Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. II, junio 2011, 67–82

# CONTROL DE SISTEMAS CUÁNTICOS

MARCO ANTONIO CRUZ DE LA ROSA

Resumen. Revisamos algunas nociones de controlabilidad para sistemas cuánticos cerrados de dimesión finita y discutimos condiciones necesarias y suficientes para su controlabilidad completa en términos del grupo de Lie del sistema. Formulamos la ecuación de control dinámico para sistemas cuánticos abiertos y damos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de su solución. Desarrollamos dos ejemplos que ilustran los conceptos estudiados.

## 1. Introducción

Desde la primera realización del láser en 1960, los físicos, químicos e ingenieros vislumbraron la posibilidad de usarlo para controlar sistemas cuánticos. Desde el punto de vista tecnológico, en las últimas tres décadas los progresos en esta dirección han sido notables en físico química [24, 26, 30, 6], física atómica y molecular [3], y óptica cuántica [36, 32], véanse también las referencias [8, 21]. Pero los avances tecnológicos no son suficientes. En los aõs recientes se ha reconocido que el desarrollo de los principios matemáticos generales de una teoría de control de sistemas cuánticos es un requisito esencial para futuras aplicaciones de las tecnologías cuánticas, véase [23]. Esto ha motivado que muchos físicos, químicos, matemáticos e ingenieros se interesen por desarrollar una teoría de control de sistemas cuánticos que resuelva, entre otras, dos preguntas fundamentales.

- **Controlabilidad.** Dado un cierto sistema cuántico: ¿es posible alcanzar el objetivo de control?
- En caso de que el sistema sea controlable: encontrar la manera óptima de alcanzar el objetivo de control.

Esta información teórica es crucial, contribuye al conocimiento del proceso de control y puede ayudar a determinar parámetros experimentales importantes para el diseño de los controles.

El objetivo general de un proceso de control consiste en aplicar una acción externa al sistema para alcanzar el objetivo de control, [5, 11, 26, 30, 35]. En el caso de sistemas cuánticos, tal acción externa se puede realizar mediante un *control coherente*, por ejemplo, un campo de luz que permita controlar la dinámica unitaria de un sistema cerrado, ver [1, 8, 28]. En el caso de sistemas cuánticos abiertos, tal acción externa se puede realizar confeccionando adecuadamente el entorno del sistema para inducir un *control incoherente*, de la dinámica no-unitaria (disipativa) del sistema, [1, 37, 27, 9].

El control coherente se aplica a sistemas cuánticos aislados, que no interaccionan con su entorno y cuya dinámica se describe mediante transformaciones unitarias. No obstante, en la práctica todos los sistemas cuánticos son abiertos e interaccionan con su entorno, de tal manera que su dinámica es disipativa.

En la Sección 2 se plantea el problema de control para sistemas cerrados y se dan condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de control. En la Sección 3 se revisan varias nociones de controlabilidad de sistemas cuánticos cerrados y, en dimensión finita, se describen condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad completa en términos del grupo de Lie del sistema,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 81Q93, 93B05.
*Palabras clave.* Control cuántico, Controlabilidad.

siguiendo las referencias [2, 28, 29]. Para el caso de dimensión infinita el lector interesado puede consultar las referencias [12, 17]. A la fecha no existe una solución del correspondiente problema de control para sistemas abiertos. En esta dirección, en la Sección 4 revisamos un resultado sobre la controlabilidad cinemática, formulamos el problema de control dinámico y damos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución para la ecuación de control, que en este caso es una ecuación de Lindblad con coeficientes dependientes del tiempo.

La literatura en el tema es muy extensa, nuestro proposito principal es revisar y discutir sólo algunos aspectos del problema de controlabilidad de sistemas cuánticos, mediante una estrategia de lazo abierto (open-loop control), desarrollada con el rigor matemático necesario. En particular hacemos notar que las ecuaciones de control (8) y (28) tienen Hamiltoniano o generador de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan dependientes del tiempo, este es un aspecto que se pasa por alto en varias de las referencias que revisamos. Otras técnicas de control como aquellas de lazo cerrado (closed-loop control), así como control estocástico y filtraje, quedan fuera de este trabajo, el lector interesado puede consultar la referencia [8].

Para la lectura de este artículo es conveniente que el lector conozca (o revise) los conceptos de operador continuo, compacto y de traza finita en un espacio de Hilbert; así como las definiciones de álgebra de Lie, grupo de Lie y tenga conocimientos básicos de teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

## 2. Controlabilidad de sistemas cerrados

### 2.1. Estados.

**Definicion 2.1.** Un *estado* $\rho$ es un operador positivo de traza uno, actuando sobre un espacio de Hilbert complejo y separable $\mathcal{H}$.

Como $\rho$ es autoadjunto y compacto, por el teorema espectral, existe una base ortonormal $(\psi_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{H}$, algunas veces llamada *la base de* $\rho$, que lo diagonaliza, i.e., tal que

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|,$$

donde $\sigma(\rho) = \{\rho_n : n \geq 1\}$ es el espectro (valores propios) de $\rho$ y $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ es el operador de rango 1 definido mediante $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\varphi = \langle\psi_n, \varphi\rangle\psi_n$, $\varphi \in \mathcal{H}$.

**Definicion 2.2.** *Dos estados $\rho_0$, $\rho_1$ son cinemáticamente equivalentes* si existe un operador unitario $U$ tal que

$$\rho_1 = U\rho_0 U^*. \tag{1}$$

El siguiente resultado caracteriza a la clase de estados cinemáticamente equivalentes, véase [4].

**Teorema 2.1.** *Dos estados $\rho_0$ y $\rho_1$ son cinemáticamente equivalentes si y sólo si tienen el mismo espectro: $\sigma(\rho_0) = \sigma(\rho_1)$.*

La evolución de un sistema cuántico cerrado se describe mediante un operador unitario. Si $\rho_s$ y $\rho_t$ son estados del sistema en los tiempos $s \leq t$, existe un operador unitario $U(t,s)$, tal que

$$\rho_t = U(t,s)\rho_s U(t,s)^*. \tag{2}$$

En general, la familia de operadores unitarios $(U(t,s))_{s\leq t}$ tiene la propiedad de sistema de evolución

$$U(t,r)U(r,s) = U(t,s), \quad s \leq r \leq t. \tag{3}$$

En el caso cuando $U(t,s)$ depende sólo de $\tau = t - s$ la familia de operadores unitarios $(U(\tau))_{\tau\geq 0}$ forman un semigrupo.

