Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. II, junio 2011, 29–40

LA TEORÍA ZF^-

JUAN CARLOS AGUILAR FRANCO

RESUMEN. En esta nota daremos una definición en la teoría ZFE de la noción de encaje elemental entre modelos de ZFE, aun si éstos son clases propias. Lo realizamos mediante la definición de estructura dócil.

1. Introducción y preliminares

Los conceptos e ideas que se desarrollan en esta nota están basados en un resultado que el Dr. Ronald Jensen planteó hace tiempo para poder generalizar algunas de las ideas más importantes en la teoría de modelos.

Una de las herramientas fundamentales en la teoría de conjuntos moderna es la de encaje elemental. Este tipo de funciones son bien conocidas en la teoría de modelos.

En la teoría moderna de conjuntos encontraremos frecuentemente "modelos" de la teoría de conjuntos que no son conjuntos sino clases propias. También es frecuente la necesidad de "definir" en ZFE encaje elemental. El propósito de esta nota es presentar una forma de definir encaje elemental en ZFE, aun si los modelos involucrados son clases propias.

A continuación se proporcionan algunas definiciones útiles; consideraremos como el universo a la clase de todos los conjuntos V, el cual se define como $V = \{x : x = x\}$. Las clases que se trabajan, se les llama términos clase y son aquellas clases que se pueden caracterizar mediante una fórmula del lenguaje: $A = \{x|\varphi(x)\}$.

Las estructuras que consideraremos son $\in$-estructuras, es decir, la estructura interpreta el símbolo de relación binaria $\in$.

Para poder construir la teoría de conjuntos, es necesario hacer algunas precisiones, como por ejemplo, los axiomas en los cuales se basa la teoría además del lenguaje en el cual trabajaremos.

Respondiendo a lo mencionado en el párrafo anterior, se establece que nuestro lenguaje formal será el de la teoría de conjuntos (LTC) que consiste en lo siguiente:

1. Relaciones de igualdad y pertenecia $(=, \in)$.
2. Conectivos lógicos: $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\neg$ (no), $\exists$ (existe), $\forall$ (para todo), $\rightarrow$ (implica) y $\leftrightarrow$ (si y sólo si).
3. Variables: $u, v, x, y, z, v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ (un conjunto numerable de símbolos para variables.
4. Paréntesis: (izquierdo,) derecho y "," coma.

Al utilizar la relación de igualdad implícitamente están incluidos los siguientes axiomas (de igualdad):

1. Reflexividad $\forall x(x = x)$.
2. Transitividad $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C30, 03C55, 03C62 .
Palabras clave. Teoría de conjuntos, Teoría de modelos, ZFE^-, encaje elemental, estructura dócil.

3. Simetría $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$.

La teoría de Zermelo-Fraenkel-Axioma de elección (ZFE) consiste en los siguientes axiomas:

- *Existencia:* Existe un conjunto que no tiene elementos. En símbolos: $\exists x \forall y \neg(y \in x)$.
- *Extensionalidad:* Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos. En símbolos: $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$.
- *Parejas:* Para cada dos conjuntos existe un tercero que tiene exactamente a los dos conjuntos originales como elementos.
  En símbolos: $\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$.
- *Unión:* La unión de un conjunto es un conjunto.
  En símbolos: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u))$.
- *Comprensión:* Para cada conjunto a y para cada fórmula de LTC φ, posiblemente con parámetros, existe un conjunto b que contiene exactamente a aquellos elementos de a que satisfacen φ:
  $$\forall \vec{v} \forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, \vec{v}))).$$
- *Potencia:* Para cada conjunto a existe un conjunto b, cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de a:
  $$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall u(u \in z \to u \in x)).$$
- *Infinito:* Existe un conjunto que contiene al conjunto vacío y es cerrado respecto a la operación sucesor: $x \mapsto x \cup \{x\}$. En símbolos:
  $$\exists x(\exists y(y \in x \wedge \forall z \neg(z \in y)) \wedge$$
  $$\forall y \exists z(y \in x \to (z \in x \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow (u \in y \vee u = y))))).$$
- *Reemplazo:* Si se sustituye cada elemento de un conjunto a por su imagen respecto a una relación funcional φ se obtiene un conjunto. En símbolos:
  $$\forall \vec{v}(\forall x \forall y \forall z((\varphi(x, y, \vec{v}) \ \wedge \varphi(x, z, \vec{v})) \to y = z) \to$$
  $$\forall y \forall z \forall w(w \in z \leftrightarrow \exists u(u \in y \wedge \varphi(u, w, \vec{v})))).$$
- *Fundación:* Si una propiedad es cierta para al menos un conjunto, entonces la propiedad se cumple para algún conjunto y no lo hace para los elementos de este conjunto. En particular, si $\varphi(x, y)$ es la fórmula $x \in y$, se asegura que todo conjunto tiene un elemento $\in$-mínimo. En símbolos:
  $$\forall \vec{v}(\exists x \varphi(x, \vec{v}) \to \exists y(\varphi(y, \vec{v})) \wedge \forall z(z \in y \to \neg\varphi(z, \vec{v}))).$$
- *Axioma de elección* Para cada conjunto no vacío a formado de conjuntos ajenos entre sí, existe un conjunto b que intersecta a cada elemento de a en exactamente un elemento. En símbolos:
  $$\forall x \exists y((\forall z(z \in x \to \exists u u \in z) \wedge$$
  $$\forall v \forall w((v \in x \wedge w \in x \wedge \neg v = w) \to \neg \exists u(u \in v \wedge u \in w))) \wedge$$
  $$\forall z(z \in x \to \exists u(u \in z \wedge u \in y \wedge$$
  $$\forall v(v \in z \wedge v \in y) \to v = u)))).$$

Definición 1.1. Un $\in$-*término* es una variable o un término clase.

