casos ya vimos que la Hessiana se anula así que el determinante es

$$\begin{vmatrix} -\omega & \lambda \\ -\lambda & -\omega \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

por lo tanto las soluciones son las triviales, $\lambda = \pm i\omega$.

Bloque $r = 1$: Aquí tenemos que la Hessiana es igual a c_1

$$\begin{vmatrix} -\omega + c_1 & \lambda \\ -\lambda & -\omega - c_1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 - c_1^2 = \lambda^2 = 0.$$

Bloque $r > 2$, $s = N + 2 - r$, y $c_r = c_s$:

$$\begin{vmatrix} -\omega & c_r & \lambda & 0 \\ c_r & -\omega & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\omega & -c_r \\ 0 & -\lambda & -c_r & -\omega \end{vmatrix} = -\omega \begin{vmatrix} -\omega & 0 & \lambda \\ 0 & -\omega & -c_r \\ -\lambda & -c_r & -\omega \end{vmatrix} - c_r \begin{vmatrix} c_r & 0 & \lambda \\ -\lambda & -\omega & -c_r \\ 0 & -c_r & -\omega \end{vmatrix}$$
$$+ \lambda \begin{vmatrix} c_r & -\omega & \lambda \\ -\lambda & 0 & -c_r \\ 0 & -\lambda & -\omega \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda(\omega^2 - c_r^2) + (\omega^2 - c_r)^2$$

$$= (\lambda^2 + \omega^2 - c_r^2)^2 = 0,$$

hay dos raíces dobles $\lambda = \pm\sqrt{c_r^2 - \omega^2}$.

Bloque $r = s = \frac{N+2}{2}$. Lo tenemos solo cuando N es par

$$\begin{vmatrix} -\omega + c_r & \lambda \\ -\lambda & -\omega - c_1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 - c_r^2 = \lambda^2 + \omega^2 - c_r^2 = 0,$$

hay dos raíces $\lambda = \pm\sqrt{c_r^2 - \omega^2}$.

Con esto ya tenemos calculadas todas las raíces del sistema (4.6), donde las raíces para $r = 0, 1$ y 2 no tienen problema para la estabilidad espectral pues son ceros o imaginarios puros, los valores propios que se deben analizar son para $r > 2$.

Como $\omega^2 = c_1^2$, del Cuadro 4.1 podemos calcular el valor de las diferentes raíces, observando que para $3 \leq N \leq 6$ las únicas raíces cero las tenemos para el valor de $r = 1$ las cuales son dados por la configuración del sistema rotando y de los escalamientos hechos anteriormente, las demás son raíces imaginarias.

Para $N = 7$ tenemos 6 raíces cero, dos de $r = 1$ y cuatro mas de $r = 4$ y 5, el hecho de romper el esquema obteniendo cuatro ceros más hace que el caso del heptágono sea especial (ver [4] y [**?**]).

Para $N \geq 8$ vemos que las únicas raíces cero se obtienen del bloque $r = 1$, las imaginarias se tienen de los bloques $r = 0, 2, 3$ y $r = N - 1$ para estos valores de N vemos que hay valores de c_r mayores a c_1, por lo cual tenemos raíces positivas y negativas, esto sucede para $4 \leq r \leq N - 2$, por lo tanto para $N \geq 8$ tenemos $N-5$ raíces positivas y negativas. El número de raíces esta calculado en el Cuadro 4.2.

N	$Negativas$	$Positivas$	$Cero$	$Imaginarias$
3	0	0	2	4
4	0	0	2	6
5	0	0	2	8
6	0	0	2	10
7	0	0	6	8
≥ 8	N-5	N-5	2	8

Cuadro 4.2: Número de raíces para la estabilidad polinomial de un polígono con N vórtices

Podemos concluir los resultados de esta sección con el siguiente Teorema:

Teorema 4.1 *Para $N \leq 7$ los equilibrios relativos formados por un polígono regular de vórtices son espectralmente estables y para $N > 8$ los equilibrios relativos son inestables ya que los valores propios toman al menos un valor real positivo, lo que implica que las soluciones se escapan del sistema y tendríamos una configuración inestable.*

4.5. Estabilidad de un polígono regular con un vórtice en el centro.

Para esta sección usaremos la función $H = H_1 + \Gamma H_2$, es decir utilizaremos los resultados de la sección anterior más la contribución del potencial
$H_2 = -\sum_{j=0}^{N-1} \ln |x_k - x_N|$. Para esto debemos calcular las derivadas parciales de $f(q) = \log \phi(q)$ en $q = 0$, donde q es la variable compleja $q = a + ib$.

De la definición de $x = (\tilde{x} + Wq)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} x_k - x_N &= \rho^k - q_N + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{kj} q_j \\ &= \rho^k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{k(j-1)} q_j - \rho^{-k} q_N \right), \end{aligned}$$

con la nueva coordenada $x_N = q_N$.

