Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. II, junio 2011, 59–66

PROPIEDADES RELACIONADAS A LA COMPACIDAD DEFINIDAS POR REDES

MAIRA MADRIZ MENDOZA

Resumen. Se definen y se estudian propiedades relativas a la compacidad secuencial.

1. Introducción

En este artículo consideramos la relación entre las propiedades de convergencia y puntos de acumulación de sucesiones, redes y κ-redes. Se brindan generalizaciones de los espacios de Fréchet y secuenciales, con el fin de hacer algunas observaciones. Como las propiedades de tipo compacidad se definen usualmente en términos de cubiertas más que en términos de sucesiones y redes, para un cardinal arbitrario κ se prueban κ-generalizaciones de varios teoremas famosos sobre los espacios numerablemente compactos y secuencialemente compactos. Se muestra, entre otras cosas, que el producto finito de espacios fuertemente κ-compactos es fuertemente κ-compacto; mejor aún, se enuncia que el producto numerable de espacios fuertemente κ-compactos es fuertemente κ-compacto; el producto de un espacio inicialmente κ-compacto con un espacio fuertemente κ-compacto es inicialmente κ-compacto y, el producto de un espacio κ-red con un espacio κ-red, T_3 y localmente fuertemente κ-compacto es un espacio κ-red.

Una parte muy importante de muchas áreas de las matemáticas es la aplicación e investigación de la convergencia. Por ejemplo, en el análisis clásico se estudia la convergencia de series y sucesiones, en análisis funcional la convergencia de funciones y operadores; mientras que, en el análisis real, la convergencia sirve para expresar la continuidad de una función o para expresar el hecho de que un punto está cerca de un conjunto. Todas las aplicaciones anteriores están estrechamente ligadas al concepto de sucesión. No obstante, para la topología general las sucesiones suelen ser insuficientes, como se ilustra en [4], [6], [7], [13] y [19], debido a que normalmente una topología no se determina por sus sucesiones convergentes, pero sí por sus sucesiones generalizadas, mejor conocidas como redes. Las redes fueron introducidas en 1922 por Moore y Smith en [17], pero no fue sino hasta 1937 que la convergencia en topología general fue descrita en términos de redes, por Birkhoff en [4].

Cabe mencionar que en la literatura, algunos topólogos las llaman *supersucesiones* debido a que dejan el nombre castellano de *red* para el concepto de *network*. Para evitar posibles confusiones, daremos la definición de lo que entendemos en este trabajo por red. Para tal efecto, sea D un conjunto no vacío y $\leq$ una relación binaria en D. Se dice que $(D, \leq)$ es un *conjunto dirigido* si $\leq$ es reflexivo, transitivo y dirigido (para todos $d, d' \in D$ existe un $d^* \in D$ tal que $d \leq d^*$ y $d' \leq d^*$).

Definicion 1.1. Sea X un espacio topológico. Una *red* f en X es un mapeo $f : D \longrightarrow X$, donde D es un conjunto dirigido.

Obsérvese que, si el conjunto dirigido es el conjunto de los números naturales con el orden usual, entonces f se llama sucesión.

Hodel ha mostrado recientemente en [10] la utilidad de una cierta clase de redes, a las que denomina κ-redes. Una aproximación similar fue empleada por Meyer en [16].

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60J99 .
Palabras clave. Espacio κ-red, κ-Fréchet, fuertemente κ-compacto, inicialmente κ-compacto, Fréchet, secuencial, Whyburn, espacio disperso T_3.

En el presente trabajo, todos los espacios son de Hausdorff y κ denotará un cardinal infinito y, en particular, diremos que una *red* tiene cardinalidad κ si su dominio tiene cardinalidad κ.

Definicion 1.2. Una κ*-red* en X es una función $f : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$, donde $\kappa^{<\omega} = \{F : F$ es un subconjunto finito de $\kappa\}$ y es dirigido por $\subseteq$. La κ-red f también se denota por $\langle x_F : F \in \kappa^{<\omega}\rangle$, donde $x_F = f(F)$ para cada $F \in \kappa^{<\omega}$.

Nótese que una κ-red tiene cardinalidad κ.