Definición 1.2. Sean W un $\in$-término y φ una fórmula de LTC tales que φ y W no tienen variables libres en común. Definimos la *relativización de φ con respecto a W*, denotada por φ^W, mediante recursión sobre la construcción de fórmulas de LTC como sigue:

1. $(v_i = v_j)^W = v_i = v_j$
2. $(v_i \in v_j)^W = v_i \in v_j$
3. $(\neg\psi)^W = \neg\psi^W$
4. $(\psi \wedge \chi)^W = \psi^W \wedge \chi^W$

5. $(\psi \vee \chi)^W = \psi^W \vee \chi^W$
6. $(\psi \to \chi)^W = \psi^W \to \chi^W$
7. $(\forall v_i \psi)^W = \forall v_i(v_i \in W \to \psi^W)$
8. $(\exists v_i \psi)^W = \exists v_i(v_i \in W \to \psi^W)$.

Si Ψ es un conjunto de fórmulas, entonces Ψ^W denota el conjunto $\{\psi^W | \psi \in \Psi\}$.

Definición 1.3. Se escribe $\pi : M \to_{\Sigma_0} N$, *la preservación de validez de* Σ_0*-fórmulas entre* M *y* N, si y sólo si para cualquier Σ_0-fórmula φ del lenguaje ocurre que

$$M \models \varphi(x) \leftrightarrow N \models \varphi(\pi(x)).$$

Definición 1.4. Sean W, W' $\in$-términos con $W \subseteq W'$ y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una *LTC* fórmula que no tiene variables en común con W ni con W'. Decimos que φ *es* W*-*W'*-absoluta* si

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in W(\varphi^W(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{W'}(x_1, \ldots, x_n)).$$

En particular, a las fórmulas W-V-absolutas se les llama simplemente W-absolutas.

La fórmula φ es W-absoluta si y sólo si

$$\forall x_1 \in W \ldots \forall x_n \in W(\varphi^W \leftrightarrow \varphi).$$

Lema 1.1. *Las* Σ_0*-fórmulas son* W*-*W'*-absolutas para cualesquiera* W *y* W' *modelos transitivos con* $W \subseteq W'$.

Demostración. Sean $\varphi(\vec{x})$ una Σ_0-fórmula, y W, W' modelos transitivos con $W \subseteq W'$.

Supongamos que $W \models \varphi(\vec{x})$ con $x_1, \ldots, x_n \in W$ y debemos mostrar que $W' \models \varphi(\vec{x})$.

Procedemos por inducción en la construcción de φ.

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i \in x_j$.

Dado que se satisface $W \models x_i \in x_j$ y que $W \subseteq W'$ se concluye que se satisface $W' \models x_i \in x_j$.

Ahora si $W' \models \varphi(x_1, \ldots, x_j)$, es decir si $W' \models x_i \in x_j$ habrá que demostrar que $W \models x_i \in x_j$, pero esto es inmediato, pues los testigos están en W, por lo tanto, $W \models x_i \in x_j$.

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i = x_j$.

Por hipótesis y dado que $W \subseteq W'$ se obtiene que $W' \models x_i = x_j$.

Si $W' \models x_i = x_j$ dado que $x_i, x_j \in W$, se concluye que

$$W \models x_i = x_j.$$

Sea $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, donde ψ_1 y ψ_2 son W-W'-absolutas.

Se supone $W \models \varphi \leftrightarrow W \models \psi_1 \wedge \psi_2$, entonces, por definición de conjunción se obtiene que $W \models \psi_1$ y $W \models \psi_2$, aplicando la hipótesis se deduce que $W' \models \psi_1$ y $W' \models \psi_2$, de donde se concluye que $W' \models \psi_1 \wedge \psi_2$, es decir $W' \models \varphi$.

Dado que $x_1, \ldots, x_n \in W$ y si $W' \models \varphi$ entonces $W' \models \psi_1 \wedge \psi_2$ por definición de la conjunción, se obtiene $W' \models \psi_1$ y $W' \models \psi_2$, porque los $x_i \in W$, para todo $1 \leq i \leq n$, se satisface que $W \models \psi_1$ y $W \models \psi_2$, es decir, $W \models \psi_1 \wedge \psi_2$.

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$ con ψ una fórmula W-W'-absoluta.

