Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol.XI , julio 2020, 7–14

SOBRE EL NÚMERO DE GROSOR DE LIBRO Y EL NÚMERO CROMÁTICO DE GRÁFICAS

JOSÉ LUIS COSME ÁLVAREZ

Resumen. Un libro de k hojas consiste en k semiplanos distintos, llamados hojas (o páginas) unidos en una línea recta llamada lomo. El número de grosor de libro *bt* (*book thickness*) de una gráfica G, se define como el menor número de hojas necesarias para dibujar una copia isomorfa de G, de tal manera que los vértices estén sobre el lomo del libro y no haya aristas que se crucen al ser dibujadas sobre las hojas.

En este artículo definimos la gráfica $I(G,\pi)$ asociada a la gráfica G, donde sus vértices han sido acomodados en el orden π sobre el lomo de un libro. Presentamos algunas propiedades de dicha gráfica asociada a la gráfica completa K_n y mostramos la relación que hay entre el número cromático de $I(G,\pi)$ y el número de grosor de libro de G. Esta relación nos permite decidir sobre la complejidad computacional del problema de calcular el número de grosor de libro de una gráfica.

1. Introducción

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica *simple*, es decir, sin lazos ni aristas múltiples. Dos vértices u, v son *adyacentes* si existe una arista que los une. El *grado* de un vértice u es el número de vértices en G que son adyacentes a u. La gráfica G es *conexa* si entre cada par de vértices existe una trayectoria que las une, en caso contrario, decimos que la gráfica no es conexa. Un vértice es *singular* si no existe trayectoria entre este y cualquier otro vértice de la gráfica. Denotaremos por K_n a la gráfica completa de n vértices.

Dos gráficas G y H son *isomorfas* y lo escribimos $G \cong H$, si existe una función biyectiva que mapea los vértices de G en los vértices de H de tal forma que dos vértices son adyacentes si y solo si las imágenes de estos vértices bajo la función también son adyacentes. En lo siguiente utilizaremos las definiciones y propiedades descritas en el libro [4].

Recordemos que una k-coloración del conjunto de vértices de G sobre el conjunto de k colores, es una función sobreyectiva $\gamma : V(G) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Decimos que la k-coloración de los vértices de la gráfica G es *propia* si vértices adyacentes reciben distinto color. Si V_i, con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, representa el conjunto de vértices con color c_i, diremos que V_i es la i-ésima *clase cromática*.

Similarmente, una k-coloración del conjunto de aristas de G es una función sobreyectiva $\varphi : E(G) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Diremos que una clase cromática es *libre de cruces monocromáticos* si las aristas pertenecientes a dicha clase han sido dibujadas sin cruces entre ellas.

El *número cromático* de la gráfica G se define como el mínimo número k para el cual existe una k-coloración propia de $V(G)$, es decir, cada par de vértices adyacentes son de distinto color y denotaremos tal número por $\chi(G)$.

En la literatura existe una amplia bibliografía que versa sobre el tema de número cromático. El lector interesado, puede consultar [6] para más información y antecedentes históricos de la evolución del estudio de este parámetro.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C15, 05C40, 05C60, 05C70.
Palabras clave. Número de grosor de libro, número cromático, coloraciones por vértices y aristas, encajes.

2. El número de grosor de libro de una gráfica

El concepto del número de grosor de libro (*book tightness*) de una gráfica G fue introducido en 1979 por Bernhart y Kainen en [2]. Este parámetro es una variante relacionada con el número de cruce y el encaje de gráficas en superficies, que pertenecen al área conocida como *Teoría Topológica de las gráficas*. En [1] las autoras presentan una selección de temas como número de cruce, encajes en superficies orientadas y no orientadas, así como algunos resultados sobre el número de encaje en libros que definimos a continuación.

