Mixba'al Rev. Met. de Mat.
Nº 1, Vol. I, Junio 2010. 41 – 64

El grupo Ext

Héctor Gabriel Salazar Pedroza

Resumen

Sean A y C dos R-módulos. Se definirá una operación binaria $+$ en $\mathrm{Ext}(C, A)$, el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de A por C, de tal modo que $(\mathrm{Ext}(C, A), +)$ sea un grupo abeliano y cuyo elemento identidad sea la clase de equivalencia de la extensión $B = A \oplus C$.

Palabras clave: Funtor Ext, extensiones of módulos, clases de equivalencia de extensiones.

Clasificación de la AMS: 13D07, 18G15, 20J05, 20K40

1. Introducción

Sea R un anillo conmutativo con elemento unitario. Considere la sucesión exacta

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

de R-homomorfismos. Ésta da lugar a una sucesión exacta de homomorfismos de grupos abelianos

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, D) \xrightarrow{\beta'} \mathrm{Hom}_R(B, D) \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}_R(A, D)$$

para cualquier R-módulo D, donde el homomorfismo α' no es suprayectivo en general. En forma equivalente, los homomorfismos de A en D no se pueden "levantar", en general, a homomorfismos de B en D. Una técnica del álgebra homológica permite extender estas sucesiones exactas en forma natural: mediante el funtor Ext se puede lograr una sucesión exacta infinita

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n_R(C, D) \to \mathrm{Ext}^n_R(B, D) \to \mathrm{Ext}^n_R(A, D) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(C, D) \to \cdots$$

que comienza con

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_R(C, D) \to \mathrm{Ext}^0_R(B, D) \to \mathrm{Ext}^0_R(A, D) \to \mathrm{Ext}^1_R(C, D) \to \cdots$$

y donde $\mathrm{Ext}^0_R(\_, D) = \mathrm{Hom}_R(\_, D)$. Los grupos $\mathrm{Ext}^1_R(\_, D)$ proporcionan una estimación del conjunto de homomorfismos de A en D que no se pueden extender a B. En esta nota construiremos $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ con todo cuidado y comprobaremos que efectivamente es un grupo abeliano. Escribiremos simplemente $\mathrm{Ext}(C, A)$ en lugar de $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$. Dados dos módulos A y B, escribiremos $A \leq B$ para denotar que A es un submódulo de B.

2. Preliminares

Definición 2.1. *Una **extensión de** A **por** C es una sucesión exacta corta* $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *de homomorfismos.*

Definición 2.2. *Dada una extensión* $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$, *decimos que* α *(respectivamente* β*) **se escinde** si existe un homomorfismo* $\sigma : B \to A$ *(respectivamente* $\rho : C \to B$*) tal que* $\sigma \circ \alpha = 1_A$ *(respectivamente* $\beta \circ \rho = 1_C$*). Decimos que* σ *(respectivamente* ρ*) es una **escisión** de* α *(respectivamente* β*). Si* α *o* β *se escinde, decimos que* E *es una extensión **escindible** (o que **se escinde**).*

Proposición 2.3. *Dada la extensión* $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) α *se escinde;*

(b) β *se escinde;*

(c) *existe un isomorfismo* $B \cong A \oplus C$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\cong"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde ι *es la inyección y* π *es la proyección.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (c). Supongamos que existe $\sigma : B \to A$ tal que $\sigma \circ \alpha = 1_A$. Consideremos el homomorfismo $\theta : B \to A \oplus C$ dado por $\theta(b) = (\sigma(b), \beta(b))$. Sea $b \in B$ tal que $\theta(b) = (0, 0)$, es decir, $\sigma(b) = 0$ y $\beta(b) = 0$. Se sigue que existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$, por lo que $a = \sigma(\alpha(a)) = \sigma(b) = 0$, es decir, $b = \alpha(0) = 0$ y por lo tanto, θ es un monomorfismo. Sea $(a, c) \in A \oplus C$. Por ser β un epimorfismo, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$. Entonces

$$\begin{aligned}
\theta(b - \alpha(\sigma(b) - a)) &= (\sigma(b - \alpha(\sigma(b) - a)), \beta(b - \alpha(\sigma(b) - a))) \\
&= (\sigma(b - \alpha(\sigma(b)) + \alpha(a)), \beta(b) - \beta(\alpha(\sigma(b) - a))) \\
&= (\sigma(b) - \sigma(\alpha(\sigma(b))) + \sigma(\alpha(a)), \beta(b)) \\
&= (a, c),
\end{aligned}$$

por lo que θ es un epimorfismo. Por lo tanto, θ es un isomorfismo. Además, $\theta \circ \alpha = \iota$ y $\pi \circ \theta = \beta$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Supongamos que existe $\rho : C \to B$ tal que $\beta \circ \rho = 1_C$. Consideremos el homomorfismo $\zeta : A \oplus C \to B$ dado por $\zeta(a, c) = \alpha(a) + \rho(c)$. Sea $(a, c) \in A \oplus C$ tal que $\zeta(a, c) = 0$, es decir, $\rho(c) = -\alpha(a)$. Se sigue que $c = \beta(\rho(c)) = \beta(-\alpha(a)) = 0$, y por ser α un monomorfismo, $-\alpha(a) = \rho(0) = 0$ implica que $a = 0$, por lo que $(a, c) = (0, 0)$. Por lo tanto, ζ es un monomorfismo. Sea $b \in B$. Notemos que $b - \rho(\beta(b)) \in \ker \beta = \operatorname{Im} \alpha$. Esto implica que existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b - \rho(\beta(b))$, por lo que $b = \alpha(a) + \rho(\beta(b)) = \zeta(a, \beta(b))$ y entonces ζ es un epimorfismo. Por lo tanto, ζ es un isomorfismo. Además, $\zeta \circ \iota = \alpha$ y $\beta \circ \zeta = \pi$.

(c) $\Rightarrow$ (a) y (b). Sean $\iota' : C \to A \oplus C$ y $\pi' : A \oplus C \to A$ la inclusión y la proyección respectivamente. Si $\theta : B \to A \oplus C$ es un isomorfismo, $\theta \circ \alpha = \iota$ y $\pi \circ \theta = \beta$, entonces $\sigma = \pi' \circ \theta$ y $\rho = \theta^{-1} \circ \iota'$ satisfacen $\sigma \circ \alpha = \pi' \circ \iota = 1_A$ y $\beta \circ \rho = \pi \circ \iota' = 1_C$. $\square$

Definición 2.4. *Dos extensiones* $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *y* $E' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \to 0$ *de* A *por* C *son* ***equivalentes*** *si existe un isomorfismo* $\psi : B \to B'$ *tal que* $\alpha' = \psi \circ \alpha$ *y* $\beta = \beta' \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es de rutina comprobar que la relación "ser equivalentes" en el conjunto de extensiones de A por C es una relación de equivalencia.

Definición 2.5. $\operatorname{Ext}(C, A)$ *es el conjunto de clases de equivalencia de las extensiones de* A *por* C.

Denotaremos por $[E]$ a la clase de equivalencia de la extensión E.