Si $W \models \varphi$ entonces $W \models \neg\psi$, por hipótesis $W' \models \neg\psi$, es decir $W' \models \varphi$.

Aquí si $W' \models \neg\psi$ se sigue que $W \models \neg\psi$, pues $x_i \in W \subseteq W'$.

Sea $\varphi(z, \vec{x}) \equiv \exists z \in u\psi(z, \vec{x})$, donde ψ es W-W'-absoluta.

Si $W \models \exists z \in u\psi(z, \vec{x})$, es decir existe un testigo en W, tal que $W \models \psi(a, \vec{x})$, por hipótesis y dado que $W \subseteq W'$ se concluye que $W' \models \psi(a, \vec{x})$, es decir,

$$W' \models \exists z \in u\psi(z, \vec{x}).$$

Aquí, al igual que en los casos anteriores, el testigo está en W, por lo tanto en W se satisface φ. □

Lema 1.2. *Las siguientes expresiones son definibles en ZFE:*

1. *u es transitivo.*
2. *$\langle u, \in\rangle \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.*
3. *$\pi : V \to W$.*
4. *$\pi[V]$.*

Demostración. 1. u es transitivo $\leftrightarrow \forall x \in u \forall y \in x(y \in u)$ es una fórmula en ZFE.

2. $\langle u, \in\rangle \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ significa que:

Si $\varphi \equiv x_i \in x_j$ existen $a_i, a_j \in u$ tal que $a_i \in a_j$.

Si $\varphi \equiv x_i = x_j$ existen $a_i, a_j \in u$ tal que $a_i = a_j$.

Si $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in u$ tal que

$$\psi_1[a_1, \ldots, a_n] \wedge \psi_2[a_1, \ldots, a_n].$$

Si $\varphi \equiv\neg\psi$ entonces para todo $a_1, \ldots, a_n \in u$ ocurre $\neg\psi[a_1, \ldots, a_n]$.

Para $\varphi \equiv \exists x\psi$ significa que existen $b, a_1, \ldots, a_n \in u$ con

$$\varphi[b, a_1, \ldots, a_n].$$

3. $\pi : V \to W \leftrightarrow \forall x \in V \exists y \in W((x, y)) \in \pi$.
4. $\pi[V] = \{\pi(v) | v \in V\}$.

□

Definición 1.5. Sea φ una Σ_0-fórmula, la *relación de satisfacción para Σ_0-fórmulas* se define como

$$\models^{\Sigma_0} \varphi[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \exists u(u \text{ es transitivo} \wedge$$
$$a_1, \ldots, a_n \in u \wedge \langle u, \in\rangle \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]).$$

Esto se justifica por la absolutez de las Σ_0-fórmulas.

Definición 1.6. Sean π, W términos clase. *La expresión $\pi : V \to_{\Sigma_0} W$ cofinal* es la fórmula:

W es transitivo $\wedge\ \pi : V \to W \wedge W = \bigcup \pi[V] \wedge$ para toda Σ_0-fórmula φ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n$ se cumple $\models^{\Sigma_0} \varphi[\vec{a}] \leftrightarrow \models^{\Sigma_0} \varphi[\pi(\vec{a})]$.

Por lo demostrado en el Lema anterior, se observa que tanto la relación de satisfacción como π cofinal, se pueden definir en ZFE, pues cada parte que compone a las expresiones que las definen son definibles en ZFE.

Definición 1.7. Sean π, W términos clase. π es un *encaje elemental* se define mediante el siguiente esquema:

$$\pi : V \to W \wedge W \text{ es transitivo } \wedge \forall \vec{v}(\varphi(\vec{v}) \leftrightarrow \varphi^W(\pi(\vec{v})))$$

para toda L-fórmula φ.

No es evidente cómo definir este esquema en ZFE dada la presencia de φ^W.

Con ZF^{-} se denota a la teoría que contiene a los axiomas de ZF sin el axioma de potencia, además de cambiar el esquema de reemplazo por:

$$\forall x \exists y \varphi(x,y) \to \forall u \exists v \forall x \in u \exists y \in v \varphi(x,y). \tag{1}$$

2. Estructuras dóciles

En esta sección se hace un estudio de las estructuras dóciles, herramienta indispensable para lograr el objetivo planteado.

A partir de ahora se considerará $L(A)$ el lenguaje que se obtiene al agregar $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$, un conjunto de nuevos predicados, al lenguaje L. Es importante señalar que la aparición de nuevos símbolos de predicado modifica la definición de Σ_0-fórmula, la cual es entonces la siguiente:

Definición 2.1. Una *Σ_0-fórmula de $L(A)$* es una fórmula en donde todos sus cuantificadores son acotados, en la fórmula pueden aparecer símbolos de predicado.

Definición 2.2. Sea N transitivo, $A \subset N$. Se dice que $\langle N, A\rangle$ es *dócil* si y sólo si $x \cap A \in N$ para todo $x \in N$.