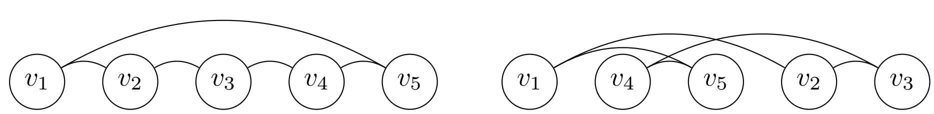
En lo sucesivo diremos que un libro de k hojas es simplemente un k-libro. Dada una gráfica G de n vértices, con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, tomemos una permutación $\pi = \{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}\}$ de $V(G)$. Un π-*encaje* de la gráfica G en el k-libro es un mapeo en el que cada vértice se ha colocado en el lomo del libro en el orden π y cada arista ha sido dibujada al interior de a lo más una hoja, de tal manera que aristas dibujadas en la misma hoja no se crucen. Si G ha sido dibujada en el π-encaje, diremos que G es π-*encajable*.

Notemos que en la definición anterior, cada hoja representa una partición o clase cromática, por lo que la definición es equivalente a decir que las aristas han sido coloreadas sin cruces monocromáticos.

Una gráfica dibujada de tal manera que todos sus vértices están sobre un círculo, puede fácilmente encajarse en un libro si «abrimos» el círculo por en medio de dos vértices hasta formar una línea recta, que será el lomo del libro. Si además las aristas han sido coloreadas sin que haya cruces del mismo color (cruces monocromáticos), entonces al ser colocados en una hoja, las aristas del mismo color no tendrán cruces en la hoja. Estas dos formas de representar la gráfica G son equivalentes.

Al mínimo número de hojas de un libro donde se puede encajar la gráfica G, se le llama el *número de grosor de libro (book tightness)* de G y lo denotamos por $bt(G)$ por sus siglas en inglés.

Es claro que un ciclo C_n de longitud n puede ser encajado en una o más hojas, dependiendo del orden que se le dé a sus vértices, por lo que claramente $bt(C_n) = 1$.



Consideremos el caso cuando la gráfica dada es la completa K_n de n vértices. Es bien sabido que tiene número de grosor de libro igual a $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ y el algoritmo que permite encontrar un encaje para K_n en un $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-libro fue descrito en [2] y es el siguiente.

Sea K_n la gráfica completa con n vértices y supongamos sin pérdida de generalidad que el orden de los vértices en el lomo del $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-libro es $\pi = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Recordemos que los vértices pueden también ser acomodados sobre el contorno de una circunferencia, por lo que la partición que proporciona las $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ clases cromáticas se determinan dependiendo de la paridad de n.

1. Si n es par, definimos la trayectoria

$$P_1 = \{v_1, v_2, v_n, v_3, v_{n-1}, v_4, v_{n-2}, \ldots, v_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+2}, v_{\frac{n}{2}+1}\},$$

donde los subíndices se reducen módulo n. Notemos que las aristas de esta trayectoria

$$E(P_1) = \{v_1v_2, v_2v_n, v_nv_3, \ldots, v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+2}, v_{\frac{n}{2}+2}, v_{\frac{n}{2}+1}\}$$

han sido dibujados sin cruces entre sí, por lo que nos definen una clase cromática y por lo tanto un encaje en la primera hoja del $(\frac{n}{2})$-libro.

De manera análoga, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$, las aristas de la trayectoria

$$P_{i+1} = \{v_{1+i}, v_{2+i}, v_{n+i}, v_{3+i}, v_{n-1+i}, v_{4+i}, v_{n-2+i}, \ldots, v_{\frac{n}{2}+2+i}, v_{\frac{n}{2}+1+i}\},$$

definen la $(i+1)$-ésima clase cromática y por tanto, la $(i+1)$-ésima hoja del $(\frac{n}{2})$-libro.

2. Si n es impar, entonces $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ y de manera similar a la construcción anterior, si la primera clase cromática es dada por los vértices de la trayectoria

$$P_1 = \{v_1, v_2, v_n, v_3, v_{n-1}, \ldots, v_{\frac{n+1}{2}+2}, v_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}+1}\},$$

entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2} - 2\}$, las aristas de la trayectoria

$$P_{i+1} = \{v_{1+i}, v_{2+i}, v_{n+i}, v_{3+i}, v_{n-1+i}, \ldots, v_{\frac{n+1}{2}+2+i}, v_{\frac{n+1}{2}+i}, v_{\frac{n+1}{2}+1+i}\}$$

definen la $(i+1)$-ésima clase cromática y por lo tanto, la $(i+1)$-ésima hoja del $(\frac{n+1}{2})$-libro.