Corolario 2.6. *Cualesquiera dos extensiones escindibles de A por C son equivalentes.*

Demostración. Sean $E: 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ y $E': 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \to 0$ dos extensiones escindibles de A por C. Por la Proposición 2.3 existen dos isomorfismos $\theta_1 : B \to A \oplus C$ y $\theta_2 : A \oplus C \to B'$ tales que $\theta_1 \circ \alpha = \iota$, $\pi \circ \theta_1 = \beta$, $\theta_2 \circ \iota = \alpha'$ y $\beta' \circ \theta_2 = \pi$, por lo que $\theta_2 \circ \theta_1 : B \to B'$ es un isomorfismo tal que $\theta_2 \circ \theta_1 \circ \alpha = \theta_2 \circ \iota = \alpha'$ y $\beta' \circ \theta_2 \circ \theta_1 = \pi \circ \theta_1 = \beta$, y por lo tanto, $[E] = [E']$. $\square$

Dado que la extensión $E_0 : 0 \to A \xrightarrow{\iota} A \oplus C \xrightarrow{\pi} C \to 0$ es escindible, se cumple que $[E] = [E_0]$ para toda extensión escindible E.

Proposición 2.7. (a) *Dada una extensión $E: 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ de A por C y un homomorfismo $\lambda : A \to A'$, existe una extensión $E' : 0 \to A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \to 0$ de A' por C y un homomorfismo $\mu : B \to B'$ tales que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(b) *Si $E'' : 0 \to A' \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} C \to 0$ y $\mu' : B \to B''$ cumplen las condiciones anteriores, entonces $[E'] = [E'']$, y el isomorfismo resultante $\psi : B' \to B''$ cumple $\psi \circ \mu = \mu'$.*

(c) *Si $[E] = [F]$, entonces $[E'] = [F']$.*

Demostración. (a) Consideremos el submódulo

$$K = \{ (\lambda(a), -\alpha(a)) \mid a \in A \}$$

de $A' \oplus B$, y definamos $B' = (A' \oplus B)/K$, $\quad \alpha'(a') = (a', 0) + K$, $\beta'((a', b) + K) = \beta(b)$ y $\mu(b) = (0, b) + K$ para todo $a' \in A'$, $b \in B$.

(i) α' *es un monomorfismo.* Es claro que α' es un homomorfismo. Sea $a' \in A'$ tal que $\alpha'(a') = 0 + K$, es decir, $(a', 0) \in K$. Entonces existe $a \in A$ tal que $(a', 0) = (\lambda(a), -\alpha(a))$. Dado que α es monomorfismo, $-\alpha(a) = 0$ implica $a = 0$. Por lo tanto, $a' = \lambda(a) = \lambda(0) = 0$.

(ii) *β' un es epimorfismo.* Es claro que β' es un homomorfismo. Además, dado que β es epimorfismo, se sigue inmediatamente que β' también lo es.

(iii) *E' es exacta en B'.* Si $a' \in A'$, entonces

$$\beta'(\alpha'(a')) = \beta'((a',0) + K) = \beta(0) = 0,$$

es decir, $\operatorname{Im}\alpha' \subseteq \ker\beta'$. Por otro lado, si $(a',b) + K \in \ker\beta'$, entonces $b \in \ker\beta = \operatorname{Im}\alpha$, por lo que existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$. Ahora notemos que

$$\begin{aligned}(a',b) + K &= (a',\alpha(a)) + K \\ &= (a' + \lambda(a), 0) + (-\lambda(a), \alpha(a)) + K \\ &= (a' + \lambda(a), 0) + K \\ &= \alpha'(a' + \lambda(a)).\end{aligned}$$

Se sigue que $\ker\beta' \subseteq \operatorname{Im}\alpha'$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}\alpha' = \ker\beta'$.

Lo anterior demuestra que $E' : 0 \to A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \to 0$ es una extensión de A' por C.

(iv) *μ hace conmutar el diagrama*

$$\begin{aligned}\mu(\alpha(a)) &= (0, \alpha(a)) + K \\ &= (0, \alpha(a)) + (\lambda(a), -\alpha(a)) + K \\ &= (\lambda(a), 0) + K \\ &= \alpha'(\lambda(a)),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\beta'(\mu(b)) &= \beta'((0,b) + K) \\ &= \beta(b).\end{aligned}$$

(b) Ahora sea $E'' : 0 \to A' \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} C \to 0$ otra extensión de A' por C y sea $\mu' : B \to B''$ tal que $\alpha'' \circ \lambda = \mu' \circ \alpha$ y $\beta'' \circ \mu' = \beta$. Sea $\psi : B' \to B''$ dada por $\psi((a',b) + K) = \alpha''(a') + \mu'(b)$. Claramente, ψ es un homomorfismo.

(i) ψ *es un monomorfismo.* Si $\psi((a',b)+K)=0$, entonces $\alpha''(a')=-\mu'(b)$, por lo que $-\beta(b)=-\beta''(\mu'(b))=\beta''(\alpha''(a'))=0$. Esto significa que $b\in\ker\beta=\operatorname{Im}\alpha$, por lo que existe $a\in A$ tal que $\alpha(a)=b$. Se sigue que $\alpha''(a')=-\mu'(b)=-\mu'(\alpha(a))=\mu'(\alpha(-a))=\alpha''(\lambda(-a))$, y dado que α'' es monomorfismo, $a'=\lambda(-a)$. Por lo tanto, $(a',b)+K=(\lambda(-a),-\alpha(-a))+K=0+K$.

(ii) ψ *es un epimorfismo.* Si $b''\in B''$, entonces $\beta''(b'')\in C$; al ser β epimorfismo, existe $b\in B$ tal que $\beta(b)=\beta''(b'')$, y dado que $\beta''\circ\mu'=\beta$, $\beta(b)=\beta''(\mu'(b))=\beta''(b'')$, es decir, $b''-\mu'(b)\in\ker\beta''=\operatorname{Im}\alpha''$. Se sigue que existe $a'\in A'$ tal que $\alpha''(a')=b''-\mu'(b)$. Por lo tanto, $\psi((a',b)+K)=\alpha''(a')+\mu'(b)=b''$.

(iii) $\psi(\alpha'(a'))=\psi((a',0)+K)=\alpha''(a')+\mu'(0)=\alpha''(a')$, es decir, $\psi\circ\alpha'=\alpha''$; $\beta''(\psi((a',b)+K))=\beta''(\alpha''(a'))+\beta''(\mu'(b))=0+\beta(b)=\beta'((a',b)+K)$, es decir, $\beta''\circ\psi=\beta'$.

Por lo tanto, $[E']=[E'']$. Además, $\psi(\mu(b))=\psi((0,b)+K)=\alpha''(0)+\mu'(b)=\mu'(b)$, es decir, $\psi\circ\mu=\mu'$.

(c) Por último, sean $E:0\to A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\to 0$ y $F:0\to A\xrightarrow{\gamma}D\xrightarrow{\delta}C\to 0$ equivalentes con $\varphi:B\to D$ isomorfismo, y sean $E':0\to A'\xrightarrow{\alpha'}B'\xrightarrow{\beta'}C\to 0$, $F':0\to A'\xrightarrow{\gamma'}D'\xrightarrow{\delta'}C\to 0$ y $\mu:D\to D'$ como en el inciso (a). Entonces $\xi=\mu\circ\varphi:B\to D'$ cumple $\gamma'\circ\lambda=\xi\circ\alpha$ y $\delta'\circ\xi=\beta$, ya que

$$\gamma'\circ\lambda=\mu\circ\gamma=\mu\circ\varphi\circ\alpha=\xi\circ\alpha,$$

y

$$\beta=\delta\circ\varphi=\delta'\circ\mu\circ\varphi=\delta'\circ\xi,$$

por lo que por el inciso (b), $[E']=[F']$. □

Denotamos por λE a la extensión E' de A' por C construida en la proposición anterior a partir de la extensión E de A por C y del homomorfismo λ.