Si A es un símbolo de predicado, $A \subseteq N$, por lo que puede ocurrir $x \cap A \notin N$ para algún (o todo) $x \in N$. Lo cual no se cumple si $\langle N, A\rangle$ es dócil. La estructura $\langle N, A_1, \ldots, A_n\rangle$ es dócil si $\langle N, A_1\rangle, \ldots, \langle N, A_n\rangle$ lo son.

En lo que sigue se considera a $\langle N, A_1, \ldots, A_n\rangle$ un ZF^{-}-modelo, donde los axiomas de ZFE consideran ahora fórmulas en $L(A)$.

Definición 2.3. Se escribirá $\pi : \langle N, \vec{A}\rangle \to_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}'\rangle$ si y sólo si para toda $L(A)$-fórmula Σ_0, φ y para toda $x_1, \ldots, x_n \in N$ se satisface:

$$\langle N, \vec{A}\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow \langle N', \vec{A}'\rangle \models \varphi[\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)].$$

Lema 2.1. *Sean $\pi : \langle N, \vec{A}\rangle \to_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}'\rangle$, donde N' es transitivo y $\langle N, A_1, \ldots, A_n\rangle$ dócil. Para $1 \leq i \leq n$ suponga que $A_i^{'} \subset N'$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a. $\pi : \langle N, \vec{A}\rangle \to_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}'\rangle$;
b. $\pi(x \cap A_i) = \pi(x) \cap A_i'$ *para* $x \in N$, $1 \leq i \leq n$.

Demostración. $(a) \to (b)$ Supongamos $\pi : \langle N, \vec{A}\rangle \to_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}'\rangle$ y lo que queremos demostrar es que $\pi(x \cap A_i) = \pi(x) \cap A_i'$ para $x \in N$, $1 \leq i \leq n$.

Sean $A_i \subseteq N$ para algún i y $x \in N$ arbitrario.
Dado que $\langle N, \vec{A}\rangle$ es dócil se deduce que $\langle N, A_i\rangle$ es dócil, por lo tanto $x \cap A_i \in N$.

Por otro lado se sabe que N' es transitivo y que $A_i' \subseteq N'$, con esta información se demuestran las dos contenciones.

$(\subseteq)$ Sea $z \in \pi(x \cap A_i)$. Dado que N es transitivo y π preserva LTC fórmulas debe ser el colapso de Mostowski, en consecuencia $z = \pi(y)$ para algún $y \in x \cap A_i$. Se sigue que $z \in \pi(x)$. Como π preserva Σ_0-fórmulas se tiene que si $\langle N, A\rangle \models Ax$ entonces $\langle N', A'\rangle \models A'\pi(x)$, ahora $y \in x \cap A_i$, por lo que $\pi(y) \in A_i'$, así que $z \in A_i'$.

$(\supseteq)$ Sea $z \in \pi(x) \cap A_i'$. Entonces $z = \pi(y)$ para algún $y \in x$ y $\langle N', A'\rangle \models A_i' z$, es decir, $\langle N', A'\rangle \models A_i'\pi(y)$, se deduce que $\langle N, A\rangle \models A_i y$, así que $y \in x \cap A_i$, por lo que

$z \in \pi(x \cap A_i)$.

$(b) \to (a)$ Por simplicidad en la notación, la demostración se realiza para $n = 1$, consideremos $A = A_1$.

Sean M transitivo, $u \subset M$ también transitivo y $x_1, \ldots, x_n \in u$ tales que satisfacen lo siguiente:

$$\langle M, A\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow \langle u, A \cap u\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]. \tag{2}$$

Para Σ_0-fórmulas φ, lo anterior se satisface por la absolutez de Σ_0-fórmulas, pues $\langle u, A \cap u\rangle$ es una subestructura de $\langle M, A\rangle$ y los testigos están en el universo de la estructura menor.

Si $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ es una fórmula del lenguaje de $\langle N, A\rangle$, sea $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(u, a, v_1, \ldots, v_n) = \varphi^{\langle u,a\rangle}$, es decir se obtiene al realizar la relativización de todos los cuantificadores de φ a u y de la sustitución de todas las fórmulas primitivas Ax por $x \in a$.

Entonces $\bar{\varphi}$ es una Σ_0-fórmula en el lenguaje L y para toda $u, a \in N$, $x_1, \ldots, x_n \in u$ se cumple que:

$$\langle N, A\rangle \models \bar{\varphi}[u, a, \vec{x}] \leftrightarrow \langle u, a\rangle \models \varphi[\vec{x}].$$

Sean $x_1, \ldots, x_n \in N$ arbitrarios y $u \in N$ transitivo, tal que $x_1, \ldots, x_n \in u$.

Sea φ es una Σ_0-fórmula. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle N, A\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] &\leftrightarrow \langle u, A \cap u\rangle \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \\ &\leftrightarrow \langle N, A\rangle \models \bar{\varphi}[u, A \cap u, x_1, \ldots, x_n] \\ &\leftrightarrow \langle N', A'\rangle \models \bar{\varphi}[\pi(u), \pi(A \cap u), \ldots, \pi(x_n)] \\ &\leftrightarrow \langle \pi(u), \pi(A \cap u)\rangle \models \varphi(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) \\ &\leftrightarrow \langle N', A'\rangle \models \varphi[\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)] \end{aligned}$$

por (2) y por $\pi(A \cap u) = A' \cap \pi(u)$. □

Lema 2.2. *Sea $\pi : N \to_{\Sigma_0} N'$ cofinal. Entonces N' es cerrado respecto a $x \cap y$, $x \cup y$, $\langle x, y\rangle$.*

Demostración. Para demostrar $x \cap y \in N'$ supongamos que $x, y \in N'$.