Finalmente, la $(\frac{n+1}{2})$-ésima clase crómatica faltante es definida por el emparejamiento

$$\{v_1 v_n, v_2 v_{n-1}, v_3 v_{n-2}, \ldots, v_{\frac{n+1}{2}-1} v_{\frac{n+1}{2}+1}\}.$$

En la figura 1 se muestra la partición de las aristas de K_5 y K_6 con este algoritmo, donde las líneas punteadas, rayadas y continuas representan colores distintos. Notemos que cada clase cromática no tiene cruces entre sí, por lo que para cualquier orden, se obtiene un encaje en un 3-libro.

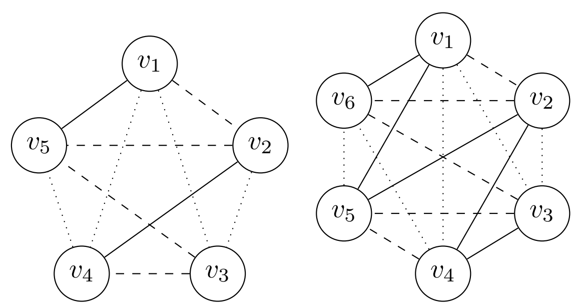


FIGURA 1. Partición de las aristas de K_5 y K_6

En la figura 2 se representa el encaje de estas gráficas en un 3-libro, donde al igual que en la figura anterior, las líneas punteadas, rayadas y continuas representan una hoja distinta en la que se han dibujado las aristas de G.

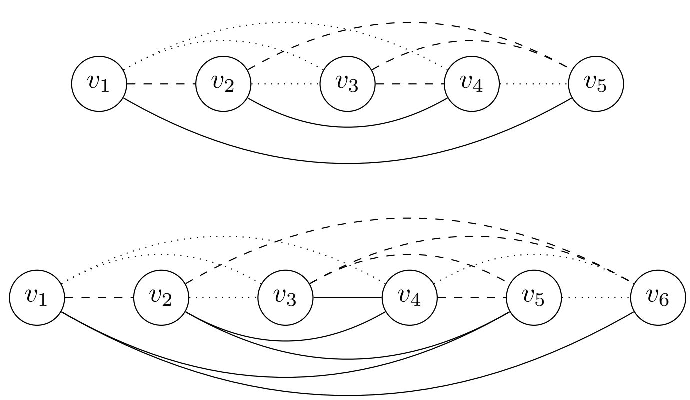


FIGURA 2. El encaje de K_5 y K_6 en un 3-libro

3. La gráfica de intervalos $I(G,\pi)$

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica simple y supongamos que tiene un π-encaje, donde $\pi = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un orden fijo.

Definimos la gráfica de intervalos $I(G,\pi)$ de orden fijo π, con conjunto de vértices y aristas determinados de la siguiente forma.

Si $v_i v_j$ es una arista de G, donde $1 \leq i < j \leq n$, entonces el intervalo (i,j) será un elemento de $V(I(G,\pi))$, es decir, los vértices de la gráfica de intervalos $I(G,\pi)$ son los intervalos abiertos de números reales, cuyos valores de los extremos son determinados por los subíndices de los vértices v_i y v_j.

Declaramos adyacentes a los vértices (i,j), (r,s) de $V(I(G,\pi))$ en $I(G,\pi)$ si vistos como conjuntos de números reales, se satisface que

1. $(i,j) \cap (r,s) \neq \emptyset$,
2. $(i,j) \setminus (r,s) \neq \emptyset$ y
3. $(r,s) \setminus (i,j) \neq \emptyset$,

donde consideramos que si $(r,s) \subset (i,j)$, entonces $(r,s) \setminus (i,j) = \emptyset$.