Si la familia $(U(\tau))_{\tau\geq 0}$ es un grupo unitario uniformemente continuo, su generador infinitesimal es un operador sesquiadjunto $A$ que se puede escribir como $A = iH$, donde $H$ es un operador autoadjunto que se llama Hamiltoniano del sistema. En este caso $(U(\tau))_{\tau\geq 0}$ satisface la ecuación de Schrödinger,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{dU(\tau)}{d\tau} &= HU(\tau), \\ U(0) &= I. \end{aligned} \tag{4}$$

En el caso general, cuando el Hamiltoniano $H$ no es constante en $t$, la ecuación de Schrödinger toma la forma,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{dU(t,s)}{dt} &= H(t)U(t,s), \\ U(s,s) &= I, \quad s \leq t. \end{aligned} \tag{5}$$

**Definicion 2.3.** Un sistema cerrado es *dinámicamente controlable* en un subconjunto $\mathcal{S}$ de estados si para cualquier par de estados $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathcal{S}$ existe un tiempo finito $T$ y un conjunto de controles $\{c_1(t), \cdots, c_k(t)\} \subset \mathcal{C}$, tales que la solución $U(t,0)$ de la ecuación de Schrödinger (5), con Hamiltoniano dependiente de los controles

$$H(t) = H\big(c_1(t), \cdots, c_k(t)\big), \tag{6}$$

transforma $\rho_1$ en $\rho_2$, i.e.,

$$\rho_2 = U(T,0)\rho_1 U(T,0)^*.$$

En la literatura es usual que se considere la ecuación de control coherente (5) con Hamiltoniano dado por

$$H(t) = H_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)H_j. \tag{7}$$

En este caso $(U(\tau))_{\tau\geq 0}$ satisface la ecuación de Schrödinger,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{dU(t,0)}{dt} =& \Big(H_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)H_j\Big)U(t,0), \\ U(0,0) =& I, \end{aligned} \tag{8}$$

donde los controles $c_j$ pertenecen a alguna de las siguientes clases:

(i) $\mathcal{C} = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} :$ localmente acotadas y continuas$\}$.
(ii) $\mathcal{C}_b = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} :$ constante a trozos con $Ran f = \{1,-1\}\}$. Controles "bang-bang".

La existencia y unicidad locales, es decir en intervalos finitos $[0,T]$, $0 < T < \infty$, de la solución de la ecuación de control coherente (8), se obtiene a partir del siguiente teorema que es una consecuencia del Teorema 5.3 de [7], véase también [4].

**Teorema 2.2.** *Sea $H$ una función definida sobre $[0,T]$, $T > 0$, tal que*

*i) Para cada $t \in [0,T]$, $H(t)$ es un operador autoadjunto acotado sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*
*iii) La función $H(t)\varphi$ de $[0,T]$ en $\mathcal{H}$ es continua en $t$ para cada $\varphi \in \mathcal{H}$.*

*Entonces existe una única función con valores en los operadores acotados sobre $\mathcal{H}$, $U(t,s)$ para cada para $t,s \in [0,T]$, $s \leq t$ tal que*

*a) $U(t,s)$ es un operador unitario y $U(s,s) = I$,*
*b) $U(t,s)$ es fuertemente continuo en cada variable, esto es, para cada $\varphi \in \mathcal{H}$ la función $U(t,s)\varphi$ de $\Delta = \{(t,s) :\ s \leq t,\ s,t \in [0,T]\}$ en $\mathcal{H}$ es continua,*
*c) $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ para $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$,*

*d)*

$$\frac{d}{dt}U(t,s) = -iH(t)U(t,s) \tag{9}$$

*La derivada es en la topología de la norma.*

Explicítamente, para cada $\varphi \in \mathcal{H}$ y $s \leq t$,

$$U(t,s) = \lim_{\|P_m\|\to 0} U_m(t,s); \tag{10}$$

donde $P_m = \{0 = r_1 < r_2 < \cdots < r_m = T\}$ es una partición del intervalo $[0,T]$, $\|P_m\| = \max\{\Delta r_k = r_k - r_{k-1} : 1 \leq k \leq m\}$ es la norma de la partición,

$$U_m(t,s) = e^{-iH(t)(t-r_k)}e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})}\cdots e^{-iH(r_l)(r_l-s)},$$

con $t \in [r_k, r_{k+1}]$ y $s \in [r_{l-1}, r_l]$ y el límite es en la norma de operadores.

## 3. El álgebra de Lie de un sistema de control

Denotaremos con $\mathbf{L}$ al *álgebra de Lie del sistema cuántico cerrado gobernado por la ecuación (8)* (o simplemente *álgebra de Lie del sistema*), este es el espacio vectorial generado por los operadores autoadjuntos $H_0, \cdots, H_n$ provisto del producto de Lie definido por el conmutador; en particular, los conmutadores $[H_i, H_j]$ son combinaciones lineales de los $H_k's$, i.e., existen constantes $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$, llamadas constantes de estructura, tales que

$$[H_i, H_j] = \sum_{k=0}^{n} c_{ij}^k H_k, \quad 0 \leq i,j \leq n. \tag{11}$$

Y llamaremos *grupo de Lie del sistema* al grupo de Lie conexo $\mathbf{S}$ asociado con esta álgebra, este es un subgrupo cerrado de Lie de $U(n)$, el grupo de las matrices complejas unitarias de $n \times n$, véase el apéndice de [4]. El siguiente teorema nos asegura que la solución 8 vive en el grupo de Lie del sistema, para su demostración usamos la fórmula de Zassenhaus, cuya convergencia fue establecida por Susuki en [31].

**Teorema 3.1.** *Supóngase que las funciones de control son localmente acotadas y continuas, i.e., cada $c_j \in \mathcal{C}$, $1 \leq j \leq n$. Entonces para cada $t \in [0,T]$, $T > 0$, la solución $U(t)$ de la ecuación de control coherente (8) pertenece al grupo cerrado de Lie $\mathbf{S}$ correspondiente al álgebra de Lie $\mathbf{L}$ del sistema.*

*Demostración.* La continuidad de los controles asegura que se cumplen las hipótesis del Teorema (2.2). Tomando en cuenta la forma explícita de $U_m(t,s)$ en (10) y que $\mathbf{S}$ es cerrado en la topología de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ inducida por la norma de operadores, bastará demostrar que para cada $k$ el factor $e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})}$ pertenece a $\mathbf{S}$. Consideraremos primero el caso cuando $H(t) = c_1(t)H_1 + c_2(t)H_2$ y aplicaremos la fórmula de Zassenhaus, véase [31]. Para cada $k$ tomemos

$$\lambda_k = \Delta r_k = (r_k - r_{k-1}), \;\; A_k = -ic_1(r_k)H_1 \;\text{ y }\; B_k = -ic_2(r_k)H_2.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} &|\lambda_k|(\|A_k\| + \|B_k\|) = |\Delta r_k|\big(|c_1(r_k)|\|H_1\| + |c_2(r_k)|\|H_2\|\big) \leq \\ &|\Delta r_k|\Big(\text{máx}_{1\leq j\leq 2} \sup_{t\in[0,T]} |c_j(t)|\Big)\big(\|H_1\| + \|H_2\|\big) < \log(2) - \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{12}$$

si la norma de la partición $\|\mathcal{P}_m\| = \text{máx}_{1\leq k\leq m}|\Delta r_k|$ satisface

$$\|\mathcal{P}_m\| \leq \frac{\log 2 - \frac{1}{2}}{\Big(\text{máx}_{1\leq j\leq 2}\sup_{t\in[0,T]}|c_j(t)|\Big)\big(\|H_1\| + \|H_2\|\big)}. \tag{13}$$

Entonces, bajo la condición (13), para cada $k$ fija se satisface la hipótesis del Teorema 1 de [31] y podemos concluir que

$$e^{\lambda_k(A_k+B_k)} = \lim_{l\to\infty} e^{\lambda_k A_k} e^{\lambda_k B_k} e^{\lambda_k^2 C_{k,2}} \cdots e^{\lambda_k^l C_{k,l}}. \tag{14}$$

El límite es en la norma de operadores y la sucesión $(C_{k,l})_{l\geq 1}$ se define recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_{k,2} =& \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda_k}\big(e^{-\lambda_k A_k} e^{-\lambda_k B_k} e^{\lambda_k(A_k+B_k)}\big)\Big]_{\lambda_k=0} = \frac{1}{2}[B_k, A_k], \\ C_{k,3} =& \frac{1}{3!}\Big[\frac{\partial^3}{\partial^3\lambda_k}\big(e^{-\lambda_k^2 C_{k,2}} e^{-\lambda_k A_k} e^{-\lambda_k B_k} e^{\lambda_k(A_k+B_k)}\big)\Big]_{\lambda_k=0} \\ =& \frac{1}{3!}[C_{k,2}, A_k + 2B_k], \end{aligned} \tag{15}$$

y en general

$$C_{k,l} = \\ \frac{1}{l!}\Big[\frac{\partial^l}{\partial^l\lambda_k}\big(e^{-\lambda_k^{l-1} C_{k,l-1}} \cdots e^{-\lambda_k C_{k,2}} e^{-\lambda_k A_k} e^{-\lambda_k B_k} e^{\lambda_k(A_k+B_k)}\big)\Big]_{\lambda_k=0}.$$

Cada factor en (14) pertenece al grupo de Lie **S** del sistema pues es la exponencial de un commutador en el álgebra **L**. Entonces para cada $k$ el elemento $e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})} = e^{\lambda_k(A_k+B_k)}$ pertenece al grupo **S**.