Sea $\phi = (x_k - x_N)\rho^{-k} = 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{k(j-1)} q_j - \rho^{-k} q_N$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_r} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \rho^{k(r-1)}, & 0 \leq r \leq N-1, \\ -\rho^{-k}, & r = N, \end{cases}$$

Para $f = \log \phi$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q_r} &= \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial q_r}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial q_s} &= \frac{-1}{\phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial q_r} \frac{\partial \phi}{\partial q_s}. \end{aligned}$$

Cuando $q = 0, \phi(0) = 1$ así que las derivadas parciales de primer y segundo orden son

$$\frac{\partial f}{\partial q_r} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \rho^{k(r-1)}, & 0 \leq r \leq N-1, \\ -\rho^{-k}, & r = N, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_r \partial q_s} = \begin{cases} -\frac{1}{N} \rho^{k(r+s-2)}, & 0 \leq r, s \leq N-1, \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \rho^{k(r-2)}, & 0 \leq r \leq N-1,\ s = N, \\ -\rho^{-2k}, & r = s = N. \end{cases}$$

Sumando sobre k tenemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial a_r \partial a_s} = \begin{cases} 1, & r + s = 2 \pmod N, \\ -\sqrt{N}, & r = 2 \,\text{y}\, s = N \quad \text{ó} \quad r = N \,\text{y}\, s = 2, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

La matriz del determinante dado en (4.6) tiene nuevamente la forma dada en (4.16) con la matriz identidad $\mathbf{I}, (N+1) \times (N+1)$ y $\omega = -c_1 - \Gamma$, además C es ahora de la forma

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \Gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Gamma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\Gamma\sqrt{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_3 + \Gamma & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \Gamma & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma\sqrt{N} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el artículo de Cabral y Schmidt ([4]) hay un error ya que toda matriz Hessiana es simétrica ellos obviaron en la entrada a_{N2} el valor Γ, el cual nos cambia el valor del valor propio no trivial para el caso $r = 0, 2, N$.

Igual que en la sección anterior podemos calcular el determinante de la matriz (4.16) por bloques para los distintos valores que puede tomar r.

- *Para* $r = 0, 2$ y N obtenemos el subdeterminante

$$\begin{vmatrix} -\omega & \Gamma & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \Gamma & -\omega & -\Gamma\sqrt{N} & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\Gamma\sqrt{N} & -\omega & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & -\omega & -\Gamma & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\Gamma & -\omega & \Gamma\sqrt{N} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & \Gamma\sqrt{N} & -\omega \end{vmatrix} = 0,$$

que lo podemos ver como matrices por bloques

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \lambda\mathbf{I} \\ -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\lambda^2\mathbf{I} + \mathbf{AB}| = \begin{vmatrix} \lambda^2+\omega^2-\Gamma^2 & 0 & \Gamma^2\sqrt{N} \\ 0 & \lambda^2+\omega^2-\Gamma^2-\Gamma^2N & 0 \\ \Gamma^2N & 0 & \lambda^2+\omega^2-\Gamma^2N \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda^2+\omega^2-\Gamma^2)(\lambda^2+\omega^2-\Gamma^2N)(\lambda^2+\omega^2-\Gamma^2-\Gamma^2N) \\ &\quad - \Gamma^4N(\lambda^2+\omega^2-\Gamma^2-\Gamma^2N) \\ &= (\lambda^2+\omega^2)(\lambda^2+\omega^2-\Gamma^2-\Gamma^2N)^2 = 0, \end{aligned}$$

las soluciones son $\lambda = \pm i\omega,\ \lambda = \pm\sqrt{\Gamma^2N - \Gamma(N-1) - \left(\frac{N-1}{2}\right)^2}$ de multiplicidad algebraica 2. Un cambio de estabilidad ocurre cuando

$$\Gamma = c_1\left(\frac{1+\sqrt{N+1}}{N}\right), \tag{4.17}$$

si $\Gamma > c_1\left(\frac{1+\sqrt{N+1}}{N}\right)$ la configuración se vuelve inestable.

- *Para* $r = 1$ tenemos un determinante de la forma

$$\begin{vmatrix} -2\omega & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

tenemos valores propios iguales 0 dobles.

- *Para* $r > 2$ con $\omega = -c_1 - \Gamma$ nos da la submatriz 4×4

$$\begin{pmatrix} c_1+\Gamma & c_r+\Gamma & \lambda & 0 \\ c_r+\Gamma & c_1+\Gamma & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & c_1+\Gamma & -c_r-\Gamma \\ 0 & -\lambda & -c_r-\Gamma & c_1+\Gamma \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Para calcular el determinante utilizamos la transformación adicional

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_r \\ a_s \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_r \\ b_s \end{pmatrix},$$

la cual es simpléctica (ver Apéndice A.3), ya que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Así las matriz (4.5) nos queda de la forma

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_r & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & c_1 + c_r + 2\Gamma & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & c_1 + c_r + 2\Gamma & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & c_1 - c_r \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $(\lambda^2 + (c_1 - c_r)(c_1 + c_r + 2\Gamma))^2 = 0$.

