Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. II, junio 2011, 83–96

EL PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DE VALUACIÓN DE ACTIVOS PARA TIEMPO DISCRETO Y HORIZONTE FINITO

ALEJANDRO SÁNCHEZ PERALTA

Resumen. El Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos tiene una relevancia histórica que destaca por caracterizar la relación entre no-arbitraje y la existencia de una medida de probabilidad equivalente, bajo la cual el proceso de precios descontado de algún derivado financiero es una martingala. En este trabajo abordamos una de las pruebas del Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos en tiempo discreto y horizonte temporal finito, pero con un espacio de estados no necesariamente finito. Apegándonos a la referencia [3] establecemos en detalle la demostración de este resultado usando el principio de inducción matemática.

1. Introducción

El proceso de comprar y vender simultáneamente (o casi) un mismo instrumento financiero en diferentes mercados, generando algún beneficio económico con base en la diferencia de precios se denomina *arbitraje financiero.* Esta estrategia de mercado es tal, que nos permite generar una ganancia libre de riesgo de manera indiscriminada.

Si en un mercado financiero algún agente logra una oportunidad de arbitraje[1], dicho agente puede ejecutar tal estrategia de manera ilimitada, basado únicamente en la idea de que "más es mejor que menos". No obstante, esta posición es incompatible dentro de un mercado en el que existan otros agentes competitivos, ya que no habría un portafolio de inversión óptimo para los otros agentes que también prefieren más por menos.

Esto da lugar a una de las ramas más importantes dentro de las finanzas matemáticas, que es la llamada valuación por arbitraje. El estudio contemporáneo del arbitraje financiero se centra en el análisis de las implicaciones de la ausencia de las oportunidades de arbitraje. Y es en esta línea que surge uno de los resultados más interesantes en las finanzas matemáticas actuales. Este es el Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos (PTFVA).

Fueron Phillip Dybvig y Stephen Ross quienes acuñaron el término *Teorema Fundamental de las Finanzas* en un diccionario de economía en 1987 (ver [2]). Sin embargo, un primer acercamiento a este resultado fue publicado por el segundo autor (S. Ross) once años antes. En nuestro caso comentaremos algunos aspectos del arbitraje financiero en un contexto matemático y financiero sencillo y, posteriormente desarrollamos en detalle la demostración del PTFVA en tiempo discreto y horizonte finito. Por último, comentaremos un ejemplo desarrollado por Stanley Pliska ([7]) para el que no se satisface el Primer Teorema Fundamental.

2. Un caso sencillo de arbitraje financiero

A lo largo de esta sección trabajaremos en $\mathbb{R}^D$. Esto obedece a dos razones principalmente. La primera de ellas es que $\mathbb{R}^D$ es un espacio vectorial, lo cual es

2010 *Mathematics Subject Classification.* 91B28 .
Palabras clave. Primer Teorema Fundamental, arbitraje financiero, medida martingala equivalente.

[1]De existir una oportunidad de arbitraje, ésta es tomada de manera inmediata debido a la gran cantidad de agentes que participan en el mercado. Esto ocasiona que la ventana se cierre al momento, haciendo que el arbitraje se desvanezca.

ventajoso para establecer conceptos tales como el de portafolio financiero. La segunda razón es porque varias de las hipótesis de un mercado financiero real, se satisfacen suficientemente bien en este espacio como veremos más adelante.

Supongamos que trabajamos con un modelo de mercado en el que existen un número finito de activos del mercado (digamos D), cuyos perfiles de pago están dados en términos de bienes de consumo. Si $\overline{x}_d \in \mathbb{R}^J$ es el perfil de pago para el d-ésimo activo, definimos la matriz de perfiles de pago o de pagos $X \in \mathcal{M}_{J\times D}(\mathbb{R})$ como

$$X = [\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_D],$$

donde J es el número de escenarios del mercado (estados del mundo).

En términos generales, un portafolio es un conjunto de instrumentos financieros en el que un determinado agente del mercado coloca sus inversiones para su posterior intercambio. Para nosotros, un portafolio es un elemento de $\mathbb{R}^D$ en el que cada entrada representa las deudas ó las posesiones del agente.

Consideramos portafolios en $\mathbb{R}^D$, ya que esto permite tener entradas positivas, negativas o cero en el portafolio[2]. Además, dado que en la práctica es común intercambiar lotes de activos, al trabajar en este espacio se satisface la condición de divisibilidad del mercado.

Si h es un portafolio con D activos, su perfil de pago está dado como

$$Xh = \sum_{d=1}^{D} \overline{x}_d h_d,$$

donde h_d es el d-ésimo activo del portafolio y $\overline{x}_d$ el perfil de pago correspondiente a esta entrada. Con esta noción de perfil de pago de un portafolio podemos establecer la siguiente

Definicion 2.1. (Ley de un mismo precio). Si h y h' son dos portafolios cuyo perfil de pago es el mismo, entonces ambos portafolios tienen el *mismo precio*. Es decir, si $Xh = Xh'$ entonces $ph = ph'$, donde $p \in \mathbb{R}^D$ es un vector de precios.

En este caso podemos ver que cualquier portafolio cuyo perfil de pago es cero, tiene precio igual a cero. Veamos que si $\tilde{h} = h - h'$, entonces $X\tilde{h} = 0$ implica que $p\tilde{h} = 0$, i.e.,

$$\ker(X) \subset \ker(\hat{p}), \tag{1}$$

donde $\hat{p}$ es un vector en $\mathbb{R}^D$, tal que existe un portafolio h con la propiedad de que $\hat{p}h \in \mathbb{R}_+$.

Si bien es posible establecer diferentes nociones de arbitraje, en el contexto que estamos trabajando es necesario introducir una definición en términos del perfil de pago de un portafolio.

Definicion 2.2. Un *arbitraje fuerte* es un portafolio cuyo precio es estrictamente negativo y que tiene un perfil de pago positivo en algún tiempo futuro.

Definicion 2.3. Un *arbitraje* es un portafolio que es un arbitraje fuerte o que tiene precio igual a cero y un perfil de pago positivo, hoy o en algún estado en el futuro.

