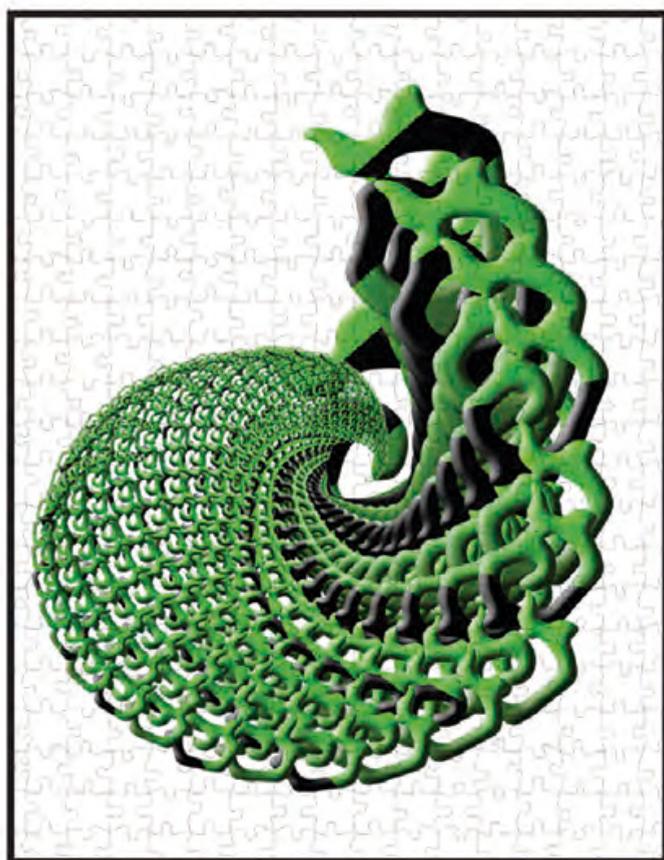


mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas



COMITÉ EDITORIAL

Pedro Luis del Ángel Rodríguez	Área de Matemáticas Básicas CIMAT - A.C.
Lorenzo Héctor Juárez Valencia	Departamento de Matemáticas UAM - I.
Ernesto Pérez Chavela	Departamento de Matemáticas UAM - I.
Roberto Quezada Batalla	Departamento de Matemáticas UAM - I.
Martha Rzedowski Calderón	Departamento de Control Automático Cinvestav.
Richard Wilson Roberts	Departamento de Matemáticas UAM - I.

Editor Técnico

Constancio Hernández García Departamento de Matemáticas
UAM - I.

Coordinadora del Comité Editorial

Laura Hidalgo Solís Departamento de Matemáticas
UAM - I.

ISSN en trámite ante la SEP

Contacto

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa
Tel:(01) 55 5804 4657 Ext. 201 Fax: (01) 55 5804 4660
e-mail: mixbaal2009@gmail.com, e-mail: mixb@xanum.uam.mx
Web Revista: <http://repos.izt.uam.mx/>

Diseño Portada: Srita. Michael Rivera Arce.

mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas

MIXBA´AL. Revista Metropolitana de Matemáticas, Vol. II, No. 1, enero-junio del 2011, es una publicación anual editada por la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, a través de su División de Ciencias Básicas e Ingeniería por su Departamento de Matemáticas. Edificio AT tercer piso, Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, C.P. 09340, México, D.F. Tel. 58044658, mixbaal2009@gmail.com , mixb@xanum.uam.mx. Editora responsable: Laura Hidalgo Solís. Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2010-072709440100-102, ISSN en trámite. Certificado de Licitud de Título y de Contenido No. 15093, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación.

Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

A LOS AUTORES

Mixba'al es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Está dirigida a la comunidad matemática mexicana, formada tanto por estudiantes como por profesores. Esta revista busca fortalecer el Posgrado en Matemáticas y, en la medida de lo posible, la última etapa de la Licenciatura en Matemáticas. Los artículos de exposición pueden ser artículos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas; por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos, artículos panorámicos sobre un área de investigación, la presentación de una visión distinta de algún tema vinculado con la docencia, notas de cursos avanzados, aplicaciones de las matemáticas, historia y filosofía de las matemáticas y, aspectos lúdicos de la matemática, entre otros.

La revista Mixba'al está a cargo de un comité editorial. Los trabajos deben ser presentados en español, en casos excepcionales podrán aceptarse artículos en inglés. Todos los trabajos serán sometidos a arbitraje. El comité editorial decidirá sobre la aceptación de los artículos sometidos. Los artículos de investigación podrán ser panorámicos o se parte de memorias de congresos, simposios, coloquios, talleres u otros.

Cada volumen está a cargo del comité editorial de la revista. Dicho comité tiene la responsabilidad de garantizar su calidad, así como de su presentación de acuerdo con los lineamientos de formato y tipografía de la revista y de la corrección del lenguaje (ortografía, estilo, etcétera).

La versión preliminar de los trabajos sometidos a la revista deberá enviarse en formato pdf. Puesto que la presentación final de los trabajos se hará en $\text{Latex2}\epsilon$, aquellos autores, cuyos trabajos sean aceptados, deberán enviarlos con el formato y macros que proporcionará la revista para su publicación final. Las fotografías o gráficas que acompañen al texto deberán ser enviadas, por separado, en formato pdf y deberán tener la calidad y resolución suficientes para una buena reproducción impresa, y deberán contar con los correspondientes derechos de autor. Se recomienda que la extensión de los trabajos no exceda de 20 páginas.