Definicion 1.3. Sea X un espacio, $q \in X$ y $f : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$ una κ-red en X.

a) El punto q es un *punto de acumulación* de f si dada cualquier vecindad abierta V de x y cualquier $F \in \kappa^{<\omega}$, existe $G \in \kappa^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $f(G) \in V$.
b) Decimos que una κ-red f *converge a* x, si para cualquier vecindad abierta V de x existe $F \in \kappa^{<\omega}$ tal que $f(G) \in V$ para todo $G \in \kappa^{<\omega}$ con $F \subseteq G$.

Sea X un espacio topológico. El *carácter en un punto* $p \in X$, denotado por $\chi(p, X)$, es la mínima cardinalidad de una base local para p.

Lema 1.1 ([10])**.** *Sean X un espacio y $p \in X$.*

1. *Si f es una κ-red en X y f converge a p, entonces p es un punto de acumulación de f.*
2. *Si $\chi(X, p) \leq \kappa$ y $p \in \operatorname{cl} A$, entonces existe una κ-red g en A tal que g converge a p.*

Definicion 1.4. Se dice que $g : (D_1, <_1) \longrightarrow X$ es una emphsubred de $f : (D_2, <_2) \longrightarrow X$ si existe $\rho : D_1 \to D_2$ tal que $g = f \circ \rho$ y para cada $d_0 \in D_2$ existe $e_0 \in D_1$ tal que si $e \geq_1 e_0$, entonces $\rho(e) \geq_2 d_0$. Si $D_1 = D_2 = \kappa^{<\omega}$, un mapeo ρ con las propiedades anteriores será llamado un *mapeo κ-red.*

Lema 1.2 ([10])**.** *Sea X un espacio. Si f es una red de cardinalidad κ en X y p es un punto de acumulación de f, entonces existe una λ-subred g de f que converge a p (para alguna λ).*

Lema 1.3. *Sean X un espacio, f una red en X y g una subred de f; entonces se satisfacen las siguientes:*

1. *Si f converge a p, entonces g converge a p.*
2. *Si p es un punto de acumulación de g, entonces p es un punto de acumulación de f.*

2. Espacios κ-Fréchet y κ-red

En este apartado consideramos la relación entre las propiedades de convergencia y puntos de acumulación de sucesiones, redes y κ-redes.

Teorema 2.1 ([10])**.** *Sean X un espacio y $p \in X$. Para cualquier ω-red $f : \omega^{<\omega} \longrightarrow X$ existe una sucesión $g : \omega \longrightarrow X$ que es una subred de f y que satisface lo siguiente:*

(1) *Si $f \longrightarrow p$, entonces $g \longrightarrow p$;*
(2) *Si p es un punto de acumulación de g, entonces p es un punto de acumulación de f.*

Demostración. Definimos $\phi : \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$ por $\phi(n) = \{0, 1, \ldots, n\}$ para cada $n \in \omega$. Entonces $g = f \circ \phi$ es una subred de f. En efecto, sea $F = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\} \in \omega^{<\omega}$ donde $a_j < a_{j+1}$ si $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. Obsérvese que $k \geq a_m$ implica que

$$\phi(k) = \{0, 1, \ldots, k\} \supseteq \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}.$$

Las propiedades (1) y (2) son consecuencia de que g es una subred de f. □

Los espacios de Fréchet y secuenciales pertenecen al folklore casi desde los orígenes de la topología general. Sin embargo, tales espacios fueron estudiados por primera vez como los conocemos actualmente a partir de 1965 por Franklin en [8] y [9]. Los espacios de Fréchet y secuenciales son generalizaciones de los espacios primero numerables y han sido objeto de estudio en distintas áreas de las matemáticas. A continuación, veamos que se pueden utilizar *ω-redes* en el lugar de *sucesiones* en su definición.

- X es de *Fréchet* si y sólo si para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ y para cualquier $x \in \operatorname{cl} A$ existe una ω-red $\langle x_F \rangle \subseteq A$ que converge a x.
- X es *secuencial* si y sólo si para cualquier subconjunto no cerrado $A \subseteq X$ existe una ω-red $\langle x_F \rangle \subseteq A$ que converge a algún $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$.