En vista de que el precio inicial para un arbitraje no es mayor que cero, no requerimos de riqueza alguna para participar en el mercado. Sin embargo, es posible que al término del periodo hayamos conseguido algún beneficio gracias al perfil de pago final. Esto lo podemos conjuntar en forma de desigualdades como veremos a continuación.

Sea h un portafolio de arbitraje, entonces

$$ph \leq 0,$$

y su payoff siempre es positivo

$$Xh \geq 0.$$

[2]Esto es a lo que se le denomina liquidez del mercado.

Cuando escribamos $\geq$ debemos entender *mayor que* o *igual que* en cada componente. Por otra parte $>$ quiere decir *mayor o igual estrictamente* y *mayor en algunas componentes.* Por último, cuando se trate de $>>$ estaremos hablando de *estrictamente mayor que* en todas las componentes. Observemos que el arbitraje h, tiene una desigualdad estricta en alguna de las desigualdades anteriores, al menos en una componente. Así, una oportunidad de arbitraje puede representarse como

$$\mathcal{Y}h = \begin{bmatrix} -p \\ X \end{bmatrix} h > 0, \tag{2}$$

donde $\mathcal{Y} \in \mathcal{M}_{J+1\times D}(\mathbb{R})$.

Proposición 2.1. *Si no hay arbitraje entonces se satisface la ley de un mismo precio.*

Demostración. Sea $h \in \mathbb{R}^D$ un portafolio, tal que $h \in \ker(X)$ y $h \notin \ker(p)$. De esta manera hay dos casos para el precio del portafolio, a saber $ph > 0$ ó $ph < 0$.

Si ocurre el primer caso, entonces $-ph < 0$. De esta manera, con $-Xh = 0$ se satisface la definición de arbitraje fuerte para el portafolio $-h$. Es decir, $p(-h) < 0$ y en particular $X(-h) \geq 0$. Por otro lado el caso $ph < 0$ no es posible, ya que la otra condición para el arbitraje es que $ph = 0$. □

Hemos establecido uno de los supuestos financieros más usados en la práctica, como una implicación del principio de no arbitraje en un contexto sencillo. Este hecho además, permite adentrarse en el concepto de equilibrio de mercado y algunas otras relaciones estructurales. Más por el momento nos limitaremos al Primer Teorema Fundamental.

Ejemplo 2.2. Consideremos dos activos cuyos perfiles de pago son $x_1 = (1,1)^t$ y $x_2 = (1,2)^t$ respectivamente. Supongamos que el precio de estos activos es $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$. En este caso el vector de precios $p = (1,2)$ pertenece a la frontera del cono generado por los perfiles de pago, de hecho coincide con uno de ellos, tal como se muestra en la Figura 1.

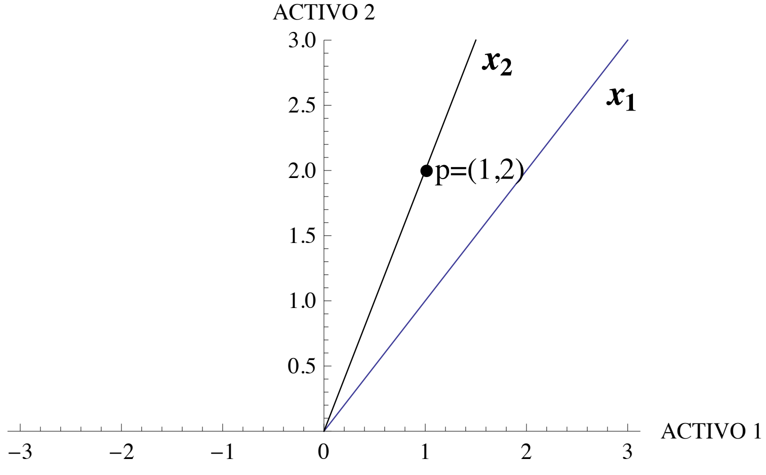

FIGURA 1. El precio p coincide con una de las fronteras del cono generado por los perfiles de pago.

La matriz de pagos es

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que con el portafolio $h = (1, -1/2)$, tenemos que $z = Xh = (1/2, 0)^t$. Este perfil de pago no pertenece al subespacio generado por x_1 y x_2. Además $ph = 0$, es decir, h es un portafolio de arbitraje. Sin embargo, dado que $z \geq 0$ y $ph \not< 0$, se sigue que no es un arbitraje fuerte.

3. El PTFVA de Dalang-Morton-Willinger

El Primer Teorema Fundamental caracteriza la existencia de una medida de probabilidad equivalente, bajo la cual el proceso de precios descontado de algún derivado financiero es una martingala.

Existen varias versiones de este resultado en múltiples contextos. Muchas de ellas de nivel elemental, y otras tantas sofisticadas y difíciles de abordar. En nuestro caso trabajamos con una versión de nivel intermedio, conocida como la versión de Dalang-Morton-Willinger. Vamos a proceder con el enfoque presentado en [11] y, apegándonos a [3] construimos la prueba de este resultado mediante el principio de inducción matemática. Tal medida martingala equivalente es importante ya que nos permite valuar portafolios, derivados financieros, entre otras aplicaciones.

3.1. Estableciendo el teorema. Sea $(\Omega, (\Im_t)_{t=0}^{T}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado, donde
$(\Im_t)_{t=0}^{T}$ es la filtración finita $\Im_0 \subsetneq \Im_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \Im_T$.

Si $S_t = (S_0(t), \ldots, S_d(t))$ es un vector de precios de algún mercado financiero, tenemos que la variable aleatoria $S_i(t) : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ denota al vector de precios que prevalece al tiempo t. Suponemos que cada componente de $S(t)$ representa el proceso de precio para $d+1$ activos financieros distintos que son medidos en relación al primer activo. Este activo recibe el nombre de *numerario.* Y dado que los precios restantes son medidos relativos al numerario, se puede tomar $S_0(t) = 1$.

Definicion 3.1. Sea $\mathcal{P}$ la mínima σ-álgebra sobre $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ que contiene a los conjuntos $\{0\} \times A, A \in \Im_0$ y $(u, v] \times B, B \in \Im_u$, con $0 \leq u < v$. A $\mathcal{P}$ se le denomina la *σ-álgebra de los conjuntos predecibles.*

Definicion 3.2. Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ es *$\Im_t$-predecible* si es $\mathcal{P}$-medible.