Por estar x y y en N' se sabe que $x \in \pi(x_0)$ y $y \in \pi(y_0)$, con $x_0, y_0 \in N$, pues π es cofinal. Sea $z = \{z_1 | z_1 \in x_0 \wedge z_1 \in y_0\}$.

La Σ_0-fórmula

$$\forall z_1 \in x_0 \forall z_1 \in y_0 \exists z_1 \in z(z_1 \in x \wedge z_1 \in y)$$

se satisface en $\langle N, A\rangle$, por lo tanto es valida en $\langle N', A'\rangle$ con

$$\pi(x_0), \pi(y_0), \pi(z),$$

en particular $x \cap y \in N'$.

Para observar que $x \cup y \in N'$ supongamos que $x, y \in N'$.

Por estar x y y en N' se sabe que $x \in \pi(x_0)$ y $y \in \pi(y_0)$, con $x_0, y_0 \in N$, pues π es cofinal. Sea $z = \{z_1 | z_1 \in x_0 \vee z_1 \in y_0\}$.

La Σ_0-fórmula

$$\forall z_1 \in x_0 \forall z_1 \in y_0 \exists z_1 \in z(z_1 \in x \vee z_1 \in y)$$

se satisface en $\langle N, A\rangle$, por lo tanto es válida en $\langle N', A'\rangle$ con $\pi(x_0)$, $\pi(y_0)$, $\pi(z)$, en particular $x \cup y \in N'$.

Si se demuestra que: $x_1, \ldots, x_n \in N' \to \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in N'$ para $i = 1, \ldots, n$ sea $x_i \in \pi(u_i), u_i \in N$ (π es cofinal).

Sea $u' = \{\langle z_1, \ldots, z_n\rangle | z_1 \in u_1, \ldots, z_n \in u_n\}$.

La Σ_0-fórmula

$$\forall x_1 \in u_1 \forall x_2 \in u_2 \ldots \forall x_n \in u_n \exists y \in u' y = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$$

se satisface en $\langle N, A\rangle$, por lo tanto también es verdadero en $\langle N', A'\rangle$ con $\pi(u_1)$, ..., $\pi(u_n)$, $\pi(u')$. En particular $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in N'$.

$\square$

Lema 2.3. *Sea $\pi : \langle N, A\rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'\rangle$ cofinal, donde $\langle N, A\rangle$ es dócil. Entonces existe un único A' tal que $\pi : \langle N, A\rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'\rangle$. $\langle N', A'\rangle$ es entonces también dócil.*

Demostración. Se demuestra primero la existencia.

Sea $A' = \bigcup_{x \in N} \pi(x \cap A)$.

Afirmación 1. $\pi : \langle N, A\rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'\rangle$

Demostración. Por el Lema 2.1 se debe de mostrar que: $\pi(x \cap A) = \pi(x) \cap A'$ para todo $x \in N$.

($\subseteq$) Es inmediato pues $\pi(x \cap A) \subseteq A'$ que es la unión de los $\pi(x \cap A)$ para todo $x \in N$.

($\supseteq$) Sea $z \in \pi(x) \cap A'$. Entonces $z \in \pi(y \cap A)$ para algún $y \in N$. Por lo tanto $z \in \pi(x) \cap \pi(y \cap A) = \pi(x \cap y \cap A) \subset \pi(x \cap A)$.

$\square$

Afirmación 2. $\langle N', A'\rangle$ es dócil.

Demostración. Sea $x \in N'$, $x \in \pi(u)$, suponga, sin pérdida de generalidad, que u es transitivo (pues los ZF^--modelos son cerrados respecto a CT). Entonces $\pi(u)$ es transitivo, así que $x \subset \pi(u)$. Por lo tanto, se satisface que

$$x \cap A' = x \cap \pi(u) \cap A' = x \cap \pi(u \cap A) \in N'.$$

$\square$

Para demostrar la unicidad suponga que existen dos conjuntos, sean A_1' y A_2' y se demostrará que son iguales.

Sea $z \in N'$. Por ser dóciles $\langle N', A_1'\rangle$ y $\langle N', A_2'\rangle$se tiene que $z \cap A_1' \in N'$ y que $z \cap A_2' \in N'$, ahora, dado que $\pi(z) \cap A_1' = \pi(z \cap A_1)$ y que $\pi(z) \cap A_2' = \pi(z \cap A_2)$ siempre que $\pi : \langle N, A\rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'\rangle$, entonces existen $x, w \in N$ tal que $z = \pi(x) = \pi(w)$, se concluye que $x = w$, de aquí se deduce que $A_1 = A_2$ y por lo tanto $A_1' = A_2'$, pues π es el colapso de Mostowski. $\square$

Lema 2.4. *$\langle N, A\rangle$ es un ZF^--modelo.*

Demostración. Los axiomas de ZFE que no involucran fórmulas se cumplen pues N es un modelo de ZFE, entonces sólo debemos probar los axiomas que involucran $L(A)$-fórmulas.