Ahora analizaremos hasta que punto las redes se pueden limitar a κ-redes en una teoría general de convergencia y puntos de acumulación. Sea $(D, \leq)$ un conjunto dirigido; nótese que la relación $\leq$ no es necesariamente antisimétrica y en tal caso, se puede definir la relación de equivalencia $\sim$ en $D \times D$ como sigue:

$$d \sim e \Leftrightarrow d \leq e \text{ y } e \leq d.$$

Entonces $(D/\sim, \preceq)$ definido por $[d] \preceq [e] \Leftrightarrow d \leq e$ es un conjunto dirigido en que $\preceq$ es antisimétrico.

Lema 2.2 ([10])**.** *Sea $f : (D, <) \longrightarrow X$ una red en X; para cada $[d] \in D/\sim$ escogemos $e_d \in [d]$ y definimos $\phi : D/\sim \longrightarrow D$ por $\phi([d]) = e_d$. Entonces, $f \circ \phi$ es una subred de f.*

Demostración. Dado $d_0 \in D$, si $[c] \geq [d_0]$ entonces $\phi([c]) = e_c \geq d_0$. Por tanto, $f \circ \phi$ es una subred de f. □

Lema 2.3. *Sea $f : (D, \ll) \longrightarrow X$ una red en X tal que $|D| = \kappa$ y $\ll$ es antisimétrico. Entonces existe una κ-subred $g : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$ de f.*

Lema 2.4 ([10])**.** (Propiedad de expansión) *Sea X cualquier espacio; si $\varphi : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X$ es una λ-red en X, entonces para cada $\kappa \geq \lambda$, existe una κ-subred $\psi : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$ de φ.*

Como consecuencia de los Lemas 2.2, 2.3 y 2.4, se tiene que para cualquier cardinal infinito κ, las siguientes son equivalentes:

- cada κ-red en X tiene un punto de acumulación;
- cada λ-red en X con $\lambda \leq \kappa$ tiene un punto de acumulación;
- cada red $\langle x_d : d \in D \rangle$ en X con $|D| \leq \kappa$ tiene un punto de acumulación.

Las siguientes definiciones brindan generalizaciones de los conceptos de los espacios de Fréchet y secuenciales. Esto ya fue hecho por Meyer en [16], con redes cuyos conjuntos dirigidos tienen cardinalidad a lo más κ.

Definicion 2.1. Un espacio X es *κ-Fréchet*, si para cada subconjunto $A \subset X$ y para cualquier $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$ existe una red de cardinalidad a lo más κ -o equivalentemente, para alguna $\lambda \leq \kappa$ existe una λ-red -en A que converge a x.

Definicion 2.2. Un espacio X es *κ-red*, si para cualquier subconjunto no cerrado $A \subset X$ y para algún $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$ existe una red de cardinalidad a lo más κ -o equivalentemente, para alguna $\lambda \leq \kappa$ existe una λ-red -en A que converge a x.

Un ejemplo clásico de un espacio secuencial que no es de Fréchet, es *el espacio de Arens-Franklin.* Una generalización de tal ejemplo se describe a continuación.

Sea $X = [\kappa \times (\kappa \cup \{\kappa\})] \cup \{p\}$, para cada $\alpha < \kappa$ sean $C_\alpha = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \beta < \kappa\}$ una columna en X y $C'_\alpha = C_\alpha \cup \{(\alpha, \kappa)\}$. La topología en X se describe como sigue:

1. Cada punto (α, β) con $0 \leq \beta < \kappa$ es aislado;

2. $\{C'_\alpha \setminus A : A \subset C_\alpha \text{ y } |A| < \kappa\}$ es una base local para (α, κ);
3. La topología de p es la más fina para que $\{(\alpha, \kappa) : \alpha < \kappa\}$ converja a p.

Analizando varios casos, se concluye que X es un espacio κ-red que no es κ-Fréchet.

El conjunto A junto con los límites de todas las redes cuyo rango está en A es llamado la *cerradura κ-red* de A, denotada por $cl^\kappa(A)$.

Hagamos algunas observaciones y recapitulemos.