A continuación establecemos formalmente el concepto de portafolio financiero. Este es uno de los conceptos que podemos considerar como universales en finanzas.

Definicion 3.3. Un *portafolio* es un proceso predecible $(d+1)$-dimensional denotado por $h = (h_0(t), \ldots, h_d(t))$, donde cada $h_i(t)$ es el número de activos del i-ésimo tipo que hay en el portafolio durante el intervalo $(t-1, t]$.

Cuando algún agente del mercado adquiere las cantidades correspondientes a los portafolios $h(0), \ldots, h(T-1)$ en los instantes $t = 0, 1, \ldots, T-1$, para conformar cualquier estrategia de mercado deberá usar únicamente los recursos y la información disponibles hasta ese momento, atendiendo únicamente al pasado y al presente. Así, podemos decir que el agente no puede ver en el futuro debido a que se consideran estrategias predecibles.

Definicion 3.4. Sea $\{\Im_t\}_{t\geq 0}$ una familia creciente de σ-álgebras de conjuntos de Ω. Un *proceso* $X(t,\omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *se llama $\Im_t$-adaptado* si para cada $t \geq 0$ la variable aleatoria $X(t, \omega)$ es $\Im_t$-medible.

Definicion 3.5. Si h es un portafolio, el *proceso de valor* de dicho portafolio es $V = (V_t)_{t=0}^{T}$ y está dado como

$$(Vh)(0) = \sum_{i=0}^{d} h_i(1) S_i(0) \quad y \quad (Vh)(t) = \sum_{i=0}^{d} h_i(t) S_i(t-1), \quad t > 1.$$

Notemos que el proceso de valor es un proceso adaptado, debido a que tanto $S_i(t)$ y $h_i(t)$ son $\Im_t$-adaptados para toda $t \leq T-1$.

Definicion 3.6. *Un portafolio h es autofinanciable* si su proceso de valor V satisface

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{d} h_i(t) \Delta(S_i(t)), \quad \forall t \geq 1.$$

Los portafolios autofinanciables son de gran importancia pues son aquellos que no involucran movimientos de entrada o salida de dinero después de $t = 0$. Es decir, que no entran ni salen flujos de efectivo cuando $t > 0$. De esta manera lo que gana o pierde un agente del mercado viene dado mediante la siguiente expresión

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle h(t), S(t+1) - S(t) \rangle = (Vh)(0) + \sum_{t=1}^{T-1} \langle h(t), \Delta S(t) \rangle .$$

Si en general denotamos

$$(h \cdot S)_t = \sum_{u=1}^{t} \langle h(u), \Delta S(u) \rangle , \quad \forall t \geq 1,$$

entonces

$$(Vh)(t) = (Vh)(0) + (h \cdot S)_t$$

para un portafolio que sea autofinanciable. Una vez establecido lo anterior pasamos a definir el concepto de arbitraje.

Definicion 3.7. Una *oportunidad de arbitraje* es un portafolio autofinanciable $h(t)$, para el cual su proceso de valor satisface las siguientes condiciones

(i) $P[(Vh)(0) = 0] = 1$,
(ii) $\exists \tau \in I = \{0, 1, \ldots, T\}$, tal que $P[(Vh)(\tau) \geq 0] \geq 0$,
(iii) $P[Vh(\tau) > 0] > 0$.

Si consideramos al conjunto

$$K = \{ \sum_{t=0}^{T-1} \langle h(t), \Delta S(t) \rangle : h(t) : \Omega \to \mathbb{R}^d \text{ es } \Im_t\text{-adaptado para } t \in \{0, 1, \ldots, T-1\} \} ,$$

tenemos que este es un subespacio de $L^0(\Omega, \Im_t, P)$. Este conjunto es el espacio de variables aleatorias real valuadas que son iguales P-casi seguramente (lo que denotaremos en adelante como P-c.s.). Podemos entonces reescribir la definición de arbitraje financiero en términos geométricos.

Definicion 3.8. Decimos que *en un mercado financiero no hay arbitraje* si

$$K \cap L^0_+(\Omega, \Im, P) = \{0\},$$

donde L^0_+ es el cono de variables $\mathbb{R}$-valuadas que son iguales P-c.s.

Debemos verificar entonces que con las definiciones anteriores, en efecto el subespacio K es cerrado en $L^0(\Omega, \Im, P)$. Esto es lo que se establece en el teorema 3.2.

Definicion 3.9. Sea $H \in L^0(\Omega, \Im_0, P; \mathbb{R}^d)$. Diremos que H *está en forma canónica para* $(S(0), S(1))$ si $H \in \mathcal{H}^X$, donde

$$\mathcal{H}^X = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ es } \Im_0\text{-medible y } Pf = f\},$$

aquí $X = S(1) - S(0)$.

A continuación introducimos la notación para sucesiones de integrales estocásticas de menos el máximo. Si $S(t)$ es un proceso adaptado a $(\Omega, (\Im_t)_{t=0}^T, P)$ y $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en forma canónica perteneciente a $L^0(\Omega, \Im_t, P; \mathbb{R}^d)$, entonces

$$(H \cdot \Delta S)_- = -\max\{H \cdot \Delta S, 0\}.$$

Proposición 3.1. *Sea* $S = (S(0), S(1))$ *un proceso adaptado a* $(\Omega, (\Im_t)_{t=0}^1, P)$ *y sea* $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ *una sucesión en* $L^0(\Omega, \Im_0, P; \mathbb{R}^d)$ *en forma canónica. Entonces*

(i) *La sucesión* $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ *es acotada c.s. sii* $\{(H \cdot \Delta S)\}_{n=1}^\infty$ *es acotada.*
(ii) $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ *converge c.s. sii* $\{(H \cdot \Delta S)\}_{n=1}^\infty$ *converge c.s.*

Si suponemos además que el proceso S satisface la condición de no-arbitraje tenemos

(iii) *La sucesión* $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada c.s. sii* $\{(H \cdot \Delta S)_-\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada.*
(iv) $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge c.s. sii* $\{(H \cdot \Delta S)_-\}_{n=1}^{\infty}$ *converge c.s.*