En otras palabras, dos vértices en $I(G,\pi)$ (que son intervalos) son adyacentes en $I(G,\pi)$, si se intersectan pero no son subconjuntos propios uno del otro.

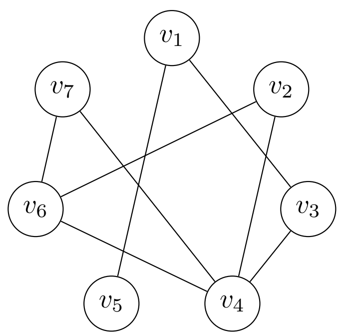


Figura 3. La gráfica G

Sea G la gráfica de la figura 3 y supongamos que el orden π dado es el orden natural $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. El dibujo de G sobre el lomo de un libro se muestra en la figura 4.

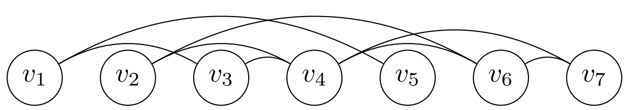


Figura 4. Dibujo de G en el lomo de un libro con el orden trivial

La gráfica $I(G,\pi)$ tiene como vértices al conjunto

$$V(I(G,\pi)) = \{(1,3), (1,5), (2,4), (2,6), (3,4), (4,6), (4,7), (6,7)\}.$$

Notemos que, vistos como conjuntos de números reales

$$(1,3) \cap (2,4) \neq \emptyset, \quad (1,3) \setminus (2,4) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad (2,4) \setminus (1,3) \neq \emptyset,$$

por lo que los vértices (1,3) y (2,4) son adyacentes en $I(G,\pi)$, sin embargo los conjuntos $(1,3) \cap (1,5) \neq \emptyset$ y $(1,5) \setminus (1,3) \neq \emptyset$, pero $(1,3) \setminus (1,5) = \emptyset$, por lo que no existe arista entre ellos en $I(G,\pi)$.

En la figura 5 se muestra la gráfica de intervalos $I(G,\pi)$ de la gráfica G de la figura 4 con el orden trivial.

Los siguientes lema y teorema nos proporcionan una relación entre un π-encaje en un k-libro de la gráfica G y el número cromático de $I(G,\pi)$.

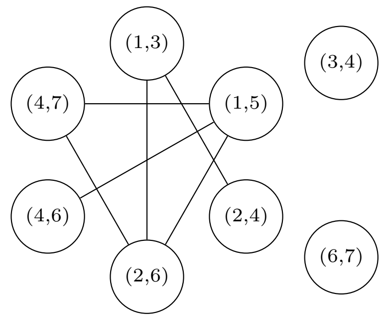


FIGURA 5. La gráfica $I(G,\pi)$ de G

LEMA 1. *Sean G una gráfica y π un orden de sus vértices. Si G es π-encajable en un k-libro, entonces*

$$\chi(I(G,\pi)) \leq k.$$

Demostración. El π-encaje de G en el k-libro con hojas $H_1, H_2, \ldots, H_k$ determina una partición $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de $E(G)$, donde E_i es el subconjunto de aristas de $E(G)$ dibujadas en la hoja H_i. Definimos la k-coloración $\varphi : V(I(G,\pi)) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ de los vértices de $I(G,\pi)$ de la siguiente manera.

Para $v_r v_s \in E_i$, definimos $\varphi((r,s)) = c_i$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Finalmente, observe que, por la construcción de la coloración, si $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $xy \notin E(I(G,\pi))$, ya que x e y corresponden a dos aristas de G dibujadas en la misma hoja de tal manera que no se cruzan.