Así que $\lambda = \pm\sqrt{(c_r - c_1)(2\Gamma + c_r + c_1)}$ con multiplicidad algebraica 2. Tenemos un cambio de estabilidad cuando

$$\Gamma(r, N) = -\frac{c_r + c_1}{2}, \tag{4.19}$$

si $\Gamma < -\dfrac{c_r + c_1}{2}$ la configuración se vuelve inestable.

- Por último consideramos el *caso N par y* $r = s = (N + 2)/2$, tenemos un subdeterminante 2×2

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_r + 2\Gamma & \lambda \\ -\lambda & c_1 - c_r \end{vmatrix} = 0$$

los valores propios son los mismos que en el caso anterior solo que ahora son simples.

Con el análisis hecho anteriormente podemos concluir que un cambio en la estabilidad de la configuración ocurre en los valores de Γ dados en (4.17) y (4.19), para $r = 2$ y $2 < r \leq (N + 2)/2$ respectivamente, esto es

$$\Gamma(r, N) = \begin{cases} -\dfrac{c_r + c_1}{2} & \text{para} \quad 2 < r \leq (N+2)/2, \ N \text{ par} \\ & \qquad\quad 2 < r \leq (N+1)/2, \ N \text{ impar} \\ c_1\left(\dfrac{1 + \sqrt{N+1}}{N}\right) & \text{para} \quad r = 2. \end{cases} \tag{4.20}$$

Si el sistema tiene velocidad angular 0 tenemos que el valor de Γ es $-c_1$, estos valores junto con los valores de $\Gamma(r, N)$ se muestran en el Cuadro 4.3. A partir de este Cuadro vemos que el orden de los valores de $\Gamma(r, N)$ es

N	$\Gamma_{\omega=0}$	$\Gamma(3,N)$	$\Gamma(4,N)$	$\Gamma(5,N)$	$\Gamma(6,N)$	$\Gamma(7,N)$	$\Gamma(2,N)$
3	-1						1
4	-1.5	-0.5					1.2135...
5	-2	-0.5					1.3798...
6	-2.5	-0.5	-0.25				1.5191...
7	-3	-0.5	0				1.6408...
8	-3.5	-0.5	0.25	0.5			1.75
9	-4	-0.5	0.5	1			1.8499...
10	-4.5	-0.5	0.75	1.5	1.75		1.9425...
11	-5	-0.5	1	2	2.5		2.5291...
12	-5.5	-0.5	1.25	2.5	3.25	3.5	3.5509...

Cuadro 4.3: Valores críticos de $\Gamma(r,N)$ para un polígono con un vórtice en el centro.

$$-0{,}5 = \Gamma(3,N) < \Gamma(4,N) < \ldots < \Gamma\left(\left[\frac{N+2}{2}\right], N\right) < \Gamma(2,N) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{N+1}}{N}\right).$$

La ecuación (4.20) nos muestra que la configuración es espectralmente estable cuando Γ es mayor que el valor de $\Gamma(r,N)$ (según el N que se tome) para $r>2$, ya que $c_r - c_1 < 0$. Por otro lado (4.18) muestra que no hay estabilidad cuando $\Gamma > \Gamma(2,N)$. En conclusión tenemos que para la configuración de $N+1$ vórtices, la estabilidad espectral ocurre únicamente para valores del vórtice central en el intervalo $\Gamma([(N+2)/2],N) \leq \Gamma \leq \Gamma(2,N)$, donde $\Gamma([(N+2)/2],N) = -\dfrac{c_{N+2/2}+c_1}{2}$ y $\Gamma(2,N) = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{N+1}}{N}\right)$.

Resumiendo, tenemos que para la configuración de N+1 vórtices, los valores propios de la ecuación

$$M\dot{\xi} = J(-\omega M + D^2U_0)\xi$$

son:

- $\lambda = 0$ para $r=1$,
- $\lambda = \pm i\omega$ para $r=0$,
- $\lambda = \pm\sqrt{\Gamma^2 N - \Gamma(N-1) - \left(\dfrac{N-1}{2}\right)^2}$ con multiplicidad algebraica 2 para $r=2$,
- $\lambda = \pm\sqrt{(c_r-c_1)(2\Gamma+c_r+c_1)}$ con multiplicidad algebraica 2 para $r>2$ y N impar y por último tenemos
- $\lambda = \pm\sqrt{(c_r-c_1)(2\Gamma+c_r+c_1)}$ para N par y $r=s=(N+2)/2$.

Del Cuadro 4.3 podemos calcular el valor de las diferentes raíces, observando que las raíces cero las tenemos para el caso $r = 1$ y $r \geq 2$ cuando $\Gamma = \Gamma([(N+2)/2], N)$ ó $\Gamma = \Gamma([(N+2)/2], N)$ y $\Gamma = \Gamma(2, N)$, las demás son raíces imaginarias. El número de raíces esta calculado en el Cuadro 4.4.

