Mixba'al Rev. Met. de Mat.
N$^{\underline{o}}$ 1, Vol. I, Junio 2010. 11 – 22

El Teorema de Hermite-Biehler en sistemas continuos, discretos y con retardo

Edgar Cristian Díaz González Baltazar Aguirre Hernández

Resumen

Se sabe que el estudio de la estabilidad de un sistema lineal continuo o discreto esta determinado por el análisis del correspondiente polinomio característico. Uno de los resultados más importantes para verificar dicha estabilidad es el Teorema de Hermite-Biehler. Existe un correspondiente Teorema de Hermite-Biehler para analizar la estabilidad de sistemas continuos y sistemas discretos. En el caso de sistemas con retardo la ecuación característica es un cuasipolinomio existe también una versión del Teorema de Hermite-Biehler para este caso. En este artículo presentamos las tres versiones de este teorema.

Palabras clave: polinomios de Hurwitz, polinomios de Schur, cuasipolinomios estables, Teorema de Hermite-Biehler.

Clasificación de la AMS: 93D09, 34D99

1. Introducción

En el análisis de la estabilidad asintótica de un sistema continuo (o discreto) es necesario que todas las raíces de su polinomio característico asociado se encuentren en $\mathbb{C}^-$ (o en $\mathbb{D}$), donde $\mathbb{C}^-$ es el conjunto de números complejos que tienen parte real negativa y $\mathbb{D}$ es el conjunto de números complejos con módulo menor que 1. En el caso de que un polinomio tenga todas sus raíces en $\mathbb{C}^-$ se dice que es un polinomio de Hurwitz y en el caso en que todas sus raíces estén en $\mathbb{D}$ se dice que es un polinomio de Schur. En el estudio de la distribución de las raíces de un polinomio sobre el plano complejo, uno de los primeros problemas fue, históricamente, el de determinar el número de raíces reales de una ecuación; esto es, dada una ecuación con coeficientes reales, determinar por algún criterio, que dependerá de sus coeficientes, y sin resolver la ecuación, si tiene raíces reales. En caso afirmativo, cuántas raíces positivas y cuántas negativas tiene. En 1868, $Maxwell$ plantea el problema matemático de la búsqueda de condiciones bajo las cuales todas las raíces de una ecuación algebraica se encuentren en $\mathbb{C}^-$, muchos matemáticos ya se habían ocupado de la determinación del número de raíces de ecuaciones algebraicas en determinados lugares (dentro y fuera del eje real, en la mitad del plano, etc) desde las primeras décadas del siglo XIX, tales como, $Cauchy$, $Sturm$, $Jacobi$, $Cayley$, $Sylvester$, y $Hermite$. De hecho, $Hermite$ (1853), ya había resuelto el problema de $Maxwell$, pero sus resultados no eran conocidos fuera del mundo de las matemáticas. Los trabajos de $Routh$ y $Hurwitz$ dieron lugar al Criterio de $Routh - Hurwitz$. Además del Criterio de $Routh - Hurwitz$, existen otros criterios para determinar si un polinomio es Hurwitz, mencionemos, por ejemplo, las Condiciones de $Lienard - Chipart$, el Test de Estabilidad o el Teorema de $Hermite - Biehler$. Desde el punto de vista matemático estos teoremas tienen la misma dificultad pues son resultados equivalentes, aunque probablemente el Criterio de $Routh - Hurwitz$ es el más popular. Sin embargo, el Teorema de $Hermite - Biehler$ ha demostrado su potencial al ser utilizado en el estudio de la estabilidad en familias de polinomios, basta mencionar el Teorema de $Kharitonov$, ver [5].

2. El Teorema de Hermite-Biehler: caso continuo

En el análisis de la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x}(t) = f(x(t))$, podemos estudiar la parte lineal del sistema, $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Bajo ciertas condiciones, la estabilidad del sistema linealizado implica la estabilidad local del sistema original. Es conocido que la estabilidad de un sistema lineal es verificada por medio del polinomio característico asociado a la matriz A.