Luego φ es una k-coloración propia de $I(G,\pi)$, por lo que $\chi(I(G,\pi)) \leq k$ como se quería demostrar. □

TEOREMA 2. *Sea G una gráfica, entonces existe un π-encaje de G tal que*

$$bt(G) = \chi(I(G,\pi)).$$

Demostración. Supongamos que $bt(G) = k$. Entonces existe un orden π de $V(G)$ tal que G es π-encajable en un k-libro. Por el lema 1, se tiene que

$$\chi(I(G,\pi)) \leq k. \tag{1}$$

Supongamos por contradicción que $\chi(I(G,\pi)) = k' < k$, entonces existe una k'-coloración propia $\varphi : V(I(G,\pi)) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_{k'}\}$ de $I(G,\pi)$. Definamos una partición $E_1, E_2, \ldots, E_{k'}$ de $E(G)$ como sigue.

Para $(r,s) \in V(I(G,\pi))$, $v_r v_s \in E_i \Leftrightarrow \varphi((r,s)) = c_i$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k'\}$.

Observe que, por construcción, las aristas en E_i pueden dibujarse en la hoja de un libro sin que se crucen. Luego $bt(G) \leq k' < k$, lo cual es imposible.

De aquí que

$$\chi(I(G,\pi)) \geq k. \tag{2}$$

Finalmente, por (1) y (2) se tiene que $bt(G) = \chi(I(G,\pi))$. □

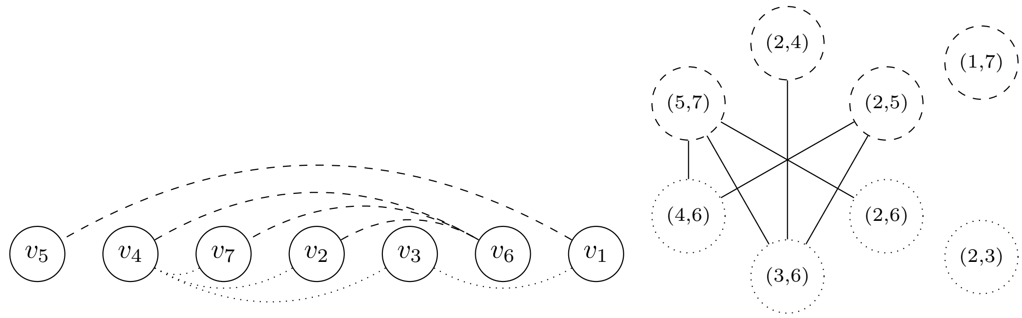
Considere nuevamente la gráfica G de la figura 3 mostrada anteriormente y

$$\pi_2 = \{v_5, v_4, v_7, v_2, v_3, v_6, v_1\}$$

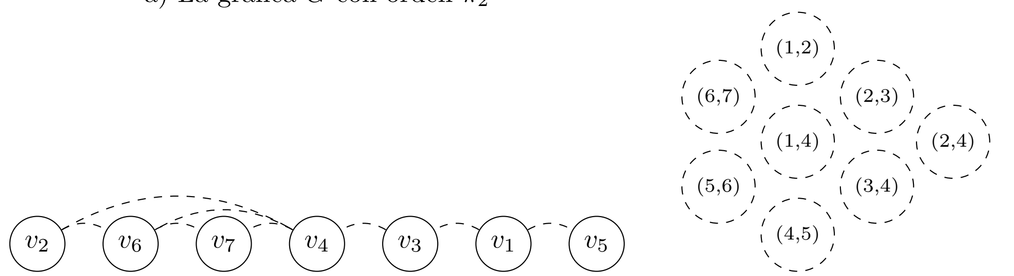
un orden de sus vértices. En la figura 6 observamos que esta partición proporciona un encaje en un 2-libro. Similarmente se tiene que el orden

$$\pi_3 = \{v_2, v_6, v_7, v_4, v_3, v_1, v_5\}$$

define un encaje en un 1-libro. Estas particiones de $E(G)$ nos describen particiones de $V(I(G,\pi))$ que calculan el número cromático respectivo para cada gráfica de intervalos.



a) La gráfica G con orden π_2



a) La gráfica G con orden π_3

FIGURA 6. G con los órdenes π_1 y π_2 y sus gráficas de intervalos

Más aún, el órden π_3 resulta en la gráfica de intervalos $I(G, \pi_3)$, donde todos sus vértices son singulares, por lo que claramente

$$bt(G) = \chi(I(G, \pi_3)) = 1.$$

Recordemos que una gráfica G es *plana* si puede ser dibujada en el plano sin cruces y decimos que G es *exteriormente plana* si tiene un encaje en el plano sin cruces y de forma que todos sus vértices aparecen en la frontera de la cara exterior del dibujo (que es un polígono). En [2] se señala que una gráfica G es plana si y solo si $bt(G) = 1$.