$N+1$	Cero	Imaginarias
4	4	4
5	4	6
6	4	8
7	4	10
8	4	12
9	4	14
10	4	16
11	4	18
12	4	20
13	4	22

Cuadro 4.4: Número de raíces para la estabilidad espectral de un polígono con $N+1$ vórtices.

Tomando casos particulares para N podemos comparar los valores que puede tomar el vórtice central Γ, con los resultados obtenidos por Cabral y Schmidt ([4]) con los que obtuvimos en este trabajo.

Por ejemplo para **N=4** los valores que puede tomar r son $0, 1, 2, 3$. Para $r = 0$ tenemos $\lambda = \pm\omega i$.
Para $r = 1$ tenemos $\lambda = 0$ doble.
Para $r = 2$ tenemos $\Gamma = \Gamma(2, 4)$, entonces $\lambda = 0$.
Para $\Gamma < \Gamma(2, 4)$ tomemos por ejemplo $\Gamma = 1$, entonces $\lambda = \pm 5/4i$.
Para $r = 3$ tenemos $\Gamma = \Gamma(3, 4)$, entonces $\lambda = 0$.
Para $\Gamma > \Gamma(3, 4)$, tomemos por ejemplo $\Gamma = -0{,}25$, entonces $\lambda = \pm i$.

Si tomamos por ejemplo $\Gamma = 2$, tenemos que $\lambda = \pm\sqrt{7{,}5}$, es decir ya no tenemos estabilidad pero en el resultado obtenido en [5] para este valor de Γ la configuración de los $N+1$ vórtices los autores mencionan que es espectralmente estable.

Para **N=5** los valores que puede tomar r son 0,1,2,3. Para $r = 0$ tenemos $\lambda = \pm\omega i$.
Para $r = 1$ tenemos $\lambda = 0$ doble.
Para $r = 2$ tenemos $\Gamma = \Gamma(2, 5)$, entonces $\lambda = 0$.
Para $\Gamma < \Gamma(2, 5)$ tomemos por ejemplo $\Gamma = 1$, entonces $\lambda = \pm 3i$.
Para $r = 3$ tenemos $\Gamma = \Gamma(3, 4)$, entonces $\lambda = 0$.
Para $\Gamma > \Gamma(3, 4)$, tomemos por ejemplo $\Gamma = -0{,}25$, entonces $\lambda = \pm 3/2i$.

Si tomamos por ejemplo $\Gamma = 3$, tenemos que $\lambda = \pm\sqrt{29}$, es decir ya no tenemos estabilidad pero en el resultado obtenido en [5] para este valor de Γ la configuración de los $N+1$ vórtices los autores mencionan que es espectralmente estable.

En conclusión el número de raíces cero e imaginarias es el mismo en ambos casos, lo único que cambia es el rango de valores que puede tomar Γ ya que nuestro intervalo de valores para Γ es más pequeño que el dado en [4].

4.6. Equilibrios relativos degenerados

En esta sección estudiaremos los valores críticos de la matriz Hessiana de la función potencial para los cuales esta matriz es singular. Comenzaremos definiendo que es un equilibrio relativo degenerado.

Definición 4.2 *Un equilibrio relativo es llamado* ***degenerado*** *si la matriz Hessiana es singular al evaluarla en los puntos críticos.*

Dejando fijo el centro de vorticidades en el origen en las coordenadas descritas en el Capítulo 4, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Gamma_k x_k = \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma_k \left(\rho^k + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{jk} q_j \right) = q_0 + \frac{\Gamma}{\sqrt{N}} q_N = 0,$$

así que

$$q_0 = -\frac{\Gamma}{\sqrt{N}} q_N.$$

Para remover la rotación necesitamos que q_1 sea real, es decir, que $b_1 = 0$. Dejando fijo el momento de inercia tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \|q_k\|^2 + \frac{\Gamma}{2} \|q_N\|^2, \\ &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{N} a_1 + a_1^2 + \sum_{k=2}^{N-1} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{\Gamma}{N} (N+\Gamma)(a_N^2 + b_N^2) \right), \end{aligned}$$

queremos ver si a_1 se puede expresar como una función de las variables restantes en una vecindad del $(0_{2N-1}, 0) \in \mathbb{R}^{2N}$.

Veamos si se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita:

1. $S : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ tal que
   $S(0, 0, \ldots, 0) = 2\sqrt{N} a_1 + a_1^2 + \sum_{k=2}^{N-1} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{\Gamma}{N}(N+\Gamma)(a_N^2 + a_N^2) = 0.$
2. $DS(0, 0, \ldots, 0) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{N} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times (2N-1)}$

3. Como $\dfrac{\partial S}{\partial a_1}$ en $(0_{2N-1}, 0)$ es igual a $2\sqrt{N} \neq 0$ podemos aplicar el teorema de la función implícita (ver Apéndice A.5) para a_1, como función de las variables restantes.