Demostración. Véase [3], Cap. 6, pp. 92-93. □

Teorema 3.2. *Sea* $S = (S(0), S(1))$ *un proceso estocástico* $\mathbb{R}^d$*-valuado a un paso adaptado a* $(\Omega, (\Im_t)_{t=0}^1, P)$*. Entonces*

(i) *El subespacio vectorial* K *es cerrado*[3] *en* $L^0(\Omega, \Im_1, P)$*.*
(ii) *Si* S *satisface la condición de no-arbitraje, entonces el cono*

$$C = K - L_+^0(\Omega, \Im_1, P)$$

es cerrado[4] *en* $L^0(\Omega, \Im, P)$*.*

Nota. A la parte (i) del enunciado se le conoce como el *Lema de Stricker.*

Demostración. (i) Sea $\{f_n\} = \langle H_n, \Delta S\rangle_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en K que converge a $f_0 \in L^0(\Omega, \Im_1, P)$ con respecto a la convergencia en medida. Por simplicidad podemos suponer que H^n está en forma canónica. Por otra parte, pasando a una subsucesión podemos suponer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguramente a f_0.

La Proposición 3.1, implica que la sucesión $\{H^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge casi seguramente a $H^0 \in L^0(\Omega, \Im_1, P; \mathbb{R}^d)$, de modo que $f_0 = \left\langle H^0, \Delta S\right\rangle$ y por lo tanto $f_0 \in K$.

(ii) Para probar esta afirmación supongamos que $f_n = g_n - h_n$, es una sucesión que converge en probabilidad a $f_0 \in L^0(\Omega, \Im_1, P)$, donde $g_n = \langle H^n, \Delta S\rangle$, para lo cual H^n es un integrando en forma canónica y $h_n \in L_+^0(\Omega, \Im_1, P)$. Tenemos que probar entonces que $f_0 \in C$, para esto de nueva cuenta podemos suponer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguramente a f_0. Como $f_n \leq g_n$ inferimos que $\{\langle H^n, \Delta S\rangle_-\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada c.s., de tal forma que podemos concluir de la condición de no-arbitraje y de la Proposición 3.1, que $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$ también es acotada c.s.

Pasando a una subsucesión parametrizada medible (ver [3], pp. 90) $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ podemos suponer que la subsucesión $g_{\tau_k} = \langle H^{\tau_k}, \Delta S\rangle$ converge casi seguramente a $\left\langle H^0, \Delta S\right\rangle$, para algún $H^0 \in E$. Obsérvese que la sucesión $\{f_{\tau_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sigue convergiendo c.s. a f_0, de modo tal que $h_{\tau_k} = f_{\tau_k} - g_{\tau_k}$ converge casi seguramente a algún $h_0 \geq 0$. Por lo tanto

$$f_0 = \left\langle H^0, \Delta S\right\rangle - h_0 \in K - L_+^0(\Omega, \Im_1, P) = C.$$

□

Antes de pasar a la demostración, debemos introducir algunos elementos adicionales.

Sean $p, q \in [1, \infty]$, de modo tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y consideremos $E = L^p(\Omega, \Im, P), E' = L^q(\Omega, \Im, P)$. Vamos a denotar por

$$E_+ = \{f \in L^P \mid 0 \leq f \ c.s.\}$$

al cono de variables aleatorias no-negativas en el espacio L^P.

Lema 3.3. *Sea* $C \subset E$ *un cono convexo* $\sigma(E, E')$*-cerrado en la topología de* E *(Ver* [6] *u* [8]*) que contiene a* E_- *y supongamos que* $C \cap E_+ = \{0\}$*. Entonces existe una medida de probabilidad* Q *sobre* $\Im$*, la cual es equivalente a* P*, satisface* $\frac{dQ}{dP} \in E'$ *y es tal que para cualquier* $f \in C$*, tenemos que* $E_Q[f] \leq 0$*.*

Demostración. Ver [3], Cap. 5, pp. 81-82. □

Pasemos al PTFVA en una versión no-elemental. Esta es de hecho una versión que podemos calificar como intermedia, aunque no por eso menos interesante.

---

[3]Esta parte del teorema aparece en: C. Stricker, (1990), *Arbitrage et Lois de Martingale.* Annales de l' Institute Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques, vol 26, pp. 451-460.

[4]La demostración de esta afirmación es debida a Walter Schachermayer y apareció en W. Schachermayer, (1992), *A Hilbert space proof of the fundamental theorem of assets pricing in finite discrete time.* Insurance: Mathematics and Economics, vol. 11, no. 4, pp. 249-257.

Teorema 3.4. (PTFVA). *Sea $(\Omega, \Im_T, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(S(t))_{t=0}^T$ un proceso estocástico $\mathbb{R}^d$-valuado adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t=0}^T$. Entonces se cumple la condición de no-arbitraje*

$$K \cap L_+^0(\Omega, \Im_T, P) = \{0\},$$

si y solo si existe una medida de probabilidad equivalente Q, ($Q \sim P$) tal que

(i) $S(t) \in L^1(\Omega, \Im_T, Q), \quad t = 0, \ldots, T,$
(ii) $(S(t))_{t=0}^T$ *satisface la propiedad martingala,*
(iii) $\frac{dQ}{dP}$ *es acotada, i.e.,* $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(\Omega, \Im_T, P)$.

3.2. La base de la inducción. Vamos a establecer el enunciado del teorema para cuando $T = 1$. Sea $S = (S(0), S(1))$ un proceso $\mathbb{R}^d$-valuado, $(\Im_0, \Im_1)$-adaptado que satisface la condición de no-arbitraje. Entonces existe una medida de probabilidad Q equivalente a P, tal que

(i) $S(0), S(1) \in L^1(Q)$
(ii) $S(0) = E[S(1)|\Im_0]$
(iii) $\frac{dQ}{dP}$ es acotada.

Consideremos una medida de probabilidad equivalente P_1, tal que $\frac{dP_1}{dP}$ sea acotada y $S(0), S(1) \in L^1(P_1)$.

En segundo lugar vamos a considerar al conjunto

$$C_1 = C \cap L^1(\Omega, \Im_1, P_1),$$

donde

$$C = K - L_+^0(\Omega, \Im_1, P).$$

En vista de que C es cerrado en $L^0(P)$, el conjunto C_1 es cerrado en $L^1(P_1)$. Tenemos además que C_1 es un cono convexo debido a que C es un cono convexo.