Para el caso general cuando $H(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)H_j$ aplicamos inducción sobre $n$. Suponiendo que $e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})} \in \mathbf{S}$ con $H(t) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t)H_j$, tómese $\lambda_k$ como antes, $A_k = -i\sum_{j=1}^{n-1} c_j(r_k)H_j$, $B_k = -ic_n(r_k)H_n$. Entonces tenemos que (14) se cumple si la norma de la partición $\|\mathcal{P}_m\| = \text{máx}_{1\leq k\leq m}|\Delta r_k|$ satisface

$$\|\mathcal{P}_m\| \leq \frac{\log 2 - \frac{1}{2}}{\Big(\text{máx}_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in[0,T]}|c_j(t)|\Big)\big(\|H_1\| + \cdots + \|H_n\|\big)}.$$

Esto demuestra que cada factor en (10) pertenece al grupo de Lie **S** del sistema y con esto se termina la demostración del teorema.

□

### 3.1. Tipos de controlabilidad.

**Definicion 3.1.** Un sistema es *completamente controlable* si cualquier operador unitario $U$ es accesible desde la identidad. Esto es, si existen $T > 0$, un conjunto de funciones de control $\{c_1(t), ..., c_n(t)\}$ definidas para $0 \leq t \leq T$ y la trayectoria $U(t, 0)$ satisfaciendo la ecuación de Schrödinger (8) con condiciones $U(0, 0) = I$, $U(T, 0) = U$.

**Definicion 3.2.** Un sistema es *controlable en los estados* si para cualquier estado inicial $\rho_0$, los estados cinemáticamente equivalentes con $\rho_0$ pueden ser alcanzados en algún tiempo $T > 0$. Es decir, si dado cualquier estado $\rho_1$ cinemáticamente equivalente con $\rho_0$, existen $T > 0$, un conjunto de controles en $\mathcal{C}$, $\{c_1(t), ..., c_n(t)\}$ definidos $0 \leq t \leq T$ y un sistema de evolución $U(t, 0)$ satisfaciendo la ecuación (8) tales que

$$U(0, 0) = I, \qquad \rho_1 = U(T, 0)\rho_0 U(T, 0)^*.$$

**Proposición 3.2.** *Un sistema es controlable en los estados si es completamente controlable.*

*Demostración.* Si $\rho_0$, $\rho_1$ son dos estados cinemáticamente equivalentes, i.e., existe un operador unitario $U$ tal que

$$\rho_1 = U\rho_0 U^*,$$

y el sistema es completamente controlable, entonces existen un tiempo $T > 0$, un conjunto de controles $\{c_1(t), \cdots, c_n(t)\} \subset \mathcal{C}$ y una solución $U(t, 0)$ de la ecuación (8) tal que $U(T, 0) = U$. Consecuentemente,

$$\rho_1 = U(T, 0)\rho_0 U(T, 0)^*,$$

es decir el sistema es controlable en los estados. □

El recíproco del resultado anterior también es cierto, pero su demostración requiere resultados de álgebras y grupos de Lie cuya revisión queda fuera del propósito de este trabajo, véase [2].

**3.2. Controlabilidad en grupos de Lie.** Tomando en cuenta el resultado del Teorema 3.1 podemos situarnos en un contexto abstracto y plantear nuestro problema como un problema de control en un grupo de Lie $G$. En nuestro caso, si $dim\mathcal{H} = N < \infty$, $G = U(N)$ es el grupo de Lie de las matrices complejas unitarias $N \times N$. En esta parte seguiremos la exposición de la referencia [18]. Hemos desarrollado con mayor detalle algunas partes de las demostraciones, con la intención de facilitar su lectura.

Si $\mathbf{H}$ es una $n+1$-upla de elementos del álgebra de Lie de $G$, que denotaremos por $L(G)$, $\mathbf{H} = (H_0, \cdots, H_n)$ y $\mathcal{C}$ la clase de controles admisibles, entonces denotaremos por $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ al sistema de control

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= X_{-iH_0}\big(u(t)\big) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) X_{-iH_j}\big(u(t)\big) \\ u(0) &= e, \end{aligned} \tag{16}$$

donde $X_{-iH_j}\big(u(t)\big)$ denota el campo vectorial invariante a la derecha asociado con el elemento $-iH_j \in L(G)$. Para una descripción de esta correspondencia véase [4]. La acción de $X_{-iH_j}$ sobre los elementos $u(t) \in U(N)$ está dada por

$$X_{-iH_j}(u(t)) = -iH_j u(t).$$

Entonces el sistema de control $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ coincide con el sistema de control (8).

Si $u \in \mathcal{C}^n$ y $g \in G$, denotaremos a la solución $U$ de (8) que satisface $U(0) = g$ mediante $\pi(g, u, \cdot)$, i.e.

$$U(t) = \pi(g, u, t), \quad t \in [0, \infty).$$

**Lema 3.3.** *Sean $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre $G$ y $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathcal{C}^n$, entonces para cada $g \in G$ existe una única solución $U$ de (8) definida para $0 \leq t < \infty$ tal que $U(0) = g$.*

*Demostración.* Para demostrar la existencia local, basta tomar $U(t, 0) = V(t, 0)g$, donde $V(t, s)$ es la solución de la ecuación (8) dada por el Teorema 2.2. Sea $[0, T)$ un intervalo máximo donde existe una solución $U(t)$ con $U(0) = g$. Demostraremos que $T = \infty$. Supóngase $T < \infty$ y tómese una solución $V(t)$ definida en $T - \delta < t < T + \delta$, con $\delta > 0$ y tal que $V(T) = e$. Sean $g' = V(T - \frac{1}{2}\delta)$, $g'' = U(T - \frac{1}{2}\delta)$. Defínase $W(t)$ como

$$W(t) = \begin{cases} U(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T - \frac{1}{2}\delta, \\ V(t)(g')^{-1}g'' & \text{si } T - \frac{1}{2}\delta < t \leq T + \delta. \end{cases}$$

Entonces $W(t)$ es una solución de (8) que satisface $W(0) = g$ y está definida para $0 \leq t < T + \delta$. Esto contradice la maximalidad de $[0, T)$ y por lo tanto $T = \infty$. □

Si para algún $t \geq 0$, $\pi(g, u, t) = g'$, decimos que el control $u$ manda $g$ en $g'$ en $t$ unidades de tiempo. Si existe $u \in \mathcal{C}^n$ que manda $g$ en $g'$ en $t$ unidades de tiempo, decimos que $g'$ es accesible desde $g$ al tiempo $t$.