- Comprensión: Sea φ una $L(A)$ fórmula. Entonces se cumple lo siguiente $\langle N, A\rangle \models \forall v \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, v)))$.

  Es decir debemos mostrar que

  $$\forall v \in N \forall x \in N \exists y \in N \forall z \in N (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi^N(z, v))).$$

  Caso 1: Si en φ no aparece A, no hay nada que probar, pues N es modelo de ZFE.

Caso 2: Si en φ aparece A, se hace la relativización a N de todos los cuantificadores y la sustitución de toda aparición de Ax por $x \in a$. Ahora, dado que el axioma es valido en V, el conjunto y existe y sólo basta mostrar que $y \in N$, pero éste está pues $x \in N$ y por transitividad de N, implica que $x \subseteq N$, es decir, si $z \in x$, entonces $z \in N$ y además dado que φ está relativizado a N, todo se queda en N, por lo tanto $y \in N$.

- Reemplazo:

$$\forall \vec{v} \in N(\forall x \in N \forall y \in N \forall z \in N((\varphi^N(x, y, \vec{v}) \ \wedge \varphi^N(x, z, \vec{v}))$$

$$\rightarrow y = z) \rightarrow \forall y \in N \forall z \in N \forall w \in N(w \in z \cap W \leftrightarrow$$

$$\exists u \in N(u \in y \cap W \wedge \varphi^N(u, w, \vec{v})))).$$

Al igual que en el axioma anterior existen dos casos:

Caso 1: Si en φ no aparece A, no hay nada que probar, pues el axioma se satisface en V y por lo tanto en N, pues N es modelo de ZFE.

Caso 2: Si en φ aparece A, realizamos la relativización de φ a N y toda aparición de Ax la sustituimos por $x \in a$, además por ser válido el axioma en V, sólo basta mostrar que $u \in N$.

Para eso, se observa que $y \cap N = y$ y que por la transitividad de N, si $u \in y \cap N$ entonces $u \in N$ y por estar φ relativizada a N, todo está en N.

□

Hasta aquí se ha utilizado muy poco el hecho de que N es un ZF^--modelo, pero en el siguiente lema se utilizará fuertemente.

Lema 2.5. *Sea $\pi : N \rightarrow_{\Sigma_0} N'$ cofinal. Entonces $\pi : N \prec N'$. Por lo tanto N' es también un ZF^--modelo.*

Demostración. Para cada fórmula $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ del lenguaje de N sea

$$A_\varphi = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle | \langle N, A\rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Afirmación: $\langle N, A_{\varphi_i}\rangle$ es dócil.

Demostración. Sea $x \in N$. Por demostrar que $x \cap A_{\varphi_i} \in N$.

Basta mostrar que $\{y \in x | \langle N, A\rangle \models \varphi(y)\}$ es un conjunto, y lo es por el axioma de comprensión el cual es válido en $\langle N, A\rangle$, pues se mostró en el Lema 2.4 que $\langle N, A\rangle$ es un ZF^--modelo. □

Dado que cada $\langle N, A_{\varphi_i}\rangle$ es dócil para todo i, entonces

$$\langle N, A_{\varphi_1}, \dots, A_{\varphi_n}\rangle$$

es dócil y por lo tanto es un ZF^--modelo. Sea $\pi : \langle N, A_\varphi\rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_\varphi\rangle$.

Entonces por el Lema 2.3 A'_φ es único y $\langle N', A'_\varphi\rangle$ es dócil.

Ahora lo que falta demostrar es que es un encaje elemental y eso se hace por inducción en la construcción de fórmulas.

Afirmación 1. Sea $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$. Entonces $A'_\varphi \subset N'^n$.

Demostración. Sea $z \in A'_\varphi$, $z \in \pi(u)$, con u transitivo. Entonces se satisface en $\langle N, A_\varphi\rangle$ que $\forall y \in u(A_\varphi y \rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in uy = \langle x_1, \dots x_n\rangle)$, es decir, se satisface la misma Σ_0-fórmula pero con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\varphi\rangle$. □

Afirmación 2. $A'_\varphi = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle | \langle N', A'\rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n]\}$.

Demostración. La prueba se sigue por inducción en la construcción de fórmulas.

Sea φ una fórmula atómica, por ejemplo $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = v_i \in v_j$.

Entonces para $x_1, \ldots, x_n \in \pi(u)$, con u transitivo se satisface en N que

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in u(z = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \wedge x_i \in x_j)).$$

Es decir se satisface la misma Σ_0-fórmula con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\varphi \rangle$.

Sea $\varphi(v_1, \ldots, v_n) \equiv (v_i = v_j)$. Entonces para $x_1, \ldots, x_n \in \pi(u)$, con u transitivo se satisface en N que

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in u(z = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \wedge x_i = x_j)).$$

Es decir, se satisface la misma Σ_0-fórmula con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\varphi \rangle$.