Definición 2.1. *Sea $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, el polinomio característico de A.*

Así, el problema de determinar condiciones, bajo las cuales, todas las raíces del polinomio característico se encuentren en el semiplano abierto izquierdo es de importancia fundamental en el estudio de la estabilidad del sistema lineal.

Definición 2.2. *Consideremos el polinomio real*

$$p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n. \tag{1}$$

Podemos escribir el polinomio $p(s)$ de la siguiente forma:

$$p(s) = (a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \ldots) + s(a_1 + a_3 s^2 + a_5 s^4 + \ldots), \tag{2}$$

evaluando el polinomio $p(s)$ en $s = i\omega$, tenemos que

$$p(i\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots) + i\ \omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \ldots) \tag{3}$$

y definimos los siguientes polinomios

$$\begin{aligned} p^e(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots \\ p^o(\omega) &= a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \ldots \\ p^{par}(s) &= a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \ldots \\ p^{imp}(s) &= a_1 s + a_3 s^3 + a_5 s^5 + \ldots \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.

Consideremos los siguientes polinomios

$$\begin{aligned} q(s) &= 4 + s + 2s^2 + 5s^3 + 4s^4 + s^5 \quad \text{y} \\ r(s) &= 2 + 5s + 3s^2 + s^3 + 4s^4 + 2s^5 + s^6. \end{aligned}$$

Los polinomios asociados a $q(s)$ son

$$\begin{aligned} q^e(\omega) &= 4 - 2\omega^2 + 4\omega^4 \\ q^o(\omega) &= 1 - 5\omega^2 + \omega^4 \\ q^{par}(s) &= 4 + 2s^2 + 4s^4 \\ q^{imp}(s) &= s + 5s^3 + s^5 \end{aligned}$$

para el polinomio $r(s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} r^e(\omega) &= 2 - 3\omega^2 + 4\omega^4 - \omega^6 \\ r^o(\omega) &= 5 - \omega^2 + 2\omega^4 \\ r^{par}(s) &= 2 + 3s^2 + 4s^4 + s^6 \\ r^{imp}(s) &= 5s + s^3 + 2s^5. \end{aligned}$$

Definición 2.4. *El polinomio* $p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n$ *satisface la propiedad de la alternancia, si y sólo si*

a) los coeficientes principales de $p^{par}(s)$ *y* $p^{imp}(s)$ *tienen el mismo signo;*

b) todas las raíces de $p^e(\omega)$, $p^o(\omega)$ *son reales y las raíces positivas de* $p^e(\omega)$, $p^o(\omega)$ *se van alternando, es decir*

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \ldots \tag{4}$$

A continuación el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.5. (Hermite-Biehler). *Un polinomio real P(s) es de Hurwitz, si y sólo si, satisface la propiedad de la alternancia.*

Ver [2] y [7] para una demostración. Concluimos esta sección presentando el siguiente ejemplo que ilustra el Teorema 2.1.

Ejemplo 2.6.

Verificar si el siguiente polinomio es de Hurwitz.

$$\begin{aligned} p(s) \;=\; & 147 + 574s + 1363s^2 + 2103s^3 + 2402s^4 + 2015s^5 + 1293s^6 \\ & +614s^7 + 221s^8 + 57s^9 + 10s^{10} + s^{11} \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} p(i\omega) \;=\; & 147 + 574i\omega - 1363\omega^2 - 2103i\omega^3 + 2402\omega^4 + 2015i\omega^5 \\ & -1293\omega^6 - 614i\omega^7 + 221\omega^8 + 57i\omega^9 - 10\omega^{10} - i\omega^{11}, \end{aligned}$$

así, tenemos que

$$\begin{aligned} p^e(\omega) &= 147 - 1363\omega^2 + 2402\omega^4 - 1293\omega^6 + 221\omega^8 - 10\omega^{10} \\ p^o(\omega) &= 574 - 2103\omega^2 + 2015\omega^4 - 614\omega^6 + 57\omega^8 - \omega^{10}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} p^{par}(\omega) &= 147 + 1363\omega^2 + 2402\omega^4 + 1293\omega^6 + 221\omega^8 + 10\omega^{10} \\ p^{imp}(\omega) &= 574\omega + 2103\omega^3 + 2015\omega^5 + 614\omega^7 + 57\omega^9 + \omega^{11}. \end{aligned}$$