Al conjunto de todos los $g' \in G$ que son accesibles desde $g$ al tiempo $t$, lo denotamos por $A(g, t)$, además definimos

$$\mathbb{A}(g, T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} A(g, t) \quad \text{y} \quad \mathbb{A}(g) = \bigcup_{0 \leq t \leq \infty} A(g, t).$$

$\mathbb{A}(g)$ es el conjunto accesible desde $g$.

Al sistema de control $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ sobre un grupo de Lie $G$ le asociamos las siguientes subálgebras

(i) La subálgebra $\mathbf{L}$ generada por los elementos$\langle H_0, ..., H_m \rangle$.
(ii) La subálgebra $L$ de $L(G)$ generada por $\langle H_1, ..., H_m \rangle$

Denotaremos los correspondientes subgrupos de Lie conexos por $\mathbf{S}$ y $S$.

**Lema 3.4.** *Si* $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ *es un sistema de control sobre* $G$*, entonces* $\mathbb{A}(e)$ *está contenido en* $\mathbf{S}$.

*Demostración.* Es una consecuencia del Teorema 3.1 y del Lema 3.3. □

Enseguida obtendremos algunas propiedades topológicas elementales de los conjuntos alcanzables, cuyas demostracines se encuentran en [4], véase tambien [18]. Si $T \geq 0$ denotaremos por $\mathcal{C}(T)$ al conjunto de las restricciones de todos los elementos de $\mathcal{C}$ al intervalo $[0, T]$.

**Lema 3.5.** *Sea* $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ *un sistema de control sobre* $G$*, entonces para cada* $T > 0$*,* $\mathbb{A}(e, T)$ *está contenido en* $\mathbf{S}$*, int*$\mathbb{A}(e, T)$ *es denso en* $\mathbb{A}(e, T)$*, en la topología de* $\mathbf{S}$.

En particular se sigue del lema anterior que el *interior de* $\mathbb{A}(e)$ *en* $\mathbf{S}$ *es no vacío.*

**Lema 3.6.** *Sea* $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ *un sistema de control sobre* $G$*, entonces el conjunto* $\mathbb{A}(e)$ *es un semigrupo.*

*Demostración.* Sean $g,\ g' \in \mathbb{A}(e)$, para ciertos controles $u,\ u'$ y $t,\ t' \geq 0$, se tiene $g = \pi(e, u, t),\ g' = \pi(e, u', t')$, definamos el control $v$ como

$$v(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & 0 \leq \tau \leq t, \\ u'(\tau - t) & \tau > t. \end{cases}$$

Para $0 \leq \tau \leq t$ tenemos que $\pi(e, v, \tau) = \pi(e, u, \tau)$ y para $\tau > t$ tenemos que

$$\pi(e, v, \tau) = U(\tau, 0) = U(\tau, t)U(t, 0) = U(\tau, t)g, \tag{17}$$

donde $U(\tau, 0)$ es la solución de (8) con función de control $v$. Ahora bien, tenemos que $U(t, t) = e = \pi(e, u', 0)$ así que por la unicidad, para $\tau > t$ tenemos que $U(\tau, t) = \pi(e, u', \tau - t)$. Consecuentemente de (17) se obtiene que para $\tau > t$,

$$\pi(e, v, \tau) = \pi(e, u', \tau - t)g.$$

Entonces

$$\pi(e, v, t + t') = \pi(e, u', t')g = g'g.$$

Por lo tanto $g'g \in \mathbb{A}(e)$. □

**Lema 3.7.** *Sea* $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ *un sistema de control sobre* $G$*. Entonces los subconjuntos*

$$\mathbb{A}(e, T),\ \mathbb{A}(e),\ A(e, T),$$

*son arco conexos para cada* $T \geq 0$.

Necesitaremos el siguiente teorema general sobre grupos de Lie que se encuentra en [19], p. 275.

**Teorema 3.8.** *Sea* $G$ *un grupo de Lie y sea* $H$ *un subgrupo arco conexo de* $G$*. Entonces* $H$ *es un subgrupo de Lie de* $G$.

**Teorema 3.9.** *Sea* $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ *un sistema de control sobre* $G$*. Si* $\mathbb{A}(e)$ *es un subgrupo de* $G$*, entonces* $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$.

*Demostración.* Como $\mathbb{A}(e)$ es arco conexo y por hipótesis es un subgrupo, entonces por el Teorema 3.8 se sigue que es un subgrupo de Lie de $G$. Sea $\Lambda$ su álgebra de Lie. Entonces $\Lambda \subset \mathbf{L}$, pues $\mathbb{A}(e) \subset \mathbf{S}$ por el Lema 3.4. Por otra parte, sea $u = (a_1, \cdots, a_n) \in \{-1, 1\}^n$ un control constante. Tenemos que $u \in \mathcal{C}$ y, consecuentemente, la trayectoria $t \to \pi(e, u, t),\ 0 \leq t \leq \infty$ está contenida en $\mathbb{A}(e)$. En otras palabras, la solución $U(t, 0)$ de la ecuación (8) pertenece a $\mathbb{A}(e)$ para toda $t \geq 0$. Como $\mathbb{A}(e)$ es un subgrupo, esto vale para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces por un resultado de [16], p. 94, podemos concluir que $H_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j H_j \in \Lambda$. Como los elementos $\{H_0, \ldots, H_m\}$ generan $\mathbf{L}$, concluimos que $\mathbf{L} \subset \Lambda$, consecuentemente, $\mathbf{L} = \Lambda$ y $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$. □

**Lema 3.10.** *Sea $(\mathbf{X}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre $G$. Si el conjunto accesible desde la identidad es denso en $\mathbf{S}$, entonces $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$.*

*Demostración.* Sea $g \in$ en el interior de $\mathbb{A}(e)$ relativo a $\mathbf{S}$. Sea $V \subset \mathbb{A}(e)$ un abierto relativo en $\mathbf{S}$ que contiene a $g$. Definimos el conjunto

$$W = \{h^{-1} : \ h \in V\}.$$

Entonces, $W \neq \emptyset$ y es un abierto relativo de $\mathbf{S}$. Por la hipótesis existe $h \in W \cap \mathbb{A}(e)$, entonces el conjunto $Vh = \{gh : g \in V\}$ es abierto relativo a $\mathbf{S}$, $Vh \subset \mathbb{A}(e)$, pues $\mathbb{A}(e)$ es semigrupo y además $e \in Vh$. Entonces $\mathbb{A}(e)$ contiene una vecindad de la identidad en $\mathbf{S}$. Afirmamos que $\mathbf{S} = \mathbb{A}(e)$. Sean $k \in \mathbf{S}$ y $(k_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{A}(e)$ tal que $k_n \to k$, entonces $k_n^{-1}k \to e$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k_n^{-1}k \in \mathbb{A}(e)\ \forall n \geq N$. Como $\mathbb{A}(e)$ es semigrupo $k_n(k_n^{-1}k) \in \mathbb{A}(e)$ para $n \geq N$, entonces $k \in \mathbb{A}(e)$. Por lo tanto $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$. □

**Teorema 3.11.** *Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre $G$. Supongamos que el subgrupo $\mathbf{S}$ es compacto, entonces*

*i)* $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$,

*ii)* $\exists\, T > 0$ *tal que* $\mathbb{A}(e, T) = \mathbb{A}(e)$.