Por la condición de no-arbitraje tenemos que

$$C_1 \cap L_+^1(\Omega, \Im_1, P_1) = 0.$$

Denotamos como

$$E_+ = L_+^1(\Omega, \Im_1, P_1,)$$

dado que

$$C_1 \cap E_+ = \{0\},$$

aplicando el lema (3.3), vemos que existe una medida de probabilidad equivalente Q en $\Im_1$ tal que $\frac{dQ}{dP_1}$ es acotada y $E_Q[f] \leq 0, \ \forall f \in C_1$.

Nota: Observemos que el hecho de que $\frac{dQ}{dP_1}$ sea acotada implica que $S(0), S(1) \in L^1(Q)$.

Puesto que para cada coordenada $j = 1, \ldots, d$ y cada $A \in \Im_0$ tenemos que

$$\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j) \in C_1 \quad \text{y} \quad -\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j) \in C_1,$$

entonces

$$E_Q[\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j)] \leq 0 \qquad \text{y} \qquad E_Q[-\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j)] \leq 0.$$

Esto implica que $E[\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j)] = 0$, con lo que queda demostrado que

$$E_Q[\mathbf{1}_A S(1)^j] = E_Q[\mathbf{1}_A S(0)^j].$$

Así, si usamos el hecho de que $S(0)^j$ es $\Im_0$-medible para toda j, de la definición de esperanza condicional se tiene que

$$S(0) = E_Q[S(1)|\Im_0].$$

Por otra parte, dado que $P_1 \sim P$ se tiene que P_1 es absolutamente continua con respecto a P (y visceversa). De donde se sigue que $\frac{dQ}{dP} = \frac{dQ}{dP_1}\frac{dP_1}{dP}$, usando las propiedades de la derivada de Radon-Nikodym (ver [9]). Por consiguiente tenemos que $\frac{dQ}{dP}$ también es acotada.

Con lo anterior hemos demostrado la base de la inducción.

3.3. El paso inductivo. Supongamos ahora que el teorema es válido para cuando hay $T-1$ periodos de tiempo y sea $(S(t))_{t=1}^{T}$ un proceso adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t=1}^{T}$. Entonces existe una medida de probabilidad $\tilde{Q} \sim P$, definida sobre $\Im_T$ y tal que

(i) $\frac{d\tilde{Q}}{dP}$ está acotada
(ii) $S(1), \ldots, S(T) \in L^1(\Omega, \Im_T, \tilde{Q})$
(iii) $(S(t))_{t=1}^{T}$ es una $\tilde{Q}$-martingala, es decir, que para cualquier $t \geq 1, A \in \Im_t$, tenemos

$$\int_A S(t)d\tilde{Q} = \int_A S(t+1)d\tilde{Q}.$$

La base de la inducción aplicada a $(S(t))_{t=0}^{1}$, al espacio de probabilidad $(\Omega, \Im_1, \tilde{Q})$ y a la filtración $(\Im)_{t=0}^{1}$, nos da una función acotada f_1, que satisface las siguientes condiciones: (a) La función f_1 es $\Im_1$-medible; (b)$f_1 > 0$; (c) $E_{\tilde{Q}}[f_1] = 1$; (d) $E_{\tilde{Q}}[|S(1)|f_1] < \infty$; (e) $E_{\tilde{Q}}[|S(0)|f_1] < \infty$ y (f) Para cualquier $A \in \Im_0$ tenemos

$$\int_A S(0)f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1)f_1 d\tilde{Q}. \tag{3}$$

Sin embargo, queda por especificar quien es f_1. La base de la inducción nos provee de una medida Q equivalente a P en $\Im_1$, y la hipótesis de inducción de una medida $\tilde{Q}$ equivalente a P en $\Im_T$. De esta manera podemos definir $f_1 = \frac{dQ}{d\tilde{Q}}$, y es fácil entonces demostrar las propiedades mencionadas en el párrafo anterior.

Si para cualquier $A \in \Im_T$, definimos a la medida de probabilidad Q sobre la σ-álgebra $\Im_T$ mediante la regla

$$Q(A) := \int_A f_1 d\tilde{Q},$$

entonces

$$\frac{dQ}{dP} = f_1 \frac{d\tilde{Q}}{dP} \tag{4}$$

es una variable aleatoria acotada, por (iii) de la base de la inducción. Por (b) tenemos la positividad de f_1 y dado que $\tilde{Q} \sim P$, se sigue que $\frac{d\tilde{Q}}{dP} > 0$ *c.s.*, por lo tanto $\frac{dQ}{dP} > 0$ *c.s.*, y así $Q \sim P$.

Debemos revisar ahora las propiedades de integrabilidad y la propiedad martingala para nuestro proceso. Así, cuando $t = 1, \ldots, T$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |S_t| dQ &= \int_\Omega |S(t)| \frac{dQ}{d\tilde{Q}} d\tilde{Q} \\ &= \int_\Omega |S(t)| f_1 d\tilde{Q} < \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

La propiedad martingala de $(S(t))_{t=0}^{T}$ se obtiene de la siguiente manera. De la ecuación (3.2) tenemos que

$$\int_A S(0)f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1) f_1 d\tilde{Q}, \quad \forall A \in \Im_0.$$

Por otra parte, si en la ecuación (3.4) usamos $t = 0$ y $t = 1$, llegamos a que

$$\int_A S(0)dQ = \int_A S(0)f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1)f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1)dQ.$$

Si ahora consideramos $A \in \Im_t$, cuando $T \geq 1$ tenemos que

$$\int_A S(t)dQ = \int_A S(t)f_1 d\tilde{Q} \tag{6}$$

y

$$\int_A S(t+1)dQ = \int_A S(t+1)f_1 d\tilde{Q}. \tag{7}$$

Lo que resta probar es que las dos ecuaciones anteriores son iguales. Recordemos que f_1 es $\Im_1$-medible y acotada (Lema 3.3). Además, dado que $\Im_1 \subset \Im_2 \subset \ldots \subset \Im_T$, se tiene que f_1 es $\Im_t$-medible para toda $t = 1, \ldots, T$. Usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\int_A S(t) d\tilde{Q} = \int_A S(t+1) d\tilde{Q}, \quad \forall A \in \Im_t, \; t = 1, \ldots, T.$$

Esto implica que

$$\int_A S(t) dQ = \int_A S(t) f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(t+1) f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(t+1) dQ,$$

es decir,

$$\int_A S(t) dQ = \int_A S(t+1) dQ, \quad \forall A \in \Im_t.$$

Con lo que queda demostrado que $(S(t))_{t=1}^T$ es una Q-martingala.