Sea $a_1 = a_1(a_2, a_3, \ldots, a_N, b_2, b_3, \ldots, b_N)$ dicha solución y $\tilde{H}$ la restricción de H,

$$\tilde{H}(a_2, \ldots, b_N) = H\left(-\frac{\Gamma a_N}{\sqrt{N}}, a_1, a_2, \ldots, a_N, -\frac{\Gamma b_N}{\sqrt{N}}, 0, b_2, \ldots, c_N\right).$$

Palmore (1976) mostró que la Hessiana, $D^2\tilde{H}(x_0)$, tiene la forma

$$D^2\tilde{H} = \begin{pmatrix} B+C & 0 \\ 0 & B-C \end{pmatrix},$$

donde B y C son matrices $(N+1)$x$(N+1)$, B es la matriz diagonal estándar, y C tiene entradas distintas de cero solo sobre la diagonal que corre desde el nordeste.

$$B = \begin{pmatrix} b_2 & & & \\ & b_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_N \end{pmatrix}, \qquad C = C^T = \begin{pmatrix} & & & c_N \\ & & \iddots & \\ & c_3 & & \\ c_2 & & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} b_r =& \frac{N-1+2\Gamma}{2}, && r = 2, 3, \ldots, N-1, \\ b_N =& \frac{\Gamma}{2}\left(\frac{\Gamma+N}{N}\right)(2\Gamma+N-1), \\ c_r =& \frac{1}{2}((r-2)(N-r)-2\Gamma), && r = 3, 4, \ldots, N-1, \\ c_r =& -\frac{\Gamma}{\sqrt{N}}(N+\Gamma), && r = 2, N, \end{aligned}$$

así

$$B+C = \begin{pmatrix} c_1+\Gamma & 0 & \ldots & 0 & -\frac{\Gamma}{\sqrt{N}}(N+\Gamma) \\ 0 & c_1+\Gamma & \ldots & c_3+\Gamma & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_3+\Gamma & \ldots & c_1+\Gamma & 0 \\ -\frac{\Gamma}{\sqrt{N}}(N+\Gamma) & 0 & \ldots & 0 & \frac{\Gamma}{N}(c_1+\Gamma)(N+\Gamma) \end{pmatrix}.$$

Como $B-C$ tiene la misma forma, es suficiente con estudiar cuando la matriz anterior es singular y con esto la Hessiana de $\tilde{H}$. El determinante se descompone en subdeterminantes 2 x 2 más un término simple en el caso de las dos diagonales de B y C cuando N es par. Sea $D(r, N)$ ($D^-(r, N)$ respectivamente), $2 \leq r \leq$

$N/2$ la submatriz de $B + C$ (B-C respectivamente) formada por las entradas (r, r), $(r, N + 2 - r)$, $(N + 2 - r, r)$ y $(N + 2 - r, N + 2 - r)$. En el caso de N par las dos diagonales tienen una única entrada en la posición $((N+2)/2, (N+2)/2)$. Estos subdeterminantes son cero exactamente en los valores de Γ dados en (4.20) donde la estabilidad cambia, estos valores se muestran en el Cuadro 4.5 denotados por $d(r, N)$.

N	$d(3,N)$	$d(4,N)$	$d(5,N)$	$d(6,N)$	$d(7,N)$
3					
4	2				
5	12				
6	16	1			
7	20	0			
8	24	-15	-2		
9	28	-36	-8		
10	32	-63	-144	-7	
11	36	-96	-224	-300	
12	40	-135	-320	-455	-14

Cuadro 4.5: Subdeterminantes.

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.2 *La Hessiana de la función potencial reducida $\tilde{H}$ es degenerada cuando la estabilidad espectral del polígono regular con un vórtice en el centro cambia, esto es, para $\Gamma = \Gamma(r, N)$ con $2 \leq r \leq (N + 2)/2$. El orden de estos valores críticos es*

$$-0{,}5 = \Gamma(3, N) < \Gamma(4, N) < \ldots < \Gamma\left(\left[\frac{N+2}{2}\right], N\right) < \Gamma(2, N) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{N+1}}{N}\right).$$

A pesar de las similitudes entre el potencial Newtoniano y el logarítmico, los resultados concernientes a estabilidad y bifurcación de una configuración de polígono regular son diferentes. En el caso Newtoniano el cambio de estabilidad y la bifurcación ocurren para diferentes valores de la masa central. Para los vórtices rotando, este fenómeno sucede para el mismo valor del vórtice central, lo que hace el problema aún más degenerado.

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo analizamos las soluciones más simples de describir para problemas de vórtices puntuales que son las que corresponden a configuraciones de vórtices que puedan moverse sin cambiar de forma, es decir las soluciones de *equilibrio relativo*. En este caso el movimiento del sistema de vórtices consiste de una rotación uniforme respecto del centro de vorticidad o de una traslación uniforme.