*Demostración.* i) Sea $H = \overline{\mathbb{A}(e)}$ en $\mathbf{S}$, entonces $H$ es semigrupo, pues por el Lema 3.6 $\mathbb{A}(e)$ es semigrupo y esta propiedad es heredada por $H$. Demostraremos que $H$ es grupo y por el Teorema 3.9 obtendremos que $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$.

Sea $h \in H$, entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}, h^n \in H$. Como $\mathbf{S}$ es compacto la sucesión $\{h^n\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente $\{h^{n(k)}\}_{k\geq 1}$ y podemos suponer que $n(k) < n(k+1),\ \forall k$. Definamos

$$h^{-1} := \lim_{k\to\infty} h^{n(k+1)-n(k)-1}.$$

Como $n(k+1) - n(k) - 1$ es no negativo, entonces $h^{n(k+1)-n(k)-1} \in H, \forall k$, así que $h^{-1} \in H$ pues $H$ es cerrado. Además

$$hh^{-1} = \lim_{k\to\infty} h^{n(k+1)}h^{-n(k)} = \lim_{k\to\infty} h^{nk}h^{-nk} = e.$$

Por lo tanto $H$ es grupo. Sabemos que $\mathbb{A}(e) \subset H$, y que $\mathbb{A}(e)$ tiene interior no vacío (por Lema 3.5), entonces $H$ también tiene interior no vacio relativo a $\mathbf{S}$. Puesto que $H$ es grupo y $\mathbf{S}$ es conexo, afirmamos que $H = \mathbf{S}$. Observemos que $H$ es arco conexo, pues si $g \in H$ y $g_n \to g$ con $g_n \in \mathbb{A}(e)$. Entonces $(1-t)e + tg_n \in \mathbb{A}(e)$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}(1-t)e + tg_n = (1-t)e + tg \in H$ para cada $t \in [0, 1]$.

Esto demuestra que $\mathbb{A}(e)$ es denso en $\mathbf{S}$ y por el Lema 3.10 el inciso (i) queda demostrado.

(ii) Para cada $t > 0$, sea $W(t) = \text{int}(\mathbb{A}(e, t))$ relativo a $\mathbf{S}$. Afirmamos que

$$\bigcup_{0<t} W(t) = \mathbf{S}.$$

Sean $g \in \mathbf{S}$ entonces existe $T > 0$ tal que $g \in \mathbb{A}(e, T)$. Tomemos $h \in \text{int}(\mathbb{A}(e, T')),\ T' > 0$ y supóngase que $h^{-1} \in \mathbb{A}(e, T''),\ T'' > 0$. Demostraremos que $g \in W(T + T' + T'') = \text{int}\big(\mathbb{A}(e, T + T' + T'')\big)$. En efecto, existen un control $u_g$ y un tiempo $t_g$ con $0 \leq t_g \leq T$, tales que $\pi(e, u_g, t_g) = g$. Así mismo existen $u_h$ y $t_h \in [0, T']$ tales que

$\pi(e, u_h, t_h) = h$. Sea $V_h$ una vecindad de $h$ con $V_h \subset \mathbb{A}(e, T')$. Definamos el conjunto $A = \{bh^{-1} : b \in V_h\} = V_h h^{-1}$ y consideremos la aplicación continua $f_k : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ definida por $f_k(l) = kl, \forall l \in \mathbf{S}$. Tenemos que

$$\left(f_{g^{-1}}\right)^{-1}(A) = \{x : xg^{-1} \in A\} = Ag.$$

Entonces $Ag$ es abierto. Así que $Ag = V_h h^{-1} g$ es una vecindad de $g$.

Sea $v \in A_g$, entonces existe $b \in V_h$ tal que $v = bh^{-1}g$. Como $V_h \subset \mathbb{A}(e, T')$ existen un control $u_b$ y un tiempo $t_b \in [0, T']$ tales que $\pi(e, u_b, t_b) = b$. Considérese el control

$$u_v = \begin{cases} u_g(s) & 0 \leq s \leq t_g \\ u_{h^{-1}}(s - t_g) & t_g < s \leq t_g + t_{h^{-1}} \\ u_b(s - t_g - t_{h^{-1}}) & t_g + t_{h^{-1}} < s \leq t_g + t_{h^{-1}} + t_b. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$U(s) = \begin{cases} \pi(e, u_g, s) & 0 \leq s \leq t_g \\ \pi(e, u_{h^{-1}}, s - t_g)g & t_g < s \leq t_g + t_{h^{-1}} \\ \pi(e, u_b, s - t_g - t_{h^{-1}})h^{-1}g & t_g + t_{h^{-1}} < s \leq t_g + t_{h^{-1}} + t_b, \end{cases}$$

donde $U(s) = \pi(e, u_v, s)$ y $\pi(e, u_v, t_g + t_{h^{-1}} + t_b) = v$. Como $t_g + t_{h^{-1}} + t_b \leq T + T' + T''$ esto demuestra que $Ag \subset \mathbb{A}(e, T + T' + T'')$. Consecuentemente $g \in W(T + T' + T'')$. Puesto que la familia $W(t)$ es creciente y $\mathbf{S}$ es compacto, se sigue que $W(t) = \mathbf{S}$ para algún $t$ suficientemente grande y esto completa la demostración. □

Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre un grupo $G$ y $g \in G$. El sistema es *controlable desde* $g$ si $\mathbb{A}(g) = G$. Y diremos que es simplemente *controlable* o *completamente controlable* si es controlable desde cualquier $g \in G$.

**Teorema 3.12.** *Una condición necesaria para que* $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ *sea completamente controlable es que* $G$ *sea conexo y* $\mathbf{L} = L(G)$. *Si* $G$ *es compacto la condición es suficiente.*

*Demostración.* La condición del teorema se satisface si y sólo si $G = \mathbf{S}$. Por el Lema 3.4 la condición es necesaria. La segunda parte se sigue del Teorema 3.11 y del hecho que $\mathbb{A}(e) = G$, entonces $\mathbb{A}(g) = G$ para todo g. □

**3.3. Controlabilidad completa.** Para demostrar el Teorema de esta sección necesitamos el siguiente lema cuya demostración se pueder ver en [4].

**Lema 3.13.** $U(N)$ *es un grupo de Lie conexo y compacto.*

**Teorema 3.14.** *(Schirmer-Solomon-Leahy) Una condición necesaria y suficiente para que un sistema cuántico con Hamiltoniano (7), controles en* $\mathcal{C}$ *y álgebra de Lie* $\mathbf{L}$ *sea completamente controlable es* $\mathbf{L} \cong u(N)$

*Demostración.* Puesto que (8) define un sistema de control invariante a la derecha sobre el grupo de Lie compacto y conexo $U(N)$, el Teorema 3.12 establece que el sistema es completamente controlable si y sólo si $\mathbf{L} \simeq u(N)$. Esta condición también es necesaria y suficiente para controlabilidad en los estados, pues las dos nociones de controlabilidad son equivalentes. □

*Ejemplo* 3.15. [28] Consideremos un sistema cuántico con dos niveles $(i = 1, 2)$ de energía y subniveles degenerados, donde el número de subniveles del nivel $i$ está dado por la fórmula $2F_i + 1$, $F_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

En la figura 1 se muestra el caso trivial de transición entre dos niveles no degenerados, $F_i = 0$, $i = 1, 2$. El Hamiltoniano interno de este sistema es

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

y el Hamiltoniano de control es

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix},$$

Fig. 1: $F_1 = 0/F_2 = 0$

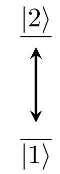
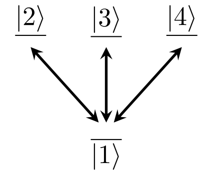



Fig. 2: $F_1 = 0/F_2 = 1$




donde $d \neq 0$ es el momento dipolar de la transición. Nótese que $iH_0$ y $iH_1$ generan $u(2)$ si $E_2 \neq E_1$. Así, el sistema es completamente controlable.