Proposición 2.8. (a) *Dada una extensión* $E:0\to A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\to 0$ *de* A *por* C *y un homomorfismo* $\nu:C'\to C$*, existe una extensión* $E':0\to A\xrightarrow{\alpha'}B'\xrightarrow{\beta'}C'\to 0$ *de* A *por* C' *y un homomorfismo*

$\mu : B' \to B$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & {\scriptstyle\mu}\downarrow & & {\scriptstyle\nu}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

es conmutativo.

(b) *Si $E'' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} C' \to 0$ y $\mu' : B'' \to B$ cumplen las condiciones anteriores, entonces $[E'] = [E'']$, y el isomorfismo resultante $\psi : B'' \to B'$ cumple $\mu \circ \psi = \mu'$.*

(c) *Si $[E] = [F]$, entonces $[E'] = [F']$.*

Demostración. (a) Consideremos el submódulo

$$B' = \{\, (b, c') \mid \beta(b) = \nu(c') \,\}$$

de $B \oplus C'$, y definamos $\alpha'(a) = (\alpha(a), 0)$, $\beta'(b, c') = c'$ y $\mu(b, c') = b$ para todo $a \in A$, $(b, c') \in B'$.

(i) *α' es un monomorfismo.* Es claro que α' es un homomorfismo. Además, dado que α es monomorfismo, se sigue inmediatamente que α' también lo es.

(ii) *β' es un epimorfismo.* Es claro que β' es un homomorfismo. Sea $c' \in C'$; entonces $\nu(c') \in C$, y al ser β epimorfismo, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = \nu(c')$. Por lo tanto, $(b, c') \in B'$ y $\beta'(b, c') = c'$.

(iii) *E' es exacta en B'.* Si $a \in A$, entonces $\beta'(\alpha'(a)) = \beta'(\alpha(a), 0) = 0$, es decir, $\operatorname{Im}\alpha' \subseteq \ker\beta'$. Por otro lado, si $(b, c') \in \ker\beta'$, entonces $c' = 0$. Además, $\beta(b) = \nu(c') = \nu(0) = 0$, por lo que $b \in \ker\beta = \operatorname{Im}\alpha$. Entonces existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$, es decir, $(b, c') = (\alpha(a), 0) \in \operatorname{Im}\alpha'$. Se sigue que $\ker\beta' \subseteq \operatorname{Im}\alpha'$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}\alpha' = \ker\beta'$.

Lo anterior demuestra que $E' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \to 0$ es una extensión de A por C'.

(iv) *μ hace conmutar el diagrama.* $\mu(\alpha'(a)) = \mu(\alpha(a), 0) = \alpha(a)$, y $\beta(\mu(b, c')) = \beta(b) = \nu(c') = \nu(\beta'(b, c'))$.

(b) Ahora sea $E'' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} C' \to 0$ otra extensión de A por C' y sea $\mu' : B'' \to B$ tal que $\mu' \circ \alpha'' = \alpha$ y $\beta \circ \mu' = \nu \circ \beta''$. Sea $\psi : B'' \to B'$ dada por $\psi(b'') = (\mu'(b''), \beta''(b''))$. Claramente, ψ es un homomorfismo.

(i) *ψ es un monomorfismo.* Si $\psi(b'') = 0$, entonces $\mu'(b'') = 0$ y $\beta''(b'') = 0$. Esto significa que $b'' \in \ker \beta'' = \operatorname{Im} \alpha''$, por lo que existe $a \in A$ tal que $\alpha''(a) = b''$. Entonces $\alpha(a) = \mu'(\alpha''(a)) = \mu'(b'') = 0$, y dado que α es monomorfismo, se sigue que $a = 0$. Por lo tanto, $b'' = \alpha''(0) = 0$.

(ii) *ψ es un epimorfismo.* Sea $(b, c') \in B'$. Por ser β'' epimorfismo, existe $b'' \in B''$ tal que $\beta''(b'') = c'$. Además, $\beta(b) = \nu(c') = \nu(\beta''(b'')) = \beta(\mu'(b''))$, por lo que $b - \mu'(b'') \in \ker \beta = \operatorname{Im} \alpha$. Esto significa que existe $a \in A$ tal que $b - \mu'(b'') = \alpha(a) = \mu'(\alpha''(a))$. Por lo tanto, $\psi(\alpha''(a) + b'') = (\mu'(\alpha''(a) + b''), \beta''(\alpha''(a) + b'')) = (b, c')$.

(iii) $\psi(\alpha''(a)) = (\mu'(\alpha''(a)), \beta''(\alpha''(a))) = (\alpha(a), 0) = \alpha'(a)$, es decir, $\psi \circ \alpha'' = \alpha'$; $\beta'(\psi(b'')) = \beta'(\mu'(b''), \beta''(b'')) = \beta''(b'')$, es decir, $\beta' \circ \psi = \beta''$.

Por lo tanto, $[E'] = [E'']$. Además, $\mu(\psi(b'')) = \mu(\mu'(b''), \beta''(b'')) = \mu'(b'')$, es decir, $\mu \circ \psi = \mu'$.

(c) Por último, sean $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ y $F : 0 \to A \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} C \to 0$ equivalentes con $\varphi : D \to B$ isomorfismo, y sean $E' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \to 0$, $F' : 0 \to A \xrightarrow{\gamma'} D' \xrightarrow{\delta'} C' \to 0$ y $\mu : D' \to D$ como en el inciso (a). Entonces $\xi = \varphi \circ \mu : D' \to B$ cumple $\xi \circ \gamma' = \alpha$ y $\beta \circ \xi = \nu \circ \delta'$, ya que

$$\alpha = \varphi \circ \gamma = \varphi \circ \mu \circ \gamma' = \xi \circ \gamma',$$

y

$$\nu \circ \delta' = \delta \circ \mu = \beta \circ \varphi \circ \mu = \beta \circ \xi,$$

por lo que por el inciso (b), $[E'] = [F']$. □

Denotamos por $E\nu$ a la extensión E' de A por C' construida en la proposición anterior a partir de la extensión E de A por C y del homomorfismo ν.