1. Para cada $A \subseteq X$, se tiene que $A \subseteq cl^\kappa(A) \subseteq \operatorname{cl} A$.
2. A es κ-red cerrado si y sólo si $cl^\kappa(A) = A$.
3. Un espacio X es κ-red siempre que un conjunto A es cerrado si y sólo si $A = cl^\kappa(A)$.
4. Un espacio X es κ-Fréchet si y sólo si para cada $A \subseteq X$, $cl^\kappa(A) = \operatorname{cl} A$.
5. Para todo κ, $\chi(X) \leq \kappa$ implica que X es κ-Fréchet, de manera que, X es un espacio κ-red y, por tanto, $t(X) \leq \kappa$ (ver [11] y [12]).
6. Si X es un espacio λ-Fréchet (respectivamente, un espacio λ-red) y $\lambda \leq \kappa$, entonces X es κ-Fréchet (respectivamente, un espacio κ-red).
7. X es un espacio de Fréchet si y sólo si X es un espacio ω-Fréchet.
8. X es un espacio secuencial si y sólo si X es un espacio ω-red.

3. Tipos de compacidad

En esta sección nos enfocamos a estudiar dos clases de espacios afines a la compacidad, llamados espacios inicialmente κ-compactos y fuertemente κ-compactos.

Para empezar, diremos que un espacio X es compacto si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. En términos de κ-redes, este concepto equivale a decir que para toda κ, cualquier κ-red tiene un punto de acumulación. Entre los resultados importantes que se siguen cumpliendo en este contexto, encontramos el Teorema de Tychonoff, que dice que cualquier producto de espacios compactos es compacto.

Un espacio X es *numerablemente compacto* si cualquier cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita. Así cualquier espacio compacto es numerablemente compacto. Dicho esto, un espacio numerablemente compacto se puede generalizar a cardinales superiores a través de la siguiente definición.

Definicion 3.1. Un espacio topológico X es *inicialmente κ-compacto* si cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ tiene una subcubierta finita.

Teorema 3.1 ([18])**.** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *Un espacio X es inicialmente κ-compacto.*
ii) *Cualquier κ-red (o equivalentemente, cualquier red de cardina-lidad κ) tiene un punto de acumulación.*
iii) *Cada κ-red (o bien, cada red de cardinalidad κ) tiene una λ-subred convergente para algún cardinal λ.*

En la compactación de Stone-Čech de los naturales, $\beta\omega$, λ es necesariamente más grande que ω. Este hecho, motiva la siguiente definición, la cual es un caso especial del concepto de *secuencialmente compacto* (esto es, cualquier sucesión tiene una subsucesión convergente).

Definicion 3.2. Un espacio es *fuertemente κ-compacto* si para toda $\lambda \leq \kappa$, cada red de cardinalidad λ tiene una subred convergente de cardinalidad a lo más λ.

Por tanto, por un argumento muy similar al del Teorema 2.4, la red tiene una subred convergente de cardinalidad igual a λ.

Teorema 3.2. *Un espacio es fuertemente κ-compacto si y sólo si para cada $\lambda \leq \kappa$, cualquier λ-red tiene una λ-subred convergente.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 1.2 y de la definición de fuertemente κ-compacto.

□

Como cualquier red numerable tiene una subred que es una sucesión, un espacio es fuertemente ω-compacto si y sólo si es secuencialmente compacto.

Lema 3.3 ([14]). *Si X es un espacio inicialmente κ-compacto y $\chi(X) \leq \kappa$, entonces cada red en X de cardinalidad a lo más κ tiene una subred convergente de cardinalidad a lo más κ.*

Un corolario inmediato del lema previo es el conocido resultado de que cada espacio primero numerable y numerablemente compacto es secuencialmente compacto. Sin embargo, si κ es no numerable no se puede concluir del lema previo que X es fuertemente κ-compacto. Un importante contraejemplo es el espacio $\beta\omega$, pues es numerablemente compacto, tiene carácter $\mathfrak{c}$ y no es fuertemente κ-compacto para ninguna κ.