Así, el inciso a) de la propiedad de la alternancia se satisface. Ahora verificamos el inciso b).

$$\begin{aligned} p^e(\omega) = 0 &\iff \omega = \pm 0.373, \pm 0.868, \pm 1.375, \pm 2.287, \pm 3.752 \\ p^o(\omega) = 0 &\iff \omega = \pm 0.65, \pm 1.088, \pm 1.788, \pm 2.847, \pm 6.639 \end{aligned}$$

agrupando las raíces tenemos que

$$\omega_{e,1} = 0.373, \omega_{e,2} = 0.868, \omega_{e,3} = 1.375, \omega_{e,4} = 2.287, \omega_{e,5} = 3.752$$

y

$$\omega_{o,1} = 0.65, \omega_{o,2} = 1.088, \omega_{o,3} = 1.788, \omega_{0,4} = 2.847, \omega_{o,5} = 6.639.$$

Entonces tenemos que

$$\omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \omega_{e,3} < \omega_{o,3} < \omega_{e,4} < \omega_{o,4} < \omega_{e,5} < \omega_{o,5}$$

satisfaciéndose así el inciso b) de la propiedad de la alternancia. Por el teorema 2.1, $p(s)$ es de Hurwitz.

3. El Teorema de Hermite-Biehler: caso discreto

Es posible obtener un teorema de alternancia con respecto a $\mathbb{D}$, que es la región de estabilidad para sistemas discretos, $x(t+1) = Ax(t)$. En este caso, la estabilidad del polinomio característico asociado al sistema discreto es equivalente a la alternancia de las raíces, de los polinomios asociados a este, a lo largo del círculo unitario.

Definición 3.1. *Un polinomio*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

es un polinomio de Schur si todas sus raíces se encuentran en el círculo unitario abierto $\mathbb{D}$ del plano complejo.

Una condición necesaria para la estabilidad Schur es que $|a_n| > |a_0|$.

Definición 3.2. *Sean los polinomios $P_s(z)$ y $P_a(z)$ como sigue:*

$$P_s(z) = \frac{1}{2}[P(z) + z^n P(\frac{1}{z})] \quad y \qquad P_a(z) = \frac{1}{2}[P(z) - z^n P(\frac{1}{z})]$$

definimos $P(z) = P_s(z) + P_a(z)$.

Para un polinomio real, la estabilidad de $P(z)$ es equivalente a la alternancia, en el círculo unitario, de las raíces de los polinomios $P_s(z)$ y $P_a(z)$.

Teorema 3.3. *Un polinomio real $P(z)$ es de Schur, si y sólo si, $P_s(z)$ y $P_a(z)$ satisfacen las afirmaciones siguientes*

a) *$P_s(z)$ y $P_a(z)$ son polinomios de grado n con coeficientes principales del mismo signo.*

b) *$P_s(z)$ y $P_a(z)$ tienen sólo ceros simples, los cuales están en el círculo unitario.*

c) *Los ceros de $P_s(z)$ y $P_a(z)$ se alternan en el círculo unitario.*

Ver [2] para una demostración. Ahora presentamos el siguiente ejemplo que ilustra el Teorema 2.2.

Ejemplo 3.4.