La figura 2 muestra un diagrama de transiciones entre subniveles de dos niveles atómicos con $F_1 = 0$ y $F_2 = 1$, respectivamente. Puesto que $F_2 = 1$ el nivel 2 tiene tres subniveles degenerados. El Hamiltoniano del sistema con cuatro estados está dado por

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

en la base estandar. Los Hamiltonianos de control son

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $iH_0, iH_1, iH_2$ y $iH_3$ generan el álgebra de Lie $u(4)$, entonces el sistema es completamente controlable.

## 4. Controlabilidad de sistemas abiertos

En un sistema abierto, la dinámica de los estados se describe mediante un semigrupo de transformaciones completamente positivas que preservan la traza $(\mathcal{T}_{*t})_{t\geq 0}$ del espacio $L_1(\mathcal{H})$, de los operadores de traza finita sobre $\mathcal{H}$, en si mismo. De manera que un estado inicial $\rho$ es enviado por este semigrupo en un estado $\rho_t$ al tiempo $t$: $\rho_t = \mathcal{T}_{*t}(\rho)$. La familia de estados $(\rho_t)_{t\geq 0}$ es la solución de la ecuación maestra

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_t}{dt} &= \mathcal{L}_*(\rho_t), \\ \rho_0 &= \rho. \end{aligned} \tag{18}$$

Donde $\rho$ es un estado inicial y $\mathcal{L}_*$ es un operador, no necesariamente acotado, del espacio $L_1(\mathcal{H})$ en si mismo, al que se le llama *generador de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan* (LGKS) en su representación predual. Se sabe, véase [10, 13], que en el caso cuando $\mathcal{L}_*$ es un operador acotado tiene la forma canónica[]

$$\mathcal{L}_*(\rho) = \Phi_*(\rho) - G\rho - \rho G^*. \tag{19}$$

donde $\Phi_*$ es una transformación lineal completamente positiva y acotada sobre $L_1(\mathcal{H})$ y $G = \frac{1}{2}\Phi_*(I) - iH$ es el generador de un semigrupo uniformemente continuo sobre $\mathcal{H}$. Esta ecuación maestra es una generalización de la ecuación de Schrödinger. En el caso $\Phi \equiv 0$ la ecuación (18) se reduce a la ecuación de Schrödinger.

El Teorema de Schatten, véase [25], establece un isomorfismo isométrico entre el dual $L_1(\mathcal{H})^*$ de $L_1(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De manera que para cada funcional lineal continuo $f$ sobre $L_1(\mathcal{H})$ existe un elemento $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $f(\rho) = \mathrm{tr}(x\rho)$ para todo $\rho \in L_1(\mathcal{H})$.

Entonces para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y cada $t \geq 0$ el funcional $f(x,t)(\rho) = \mathrm{tr}\Big(x\mathcal{T}_{*t}(\rho)\Big)$ tiene asociado un elemento $\mathcal{T}_t(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$f(x,t)(\rho) = \mathrm{tr}\Big(x\mathcal{T}_{*t}(\rho)\Big) = \mathrm{tr}\Big(\mathcal{T}_t(x)\rho\Big).$$

Para cada $t$ la aplicación $x \to \mathcal{T}_t(x)$ es completamente positiva. Y la familia $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ define un semigrupo cuántico de Markov sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que preserva la identidad. Si $\mathcal{L}$ es el generador de este semigrupo entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}_t(x)}{dt} &= \mathcal{L}(\mathcal{T}_t(x)), \\ \mathcal{T}_0(x) &= x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{20}$$

Esta es una ecuación en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que gobierna la evolución de las observables del sistema cuántico abierto. En el caso cuando $\mathcal{L}$ es acotado, tiene la forma canónica [22, 13],

$$\mathcal{L}(x) = \Phi(x) - G^*x - xG, \tag{21}$$

donde $\Phi$ es una transformación lineal completamente positiva y acotada sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $G = \frac{1}{2}\Phi(I) - iH$ es el generador de un semigrupo uniformemente continuo sobre $\mathcal{H}$.

En el caso de dimensión finita $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ es el espacio de vectores complejos de dimensión $N$ y $L_1(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_N$ es el espacio de matrices complejas de $N \times N$. Al conjunto de estados o matrices de densidad (i.e., el conjunto de operadores positivos sobre $\mathcal{H}$ de traza uno) lo denotamos por $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, claramente $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset L_1(\mathcal{H})$.

Cualquier transformación completamente positiva que preserva la traza tiene la forma de Kraus, véase [20] y el Teorema 2.20 en [10]; es decir, es de la forma

$$\Phi[\rho] = \sum_{i=1}^{n} K_i \rho K_i^* \tag{22}$$

donde los $K_i$ son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfacen la condición

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^* K_i = I. \tag{23}$$

Esta representación no es única.

A una tranformación completamente positiva que preserva la traza la llamaremos simplemente transformación de Kraus.

**4.1. Controlabilidad cinemática.** La noción de controlabilidad que discutimos en la sección anterior necesita ser modificada para adaptarla al caso de sistemas cuánticos abiertos, cuya dinámica no es necesariamente unitaria. La controlabilidad cinemática se define de la siguiente manera.

**Definicion 4.1.** Un sistema cuántico abierto es *cinemáticamente controlable en un conjunto $S_K$ de estados* si para cualquier par de estados $\rho_1,\ \rho_2 \in S_K$ existe una transformación de Kraus $\Phi$, tal que $\rho_2 = \Phi(\rho_1)$.

**Teorema 4.1.** *(Wu-Pechen-Brif-Rabitz,* [37]*) Para cualquier estado $\rho_f$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión finita $N$, existe una transformación de Kraus $\Phi_f$, tal que $\Phi_f(\rho) = \rho_f$ para todos los estados $\rho$ en $\mathcal{H}$.*

*Demostración.* Supóngase que la descomposición espectral del estado final $\rho_f$ es

$$\rho_f = \sum_{i=1}^{N} p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \tag{24}$$

donde $(\phi_i)_{1\leq i\leq N}$ es la base que diagonaliza $\rho_f$ y $\sum_{i=1}^N p_i = 1,\ p_i \geq 0$. Para una base ortonormal arbitraria $\{\chi_j\}$ en $\mathcal{H}$ definimos los operadores

$$K_{ij} = \sqrt{p_i}|\phi_i\rangle\langle\chi_j| \quad i,j = 1,...,N. \tag{25}$$

Los operadores $K_{ij}$ satisfacen la condición de normalización (23), pues

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^N K_{ij}^* K_{ij} &= \sum_{i,j=1}^N p_i|\chi_j\rangle\langle\phi_i||\phi_i\rangle\langle\chi_j| = \sum_{i,j=1}^N \langle\phi_i, p_i\phi_i\rangle|\chi_j\rangle\langle\chi_j| \\ &= \sum_j^N Tr(\rho_f)|\chi_j\rangle\langle\chi_j| = I.\end{aligned}$$

Definamos la transformación de Kraus

$$\Phi_f(\rho) = \sum_{i,j=1}^N K_{ij}\rho K_{ij}^*. \tag{26}$$

Esta transformación $\Phi_f$ actua sobre un estado $\rho$ en $\mathcal{H}$ de la siguiente manera

$$\Phi_f(\rho) = \sum_{i,j=1}^N p_i|\phi_i\rangle\langle\chi_j|\rho|\chi_j\rangle\langle\phi_i| = Tr(\rho)\sum_{i=1}^N p_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \rho_f.$$

Esto demuestra el teorema. □

**Corolario 4.2.** *Para cualquier par de estados $\rho_1$ y $\rho_2$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ finito dimensional, existe una transformación de Kraus $\Phi$ tal que $\Phi(\rho_1) = \rho_2$.*

**Corolario 4.3.** *Un sistema cuántico abierto finito dimensional es cinemáticamente controlable en el conjunto $S_K = \mathcal{D}(\mathcal{H})$ de todos los estados sobre $\mathcal{H}$.*

**4.2. El problema de control dinámico para sistemas abiertos.** En analogía con el problema de control dinámico para sistemas cerrados, el problema de control dinámico se formula de la siguiente manera.