Lema 3.4. *Cualquier subespacio cerrado de un espacio fuertemente κ-compacto es fuertemente κ-compacto.*

Demostración. Sean X fuertemente κ-compacto y Y un subconjunto cerrado de X. Si $\lambda \leq \kappa$ y $f : D \longrightarrow Y$ es una red en Y con $|D| = \lambda$, se tiene por hipótesis que existe una subred $f \circ H : E \longrightarrow Y$ de f, donde $H : E \longrightarrow D$ y $|E| \leq \lambda$, que converge a un punto p. Como Y es cerrado en X, tenemos que $p \in Y$. Por tanto, Y es fuertemente κ-compacto. □

Lema 3.5. *Imágenes continuas de espacios fuertemente κ-compactos son fuertemente κ-compactas.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos, $H : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Para $\lambda \leq \kappa$, sea $g : D \longrightarrow H(X)$ una red de cardinalidad λ en Y y definida por $g(d) = y_d$ para cada $d \in D$. Como H es suprayectiva, para cada $d \in D$ existe $x_d \in X$ tal que $H(x_d) = y_d$ y definimos $f : D \longrightarrow X$ por $f(d) = x_d$. Por hipótesis, existe una subred $f \circ J : E \longrightarrow X$ donde $J : E \longrightarrow D$, definida por $f \circ J(d) = x_{J(d)}$ para cada $d \in D$ que converge a un punto $x \in X$. Luego, como H es continua, $(H(x_{J(d)}))_{d\in E}$ converge a $H(x) \in Y$. Por tanto, Y es fuertemente κ-compacto. □

Dados dos espacios X y Y de Hausdorff, una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ se llama pseudoabierta, si para todo $y \in Y$ y U abierto en X tal que $U \supset f^{-1}(y)$ se tiene que $y \in \mathrm{int}[Y]f(U)$.

Lema 3.6. *Sea $H : X \longrightarrow Y$ una función pseudoabierta entre espacios topológicos. Si $y \in Y$ y $B \subset Y$ son tales que $y \in \mathrm{cl}[Y]B$, entonces $H^{-1}(y) \cap \mathrm{cl}\, H^{-1}(B) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos lo contrario; entonces, para el conjunto $U = X \setminus \mathrm{cl}\, H^{-1}(B)$ tenemos que $U \cap H^{-1}(B) = \emptyset$ y, en consecuencia, $H^{-1}(y) \subset U$. Como H es pseudoabierta, se tiene que $y \in \mathrm{int}[Y](H(U))$. Luego, como $y \in \mathrm{cl}[Y]B$ se sigue que $\mathrm{int}[Y]H(U) \cap B \neq \emptyset$, implica que $H(U) \cap B \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por tanto, $H^{-1}(y) \cap \mathrm{cl}[X]H^{-1}(B) \neq \emptyset$. □

Teorema 3.7. *Si X es un espacio κ-Fréchet y $H : X \longrightarrow Y$ una función pseudoabierta, entonces el espacio Y es κ-Fréchet.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y $B \subset Y$ tales que $y \in \mathrm{cl}[Y]B$. Por el Lema 3.6, podemos tomar un punto $x \in H^{-1}(y) \cap \mathrm{cl}\, H^{-1}(B)$. Considerando que X es κ-Fréchet, existe una red de cardinalidad a lo más κ, $f : D \longrightarrow H^{-1}(B)$ definida por $f(d) = x_d$ para cada $d \in D$ en $H^{-1}(B)$, que converge a x. Luego, por la continuidad de H, se tiene que $(H(x_d))_{d\in D} \subset B$ converge a $H(x) = y$. Por tanto, Y es κ-Fréchet. $\square$

Definicion 3.3. Un espacio X es *C_κ-cerrado* si cualquier subconjunto fuertemente κ-compacto de X es cerrado.

Proposición 3.8. *Si X es fuertemente κ-compacto y C_κ-cerrado, entonces X es un espacio κ-red.*

Demostración. Sea A un subconjunto no cerrado de X. Por hipótesis, A no es fuertemente κ-compacto, así que existe una red f en A de cardinalidad $\lambda \leqslant \kappa$ que no tiene subredes convergentes de cardinalidad a lo más λ. Como un cerrado en un fuertemente κ-compacto es fuertemente κ-compacto, $\operatorname{cl} A$ es fuertemente κ-compacto. De manera que, existe una subred g de f de cardinalidad a lo más λ que converge a algún $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$, esto se debe a que f no tiene subredes convergentes de cardinalidad a lo más λ en A. Por tanto, X es un espacio κ-red. $\square$

Un espacio X es de *Whyburn* siempre que para cualquier conjunto no cerrado $A \subseteq X$ y para todo $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$ existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\operatorname{cl} B \setminus A = \{x\}$.