Teorema 2.9. *Sea $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ una extensión de A por C, y sean $\lambda : A \to A'$ y $\nu : C' \to C$ homomorfismos. Entonces las extensiones $\lambda(E\nu)$ y $(\lambda E)\nu$ de A' por C' son equivalentes.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E\nu : & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha_\nu"] \arrow[d, "\lambda"'] & B_\nu \arrow[r, "\beta_\nu"] \arrow[d, "\mu_\nu"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\lambda(E\nu) : & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'_\nu"] & B'_\nu \arrow[r, "\beta'_\nu"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por la Proposición 2.8, tenemos que

- $B_\nu = \{ (b, c') \mid \beta(b) = \nu(c') \} \leq B \oplus C'$,
- $\alpha_\nu(a) = (\alpha(a), 0)$,
- $\beta_\nu(b, c') = c'$

para todo $a \in A$, $(b, c') \in B_\nu$, y por la Proposición 2.7,

- $B'_\nu = (A' \oplus B_\nu)/K_\nu$ donde $K_\nu = \{ (\lambda(a), -\alpha_\nu(a)) \mid a \in A \} \leq A' \oplus B_\nu$,
- $\alpha'_\nu(a') = (a', (0, 0)) + K_\nu$,
- $\beta'_\nu((a', b_\nu) + K_\nu) = \beta_\nu(b_\nu)$,

para todo $a' \in A'$, $b_\nu \in B_\nu$. Por otro lado, tenemos también el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\lambda E)\nu : & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'_\lambda"] \arrow[d, equal] & B'_\lambda \arrow[r, "\beta'_\lambda"] \arrow[d, "\mu_\lambda"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & 0 \\
\lambda E : & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha_\lambda"] & B_\lambda \arrow[r, "\beta_\lambda"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por la Proposición 2.7, tenemos que

- $B_\lambda = (A' \oplus B)/K_\lambda$ donde $K_\lambda = \{ (\lambda(a), -\alpha(a)) \mid a \in A \} \leq A' \oplus B$,
- $\alpha_\lambda(a') = (a', 0) + K_\lambda$,

- $\beta_\lambda((a', b) + K_\lambda) = \beta(b)$

para todo $a' \in A'$, $b \in B$, y por la Proposición 2.8,

- $B'_\lambda = \{\, (b_\lambda, c') \mid \beta_\lambda(b_\lambda) = \nu(c') \,\} \leq B_\lambda \oplus C'$,
- $\alpha'_\lambda(a') = (\alpha_\lambda(a'), 0)$,
- $\beta'_\lambda(b_\lambda, c') = c'$

para todo $a' \in A'$, $(b_\lambda, c') \in B'_\lambda$. Sea $\psi : B'_\lambda \to B'_\nu$ dada por

$$\psi((a', b) + K_\lambda, c') = (a', (b, c')) + K_\nu.$$

(i) *ψ está bien definida.* Sean (a'_1, b_1), $(a'_2, b_2) \in A' \oplus B$ tales que $(a'_1 - a'_2, b_1 - b_2) \in K_\lambda$ y sea $c' \in C'$. Esto significa que existe $a \in A$ tal que $\lambda(a) = a'_1 - a'_2$ y $-\alpha(a) = b_1 - b_2$. Entonces $(a'_1, (b_1, c')) - (a'_2, (b_2, c')) = (a'_1 - a'_2, (b_1 - b_2, 0)) = (\lambda(a), (-\alpha(a), 0)) \in K_\nu$, por lo que $\psi((a'_1, b_1) + K_\lambda, c') = \psi((a'_2, b_2) + K_\lambda, c')$ si $(a'_1, b_1) + K_\lambda = (a'_2, b_2) + K_\lambda$ y c' es fijo.

(ii) *ψ es un homomorfismo.* Es de rutina comprobar que ψ es un homomorfismo.

(iii) *ψ es un monomorfismo.* Supongamos que $\psi((a', b) + K_\lambda, c') = 0 + K_\nu$. Esto implica que

$$(a', (b, c')) \in K_\nu = \{\, (\lambda(a), -(\alpha(a), 0)) \mid a \in A \,\},$$

lo que a su vez significa que existe $a \in A$ tal que $a' = \lambda(a)$ y $(b, c') = (-\alpha(a), 0)$, por lo que $b = -\alpha(a)$ y $c' = 0$. Por lo tanto, $(a', b) = (\lambda(a), -\alpha(a)) \in K_\lambda$ y $((a', b) + K_\lambda, c') = (0 + K_\lambda, 0)$.

(iv) *ψ es un epimorfismo.* Es claro.

(v) $\psi(\alpha'_\lambda(a')) = \psi(\alpha_\lambda(a'), 0) = \psi((a', 0) + K_\lambda, 0) = (a', (0, 0)) + K_\nu = \alpha'_\nu(a')$, es decir, $\psi \circ \alpha'_\lambda = \alpha'_\nu$.

$\beta'_\nu(\psi((a', b) + K_\lambda, c')) = \beta'_\nu((a', (b, c')) + K_\nu) = \beta_\nu(b, c') = c' = \beta'_\lambda((a', b) + K_\lambda, c')$, es decir, $\beta'_\nu \circ \psi = \beta'_\lambda$.

Por lo tanto, $[\lambda(E\nu)] = [(\lambda E)\nu]$. □

Debido al Teorema 2.9, al construir una extensión de A' por C' utilizando una extensión E de A por C y homomorfismos $\lambda : A \to A'$ y $\nu : C' \to C$, podemos prescindir de los paréntesis y escribir simplemente $\lambda E \nu$.

3. Definición de la operación de grupo en $\mathrm{Ext}(C, A)$

Consideremos dos extensiones $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ y $E' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \to 0$ de A por C. Denotemos por $E \oplus E'$ a la extensión

$$0 \to A \oplus A \xrightarrow{(\alpha,\alpha')} B \oplus B' \xrightarrow{(\beta,\beta')} C \oplus C \to 0$$

de $A \oplus A$ por $C \oplus C$. Sean $\nabla : A \oplus A \to A$ y $\Delta : C \to C \oplus C$ los homomorfismos dados por $\nabla(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ y $\Delta(c) = (c, c)$. Por medio de las Proposiciones 2.7 y 2.8, obtenemos una extensión $\nabla(E \oplus E')\Delta$ de A por C.

Proposición 3.1. *Si E, E', F y F' son extensiones de A por C, $[E] = [F]$ y $[E'] = [F']$, entonces $[\nabla(E \oplus E')\Delta] = [\nabla(F \oplus F')\Delta]$.*

Demostración. Sean

$$E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

$$E' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \to 0,$$

$$F : 0 \to A \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} C \to 0,$$

$$F' : 0 \to A \xrightarrow{\gamma'} D' \xrightarrow{\delta'} C \to 0$$

extensiones de A por C tales que $[E] = [F]$ y $[E'] = [F']$, y consideremos las extensiones

$$E \oplus E' : 0 \to A \oplus A \xrightarrow{(\alpha,\alpha')} B \oplus B' \xrightarrow{(\beta,\beta')} C \oplus C \to 0,$$

$$F \oplus F' : 0 \to A \oplus A \xrightarrow{(\gamma,\gamma')} D \oplus D' \xrightarrow{(\delta,\delta')} C \oplus C \to 0.$$

Dado que $[E] = [F]$ y $[E'] = [F']$, existen isomorfismos $\psi : B \to D$ y $\psi' : B' \to D'$ tales que $\psi \circ \alpha = \gamma$, $\delta \circ \psi = \beta$, $\psi' \circ \alpha' = \gamma'$ y $\delta' \circ \psi' = \beta'$. Entonces $(\psi, \psi') : B \oplus B' \to D \oplus D'$ es un isomorfismo con $(\psi, \psi') \circ (\alpha, \alpha') = (\gamma, \gamma')$ y $(\delta, \delta') \circ (\psi, \psi') = (\beta, \beta')$, por lo que $[E \oplus E'] = [F \oplus F']$. Por la Proposición 2.7(c), $[\nabla(E \oplus E')] = [\nabla(F \oplus F')]$, y por la Proposición 2.8, $[\nabla(E \oplus E')\Delta] = [\nabla(F \oplus F')\Delta]$. $\square$

La Proposición 3.1 nos permite definir una operación binaria $+$ en el conjunto $\mathrm{Ext}(C, A)$ de clases de equivalencia de extensiones de A por C.