**Definicion 4.2.** Un sistema abierto es *dinámicamente controlable (o simplemente controlable) en un subconjunto $\mathcal{S}$ de estados* si para cualquier par de estados $\rho_1,\ \rho_2 \in \mathcal{S}$ existen un tiempo finito $T$ y un conjunto de controles admisibles $\{c_1(t), c_2(t), \cdots, c_k(t)\} \subset \mathcal{C}$, tales que la solución $\mathcal{T}_{*(t,0)}$ de la ecuación maestra (18), con generador LGKS dependiente de los controles

$$\mathcal{L}_{*t} = \mathcal{L}_*\big(c_1(t), \cdots, c_k(t)\big), \tag{27}$$

transforma $\rho_1$ en $\rho_2$, i.e.,

$$\rho_2 = \mathcal{T}_{*(t,0)}\rho_1.$$

Es decir la ecuación de control en este caso tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_t &= \mathcal{L}_{*t}(\rho_t), \\ \rho_0 &= \rho.\end{aligned} \tag{28}$$

Con $\mathcal{L}_{*t}$ como en (27).

De manera similar al caso de sistemas cerrados, se puede suponer que el generador LGKS es de la forma

$$\mathcal{L}_{*t} = \mathcal{L}_{*0} + \sum_{j=1}^n c_j(t)\mathcal{L}_{*j},$$

considerar el álgebra de Lie generada por lo elementos $\{\mathcal{L}_{*0}, \ldots, \mathcal{L}_{*n}\}$ y al correspondiente grupo de Lie, buscando aplicar el resultado de Sussman y Jurdjevic, Teorema 3.12, para obtener una condición necesaria y suficiente para controlabilidad.

*Ejemplo* 4.4. [1] Consideremos un sistema cuántico de dos niveles. El espacio de Hilbert asociado es $\mathbb{C}^2$. El Hamiltoniano del sistema es

$$H_A = \varepsilon_0|0\rangle\langle 0| + \varepsilon_1|1\rangle\langle 1|,$$

donde $\varepsilon_0$ y $\varepsilon_1$ son las energías de los estados base y excitado, respectivamente. Las transiciones entre los niveles atómicos estan descritas por los operadores

$$\sigma_- = |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El generador GKSL para este sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) =& 2\gamma\sigma_-\rho\sigma_+ \\ G =& -\sigma_+\sigma_- + iH, \\ \text{con } H =& \Delta\omega|1\rangle\langle 1| + \bar{\Omega}\sigma_- + \Omega\sigma_+, \end{aligned}$$

donde $\gamma, \Delta\omega$ y $\Omega$ son constantes. Para un estado estacionario, $\hat{\rho}_{st} = \sum_{0\le i,j\le 1} \rho_{ij}|i\rangle\langle j|$, del sistema se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma\rho_{11} =& Im(\Omega\rho_{01}) \\ \gamma_\omega\rho_{10} =& i\Omega(\rho_{11} - \rho_{00}), \end{aligned}$$

donde $\gamma_\omega = \gamma + i\Delta\omega$. Sea $\alpha = -i\Omega/\gamma_\omega$, el estado estacionario es

$$\hat{\rho}_{st} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+2|\alpha|^2} \begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha \\ \bar{\alpha} & |\alpha|^2 \end{pmatrix}.$$

El estado es puro sólo si $\alpha = 0$. Nótese que con $|\Omega|/|\gamma_\omega| \gg 1$, el sistema evoluciona desde un estado inicial hacia un estado invariante saturado, i.e.

$$\frac{1}{1+2|\alpha|^2} \begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha \\ \bar{\alpha} & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \longrightarrow_{|\alpha|\to\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

con probabilidades iguales en los niveles superior e inferior, $\rho_{00} = \rho_{11} = 1/2$, $\rho_{01} = 0$.

Con $|\Omega|/|\gamma_\omega| \ll 1$,

$$\frac{1}{1+2|\alpha|^2} \begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha \\ \bar{\alpha} & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \longrightarrow_{|\alpha|\to 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema evoluciona desde un estado inicial hacia el estado estacionario base $\rho_{11} = \rho_{01} = 0$, $\rho_{00} = 1$.

**4.3. Existencia y unicidad para el problema de control incoherente.** En esta sección discutimos el problema de existencia y unicidad de la solución para el problema de control incoherente. El resultado principal, Teorema 4.5, es una consecuencia de la existencia y unicidad de la solución para la ecuación de Lindblad con coeficiente dependientes del tiempo, sobre el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por esta razón abordaremos el estudio de la ecuación de Lindblad en la representación directa,

$$\frac{d}{dt}X_t = \mathcal{L}_t(X_t), \tag{29}$$

$\mathcal{L}_t$ está dado por

$$\mathcal{L}_t(X) = \Phi_t(X) - G_t^*X - XG_t. \tag{30}$$

Donde para cada $t \ge 0$, $\Phi_t$ es una transformación completamente positiva acotada, i.e., $\Phi_t(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $G_t = \frac{1}{2}\Phi_t(I) - iH_t$, con $H_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto.

Partiendo de una motivación puramente matemática, es decir, sin conocer su relación con el problema de control de sistemas cuánticos abiertos, la existencia y unicidad de la solución para la ecuación de Lindblad dependiente del tiempo se demostró en [15, 14], en un contexto general para $\mathcal{L}_t$ con coeficientes no acotados.

Una consecuencia del resultados de [15, 14] es la existencia y unicidad de la solución del problema de control incoherente. Es decir tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.5.** *Si los controles $\{c_1(t), \cdots, c_n(t)\}$ pertenecen a la clase $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}_b$ definidas en el Capítulo 2, entonces la ecuación de control incoherente*

$$\frac{d}{dt}X_t = \mathcal{L}_0(X_t) + \sum_{1\leq j\leq n} c_j(t)\mathcal{L}_j(X_t), \quad X_0 = X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \tag{31}$$

*donde cada generador $\mathcal{L}_j$ tiene la estructura de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan con coeficientes acotados y $\mathcal{L}_j(I) = 0$, $j = 0, ..., n$, entonces existe una solución $X_t = P(t, 0)$ del problema de control incoherente (31), donde $\{P(t, s) : (t, s) \in \Delta\}$, $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ es la solución minimal de (31), que es única (por ser conservativa) y satisface*