Proposición 3.9. *Si X es un espacio de Hausdorff, Whyburn e inicialmente κ-compacto y cualquier subconjunto inicialmente κ-compacto de X es cerrado, entonces X es un espacio κ-Fréchet.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$. Como X es de Whyburn, existe $B \subset A$ tal que $\operatorname{cl} B \setminus A = \{x\}$. Luego, $C = \operatorname{cl} B \setminus \{x\}$ no es cerrado y, por tanto, no es inicialmente κ-compacto. Entonces existe una red $f : D \longrightarrow C$ de cardinalidad a lo más κ en C que no tiene puntos de acumulación en C. Como X es inicialmente κ-compacto, $\operatorname{cl} B$ es inicialmente κ-compacto, por ser cerrado en X. Así que la red f tiene un punto de acumulación en $\operatorname{cl} B$. En consecuencia, x es el único punto de acumulación de f en $\operatorname{cl} B$.

Ahora, sólo falta corroborar que f converge a x. Supongamos lo contrario. Entonces existe una vecindad abierta V de x en X tal que f no está eventualmente en V. Obsérvese que $\operatorname{cl} B \setminus V$ es inicialmente κ-compacto, por ser cerrado en $\operatorname{cl} B$. Así que existe una λ-subred convergente g de f tal que $Im(g) \subset \operatorname{cl} B \setminus V$. Luego, x no es punto de acumulación de g. Puesto que g es una λ-subred de f y x es el único punto de acumulación de f en $\operatorname{cl} B$, se sigue que g no tiene puntos de acumulación en $\operatorname{cl} B$. Esto contradice la definición de g y por lo tanto, X es κ-Fréchet. $\square$

En lo sucesivo, las funciones $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ representarán las proyecciones naturales sobre X y Y, respectivamente.

Teorema 3.10. *El producto finito de espacios fuertemente κ-compactos es fuertemente κ-compacto.*

Demostración. Supongamos que X y Y son espacios fuertemente κ-compactos. Sea $f : \lambda^{<\omega} \to X \times Y$ una λ-red en $X \times Y$ para alguna $\lambda \leq \kappa$, definida por $f(F) = \{(x_F, y_F)\}_{F\in\lambda^{<\omega}}$, entonces $\pi_X \circ f$ es una λ-red en X, que tiene por hipótesis, una λ-subred $\pi_X \circ f \circ \psi : \lambda^{<\omega} \to X$ que converge a un punto $x \in X$, donde ψ es un mapeo λ-red.

Para cada $F \in \lambda^{<\omega}$ sea $(\pi_X \circ f \circ \psi)(F) = x_{\psi(F)}$ y elegimos $y_{\psi(F)} \in Y$. Puesto que Y es fuertemente κ-compacto, la λ-subred $(y_{\psi(F)})_{F\in\lambda^{<\omega}}$ de $(y_F)_{F\in\lambda^{<\omega}}$ tiene una λ-subred $(y_{\psi\circ\phi(F)})_{F\in\lambda^{<\omega}}$ que converge a un punto $y \in Y$. Luego, la λ-red $\xi : \lambda^{<\omega} \to X \times Y$ definida por $\xi(G) = (x_{\psi\circ\phi(G)}, y_{\psi\circ\phi(G)})$ es una λ-subred de f que converge a (x, y). $\square$

El teorema anterior se puede mejorar con estrategías más elaboradas, a saber:

Teorema 3.11 ([14])**.** *El producto numerable de espacios fuertemente κ-compactos es fuertemente κ-compacto.*

Teorema 3.12 ([14]). *Si Y es un espacio inicialmente κ-compacto y X es fuertemente κ-compacto, entonces $X \times Y$ es inicialmente κ-compacto.*

Demostración. Supongamos que $f : D \longrightarrow X \times Y$ es una red de cardinalidad $\lambda \leq \kappa$ en $X \times Y$. Como X es fuertemente κ-compacto, existe una subred $\pi_X \circ f \circ \phi : E \longrightarrow X$ de $\pi_X \circ f$, donde $|E| \leq \lambda$ que converge, digamos a $x \in X$. Como Y es inicialmente κ-compacto, la subred correspondiente $\pi_Y \circ f \circ \phi : E \longrightarrow Y$ (de cardinalidad a lo más κ) de $\pi_Y \circ f$ tiene un punto de acumulación $y \in Y$. Puesto que x y y son puntos de acumulación de sus respectivas coordenadas, se puede concluir que el punto (x, y) es un punto de acumulación de la red f. Por tanto, $X \times Y$ es inicialmente κ-compacto. □

Definicion 3.4. Un espacio X es *localmente fuertemente κ-compacto* si cada punto tiene una vecindad cerrada que es fuertemente κ-compacta.