Los equilibrios relativos estudiados aquí son aquellos donde la configuración de N vórtices forma un polígono regular de N lados. Si todas las vorticidades son iguales y colocamos los vórtices en tal configuración, la solución correspondiente es de equilibrio relativo en rotación uniforme. La recíproca de este resultado, es válida sólo si $N \geq 4$.

En el caso $N = 2$ todas las soluciones son de equilibrio relativo. Si $N = 3$ las únicas soluciones de equilibrio relativo son la colineal y la de triángulo equilátero.

En el caso de dos polígonos regulares concéntricos con la misma vorticidad para los vértices de cada uno de ellos encontramos equilibrios relativos con o sin simetrías, dependiendo del ángulo de desfase entre cada polígono: 0, si la configuración es simétrica y π/N si la configuración es no-simétrica. El número exacto de equilibrios relativos depende del signo de las vorticidades y de si la configuración es simétrica o no.

Si tomamos 4 vórtices distintos en configuración de paralelogramo formando un equilibrio relativo, las vorticidades localizadas en los vértices opuestos son iguales si la suma de las vorticidades es distinta de cero, y son iguales en valor absoluto si la suma de las vorticidades es cero.

Acerca de la estabilidad de los equilibrios relativos vemos que en el caso en que la configuración de N vórtices forma un polígono regular los equilibrios relativos son espectralmente estables para valores de $N \leq 7$ y si a la configuración anterior le ubicamos además un vórtice en el centro del polígono, la estabilidad espectral de los equilibrios relativos depende del valor del vórtice central; es más, específicamente los equilibrios relativos son espectralmente estables si la vorticidad del vórtice central toma valores en el intervalo $[\Gamma(N + 2/2, N), \Gamma(2, N)]$. Finalmente vimos que los equilibrios relativos son degenerados ya que la matriz Hessiana de

la función potencial H es singular al evaluarla en los valores del vórtice central donde la estabilidad espectral cambia.

Como futuros trabajos podríamos generalizar los resultados obtenidos para la configuración de dos polígonos regulares concéntricos y ver qué sucede en el caso de tres polígonos regulares concéntricos.

También podemos estudiar si existe algún tipo de estabilidad más fuerte para la configuración de (N+1) vórtices y finalmente estudiar si existe una línea de simetría en el problema de 4 vórtices convexo.

Finalmente nos gustaría estudiar equilibrios relativos poligonales en espacios de curvatura constante.

Apéndice A

Análisis vectorial

Definición A.1 *(**Coordenadas cartesianas**.) El plano cartesiano es un sistema de referencia respecto ya sea a un solo eje (línea recta), respecto a dos ejes (un plano) o respecto a tres ejes (en el espacio), perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas. En el plano, las coordenadas cartesianas **x** y **y** se denominan **abscisa** y **ordenada** respectivamente.*

Definición A.2 *Supongamos que E es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Una **k-forma** en E es una función ω, representada simbólicamente por la suma*

$$\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

A.1. Campos Vectoriales

Sea $\mathbf{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ un mapeo continuo de un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. A $\mathbf{v}$ se le llama algunas veces campo vectorial, especialmente en Física, porque a cada punto de E, $\mathbf{v}$ asocia un vector. Con cada $\mathbf{v}$ tal, se asocia una 1-forma

$$\lambda_{\mathbf{v}} = v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz,$$

y una 2-forma

$$\omega_{\mathbf{v}} = v_1\, dy \wedge dz + v_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy.$$

Supongamos ahora que $\mathbf{v}$ es un campo vectorial en E, de clase $\mathcal{C}'$. Su **rotacional** $\nabla \times \mathbf{v}$ es el campo vectorial definido en E por

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y)e_1 + (\partial_z v_x - \partial_x v_z)e_2 + (\partial_x v_y - \partial_y v_x)e_3,$$

y su **divergencia** es la función real $\nabla \cdot \mathbf{v}$ definida en E por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z.$$

A continuación se tienen algunas relaciones entre el gradiente, el rotacional y la divergencia.

Teorema A.1 *Supongamos que E es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{C}''(E)$ y $\boldsymbol{v}$ es un campo vectorial en E, de clase $\mathcal{C}''$.*

(a) Si $\Gamma = \nabla u$, entonces $\nabla \times \Gamma = 0$.

(b) Si $\Gamma = \nabla \times \boldsymbol{v}$, entonces $\nabla \cdot \Gamma = 0$.