(a) *Para cada $(t, s) \in \Delta$, $P(t, s)$ es completamente positivo y normal.*
(b) *$P(t, s) \leq I \;\; \forall (t, s) \in \Delta$.*
(c) *Es un sistema de evolución: $P(s, s) = I$, $P(t, s) = P(t, r)P(r, t)$ para $0 \leq s \leq r \leq t$.*
(d) *Para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ y $s \geq 0$ fijos, $t \mapsto P(t, s)(X)$ es débilmente diferenciable.*
(e) *Si $\{Q(t, s) : (t, s) \in \Delta\}$ es otra familia de transformaciones lineales que satisfacen la ecuación (31) entonces*
$$P(t, s)(X) \leq Q(t, s)(X) \;\; \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

*Demostración.* La continuidad de los controles y el hecho que los coeficientes del generador, i.e., los operadores de Kraus y el Hamiltoniano, son acotados, implican que la familia $(\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_0 + \sum_{1\leq j\leq n} c_j(t)\mathcal{L}_j)_{t\geq 0}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.1 de [15], véase también el Teorema 5.3.3 de [14]. La conservatividad se sigue de la condición $\mathcal{L}_j(I) = 0$, $j = 0, ..., n$. □

## 5. Conclusiones

Hemos revisado algunas nociones de controlabilidad para sistemas cuánticos cerrados y abiertos. Revisamos un criterio para la controlabilidad completa de sistemas cerrados, obtenido por primera vez por Schirmer-Solomon-Leahy, usando un resultado de Sussman y Jurdjevic [18] sobre control en grupos de Lie. Incluimos un resultado de controlabilidad cinemática para sistemas cuánticos abiertos. Formulamos el problema de control dinámico para sistemas abiertos y obtuvimos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de su solución, en el caso de generadores GKSL con coeficientes acotados, enfatizando que las ecuaciones de control tienen Hamiltonianos o generadores de Gorini-Kossakowski-Sudarshan y Lindblad dependientes del tiempo.

## Referencias


[1] Accardi, L., Kozyrev, S.V. and Pechen, A.N., *Coherent quantum control of $\Lambda$-atoms through the stochastic limit*, Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol. **19**, 2008.
[2] Albertini, A. and D'Alessandro, D., *Regular section technical notes and correspondence*, IEEE Trans. Automat. Control **48**, 1399 (2003).
[3] Chu, S., *Cold atoms and quantum control*, Nature **416**, 206–210, 2002.
[4] Cruz de la Rosa, M.A., Control de Sistemas Cuánticos, Tesis de Maestría, Posgrado en Matemáticas, UAM-I, México, 2010.
[5] Curtain, R.F., An introduction to infinite-dimensional linear systems theory, Springer Verlag, New York, 1995.
[6] Dantuz, M. and Lozovoy, V., *Experimental laser coherent control of physico-chemical processes*, Chem. Rev. **104**, 1813–1859, 2004.
[7] Dollard, J. and Friedman, C., Product Integration, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. **10**, Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
[8] Dong, D. and Petersen, I.R., *Quantum control theory and applications: A survey*, arXiv:0910.2350v1 [quant-phys], 13 oct. 2009.
[9] Dong, D., Zhang, C., Rabitz, H., Pechen, A. and Tarn, T.J., *Incoherent control of locally quantum systems*, J. Chem. Phys. **129**, p. 154103, 2008.

[10] Fagnola, F., *Quantum Markov semigroups and quantum flows*, *Proyecciones* **18**, 1-144, 1999.
[11] Fatorrini, H.O., Infinite-dimensional optimization and control theory, Cambridge Univ. Press, 1999.
[12] Garng M., Huang, T., Tarn, T.J. and Clark, J.W, *On the controlability of quantum-mechanical systems*, J. Math. Phys. **24 (11)**, 2608-2618, 1983.
[13] Gorini, V., Kossakowski, A. and Sudarshan, E.C.G., *Completely positive dynamical semigroups of N-level systems*, J. Math. Phys. **17**, 821-825, 1976.
[14] García, J.C., Una Clase de Transformaciones Completamente Positivas no Acotadas y Conservatividad de la Solución Minimal de la Ecuación Maestra, tesis de doctorado, UAM-Iztapalapa, 1998.
[15] García, J.C. and Quezada, R., *On strong perturbations of covariant generators of QDS*, en Memorias del V Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos, Aportaciones Matemáticas ( Serie Investigación) **12**, SMM, 1999.
[16] Helgason, S., Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1962.
[17] Lan C., Tarn T.J., Chi, Q.S. and Clark, J.W., *Analytic controlability of time-dependent quantum control systems*, J. Math. Phys. **46**, 052102, 2005.
[18] Jurdjevic, V and Sussmann, H.J., Control systems on Lie groups, Journal of Differential Equations **12**, 313–329, 1972.
[19] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry, Vol. **1**, Interscience, New York, 1963.
[20] Kraus, K., *General state changes in quantum theory*, Ann. Phys. **64**, 311–335, 1970.
[21] Levis, R.J., Menkir, G.M. and Rabitz, H., *Selective bond dissociation and rearrangement with optimally tailored, strong-field laser pulses*, Science **292**, 709–, 2001.
[22] Lindblad, L., *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. **48**, 119–130, 1976.
[23] Rabitz, H., *The role of theory in the laboratory control of quantum dynamics phenomena*, Theor. Chem. Acc. **109**, 64–70,2003.
[24] Rabitz, H., de Vivie-Riedle, R., Motzkus, M. and Kompa, K., *Whither the future of controling quantum phenomena?*, Science **288**, 824–828, 2000.
[25] Reed, M. and Simon, B., Modern Methods of Mathematical Physics, vol **I**, Functional Analysis, Academic Press, 1975.
[26] Rice, S.A. and Zhao, M.S., Optical control of molecular dynamics, John Wiley and Sons Inc., 1st. edition, 2000.
[27] Romano, R. and D'Alessandro, D., *Incoherent control and entanglement for two-dimensional coupled systems*, Phys. Rev. A73, p. 022323, 2006.
[28] Schirmer, S.G., Solomon, A.I. and Leahy, J.V., *Degrees of controllability for quantum systems and application to atomic systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**,4125–4141, 2002.
[29] Schirmer, S.G., Solomon, A.I. and Leahy, J.V., *Criteria for reachability of quantum states*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**,8551-, 2002.
[30] Shapiro, M. and Brumer, P., Principles of quantum control of molecular processes, John Wiley and Sons Inc., 1st edition, 2003.
[31] Susuki, M., *On the convergence of exponential operators-the Zassenhaus formula, BCH formula and systematic approximants*, Commun. Math. Phys. **57**, 193-200, 1977.
[32] van Handel, R., Stockton, J.R. and Mabuchi, H., *Modelling and feedback control desing for quantum state preparation*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S179-S197, 2005.
[33] Vandersypen, L.M.K. and Chuang, I.L., *NMR technics for quantum control and computation*, Rev. Mod. Phys. **76**, 1036-1069, 2004.
[34] Warren, W.S., Rabitz, H. and Dahleh, M., *Coherent control of quantum dynamics: The dream is alive*, Science **259**, 1581-1589, 1993.
[35] Wisemar, H.M. and Milburn, G.J., Quantum measurement and control, Cambridge Univ. Press, 1st edition, 2010.
[36] Wisemar, H.M. and Milburn, G.J., *Quantum theory of optical feedback via homodyne detection*, Phys. rev. Lett **70**, 548-551, 1993.
[37] Wu, R., Pechen A., Brif, C. and Rabitz, H., *Controllability of open quantum systems with Kraus-map dynamics*, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 5681–5693, 2007.

*Dirección del autor:*
Marco Antonio Cruz de la Rosa
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `marco_esmas@hotmail.com`