El siguiente resultado es consecuencia de este hecho.

COROLARIO 3. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para una gráfica G.*

1. *G es exteriormente plana.*
2. *$bt(G) = 1$.*
3. *Existe un π-encaje de G tal que $I(G, \pi)$ consta solo de vértices singulares.*
4. *Existe un π-encaje de G tal que $\chi(I(G, \pi)) = 1$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) por el teorema 2.5 de [2]. Si G es π-encajable en un 1-libro, entonces el π-encaje no tiene cruces y por la definición de $I(G, \pi)$ no tiene aristas, es decir, consiste solo de vértices singulares, por lo que (2) $\Rightarrow$ (3).

Es claro que si el π-encaje es tal que $I(G, \pi)$ consta solo de vértices singulares si y solo si $\chi(I(G, \pi)) = 1$, por lo que (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Finalmente si el π-encaje es tal que $I(G, \pi)$ consta solo de vértices singulares, por definición tenemos que G no tiene cruces entre sus aristas y este π-encaje resulta ser un dibujo plano de G. Como el dibujar la gráfica sobre el lomo de un libro es equivalente a dibujarla sin cruces en la frontera de una circunferencia, entonces G es exteriormente plana, por lo que (4) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Recordemos que la gráfica completa K_n tienen $\binom{n}{2}$ aristas, por lo que tenemos igual número de vértices en $I(K_n, \pi)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que π es el orden natural $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y observe que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene que para el intervalo (r, s), con $1 < r < s < n$, se cumple que $(i, i+1) \subset (r, s)$ o bien $(i, i+1) \cap (r, s) = \emptyset$, por lo que el intervalo $(i, i+1)$ no tiene adyacencia con vértice alguno en $I(K_n, \pi)$. Un caso similar sucede con el intervalo $(1, n)$, el cual contiene a cualquier otro intervalo (r, s), con $1 \leq r < s \leq n$. De lo anterior, tenemos que la gráfica $I(K_n, \pi)$ tiene n vértices singulares correspondientes a los intervalos $(1, n), (1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$. Los restantes intervalos forman una componente conexa con

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

vértices.

Por otro lado, el número de aristas en $I(K_n, \pi)$ queda determinado por cada cruce de los intervalos (i, j) y (r, s), con $1 \leq i < r < j < s \leq n$, por lo que hay $\binom{n}{4}$ aristas en $I(K_n, \pi)$ que corresponde al número en formas distintas de tomar estas cuartetas de números.

En la figura 7 se muestran las gráficas $I(K_5, \pi)$ e $I(K_6, \pi)$, así como una partición de sus vértices, que proporcionan una coloración propia heredada de las particiones mostradas en las figura 1 y 2 de $E(K_5)$ y $E(K_6)$ respectivamente.

Por lo tanto $\chi(I(K_5, \pi)) = \chi(I(K_6, \pi)) = 3$ para todo orden π.