En un espacio T_3 que es localmente fuertemente κ-compacto, cada punto tiene una base local de vecindades cerradas que son fuertemente κ-compactas. Además, en un espacio κ-red, un subespacio inicialmente κ-compacto, es necesariamente cerrado.

El producto de un abanico de Fréchet y una sucesión convergente no es de Fréchet y, por tanto, el producto de dos espacios ω-Fréchet donde uno de ellos es compacto y secuencialmente compacto no necesariamente es ω-Fréchet. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.13 ([14]). *El producto de un espacio κ-red X con un espacio κ-red, T_3 y localmente fuertemente κ-compacto Y, es un espacio κ-red.*

Como corolarios se obtienen dos resultados de Boehme (ver [5]). El primero de ellos dice que, el producto de espacios secuenciales, donde uno de ellos es localmente secuencialmente compacto, es secuencial. El segundo afirma que el producto de espacios secuenciales, donde uno de ellos es localmente numerablemente compacto, es secuencial.

Problema abierto 1. ¿La condición de ser localmente fuertemente κ-compacto puede ser reemplazado por localmente compacto en el Teorema 3.13?

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi gratitud al profesor Richard G. Wilson por sus valiosos consejos en este trabajo. También estoy muy agradecida con el árbitro por sus numerosas sugerencias y correcciones que han contribuido a la versión final de este artículo.

Referencias

[1] A.V. Arhangel'skii, *Frequency spectrum of a topological space and classification of spaces* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 206 (1972), 265–268.

[2] J.W. Baker, *Ordinal subspaces of topological spaces*, General Topology Appl., 3 (1973), 85–91.

[3] A. Bella, *On spaces with the property of weak approximation by points*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 35 (1994), no. 2, 357–360.

[4] G. Birkhoff, *Moore-Smith convergence in general topology,* The Annals of Mathematics, 38, No. 1 (1937), 39–56.

[5] T.K. Boehme, *Linear s-spaces*, Symposium on Convergence Structuress, University of Oklahoma, Norman 1965.

[6] H. Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 205 (1937), 777–779.

[7] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math. 57 (1965), 107–115.

[9] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice II*, Fund. Math. 61 (1967), 51–56.

[10] R.E. Hodel, *A theory of convergence and cluster points based on κ-nets,* Topology Proceedings 35 (2010), 291–330.

[11] R. Hodel, Cardinal Functions I, Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. por K. Kunen y J.E. Vaughan, North Holland P.C., Amsterdam, 1–61.

[12] I. Juhász, *Cardinal functions in topology -Ten years later*, Math. Centre Tracts 123, Amsterdam 1980.

[13] J.L. Kelley, General Topology, Van Nostrand (1955).
[14] M. Madriz-Mendoza and R.G. Wilson, *Topological Properties defined by nets*, por aparecer en Topology and Its Applications.
[15] P.R. Meyer, *Sequential properties of ordered topological spaces*, Compositio Mathematicae 21 (1969), 102–106.
[16] P.R. Meyer, *Sequential space methods in general topological spaces*, Colloquium Mathematicum, 22 (1971), 223–228.
[17] E.H. Moore and H.L. Smith, *A general theory of limits*, Amer. J. Math. 44 (1922), 102–121.
[18] R.M. Jr., Stephenson, Initially κ-compact and related spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology, eds. K. Kunen, J. E. Vaughan, North Holland P. C., Amsterdam, 1984, 603–632.
[19] J.W. Tukey, *Convergence and Uniformity in Topology*, Annals of Mathematics Studies, Princeton (1940).

Dirección de la autora:
Maira Madriz Mendoza
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: seber@xanum.uam.mx