Probamos ahora la implicación recíproca. Supongamos que existe la medida martingala equivalente Q. Si $f \in K$, se sigue que $E_Q[f] = 0$. Como

$$K \subset L^0_+(\Omega, \Im, Q),$$

se tiene que si $f \in L^0_+(\Omega, \Im, Q)$, entonces

$$E_Q[f] = 0 \Longleftrightarrow f = 0 - c.s.$$

Así, tenemos que $K \cap L^0_+(\Omega, \Im, Q) = \{0\}$.

□

Hemos demostrado así la versión de Dalang-Morton-Willinger del Primer Teorema Fundamental. Si bien esta es una prueba constructiva, también es posible establecer este resultado en términos de la cerradura del cono convexo C (véase [11]).

Notemos además, la brevedad de esta última implicación. En general todos los desarrollos giran en torno a la implicación de que si no hay arbitraje, entonces hay una medida martingala equivalente.

4. Un contraejemplo al PTFVA

Existen gran cantidad de ejemplos de aplicación para el PTFVA en tiempo discreto y horizonte temporal finito. No obstante cuando se considera un número infinito de periodos de tiempo, la implicación *No arbitraje implica la existencia de una MME* no se satisface. Este hecho es una consideración importante que comenta S. Pliska en [7].

Aclaremos primero a que nos referimos con horizonte infinito. Si consideramos un modelo de mercado para el cual el índice t indica el número de periodos, así como el tiempo transcurrido y para el cual cabe la posibilidad de que $T = \infty$ entonces hablamos de un modelo con horizonte temporal infinito.

Cierto tipo de estrategias consideradas como patológicas dentro de los mercados financieros dinámicos son los llamados "dobleteos". Estas estrategias de mercado acarrean arbitraje si el espacio de estados no es finito. El problema del dobleteo radica en el hecho de que no tiene costo alguno, sin embargo dicha estrategia converge con probabilidad 1 a algo positivo.

4.1. El modelo binomial 1-periodo. El modelo binomial 1-periodo es la herramienta básica para entender los principios de la *valuación por arbitraje.* Y nos será de utilidad en la construcción de una estrategia de mercado que no satisface el PTFVA. En este modelo se considera un activo del stock cuyo precio unitario se denota por S_0 al tiempo $t_0 = 0$. Al tiempo t_1 el precio de este activo puede tomar uno de dos valores denotados como S_1^u si el mercado sube, y S_1^d si el mercado baja. Existe una medida de probabilidad asociada de tal manera que la probabilidad de que el precio de mercado suba es p, y la probabilidad de que el precio de mercado baje es $q = 1 - p$. Esto es lo que se ilustra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & & S_1^u = uS_0 \\ & \nearrow & \\ S_0 & & \\ & \searrow & \\ & & S_1^d = dS_0 \end{array}$$

Notemos que se introducen los factores

$$u = \frac{S_1^u}{S_0} \text{ y } d = \frac{S_1^d}{S_0},$$

los cuales son ambos positivos y satisfacen la desigualdad $d < u$. Si ocurre que $u = d$ el precio del stock no es aleatorio y el modelo es completamente trivial.

Introducimos además una *tasa de interés constante* r. Con la cual una unidad monetaria invertida en $t_0 = 0$, nos produce un total de $1 + r$ unidades monetarias al siguiente periodo de tiempo. Similarmente si se pide un préstamo a la tasa r, al final del periodo se tendrá una deuda de $1 + r$ unidades monetarias. En particular suponemos que la tasa de interés para un préstamo es la misma que para una inversión. Más aún, es sencillo verificar que para este modelo la única posibilidad de que no existan oportunidades de arbitraje es que se cumpla

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Para el modelo binomial 1-periodo un *derivado financiero* es un activo del mercado que paga cierta cantidad S_1^u al tiempo uno si el mercado sube y paga una cantidad diferente S_1^d si el precio del mercado baja. Las *opciones* constituyen un tipo particular de derivados financieros. El perfil de pago de una opción de compra de tipo europeo (call europeo) es $(S_1 - K)^+$, donde K es un valor constante que corresponde al precio de ejercicio de la opción.

En este caso la valuación por arbitraje se usa para encontrar el precio del derivado al tiempo cero, que es cuando se introduce al mercado. La idea es *replicar* al derivado[5] de alguna manera. Si comenzamos con una riqueza inicial de X_0 y adquirimos Δ_0 activos del stock al tiempo cero, el portafolio $h(0) = (X_0, -\Delta_0)$ tiene el balance

$$(Vh)(0) = X_0 - \Delta_0 S_0.$$

Esto implica que al tiempo uno podemos alcanzar un portafolio para el cual su balance es

$$(Vh)(1) = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0),$$

en vista de la adquisición de Δ_0 en t_0. Si elegimos las cantidades de riqueza inicial X_0 y Δ_0 de modo tal que $X_1^u = (Vh^u)(1)$ y $X_1^d = (Vh^d)(1)$, tenemos

$$\begin{aligned} X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1^u - S_0 \right) &= \frac{1}{1+r}(Vh^u) \\ X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1^d - S_0 \right) &= \frac{1}{1+r}(Vh^d) \end{aligned}$$

Una manera para resolver este sistema de ecuaciones es multiplicar la primera ecuación por un número $\tilde{p}$ y la segunda por $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$. Sumando ambas ecuaciones llegamos a

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} S_1^u + \tilde{q} S_1^d \right] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} V_1^u + \tilde{q} V_1^d \right]$$

Si

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \left[\tilde{p} S_1^u + \tilde{q} S_1^d \right],$$

[5] La replicación financiera se refiere a igualar el valor de algún instrumento financiero mediante otro tipo de instrumentos del mismo mercado.

obtenemos la fórmula para la riqueza inicial necesaria en la replicación

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1^u + \tilde{q}V_1^d\right].$$

Más aún, podemos encontrar fácilmente los valores de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$, en términos de la tasa de interés y de los factores u y d. Así

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \text{ y } \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

El número de activos Δ_0 que debemos adquirir al inicio está dado por la llamada *delta para la cobertura*

$$\Delta_0 = \frac{V_1^u - V_1^d}{S_1^u - S_1^d}.$$

Y en vista de que queremos replicar una posición corta[6] para el derivado por $(Vh)(1)$, este activo debe tener el precio

$$V(0) = X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}S_1^u + \tilde{q}S_1^d\right] - S_0\right) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1^u + \tilde{q}V_1^d\right]$$

al tiempo cero para no acarrear arbitraje.