Ahora sea $\varphi = \varphi_0 \vee \varphi_1$. Se debe mostrar que

$$A'_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \vee A'_{\varphi_1} z).$$

Sea $z \in \pi(u)$ con u transitivo. Entonces

$$\pi : \langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle$$

y en $\langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle$ se satisface:

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \vee A_{\varphi_1} z)).$$

Y por lo tanto se satisface la misma fórmula con $\pi(u)$ en

$$\langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle.$$

Sea $\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_1$. Se debe mostrar que

$$A'_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \wedge A'_{\varphi_1} z).$$

Sea $z \in \pi(u)$ con u transitivo. Entonces

$$\pi : \langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle$$

y en $\langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle$ se satisface:

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \wedge A_{\varphi_1} z)).$$

Y por lo tanto se satisface la misma fórmula con $\pi(u)$ en

$$\langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle.$$

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$. Se debe mostrar que

$$A'_\varphi z \leftrightarrow \neg(A'_\psi z).$$

Sea $z \in \pi(u)$ con u transitivo. Entonces

$$\pi : \langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle$$

y en $\langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle$ se satisface:

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow \neg(A'_\psi z)).$$

Y por lo tanto se satisface la misma fórmula con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle$.

Ahora sea $\varphi = \exists w\psi, \psi = \psi(w, v_1, \ldots, v_n)$. Entonces

$$\pi : \langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle.$$

$\square$

Afirmación 3. $A'_\varphi \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \leftrightarrow \exists y A'_\psi \langle y, x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Demostración. Para ($\Leftarrow$) sea $A'_\psi\langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle$, con $\langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle \in \pi(u)$ y u transitivo. Considere $u' = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle | x_1, \ldots, x_n \in u\}$. Entonces se satisface en $\langle N, A_\psi, A_\varphi\rangle$:

$$\forall z \in u \forall y x_1 \ldots x_n \in u((z = \langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle \wedge A_\psi z) \rightarrow$$
$$\exists z' \in u'(z' = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \wedge A_\psi z')),$$

es decir la misma Σ_0-fórmula se satisface en $\langle N', A'_\psi, A'_\varphi\rangle$ con $\pi(u)$ y $\pi(u')$.

Para ($\Rightarrow$) se debe mostrar que si $A'_\varphi\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ entonces

$$\exists y A'_\psi\langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle.$$

Sean $A'_\varphi\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ con $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in \pi(u)$ y u transitivo. Entonces en $\langle N, A_\psi, A_\varphi\rangle$ se satisface:

$$\forall z \in u \forall y \forall x_1 \ldots x_n \in u(\exists z' \in u(z' = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \wedge A_\varphi z') \rightarrow$$
$$z = \langle y, x_1, \ldots, x_n\rangle \wedge A_\psi z).$$

Por lo tanto se satisface la misma Σ_0-fórmula con $\pi(u)$ en

$$\langle N', A'_\psi, A'_\varphi\rangle.$$

□

Una vez realizado lo anterior se inicia la prueba de encaje:

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i \in x_j$ una Σ_0-fórmula. Por la preservación de Σ_0-fórmulas se tiene que $\langle N, A\rangle \models x_i \in x_j$ entonces $\langle N', A'\rangle \models \pi(x_i) \in \pi(x_j)$.

Sea $\varphi(\vec{x}) \equiv \psi_1(\vec{x}) \wedge \psi_2(\vec{x})$ con $\langle N, A\rangle \models \psi_i(\vec{x}) \leftrightarrow \langle N', A'\rangle \models \psi_i(\vec{\pi(x)})$ para $i = 1, 2$.

Suponga $\langle N, A\rangle \models \psi_1 \wedge \psi_2$ por definición de la conjunción se obtiene $\langle N, A\rangle \models \psi_1$ y $\langle N, A\rangle \models \psi_2$; por hipótesis se obtiene $\langle N', A'\rangle \models \psi_1$ y $N' \models \psi_2$ por lo tanto $\langle N', A'\rangle \models \psi_1 \wedge \psi_2$.

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$, suponga que $\langle N, A\rangle \models \varphi$. Entonces $\langle N, A\rangle \models \neg\psi$ por lo tanto $\langle N', A'\rangle \models \neg\psi$, se concluye que $\langle N', A'\rangle \models \varphi$.

Sea $\varphi \equiv \exists x \psi(a, x)$ con

$$\langle N, A\rangle \models \psi(a, x) \leftrightarrow \langle N', A'\rangle \models \psi(\pi(a), \pi(x)).$$

Suponga que $\langle N, A\rangle \models \exists x \psi(a, x)$. Sea

$$A_\psi = \{x | \langle N, A\rangle \models \psi(a, x)\} \subset N.$$

Habrá que demostrar que $\langle N, A_\psi\rangle$ es dócil.