Definición 3.2. *Si* $[E]$, $[E'] \in \operatorname{Ext}(C,A)$*, definimos* $[E]+[E'] = [\nabla(E\oplus E')\Delta]$.

Lema 3.3. *La operación binaria* $+$ *definida en* $\operatorname{Ext}(C,A)$ *es conmutativa.*

Demostración. Si $E : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ y $E' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \to 0$ son dos extensiones de A por C, entonces es claro que $\psi : B\oplus B' \to B'\oplus B$ dado por $\psi(b,b') = (b',b)$ es un isomorfismo, por lo que $[E\oplus E'] = [E'\oplus E]$ y por lo tanto $[\nabla(E\oplus E')\Delta] = [\nabla(E'\oplus E)\Delta]$, es decir, $[E]+[E'] = [\nabla(E\oplus E')\Delta] = [\nabla(E'\oplus E)\Delta] = [E']+[E]$. $\square$

Proposición 3.4. *Para toda* $[E] \in \operatorname{Ext}(C,A)$, $[E]+[E_0] = [E]$*, es decir, la clase de las extensiones escindibles es un elemento neutro respecto a* $+$.

Demostración. Procedamos a construir $\nabla(E\oplus E_0)\Delta$. Sea $D = B\oplus A\oplus C$. Entonces obtenemos $E\oplus E_0 : 0 \to A\oplus A \xrightarrow{(\alpha,\iota)} D \xrightarrow{(\beta,\pi)} C\oplus C \to 0$. Por la Proposición 2.8, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "\alpha_\Delta"] \arrow[d, equal] & D_\Delta \arrow[r, "\beta_\Delta"] \arrow[d, "\mu_\Delta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "\alpha,\iota"] & D \arrow[r, "\beta,\pi"] & C\oplus C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $D_\Delta \leq D\oplus C$ tal que
$$\begin{aligned}
D_\Delta &= \{\, (b,a,c_1,c_2) \mid (\beta,\pi)(b,a,c_1) = \Delta(c_2) \,\} \\
&= \{\, (b,a,c_1,c_2) \mid a\in A,\ (\beta(b),c_1) = (c_2,c_2) \,\} \\
&= \{\, (b,a,\beta(b),\beta(b)) \mid a\in A,\ b\in B \,\};
\end{aligned}$$
- $\alpha_\Delta(a_1,a_2) = (\alpha(a_1),a_2,0,0)$,
- $\beta_\Delta((b,a,\beta(b),\beta(b))) = \beta(b)$.

y por la Proposición 2.7, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "\alpha_\Delta"] \arrow[d, "\nabla"'] & D_\Delta \arrow[r, "\beta_\Delta"] \arrow[d, "\mu_\nabla"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha_\nabla"] & D_\nabla \arrow[r, "\beta_\nabla"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $D_\nabla = (A \oplus D_\Delta)/K_\nabla$, donde K_∇ es tal que

$$\begin{aligned} K_\nabla &= \{\, (\nabla(a_1,a_2), -\alpha_\Delta(a_1,a_2)) \mid (a_1,a_2) \in A \oplus A\,\}, \\ &= \{\, (a_1+a_2, -\alpha(a_1), -a_2, 0, 0) \mid (a_1,a_2) \in A \oplus A\,\}; \end{aligned}$$

- $\alpha_\nabla(a) = (a,0,0,0,0) + K_\nabla$,
- $\beta_\nabla((a_1,b,a_2,\beta(b),\beta(b)) + K_\nabla) = \beta(b)$.

Sea $\psi : D_\nabla \to B$ dada por

$$\psi((a_1,b,a_2,\beta(b),\beta(b)) + K_\nabla) = \alpha(a_1+a_2) + b.$$

(i) *ψ está bien definida.* Sean

$$(a_1^1, b_1, a_2^1, \beta(b_1), \beta(b_1)),\ (a_1^2, b_2, a_2^2, \beta(b_2), \beta(b_2)) \in A \oplus D_\Delta$$

tales que su diferencia

$$(a_1^1 - a_1^2, b_1 - b_2, a_2^1 - a_2^2, \beta(b_1 - b_2), \beta(b_1 - b_2)) \in K_\nabla.$$

Esto significa que existen a_1, $a_2 \in A$ tales que $a_2 = a_2^2 - a_2^1$, $a_1 = a_1^1 - a_1^2 + a_2^1 - a_2^2$ y $-\alpha(a_1) = b_1 - b_2$. De esta última igualdad se sigue que $-\alpha(a_1^1 - a_1^2 + a_2^1 - a_2^2) = \alpha(a_1^2 + a_2^2) - \alpha(a_1^1 + a_2^1) = b_1 - b_2$, por lo que $\alpha(a_1^2 + a_2^2) + b_2 = \alpha(a_1^1 + a_2^1) + b_1$, es decir, $\psi((a_1^1, b_1, a_2^1, \beta(b_1), \beta(b_1)) + K_\nabla) = \psi((a_1^2, b_2, a_2^2, \beta(b_2), \beta(b_2)) + K_\nabla)$.

(ii) *ψ es un homomorfismo.* Es de rutina comprobar que ψ es un homomorfismo.

(iii) *ψ es un monomorfismo.* Supongamos que

$$\psi((a_1,b,a_2,\beta(b),\beta(b)) + K_\nabla) = 0.$$

Esto implica que $b = -\alpha(a_1+a_2) \in \operatorname{Im}\alpha = \ker\beta$, por lo que $\beta(b) = 0$. Ahora, haciendo $a_3 = a_1 + a_2$ y $a_4 = -a_2$, tenemos que $a_1 = a_3 + a_4$, por lo que $(a_1,b,a_2,\beta(b),\beta(b)) + K_\nabla = (a_3 + a_4, -\alpha(a_3), -a_4, 0, 0) + K_\nabla = 0 + K_\nabla$.

(iv) *ψ es un epimorfismo.* Si $b \in B$, basta tomar $(0,b,0,\beta(b),\beta(b)) + K_\nabla \in D_\nabla$.

(v) $\psi(\alpha_\nabla(a)) = \psi((a,0,0,0,0)+K_\nabla) = \alpha(a)$, es decir, $\psi\circ\alpha_\nabla = \alpha$.

$$\begin{aligned}\beta(\psi((a_1,b,a_2,\beta(b),\beta(b))+K_\nabla) &= \beta(\alpha(a_1+a_2)+b)\\ &= \beta(b)\\ &= \beta_\nabla((a_1,b,a_2,\beta(b),\beta(b))+K_\nabla),\end{aligned}$$

es decir, $\beta\circ\psi = \beta_\nabla$.