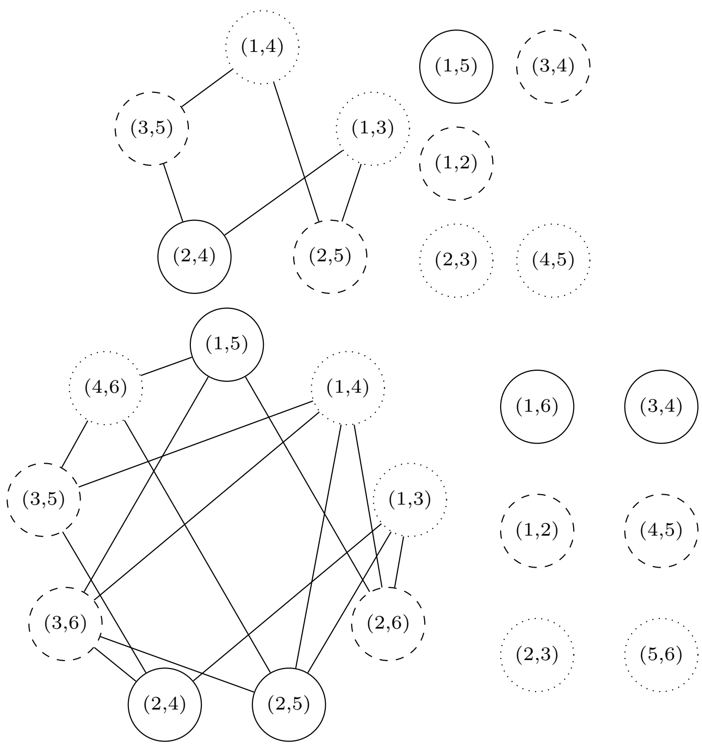


Figura 7. El número cromático de $I(K_5, \pi)$ e $I(K_6, \pi)$

4. Una nota sobre la complejidad

La tasa de crecimiento exponencial del espacio de soluciones del problema de coloración en gráficas es un problema de gran dificultad. El hecho de que este y otros problemas similares se consideren «complejos» o «intratables», se debe al trabajo realizado por Stephen Cook, quien en el año de 1971 introdujo los conceptos de *NP-completitud* y de *reducción en tiempo polinómico*. Cook demostró en [3] que el problema conocido como el «problema de satisfacibilidad» es NP-completo. En [5] se demuestra que el problema de coloración por aristas de gráficas, pertenece a la clase de problemas NP-completos.

En el tema de la complejidad computacional, los problemas suelen plantearse como problemas de decisión, cuyas respuestas son sí o no. Los problemas de coloración de gráficas, pueden plantearse también como problemas de decisión al ser transformado a un problema de la forma:

¿puede una gráfica G ser coloreada de forma propia, utilizando k colores?

Esta forma reemplaza al problema de determinar el mínimo número de colores necesarios para obtener una coloración propia de G.

El resultado demostrado por Cook en [3] sobre la NP-completitud del problema de satisfacibilidad, se puede utilizar para demostrar la NP-completitud de muchos otros problemas aplicando transformaciones polinómicas, que consisten en transformar de forma eficiente un problema de decisión en otro. El Problema de coloración de gráficas generaliza el problema NP-completo de la 3-satisfacibilidad, es decir, que el problema de la 3-satisfacibilidad es polinómicamente reducible al problema de coloración de gráficas.

El teorema 2 nos proporciona una manera alternativa para demostrar que el problema de encaje en libros y el de número cromático son equivalentes, es decir, existe un algoritmo de tiempo polinomial que transforma un problema en otro. Dado que el problema de hallar el número cromático pertenece a la clase de problemas NP-completos, se tiene que el problema de encaje en libros pertenece también a la clase de problemas NP-completos.

Referencias

[1] Armas-Sanabria L., Olsen M., Valencia-Saravia P., *Algunos aspectos de la teoría topológica de gráficas*, Miscelánea Matemática, **55** (2012) 89-112. SMM

[2] Bernhart F. R., Kainen P. C., *The book thickness of a graph*, J. Comb. Theory, Ser. B **27** (1979) 320-331.

[3] Cook S., *The complexity of theorem proving procedures.* Proceeding of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1971) 151-158.

[4] Bondy J. A., Murty U. S. R., *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 244, Berlin: Springer, 2008.

[5] Holyer I., *The np-completeness of edge-coloring*, SIAM J. Comp. **10** (1981) 718-720.

[6] Chartrand G., Zhang P., *Chromatic graph theory.* Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2009. xiv+483 pp. ISBN: 978-1-58488-800-0 (Reviewer: D. de Werra) 05-01.

Dirección del autor:
José Luis Cosme Álvarez
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, Ciudad de México.
e-mail: `coal@xanum.uam.mx`