El objetivo del siguiente ejemplo es mostrar que cuando se trabaja con un número infinito de periodos de tiempo, siempre es posible obtener una ganancia estrictamente positiva (digamos de \$1) con probabilidad uno, es decir, se logra un arbitraje. Implícitamente aparece una medida de probabilidad asociada y se pueden calcular explícitamente las probabilidades neutras al riesgo. Más no es lo que nos acomete en este momento.

Ejemplo 4.1. Consideremos un modelo binomial 1-periodo. Sean $u = 1.1$ y $d = 0.9$, los factores multiplicativos dependiendo si el precio del stock sube o baja. Supongamos que la tasa libre de riesgo es $r = 0$.

Si al tiempo $t = 0$ conformamos el portafolio $h(0) = (-10, 10) \sim (efectivo, stock)$, usando el modelo binomial tenemos el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} & & S_1^u = 11 \\ & \nearrow & \\ S_0 = 10 & & \\ & \searrow & \\ & & S_1^d = 9 \end{array}$$

Con esta estrategia podemos lograr un "dobleteo". Pidiendo un préstamo por \$10 para armar el portafolio, si el precio sube al tiempo uno podemos pagar el préstamo y quedarnos con \$1 libre. Por otro lado, si el precio del mercado baja quedamos en deuda por \$1. Sin embargo, una manera de "pararse de nuevo" es pedir un préstamo que duplique la cantidad inicial invertida, por ejemplo \$11. Así, al tiempo 1 tenemos \$1 para nuestras arcas y conformamos el portafolio $h(1) = (-20, 20)$. De acuerdo al modelo binomial tendríamos

$$\begin{array}{ccc} & & S_1^u = 22 \\ & \nearrow & \\ S_0 = 20 & & \\ & \searrow & \\ & & S_1^d = 18 \end{array}$$

En este caso si el mercado sube podemos pagar la deuda y retirarnos con \$1. Aunque si el mercado cae estaremos endeudados con \$3, por lo que si queremos tener siempre una ganancia de \$1, tendríamos que recurrir a la misma estrategia otra vez.

[6]Dentro de la jerga financiera se entiende que es algo que ya no se tiene o que se debe.

Podemos ver con este ejemplo que siempre que ocurra un movimiento de subida del mercado durante los primeros t periodos de tiempo, habremos logrado el objetivo de \$1 para nuestro bolsillo. Si por el contrario no ocurre un solo movimiento de subida durante los t primeros periodos, la deuda ascenderá a $1 - 2^t$. Con esto deberemos $11 \cdot 2^{t-1} - 1$, por encima del préstamo inicial y la inversión en el mercado es de $9 \cdot 2^{t-1}$, pues

$$\begin{aligned} 1 - 2^t &= 9 \cdot 2^{t-1} - 9 \cdot 2^{t-1} - 2 \cdot 2^{t-1} + 1 \\ &= 9 \cdot 2^{t-1} - (9+2) \cdot 2^{t-1} + 1 \\ &= 9 \cdot 2^{t-1} - [11 \cdot 2^{t-1} - 1]. \end{aligned}$$

En esta situación al tiempo t, para mantenerse andando el préstamo debe ser de $11 \cdot 2^{t-1}$. Con esto la inversión para este periodo de tiempo sube a $10 \cdot 2^t$. Así, si consideramos un número infinito de periodos de tiempo, la probabilidad de que el mercado siempre esté a la baja es cero. Por lo que en algún momento podremos realizar un arbitraje vía el "dobleteo".

4.2. El contraejemplo de Pliska. El siguiente ejemplo es debido a Stanley Pliska ([7], pp. 246-248). En éste se muestra como en un mercado con un horizonte temporal infinito, la versión del PTFVA que manejamos en este trabajo no se cumple.

Consideremos un modelo de mercado con un activo con riesgo denotado por S, una tasa asociada constante $r = 0$ y un espacio de probabilidad contable $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$. Hagamos $S_0 = 1$ y para cualesquiera $t \geq 1$ y $\omega \in \Omega$ sea

$$S_t(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^t & , t < \omega; \\ \left(\omega^2 + 2\omega + 2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^\omega & , t \geq \omega. \end{cases}$$

El cambio en el precio del activo con riesgo por periodo de tiempo viene dado mediante la siguiente expresión

$$\Delta S_t(\omega) = S_t(\omega) - S_{t-1}(\omega) = \begin{cases} -(\frac{1}{2})^t & , t < \omega; \\ (\omega^2 + 2\omega)(\frac{1}{2})^\omega & , t = \omega; \\ 0 & , t > \omega. \end{cases}$$

Intuitivamente esto quiere decir que en el estado del mundo ω, el precio cae un 50 % por periodo para $\omega - 1$ periodos consecutivos. Del tiempo $\omega - 1$ al tiempo ω el precio aumenta en $(\omega^2 + 2\omega)\left(\frac{1}{2}\right)^\omega$. Es decir, si $t = \omega$

$$\begin{aligned} \Delta S_t(\omega) &= S_\omega(\omega) - S_{\omega-1}(\omega) && (8) \\ &= (\omega^2 + 2\omega + 2)(1/2)^\omega - (1/\omega)^\omega - 1 && (9) \\ &= (\omega^2 + 2\omega)(1/2)^\omega + 2(1/2)^\omega - (1/2)^\omega - 1 && (10) \\ &= (\omega^2 + 2\omega)(1/2)^\omega. && (11) \end{aligned}$$

A partir de $t > \omega$ el precio permanece constante, es decir, para $t > \omega$ el valor del portafolio no cambia.