Por lo tanto, $[E] = [\nabla(E\oplus E_0)\Delta] = [E]+[E_0]$. □

Proposición 3.5. *Dada una extensión* $E:\ 0\to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ *de* A *por* C*, sea* $\bar{E}:\ 0\to A \xrightarrow{-\alpha} B \xrightarrow{\beta} C\to 0$*. Entonces* $[E]+[\bar{E}] = [E_0]$*.*

Demostración. Consideremos

$$E\oplus\overline{E}:\ 0\to A\oplus A \xrightarrow{(\alpha,-\alpha)} B\oplus B \xrightarrow{(\beta,\beta)} C\oplus C\to 0.$$

Por la Proposición 2.8, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "\alpha_\Delta"] \arrow[d, equal] & B_\Delta \arrow[r, "\beta_\Delta"] \arrow[d, "\mu_\Delta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0\\
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "{\alpha,-\alpha}"] & B\oplus B \arrow[r, "{\beta,\beta}"] & C\oplus C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $B_\Delta \leq B\oplus B\oplus C$ es tal que

$$\begin{aligned}B_\Delta &= \{\,(b_1,b_2,c)\mid(\beta,\beta)(b_1,b_2)=\Delta(c)\,\}\\ &= \{\,(b_1,b_2,c)\mid(\beta(b_1),\beta(b_2))=(c,c)\,\}\\ &= \{\,(b_1,b_2,\beta(b_1))\mid\beta(b_1)=\beta(b_2)\,\}\\ &= \{\,(b_1,b_2,\beta(b_1))\mid b_1-b_2\in\ker\beta\,\}\end{aligned}$$

  (notemos que esto significa que existe $a_0\in A$ tal que $\alpha(a_0) = b_1-b_2$),

- $\alpha_\Delta(a_1,a_2) = (\alpha(a_1),-\alpha(a_2),0)$,

- $\beta_\Delta(b_1,b_2,\beta(b_1)) = \beta(b_1)$, y por la Proposición 2.7, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A \oplus A & \xrightarrow{\alpha_\Delta} & B_\Delta & \xrightarrow{\beta_\Delta} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \nabla \big\downarrow & & \mu_\nabla \big\downarrow & & \Big\| & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha_\nabla} & B_\nabla & \xrightarrow{\beta_\nabla} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde

- $B_\nabla = (A \oplus B_\Delta)/K_\nabla$, donde K_∇ es tal que

$$\begin{aligned} K_\nabla &= \{\, (\nabla(a_1, a_2), -\alpha_\Delta(a_1, a_2)) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A \,\}, \\ &= \{\, (a_1 + a_2, -\alpha(a_1), \alpha(a_2), 0) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A \,\}; \end{aligned}$$

- $\alpha_\nabla(a) = (a, 0, 0, 0) + K_\nabla$,
- $\beta_\nabla((a, b_1, b_2, \beta(b_1)) + K_\nabla) = \beta(b_1)$.

Sea $\psi : B_\nabla \to A \oplus C$ dada por

$$\psi((a, b_1, b_2, \beta(b_1)) + K_\nabla) = (a + a_0, \beta(b_1)),$$

donde $\alpha(a_0) = b_1 - b_2$.

(i) ψ *está bien definida.* Sean

$$(a_1, b_1, b_2, \beta(b_1)),\ (a_2, b_3, b_4, \beta(b_3)) \in A \oplus B_\Delta$$

tales que $b_1 - b_2 = \alpha(a_0)$ y $b_3 - b_4 = \alpha(a_0')$, y tales que su diferencia

$$(a_1 - a_2, b_1 - b_3, b_2 - b_4, \beta(b_1 - b_3)) \in K_\nabla.$$

Esto significa que existen a_3, $a_4 \in A$ tales que $a_1 - a_2 = a_3 + a_4$, $-\alpha(a_3) = b_1 - b_3$, $\alpha(a_4) = b_2 - b_4$ y $\beta(b_1 - b_3) = 0$; de esta última igualdad se infiere que $\beta(b_1) = \beta(b_3)$. Dado que $b_3 = b_1 + \alpha(a_3)$ y $b_4 = b_2 - \alpha(a_4)$, se sigue que $\alpha(a_0') = b_3 - b_4 = b_1 - b_2 + \alpha(a_3 + a_4) = \alpha(a_0) + \alpha(a_1 - a_2)$, es decir, $\alpha(a_0' - a_0) = \alpha(a_1 - a_2)$. Puesto que α es un monomorfismo, se sigue que $a_0' - a_0 = a_1 - a_2$, y por tanto $a_1 + a_0 = a_2 + a_0'$. Por consiguiente, $\psi((a_1, b_1, b_2, \beta(b_1)) + K_\nabla) = (a_1 + a_0, \beta(b_1)) = (a_2 + a_0', \beta(b_3)) = \psi((a_2, b_3, b_4, \beta(b_3)) + K_\nabla)$.

(ii) *ψ es un homomorfismo.* Es de rutina comprobar que ψ es un homomorfismo.

(iii) *ψ es un monomorfismo.* Supongamos que

$$\psi((a, b_1, b_2, \beta(b_1)) + K_\nabla) = (0, 0)$$

y que $b_1 - b_2 = \alpha(a_0)$. Esto significa que $a + a_0 = 0$ y $\beta(b_1) = 0$. Dado que $\beta(b_2) = \beta(b_1) = 0$, se sigue que b_1, $b_2 \in \ker \beta = \operatorname{Im} \alpha$, por lo que existen a_1, $a_2 \in A$ tales que $\alpha(a_1) = b_1$ y $\alpha(a_2) = b_2$. Entonces $\alpha(a_1 - a_2) = b_1 - b_2 = \alpha(a_0)$, y al ser α un monomorfismo, $a_1 - a_2 = a_0$. Esto implica que $a = a_2 - a_1$, y por lo tanto, $(a, b_1, b_2, \beta(b_1)) = (-a_1 + a_2, -\alpha(-a_1), \alpha(a_2), 0) \in K_\nabla$.

(iv) *ψ es un epimorfismo.* Sea $(a, c) \in A \oplus C$. Ya que β es un epimorfismo, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$. Entonces

$$\psi((a, b, b, \beta(b)) + K_\nabla) = (a, c).$$

(v) *El siguiente diagrama es conmutativo*:

$$\psi(\alpha_\nabla(a)) = \psi((a, 0, 0, 0) + K_\nabla) = (a, 0) = \iota(a),$$

es decir, $\psi \circ \alpha_\nabla = \iota$.

$\pi(\psi((a, b_1, b_2, \beta(b_1)) + K_\nabla) = \pi(a + a_0, \beta(b_1)) = \beta(b_1)$
$= \beta_\nabla((a, b_1, b_2, \beta(b_1)) + K_\nabla)$, es decir, $\pi \circ \psi = \beta_\nabla$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha_\nabla"] \arrow[d, equal] & B_\nabla \arrow[r, "\beta_\nabla"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $[E] + [\bar{E}] = [E_0]$. □

Proposición 3.6. *La operación binaria + definida en* $\operatorname{Ext}(C, A)$ *es asociativa.*

Demostración. Sean $[E_1]$, $[E_2]$, $[E_3] \in \operatorname{Ext}(C, A)$ tales que

$$E_i : 0 \to A \xrightarrow{\alpha_i} B_i \xrightarrow{\beta_i} C \to 0,$$

para $i = 1, 2, 3$. Procedamos a construir $([E_1] + [E_2]) + E_3$. Consideremos

$$E_1 \oplus E_2 :\ 0 \to A \oplus A \overset{(\alpha_1,\alpha_2)}{\to} B_1 \oplus B_2 \overset{(\beta_1,\beta_2)}{\to} C \oplus C \to 0.$$

Por la Proposición 2.8, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha_\Delta"] \arrow[d, equal] & B_\Delta \arrow[r, "\beta_\Delta"] \arrow[d, "\mu_\Delta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha_1,\alpha_2"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, "\beta_1,\beta_2"] & C \oplus C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $B_\Delta \leq B_1 \oplus B_2 \oplus C$ es tal que

$$\begin{aligned} B_\Delta &= \{ (b_1, b_2, c) \mid (\beta_1, \beta_2)(b_1, b_2) = \Delta(c) \} \\ &= \{ (b_1, b_2, c) \mid (\beta_1(b_1), \beta_2(b_2)) = (c, c) \} \\ &= \{ (b_1, b_2, \beta_2(b_2)) \mid \beta_1(b_1) = \beta_2(b_2) \}, \end{aligned}$$