Verificar si el polinomio $P(z)$ es un polinomio de Schur

$$P(z) = z^5 + 0.2z^4 + 0.3z^3 + 0.4z^2 + 0.03z + 0.02$$

utilizando la definición 3.2, obtenemos que

$$P_s(z) = 0.51z^5 + 0.115z^4 + 0.35z^3 + 0.35z^2 + 0.115z + 0.51 \text{ y}$$

$$P_a(z) = 0.49z^5 + 0.085z^4 - 0.05z^3 + 0.05z^2 - 0.085z - 0.49.$$

Así, tenemos que el inciso a) se satisface. Ahora verificamos los incisos b) y c).

$$\begin{aligned} P_s(z) = 0 &\iff z = -0.221 \pm 0.975i, 0.608 \pm 0.793i, -1 \\ P_a(z) = 0 &\iff z = -0.857 \pm 0.514i, 0.270 \pm 0.962i, 1 \end{aligned}$$

Cada una de las raíces de $P_s(z)$ y $P_a(z)$ son simples, se encuentran en el círculo unitario y se alternan. Por lo tanto, por el Teorema 2.2, $P(z)$ es un polinomio de Schur.

Ejemplo 3.5.

Verificar si el polinomio $P(z)$ es un polinomio de Schur

$$P(z) = z^5 + 2z^4 + 0.3z^3 + 0.4z^2 + 0.03z + 0.02$$

de la definición 3.2, obtenemos los siguientes polinomios

$$\begin{aligned} P_s(z) &= 0.51z^5 + 1.015z^4 + 0.35z^3 + 0.35z^2 + 1.015z + 0.51 \\ P_a(z) &= 0.49z^5 + 0.985z^4 - 0.05z^3 + 0.05z^2 - 0.985z - 0.49. \end{aligned}$$

Así, el inciso a) se satisface. Ahora verificamos el inciso b) y c).

$$P_s(z) = 0 \Longleftrightarrow z = 0.55 \pm 0.83i, -1.35, -1, -0.74.$$
$$P_a(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -0.17 \pm 0.98i, -2.21, -0.45, 1.$$

Cada una de las raíces de $P_s(z)$ y $P_a(z)$ son simples, pero no se encuentran en el círculo unitario ni se alternan. Por lo tanto, por el Teorema 2.2, $P(z)$ no es un polinomio de Schur.

4. El Teorema de Hermite-Biehler: sistemas con retardo

Las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) son ecuaciones diferenciales en las cuales la función f depende también de términos con diferentes valores de su argumento, $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$, donde $\tau(t) > 0$, la primera ecuación de este tipo apareció en la literatura en la segunda mitad del siglo $XVIII$ ($Kondorse$, 1771), pero un estudio sistemático de las ecuaciones con retardo comenzó en el siglo XX (especialmente en las primeras décadas - *A.D.Myshkis*, en la Unión Soviética, *E.M.Wright* y *R.Bellman* en otros países), en relación con las necesidades de la ciencia aplicada. Las EDR tienen muchas aplicaciones en la teoría del control automático, el estudio de problemas relacionados con la combustión de cohetes en movimiento, en economía, en una serie de problemas biológicos, etc. En un estudio en sistemas reales, para una primera aproximación, se supone que el retraso es constante, $\tau(t) = \tau$. Para más información sobre sistemas con retardo ver [1], [3], [9] y [11].

Consideremos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con dos retardos

$$\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t - \tau_1) + a_0\,y(t - \tau_0) = u(t). \tag{5}$$

La ecuación (5) puede ser representada en la siguiente forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-\tau_0) \\ x_2(t-\tau_0) \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-\tau_1) \\ x_2(t-\tau_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t). \tag{6}$$

En general, un sistema lineal con l distintos retardos, $\tau_1, \ldots, \tau_l$, puede ser representado de la siguiente forma

$$\dot{x} = A_0\,x(t) + \sum_{i=1}^{l} A_i\,x(t - \tau_i) + B\,u(t). \tag{7}$$

Para discutir la estabilidad de la ecuación (5) ó los sistemas (6) y (7) es común examinar las soluciones $y(t)$, con $u(t) \equiv 0$ y estudiar el comportamiento de $y(t)$, cuando $t \to \infty$. Para este propósito, consideremos, por ejemplo, la ecuación (5) con $u(t) \equiv 0$ y que $y(t) = e^{s\,t}$ es una solución de

$$\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t-\tau_1) + a_0\,y(t-\tau_0) \equiv 0. \tag{8}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$(s^2 + a_1\,e^{-s\,\tau_1}s + a_0\,e^{-s\,\tau_0})e^{s\,t} \equiv 0,$$

de manera que s debe satisfacer la ecuación

$$s^2 + a_1e^{-s\,\tau_1}s + a_0e^{-s\,\tau_0} = 0. \tag{9}$$

La ecuación (9) es la ecuación característica de (5) u (8); la ubicación de sus raíces (o ceros) determina la estabilidad de la ecuación (5).