Demostración. *(a)* Como las derivadas parciales mixtas son continuas en $\mathbb{R}^3$ tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times \Gamma &= \nabla \times \nabla u = \nabla \times \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Gamma &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ &= \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

□

A.2. El teorema de la divergencia

Teorema A.2 *Si Γ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}'$ en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^3$, y si V es un subconjunto cerrado de E con frontera orientada positivamente S, entonces*

$$\int_V (\nabla \cdot \Gamma)\, dV = \int_S (\Gamma \cdot n)\, dS.$$

A.3. Formas Simplécticas

Definición A.3 *Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una forma **simpléctica** en V es una función bilineal $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ que*

- *Es **antisimétrica** o sea $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$.*

- *No es degenerada o sea que*

$$\omega(v, w) = 0, \quad \textit{para todo } \omega \in V \rightarrow v = 0.$$

Definición A.4 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica no degenerada. A la pareja (V, ω) se le llama un espacio vectorial simpléctico sobre $\mathbb{R}$.*

Definición A.5 *La 2-forma diferencial*

$$\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dq_i,$$

se denomina la forma simpléctica canónica del espacio vectorial V.

Visto como un producto interno, la forma simpléctica canónica se puede escribir de la siguiente manera

$$\omega_0(v, w) = \langle v, \mathbf{J}w \rangle, \qquad v, w \in V,$$

donde $\mathbf{J}$ es la matriz simpléctica canónica de dimensión $2n$ definida por

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Definición A.6 *Sea $\Xi : O \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : (t, z) \rightarrow \zeta = \Xi(t, z)$ una función suave donde O es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^{2n+1}$; Ξ es llamada una* ***transformación simpléctica*** *si el Jacobiano de Ξ con respecto a z, $D_2\Xi(t, z) = \partial\Xi/\partial z$, es una matriz simpléctica en todo punto de $(t, z) \in O$.*

Es decir, Ξ es simpléctica si y solamente si

$$\frac{\partial \Xi}{\partial z} \boldsymbol{J} \frac{\partial \Xi^T}{\partial z} = \boldsymbol{J}.$$

A.4. Función de Green y Ecuación de Poisson

El termino función de Green se usa para designar a un operador lineal K que tiene forma de integral, siendo el núcleo de este operador integral la función de Green propiamente dicha. Para explicar que es la función de Green consideremos un operador diferencial lineal L que actúa sobre cierto espacio de funciones definidas sobre una variedad diferenciable M, y pongamos que pretendemos resolver la ecuación diferencial:

$$L[u(x)] = f(x), x \in C \subset M. \tag{A.1}$$

La idea del método basado en la función de Green es encontrar una función de dos variables $G(x, z)$ continua y diferenciable en el sentido de la teoría de distribuciones que cumpla:

$$L[G(x, z)] = \delta(x - z). \tag{A.2}$$

Donde $\delta(x - z)$ es la distribución delta de Dirac. Si se puede hallar una función G que cumpla la ecuación (A.2) entonces la solución de la ecuación (A.1) sea cual sea la función f puede escribirse en la forma:

$$u(x) = K[f(x)] := \int G(x, z) f(z)\, dz.$$

La solución así calculada es solución de la ecuación (A.1) ya que:

$$L[u(x)] = \int L[G(x, z)] f(z)\, dz = \int \delta(x - z) f(z)\, dz = f(x).$$

Ecuación de Poisson

En matemática y física, la ecuación de Poisson es una ecuación en derivadas parciales. Se define como:

$$\Delta\psi = (\nabla \cdot \nabla)\psi = \nabla^2\psi = f$$

donde Δ es el operador lapaciano, y f y ψ son funciones reales o complejas. En un sistema de coordenadas cartesianas bidimensional toma la forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x, y) = f(x, y).$$

Si $f = 0$, la ecuación se convierte en la **ecuación de Laplace**

$$\Delta\psi = 0.$$

El problema de Poisson es el problema de encontrar una función definida sobre el dominio C que satisfaga:

$$\begin{cases} \nabla^2\psi(x) = -\omega(x) & x \in C \subset \mathbb{R}^n \\ \psi(z) = 0 & z \in \partial C. \end{cases}$$

Este tipo de problema puede ser resuelto de manera sencilla, mediante el método de la **función de Green**, para $n \geq 2$:

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(z)}{\|x - z\|^{n-2}}\, dz.$$

A.5. Teorema de la función implícita

Teorema A.3 *Sea f un mapeo $\mathcal{C}'$ de un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbb{R}^m$, tal que $f(a,b) = 0$ para algún punto $(a,b) \in E$. Sea $A = f'(a,b)$ y supongamos que A_x es invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y $W \subset \mathbb{R}^m$, con $(a,b) \in U$ y $b \in W$, que tienen la siguiente propiedad:*

A cada $\mathbf{y} \in W$ le corresponde un $\mathbf{x}$ único, tal que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \quad y \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Si esta $\mathbf{x}$ se define como $g(\mathbf{y})$, entonces g es un mapeo $\mathcal{C}'$ de W en $\mathbb{R}^n$, $g(b) = a$,

$$f(g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0 \qquad (\mathbf{y} \in W), \tag{A.3}$$

y

$$g'(b) = -(A_x)^{-1} A_y. \tag{A.4}$$

Apéndice B

Matrices circulantes

Dado un vector N-dimensional

$$\mathrm{c} = [c_0, c_1, \cdots, c_{N-1}],$$

la matriz circulante asociada al vector tiene la forma

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \dots & c_{N-3} \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores λ_k y los vectores propios $\mathbf{v}_k$ de $\mathbf{C}, k = 0, \cdots, N-1$, son las soluciones de