- $\alpha_\Delta(a_1, a_2) = (\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_2), 0)$,
- $\beta_\Delta(b_1, b_2, \beta_2(b_2)) = \beta_2(b_2)$,

y por la Proposición 2.7, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha_\Delta"] \arrow[d, "\nabla"'] & B_\Delta \arrow[r, "\beta_\Delta"] \arrow[d, "\mu_\nabla"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha_\nabla"] & B_\nabla \arrow[r, "\beta_\nabla"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $B_\nabla = (A \oplus B_\Delta)/K_\nabla$, donde K_∇ es tal que

$$\begin{aligned} K_\nabla &= \{ (\nabla(a_1, a_2), -\alpha_\Delta(a_1, a_2)) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A \}, \\ &= \{ (a_1 + a_2, -\alpha_1(a_1), -\alpha_2(a_2), 0) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A \}; \end{aligned}$$

- $\alpha_\nabla(a) = (a, 0, 0, 0) + K_\nabla$,
- $\beta_\nabla((a, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla) = \beta_2(b_2)$.

Ahora consideremos

$$(\nabla(E_1 \oplus E_2)\Delta) \oplus E_3 :\ 0 \to A \oplus A \overset{(\alpha_\nabla,\alpha_3)}{\to} B_\nabla \oplus B_3 \overset{(\beta_\nabla,\beta_3)}{\to} C \oplus C \to 0.$$

Nuevamente por la Proposición 2.8, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha_\nabla,\alpha_3"] & B_\nabla \oplus B_3 \arrow[r, "\beta_\nabla,\beta_3"] & C \oplus C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $B \leq B_\nabla \oplus B_3 \oplus C$ es tal que

$$\begin{aligned}
B = \{&((a, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, c) \ \mid \\
&(\beta_\nabla, \beta_3)((a, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3) = \Delta(c)\} \\
&= \{\ ((a, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, c) \mid (\beta_2(b_2), \beta_3(b_3)) = (c, c)\ \} \\
&= \{\ ((a, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) \mid \beta_2(b_2) = \beta_3(b_3)\ \},
\end{aligned}$$

- $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha_\nabla(a_1), \alpha_3(a_2), 0) = ((a_1, 0, 0, 0) + K_\nabla, \alpha_3(a_2), 0)$,
- $\beta((a, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) = \beta_2(b_2)$,

y nuevamente por la Proposición 2.7, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nabla"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu'"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $B' = (A \oplus B)/K$, donde K es tal que

$$\begin{aligned}
K &= \{\ (\nabla(a_1, a_2), -\alpha(a_1, a_2)) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A\ \}, \\
&= \{(a_1 + a_2, (-a_1, 0, 0, 0) + K_\nabla, -\alpha_3(a_2), 0) | \\
&\quad (a_1, a_2) \in A \oplus A\}\,;
\end{aligned}$$

- $\alpha'(a) = (a, K_\nabla, 0, 0) + K$,
- $\beta'((a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) + K) = \beta_2(b_2)$.

De igual manera procedamos a construir $[E_1] + ([E_2] + [E_3])$. Consideremos

$$E_2 \oplus E_3 :\ 0 \to A \oplus A \overset{(\alpha_2,\alpha_3)}{\to} B_2 \oplus B_3 \overset{(\beta_2,\beta_3)}{\to} C \oplus C \to 0.$$

Por la Proposición 2.8, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\gamma_\Delta"] \arrow[d, equal] & D_\Delta \arrow[r, "\delta_\Delta"] \arrow[d, "\nu_\Delta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha_2,\alpha_3"] & B_2 \oplus B_3 \arrow[r, "\beta_2,\beta_3"] & C \oplus C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $D_\Delta \leq B_2 \oplus B_3 \oplus C$ es tal que

$$\begin{aligned}
D_\Delta &= \{\, (b_2, b_3, c) \mid (\beta_2, \beta_3)(b_2, b_3) = \Delta(c) \,\} \\
&= \{\, (b_2, b_3, c) \mid (\beta_2(b_2), \beta_3(b_3)) = (c, c) \,\} \\
&= \{\, (b_2, b_3, \beta_2(b_2)) \mid \beta_2(b_2) = \beta_3(b_3) \,\}
\end{aligned}$$

- $\gamma_\Delta(a_1, a_2) = (\alpha_2(a_1), \alpha_3(a_2), 0)$,
- $\delta_\Delta(b_2, b_3, \beta_2(b_2)) = \beta_2(b_2)$,

y por la Proposición 2.7, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\gamma_\Delta"] \arrow[d, "\nabla"'] & D_\Delta \arrow[r, "\delta_\Delta"] \arrow[d, "\nu_\nabla"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\gamma_\nabla"] & D_\nabla \arrow[r, "\delta_\nabla"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $D_\nabla = (A \oplus D_\Delta)/L_\nabla$, donde L_∇ es tal que

$$\begin{aligned}
L_\nabla &= \{\, (\nabla(a_1, a_2), -\gamma_\Delta(a_1, a_2)) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A \,\}, \\
&= \{\, (a_1 + a_2, -\alpha_2(a_1), -\alpha_3(a_2), 0) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A \,\};
\end{aligned}$$

- $\gamma_\nabla(a) = (a, 0, 0, 0) + L_\nabla$,
- $\delta_\nabla((a, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla) = \beta_2(b_2)$.

Ahora consideremos

$$E_1 \oplus (\nabla(E_2 \oplus E_3)\Delta) :\ 0 \to A \oplus A \overset{(\alpha_1, \gamma_\nabla)}{\to} B_1 \oplus D_\nabla \overset{(\beta_1, \delta_\nabla)}{\to} C \oplus C \to 0.$$

Nuevamente por la Proposición 2.8, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\nu"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\alpha_1, \gamma_\nabla"] & B_1 \oplus D_\nabla \arrow[r, "\beta_1, \delta_\nabla"] & C \oplus C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $D \leq B_1 \oplus D_\nabla \oplus C$ es tal que

$$\begin{aligned}
D = \{&(b_1, (a, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, c) \mid \\
&(\beta_1, \delta_\nabla)\, (b_1, (a, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla) = \Delta(c)\} \\
= \{&\, (b_1, (a, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, c) \mid (\beta_1(b_1), \beta_2(b_2)) = (c, c)\,\} \\
= \{&\, (b_1, (a, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, \beta_2(b_2)) \mid \beta_1(b_1) = \beta_2(b_2)\,\}
\end{aligned}$$

- $\gamma(a_1, a_2) = (\alpha_1(a_1), \gamma_\nabla(a_2), 0) = (\alpha_1(a_1), (a_2, 0, 0, 0) + L_\nabla, 0)$,
- $\delta(b_1, (a, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, \beta_2(b_2)) = \beta_2(b_2)$,

y nuevamente por la Proposición 2.7, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\nabla"'] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\nu'"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\gamma'"] & D' \arrow[r, "\delta'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- $D' = (A \oplus D)/L$, donde L es tal que

$$\begin{aligned}
L = \{&\, (\nabla(a_1, a_2), -\gamma(a_1, a_2)) \mid (a_1, a_2) \in A \oplus A\,\}, \\
= \{&(a_1 + a_2, -\alpha_1(a_1), (-a_2, 0, 0, 0) + L_\nabla, 0) | \\
&(a_1, a_2) \in A \oplus A\}\,;
\end{aligned}$$

- $\gamma'(a) = (a, 0, L_\nabla, 0) + L$,
- $\delta'((a_1, b_1, (a_2, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, \beta_2(b_2)) + L) = \beta_2(b_2)$.