Sea $H(t)$ el número de activos con riesgo que se tienen del tiempo $t-1$ al tiempo t. En vista de la naturaleza del proceso de precios, sin pérdida de generalidad podemos concentrarnos en aquellas estrategias para las cuales $\{H_t\}_{t\geq 0} \subset \mathbb{R}$. Algo importante que debemos considerar es que la sucesión $\{H_t\}_{t\geq 1}$ es acotada (para evitar "dobleteos") y que además cada estrategia de la sucesión es autofinanciable. De tal manera que las estrategias admisibles son descritas completamente por la riqueza inicial V_0 y la sucesión acotada $\{H_t\}_{t\geq 0}$.

Si consideramos la estrategia admisible $(V_0, \{H_t\}_{t\geq 0})$, el valor del portafolio es

$$V_t(\omega) = \begin{cases} V_0 - \sum_{s=1}^{t}(1/2)^s H_s & , t < \omega; \\ V_0 - \sum_{s=1}^{\omega-1}(1/2)^s H_s + (\omega^2 + 2\omega)(1/2)^\omega H_\omega & , t \geq \omega. \end{cases}$$

Como estamos suponiendo que la sucesión $\{H_t\}_{t\geq 0}$ es acotada, entonces el proceso para el valor del portafolio es acotado inferiormente.

La ausencia de oportunidades de arbitraje se sigue de tres factores: La fecha en la que el precio crecerá es impredecible; si ω es suficientemente grande el precio estará bajo aún cuando haya habido cierto crecimiento y solamente se permiten estrategias acotadas.

Sea B_t un factor de descuento y definamos $V_t^* = \frac{V_t}{B_t}$, así $V_0 = V_0^*$. Si $V_0 = 0$ y $\{H_t\}$ es tal que $V_t \to V$, con $V(\omega), \forall \omega \in \Omega$, entonces

$$-\sum_{t=1}^{\omega-1}(\frac{1}{2})^t H_t + (\omega^2 + 2\omega)(\frac{1}{2})H_\omega \geq 0, \ \forall \omega \in \Omega. \tag{12}$$

Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que para algún $k \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\sum_{t=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^t > \epsilon. \tag{13}$$

Usando inducción matemática y la ecuación (12), llegamos a

$$(\omega^2 + 2\omega)\left(\frac{1}{2}\right)^\omega H_\omega > \epsilon, \ \forall \omega > k. \tag{14}$$

Sin embargo, esto no puede ocurrir dado que la sucesión $\{H_t\}_{t\geq 0}$ es acotada. De esta manera no existe ningún $k \in \mathbb{Z}$, ni tampoco $\epsilon > 0$ tales que se cumpla (13). Es decir, debe ser

$$\sum_{t=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 0, \ \forall k \geq 1. \tag{15}$$

Si en la ecuación (14) tomamos $\omega = 1$ y $k = 1$, tenemos que $H_1 = 0$. Y en general cuando consideramos $H_1 = H_2 = \ldots = H_{k-1} = 0$, las ecuaciones (12) y (15) implican que $H_k = 0$. Esto indica que nuestro candidato a oportunidad de arbitraje cumple con la condición $H_t = 0$ para cualquier elección de t, con lo que se concluye que no pueden existir oportunidades de arbitraje.

Por una parte ya verificamos que no hay arbitraje, lo que resta es ver que sucede en relación a la posible existencia de una medida de probabilidad equivalente a la medida neutra al riesgo. Para esto supongamos que q_{t-1} es la probabilidad condicional neutra al riesgo de que se de un movimiento a la alza del tiempo $t-1$ al tiempo t.

La correspondiente esperanza condicional de ΔS_t debe ser cero, i. e.,

$$q_{t-1}(t^2 + 2t)\frac{1}{2^t} + (1 - q_{t-1}) - \frac{1}{2^t} = 0, \ \forall t \geq 1.$$

La probabilidad incondicional $Q(\omega \geq t)$ debe igualar $(t+1)/2t$, lo que converge a $1/2$, cuando t es arbitrariamente grande.

Para tener una medida de probabilidad válida, debe suceder que

$$\lim_{t\to\infty} Q(\omega \geq t) = 0,$$

mientras que en nuestro caso el límite es $1/2$. De esta manera no existe ninguna medida de probabilidad equivalente bajo la cual el proceso de precios descontado sea martingala, con lo que se muestra que el PTFVA no se cumple en este caso.

5. Agradecimiento

Quiero agradecer al Dr. Julio Cesar García Corte por sus comentarios y aclaraciones. De igual manera al árbitro que revisó este trabajo por sus observaciones y sugerencias.

Referencias

[1] N.H. Bingham, R. Kiesel, Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives. Springer, Heidelberg, second edition, 2004.

[2] Ph. Dybvig and S. Ross , *Arbitrage.* In: The new palgrave: a dictionary of finance, pp. 57–71, J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, Eds., WW Norton NYC, 1987.

[3] F. Delbaen and W. Schachermayer, The Mathematics of Arbitrage. Springer Heidelberg New York, 2006.

[4] C. Ibarra, La Fórmula de Black-Scholes. Notas de Métodos Matemáticos para Finanzas II, MCMAI, UAM-I, 2009.
[5] S. Leroy and J. Werner, Principles of Financial Economics. Cambridge University Press, 2001.
[6] R. E. Megginson, An Introduction to Banach space Theory. Springer-Verlag, 1998.
[7] S. Pliska, Introduction to Mathematical Models: Discrete Models. Blackwell Publishing, 1997.
[8] D. L. Royden, Real Analysis. Prentice Hall, Inc., 1998.
[9] W. Rudin, Functional Analysis. McGraw-Hill, 1973.
[10] A. Sánchez Peralta, *El Primer Teorema Fundamental de Valación de Activos.* Tesis de Maestría, MCMAI, UAM-I, 2010.
[11] W. Schachermayer, *A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time.* Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 11, No. 4, pp. 249–257, 1992.

Dirección del autor:
Alejandro Sánchez Peralta
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `sanchez.alexito@gmial.com`