En las secciones anteriores se mostró el correspondiente Teorema de Hermite-Biehler para sistemas continuos y discretos, sin embargo, cuando el sistema involucra retardos no se pueden aplicar los teoremas dados. Sistemas con retardos dan lugar a funciones características, conocidas como cuasipolinomios, la ecuación característica asociada con (7) es

$$\begin{aligned} P^*(s) &= \det\left(sI - A_0 - \sum_{i=1}^{l} e^{-s\tau_i}A_i\right) \\ &= P_0(s) + \sum_{k=1}^{m} P_k(s)e^{-L_k s}. \end{aligned} \tag{10}$$

En la ecuación (10) los retardos pueden ser múltiplos enteros de un número positivo τ. En estos casos, se dice que los retardos son conmensurables y la ecuación característica toma la forma

$$P^*(s) = a_0(s) + a_1(s)e^{-\tau s} + a_2(s)e^{-2\tau s} + \cdots + a_k(s)e^{-k\tau s}, \tag{11}$$

donde los $a_i(s), i = 0, 1, \ldots, k$ son polinomios.

Definición 4.1. *Sea $P(s,t)$ un polinomio en dos variables con coeficientes reales o complejos de la siguiente forma*

$$\sum_k \sum_i a_{ik}s^i t^k = P(s,t).$$

Definición 4.2. *Sea r el grado más grande en s, p el grado más grande en t.*

$P(s,t)$ tiene un término principal, si y sólo si, $a_{rp} \neq 0$.

L.S. Pontrjagin en 1942 generalizó el Teorema de Hermite-Biehler para cuasipolinomios, $P(s, e^s)$.

Definición 4.3. *Sea f(s) una función entera de la forma*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k s} P_k(s) = f(s)$$

donde $P_k(s)$ para $k = 1, \cdots, n$ es un polinomio arbitrario con coeficientes reales ó complejos y los $\lambda_k' s$ son reales, los cuales satisfacen:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n, \ |\lambda_1| < \lambda_n \tag{12}$$

A continuación el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.4. *Sea $f(s) = P(s, e^s)$, donde $P(s,t)$ es un polinomio con un término principal, además*

$$f(j\omega) = f^r(\omega) + jf^i(\omega) \tag{13}$$

donde $f^r(\omega)$ y $jf^i(\omega)$ representan respectivamente la parte real e imaginaria de $f(j\omega)$. Entonces para que f(s) tenga todos sus ceros en el semiplano abierto izquierdo es necesario y suficiente que las siguientes dos condiciones se tengan:

a) *$f^r(\omega)$ y $f^i(\omega)$ tengan solo raíces simples y estas raíces se alternen.*

b) *Para todo ω en $\mathbb{R}$, $f^{i'}(\omega) f^r(\omega) - f^i(\omega) f^{r'}(\omega) > 0$.*

Ver este resultado en [2], [10] y en [11]. En la condición b) el símbolo $'$ indica derivación con respecto a ω, esta condición puede ser reemplazada por la condición más débil:

$$\acute{\mathbf{b}})\ f^{i'}(\omega) f^r(\omega) - f^i(\omega) f^{r'}(\omega) > 0, \quad \text{para algún} \quad \omega_0 \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Por último presentamos el siguiente ejemplo que ilustra el Teorema 3.5.

Ejemplo 4.5.