Sea $y \in N$. Por demostrar que $y \cap A_\psi \in N$. Basta mostrar que $\{x \in y | \langle N, A\rangle \models \psi(a, x)\}$ es un conjunto y lo es por el axioma de comprensión pues $\langle N, A\rangle \models ZF^-$, por lo tanto es dócil.

$\Rightarrow$) Dado que $\langle N, A\rangle \models \exists x \psi(a, x)$ se tiene que existe $b \in N$ tal que $\langle N, A\rangle \models \psi(a, b)$ por lo tanto $b \in A_\psi$, es decir $\pi(b) \in A'_\psi$ de donde se obtiene que $\langle N', A'\rangle \models \psi(\pi(a), \pi(b))$ se concluye que $\langle N', A'\rangle \models \exists x \psi(\pi(a), x)$.

$\Leftarrow$) Suponga $\langle N', A'\rangle \models \exists x \psi(\pi(a), x)$, entonces $\langle N', A'\rangle \models \exists x \in \pi(b) A'_\psi(\pi(a), x)$ por lo tanto

$$\langle N', A'\rangle \models \exists x \in \pi(b) A'_\psi(\pi(a), x)$$
$$\langle N, A\rangle \models \exists x \in b A_\psi(a, x)$$
$$\langle N, A\rangle \models \exists x \in b \psi(a, x)$$

$$\langle N, A\rangle \models \exists x\psi(a, x).$$

Con lo que la demostración se acaba. □

Como resultados adicionales se tienen los siguientes:

Lema 2.6. *Sea $\pi : M \to_{\Sigma_0} N$-cofinal. Entonces se satisface $\pi : M \to_{\Sigma_1} N$.*

Demostración. Sea φ una Σ_1-fórmula, $\varphi \equiv \exists x\psi(x, \vec{y})$ con $\vec{y} \in M$, y ψ una Σ_0-fórmula. Se debe mostrar que $M \models \varphi \leftrightarrow N \models \varphi$.

$\Rightarrow$) Se supone cierto

$$M \models \varphi,$$

es decir

$$M \models \exists x\psi(x, \vec{y}),$$

entonces existe $a \in M$ tal que

$$M \models \psi(a, \vec{y}),$$

por hipótesis se obtiene

$$N \models \psi(\pi(a), \pi(\vec{y}))$$

por lo tanto

$$N \models \exists x\psi(x, \pi(\vec{y})).$$

$\Leftarrow$) Se supone que

$$N \models \exists x\psi(x, \pi(\vec{y})),$$

entonces existe $b \in N$ tal que

$$N \models \psi(b, \pi(\vec{y})),$$

por definición de cofinal existe $u \in M(b \in \pi(u)))$, por lo tanto

$$N \models \exists x \in \pi(u)\psi(x, \pi(\vec{y})),$$

por hipótesis se obtiene

$$M \models \exists x \in u\psi(x, \vec{y}),$$

de donde se deduce

$$M \models \exists x\psi(x, \vec{y}).$$

□

Lema 2.7. *Sean $\langle N, A\rangle$ y $\langle N', A'\rangle$ dos L-estructuras. Suponga que φ es una Σ_n-fórmula y $\langle N, A\rangle \models \varphi[\vec{x}]$ ocurre si y sólo si ocurre $\langle N', A'\rangle \models \varphi[\vec{x}]$. Entonces para ψ una Π_n-fórmula se cumple que $\langle N, A\rangle \models \psi[\vec{x}]$ ocurre si y sólo si $\langle N', A'\rangle \models \psi[\vec{x}]$ ocurre.*

Demostración. Supongamos que la conclusión no es cierta, es decir existe una Π_n-fórmula ψ tal que $\langle N, A\rangle \models \psi$ y $\langle N', A'\rangle \not\models \psi$.

Sea $\psi \equiv \forall u\varphi_0$ una Π_n-fórmula. Entonces φ_0 debe de ser una Σ_{n-1}-fórmula.

Se aplica la hipótesis a φ_0 y se obtiene que $\langle N, A\rangle \models \varphi_0$ si y sólo si $\langle N', A'\rangle \models \varphi_0$, pues es una Σ_{n-1}-fórmula.

Además por hipótesis se sabe que $\langle N', A'\rangle \not\models \psi$, lo que es equivalente a $\langle N', A'\rangle \models \neg\psi$, es decir

$$\langle N', A'\rangle \models \neg\forall u\varphi_0$$

por lo tanto

$$\langle N', A'\rangle \models \exists u\neg\varphi_0$$

observe que el lado derecho es una Σ_n-fórmula y por hipoótesis se obtiene

$$\langle N, A\rangle \models \exists u\neg\varphi_0$$

es decir

$$\langle N, A\rangle \models \neg\forall u\varphi_0$$

que es equivalente a

$$\langle N, A \rangle \not\models \psi$$

lo cual es una contradicción. □

Referencias

[1] Jensen, R., Grossekardinalzahlen. Notas sin publicar.
[2] Kanamori, A., The Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings. Second Edition, Springer, 2009.

Dirección del autor:
Juan Carlos Aguilar Franco
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: jcafranco@gmail.com