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

o, de forma equivalente, de las N ecuaciones a diferencias

$$\sum_{n=0}^{m-1} C_{N-m+n} v_n + \sum_{n=m}^{N-1} c_{n-m} v_n = \lambda v_m,$$

donde $m = 0, \cdots, N-1$, y v_m es la m-ésima componente del vector $\mathbf{v}$. Cambiando el índice de la sumatoria, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N-1-m} c_n v_{n+m} + \sum_{n=N-m}^{N-1} c_n v_{n-(N-m)} == \lambda_m. \tag{B.1}$$

La ecuación a diferencia (B.1) lineal y con coeficientes constantes tiene una solución de la forma $y_i = \rho^i$. Sustituyendo en (B.1) y cancelando ρ^m resulta

$$\sum_{n=0}^{N-1-m} c_n \rho^n + \rho^{-N} \sum_{n=N-m}^{N-1} c_n \rho^n = \lambda. \tag{B.2}$$

Así el autovalor λ se expresa como

$$\lambda = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \rho^n.$$

El vector propio asociado es

$$\mathrm{v} = (1, \rho, \cdots, \rho^{N-1}).$$

Bibliografía

[1] Aref, H., *Point vortex dynamics: A classical mathematics playground*, J. Math. Phys. **48**, (2007).

[2] Aref, H., Newton, P.K., Stremler, M.A., Tokieda, T. and Vainchtein, D.L., *Vortex Crystals*, Adv. Appl. Mech. **39**, 1-79 (2002).

[3] Bang, D. and Elmabsout, B., *Restricted N+1-body problem: existence and stability of relative equilibria*, Cel. Mech. Dyn. Astr. **89**, 305-318 (2004).

[4] Cabral, H. E. and Schmidt, D. S., *Stability of relative equilibria in the problem of N+1 vortices*, SIAM J. Math. Anal. **31**, no. 2, 231-250 (1999).

[5] Celli M., Lacomba E., Pérez-Chavela E., *On polygonal relative equilibria in the N-vortex problem*, Preprint, (2011).

[6] Chorin, Alexandre and Marsden Jerrold E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer Verlag **4**. (2000).

[7] Elmabsout, B., *Sur l'existence de certaines configurations d'équilibre relatif dans le problème des N corps*, Cel. Mech. Dyn. Astr. **41**, 131-151 (1988).

[8] Hernández-Garduño A., Lacomba E., *Collisions and Regularization for the 3-Vortex Problem*, J. Math. Fluid Mech. **9**, 75-86 (2007).

[9] Hampton M., Moeckel R., *Finiteness of Stationary Configurations of the Four-Vortex Problem*, Trans. Am. Math. Soc. **302**, no. 3, 1317-1332 (2008).

[10] Helmholtz, H., *On integrals of the hydrodynamical equations which express vortex motion*, Philos. Mag. **33**, 485-512 (1858).

[11] James P. Kossin, Wayne H. Schubert, Chris Velden, Michael Black, Peter Black, Raymond Zehr, Sim Aberson, Jason Dunion, *Mesovortices in Hurricane Isabel*, Bulletin of the American Meteorology Society Nowcasting Section, (2003).

[12] Lacomba, E., *Vórtices en fluidos y variable compleja*, SMM, (2008).

[13] Marcus, M. and Minc, H., *A survey of matrix theory and matrix inequalities* (Allyn and Bacon, Boston, 1964, reprinted by Dover, New York, 1992).

[14] Marchioro Carlo and Pulvirenti Mario, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer-Verlag **96**. (1994).

[15] Meyer, K. R. and Schmidt D. S., *Bifurcations of Relative Equilibria in the N-Body and Kirchhoff Problems*, SIAM J. Math. Anal., **19**, no. 6, November 1998.

[16] Newton, Paul K., *The N-vortex problem: analytical techniques*, Springer Verlag. (2000).

[17] O'Neil, K. A., *Stationary configurations of point vortices*, Trans. Am. Math. Soc. **302**, no. 2, 383-425 (1987).

[18] Palmore, J. I., *Measure of degenerate relative equilibria I*, Ann. of Math., **104**, no. 3, 421-429 (Nov., 1976).

[19] Perko, L. and Walter, E., *Regular polygon solutions of the N-body problem*, Proc. Am. Math. Soc. **94**, 301-309 (1985).

[20] Schmidt, D. S., *Spectral stability of relative equilibria in the $N+1$ body problem*, Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics, E. A. Lacomba and J. Llibre, eds., World Scientific, Singapore, pp. 321-341 (1995).