Verificar si el cuasipolinomio P(s) es Hurwitz estable

$$P(s) = d(s) + e^{-sT_1} n_1(s) + e^{-sT_2} n_2(s)$$

donde

$$\begin{aligned} d(s) &= 1 + 15s + 50s^2 + 100s^3 + 100s^4 + 200s^5 + 100s^6 + 20s^7 \\ &\quad +5s^8 + s^9 \\ n_1(s) &= 2 + 10s + 50s^2 + 50s^3 + 100s^4 + 15s^5 + 10s^6 + 10s^7 + 3s^8 \\ n_2(s) &= 3 + 24s + 55s^2 + 130s^3 + 131s^4 + 51s^5 + 35s^6 + 22s^7 + 2s^8. \end{aligned}$$

Con $T_1 = \frac{1}{10}, T_2 = \frac{3}{10}$, escribimos

$$d(j\omega) = d^e(\omega) + j\omega\ d^o(\omega) \qquad n_1(j\omega) = n_1^e(\omega) + j\omega\ n_1^o(\omega)$$

$$n_2(j\omega) = n_2^e(\omega) + j\omega\ n_2^o(\omega) \qquad P(j\omega) = P_r(\omega) + j\ P_i(\omega)$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} P_r(\omega) &= d^e(\omega) + cos(\omega T_1)\ n_1^e(\omega) - \omega\ sen(\omega T_1)\ n_1^o(\omega) \\ &\quad +cos(\omega T_2)\ n_2^e(\omega) - \omega sen(\omega T_2)\ n_2^o(\omega) \\ P_i(\omega) &= \omega\ d^o(\omega) + \omega\ cos(\omega T_1)\ n_1^o(\omega) - sen(\omega T_1)\ n_1^e(\omega) \\ &\quad +\omega\ cos(\omega T_2)\ n_2^o(\omega)\ - sen(\omega T_2)\ n_2^e(\omega). \end{aligned}$$

Las raíces de $P_r(\omega)$ y $P_i(\omega)$ se alternan, por lo tanto, por el teorema 3.5, el cuasipolinomio es Hurwitz.

Referencias

[1] Bellman, R. E., Cooke, K. L., *Differential-Difference Equations*, Number 6 in Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1963.

[2] Bhattacharayya, S.P., Chapellat, H., Keel, L.H., *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[3] Gu, K., Kharitonov, V. L. and Chen, J., *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[4] Hermite, C., *Sur le nombre des racines dune équation algébrique comprise entre des limites donnés*, J. Reine Angew. Math., **52**, 1856, 39-51.

[5] Kharitonov, V.L., *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*, Differentsial'nye Uravnenija, **14**, 1978, p. 2086-2088. Translation in Differential Equations, **14**, 1979, 1483-1485.

[6] LaSalle, J.P., *The Stability and Control of Discrete Processes*, New York Inc., Springer-Verlag, New York, 1986.

[7] Loredo, C.A., *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz*. Reporte de los seminarios de investigación I y II, UAM-Iztapalapa, México, D.F. 2004.

[8] Maxwell, J. C., *On governors*, Proc. Royal Soc. London, **16**, 1868, 270-283.

[9] Myshkis, A. D., *General theory of differential equations with delay*, Engl. Transl. AMS **55**, 1951, 1-62 .

[10] Pontrjagin, L.S., *On the zeros of some elementary transcendental functions*, Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **6**, 1942, 115-134. English translation, American Mathematical Society Translations, **2**, 1955, 95-110 .

[11] Silva, G.J., Datta, A., Bhattacharayya, S.P., *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Boston, Birkhäuser, 2005.

[12] Vyshnegradsky, I. A., *Maxwell, I. A. Vyshnegradsky, and A. Stodola. Theory of Automatic Control, On the Direct Action Regulators*, M., AN SSSR, 1949, In D. K.(in Russian).

Dirección de los autores

Edgar Cristian Díaz González

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina

Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.

e-mail: edgardazgonzlez@yahoo.com.mx

Baltazar Aguirre Hernández
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: bahe@xanum.uam.mx