Sea $\psi : B' \to D'$ dada por

$$\psi((a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) + K)$$

$$= (a_1, b_1, (a_2, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, \beta_2(b_2)) + L.$$

(i) *ψ está bien definida.* Sean $(a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2))+K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2))+K$ y $(a'_1, (a'_2, b'_1, b'_2, \beta_2(b'_2))+K_\nabla, b'_3, \beta_2(b'_2))+K$ dos elementos de B' tales que

$$(a_1-a'_1, (a_2-a'_2, b_1-b'_1, b_2-b'_2, \beta_2(b_2-b'_2))+K_\nabla, b_3-b'_3, \beta_2(b_2-b'_2))\in K.$$

Esto significa que $\beta_2(b_2 - b'_2) = 0$, y que existen a_3, $a_4 \in A$ tales que $a_1 - a'_1 = a_3 + a_4$, $-\alpha_3(a_4) = b_3 - b'_3$, y

$$(a_2 - a'_2 + a_3, b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \beta_2(b_2 - b'_2)) \in K_\nabla,$$

y esto último significa a su vez que existen a_5, $a_6 \in A$ tales que $a_2 - a'_2 + a_3 = a_5 + a_6$, $-\alpha_1(a_5) = b_1 - b'_1$, y $-\alpha_2(a_6) = b_2 - b'_2$. Sean $a'_3 = a_5$, $a'_4 = a_3 + a_4 - a_5$, $a'_5 = a_6$ y $a'_6 = a_4$. Entonces

$$\begin{aligned} a_2 - a'_2 + a'_4 &= a_5 + a_6 - a_3 + a_3 + a_4 - a_5 \\ &= a_6 + a_4 \\ &= a'_5 + a'_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 - b'_2 &= -\alpha_2(a_6) \\ &= -\alpha_2(a'_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 - b'_3 &= -\alpha_3(a_4) \\ &= -\alpha_3(a'_6), \end{aligned}$$

por lo que $(a_2 - a'_2 + a'_4, b_2 - b'_2, b_3 - b'_3, \beta_2(b_2 - b'_2)) \in L_\nabla$, es decir,

$$(a_2 - a'_2, b_2 - b'_2, b_3 - b'_3, \beta_2(b_2 - b'_2)) + L_\nabla = (-a'_4, 0, 0, 0) + L_\nabla;$$

además,

$$\begin{aligned} a_1 - a_1' &= a_3 + a_4 \\ &= a_5 + a_3 + a_4 - a_5 \\ &= a_3' + a_4', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 - b_1' &= -\alpha_1(a_5) \\ &= -\alpha_1(a_3'), \end{aligned}$$

por lo que

$(a_1 - a_1', b_1 - b_1', (a_2 - a_2', b_2 - b_2', b_3 - b_3', \beta_2(b_2 - b_2')) + L_\nabla, \beta_2(b_2 - b_2'))$

$\in L$, es decir,

$$(a_1, b_1, (a_2, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, \beta_2(b_2)) + L =$$

$$(a_1', b_1', (a_2', b_2', b_3', \beta_2(b_2')) + L_\nabla, \beta_2(b_2')) + L,$$

y por lo tanto,

$$\begin{gathered} \psi((a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) + K) = \\ \psi((a_1', (a_2', b_1', b_2', \beta_2(b_2')) + K_\nabla, b_3', \beta_2(b_2')) + K). \end{gathered}$$

(ii) *ψ es un homomorfismo.* Es de rutina comprobar que ψ es un homomorfismo.

(iii) *ψ es un monomorfismo.* Supongamos que

$$\psi((a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) + K) \in L.$$

Esto significa que $\beta_2(b_2) = 0$, y que existen a_3, $a_4 \in A$ tales que $a_1 = a_3 + a_4$, $b_1 = -\alpha_1(a_3)$ y $(a_2 + a_4, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) \in L_\nabla$, donde esto implica a su vez que existen a_5, $a_6 \in A$ tales que $a_2 + a_4 = a_5 + a_6$, $b_2 = -\alpha_2(a_5)$ y $b_3 = -\alpha_3(a_6)$. Sean $a_3' = a_1 - a_6$, $a_4' = a_6$, $a_5' = a_3$ y $a_6' = a_5$. Dado que $a_2 + a_4 = a_5 + a_6$, $a_2 + (a_3 + a_4) = a_3 + a_5 + a_6$, es decir, $a_2 + a_1 = a_5' + a_6' + a_6$; se sigue que $a_2 + a_3' = a_2 + (a_1 - a_6) = a_5' + a_6'$. Además, $b_1 = -\alpha_1(a_5')$, $b_2 = -\alpha_2(a_6')$, por lo que $(a_2 + a_3', b_1, b_2, \beta_2(b_2)) \in K_\nabla$, es decir, $(a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla = (-a_3', 0, 0, 0) + K_\nabla$. También, $a_1 = (a_1 - a_6) + a_6 = a_3' + a_4'$ y $b_3 = -\alpha_3(a_4')$. Por lo tanto, $(a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) \in K$.

(iv) ψ *es un epimorfismo*. Es claro.

(v) *El siguiente diagrama es conmutativo*:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\gamma'} & D' & \xrightarrow{\delta'} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\psi(\alpha'(a)) = \psi((a, K_\nabla, 0, 0) + K) = (a, 0, L_\nabla, 0) + L = \gamma'(a)$, es decir, $\psi \circ \alpha' = \gamma'$.

$$\begin{aligned} \delta'(\psi((a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) + K) &= \\ \delta'((a_1, b_1, (a_2, b_2, b_3, \beta_2(b_2)) + L_\nabla, \beta_2(b_2)) + L) &= \\ \beta_2(b_2) &= \\ \beta'((a_1, (a_2, b_1, b_2, \beta_2(b_2)) + K_\nabla, b_3, \beta_2(b_2)) + K)&, \end{aligned}$$

es decir, $\delta' \circ \psi = \beta'$. Por lo tanto,

$$([E_1] + [E_2]) + [E_3] = [E_1] + ([E_2] + [E_3]).$$

$\square$

De este modo hemos demostrado que $(\mathrm{Ext}(C, A), +)$ **es un grupo abeliano**.

Referencias

[1] Dummit, D.S., Foote, R.M., *Abstract Algebra. Third Edition.* John Wiley & Sons Inc., Hobken, New Jersey, 2004.

[2] Grillet, P.A., *Abstract Algebra. Second Edition.* Graduate Texts in Mathematics, **242**, Springer, New York, 2007.

[3] Hilton, P.J., Stammbach, U. *A Course in Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, **4**, Springer, New York, 1971.

[4] Mac Lane, S. *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **114**, Springer, Berlin Heidelberg, 1963.

[5] Weibel, C.A., *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, England, 1994.

Dirección del autor
Héctor Gabriel Salazar Pedroza
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `hgabrielsp@yahoo.com`