Laura Hidalgo Solís
Coordinadora

PRESENTACIÓN

Mixba'al es una revista de divulgación en matemáticas, concebida con el propósito de apoyar el desarrollo de la comunidad matemática joven, como son los estudiantes de posgrado y recién graduados. Como el lector puede observar, la mayoría de los autores de los artículos en este segundo número, son alumnos del Posgrado en Matemáticas de la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana. Entre los artículos de este número, se encontrarán tanto trabajos de investigación original como exposición de resultados importantes conocidos en varias ramas de la matemática básica y aplicada. La intención es continuar con este formato y la revista invita a someter contribuciones de esta índole en el idioma español. Inicialmente se publicará al menos un número al año.

Toda comunicación debe ser dirigida al Comité Editorial, al correo electrónico: mixbaal2009@gmail.com



VARIETADES LAGRANGIANAS Y APLICACIONES A LA FÍSICA

JOAQUÍN DELGADO

RESUMEN. Este artículo panorámico pretende ilustrar la importancia de las subvariedades Lagrangianas en la Física Matemática, particularmente en aquellas ramas de un alto contenido geométrico. En la primera sección revisamos los conceptos básicos de los espacios vectoriales simplécticos y los subespacios Lagrangianos, contrapartes de sus versiones no lineales, las variedad simpléctica y subvariedades Lagrangianas. Presentamos dos ejemplos que muestran su relevancia: la teoría de las transformaciones canónicas en términos de funciones generadoras y la formulación matemática de la Termodinámica.

Dedicado con aprecio a Ernesto A. Lacomba en su 65 aniversario

1. FORMAS DIFERENCIALES Y DERIVADA EXTERIOR

Una 1-forma diferencial en \mathbb{R}^n con coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ es una expresión formal

$$(1) \quad \alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i.$$

Una 2-forma diferencial en \mathbb{R}^n es una expresión formal

$$(2) \quad \omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j.$$

Las 1-formas diferenciales se integran sobre curvas: si $C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = x(t)$, es suave a trozos,

$$\int_C \alpha = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(x(t)) \frac{dx_i}{dt} dt,$$

y la integral no depende de la parametrización de la curva C .

Las 2-formas diferenciales se integran sobre superficies: si $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $S(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_k(u, v)) = x(u, v)$ es una superficie parametrizada suave excepto en un conjunto de medida cero, se define

$$\int_S \omega = \int_{[0,1]^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x(u, v)) \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} du dv$$

donde el determinante Jacobiano,

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_i}{\partial v} \\ \frac{\partial x_j}{\partial u} & \frac{\partial x_j}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Estas integrales son invariantes bajo reparametrizaciones de la superficie que preservan la orientación.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 37J05, 70H03, 70H05, 70H15, 53D05, 53D12.

Palabras clave. Variedades simplécticas, Transformación canónica, Mecánica, Termodinámica.

En general una k -forma diferencial es una expresión formal

$$(3) \quad \beta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

que se integra sobre k -superficies parametrizadas,

$$\begin{aligned} S(u_1, u_2, \dots, u_k) &= (x_1(u_1, u_2, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_k)) \\ &\equiv x(u_1, u_2, \dots, u_k), \quad (u_1, u_2, \dots, u_k) \in [0, 1]^k \end{aligned}$$

$$\int_S \beta = \int_{[0, 1]^k} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x(u_1, u_2, \dots, u_k)) \times \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} du_1 du_2 \dots du_k,$$

donde

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_k}{\partial u_k} \end{vmatrix}.$$

Definición 1. Sea β una k -forma diferencial (3), $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un cambio de coordenadas $x = f(u)$; el *pullback* de β bajo el cambio de coordenadas es

$$(4) \quad \begin{aligned} f^*(\beta) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x(u_1, u_2, \dots, u_k)) \times \\ &\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_k. \end{aligned}$$

La *diferencial exterior* de una 1-forma (1) se define como

$$(5) \quad d\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_i$$

y de la 2-forma (2) como

$$(6) \quad d\omega = \sum_k \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x) dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j.$$

En general,

Definición 2. La *diferencial exterior* de la k -forma (3) es la $k+1$ -forma

$$(7) \quad d\beta = \sum_l \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_l}(x) dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Definición 3. Una k -forma β se dice *cerrada*, si $d\beta = 0$ y *exacta*, si existe una $k-1$ -forma γ tal que $\beta = d\gamma$.

El siguiente resultado se conoce como el *Lema de Poincaré*

Lema 1.1. Si β es una k -forma cerrada entonces para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de x donde β es exacta.

Observación 1. El Lema de Poincaré depende fuertemente de la topología del dominio donde esté definida la forma cerrada. Por ejemplo si sólo está definida en una vecindad de x en \mathbb{R}^n , es suficiente que la vecindad sea estrellada respecto de x , i.e., si $y \in U$ entonces todo el segmento \overline{xy} está contenido en U .

Los siguientes resultados se conocen como naturalidad del pullback.

Proposición 1.2. Se satisfacen la siguientes propiedades

1. $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.
2. $f^*(d\alpha) = d f^*(\alpha)$.

2. FORMAS SIMPLÉCTICAS Y CAMPOS HAMILTONIANOS

Una k -forma se puede contraer con un campo vectorial resultando en una $k - 1$ forma.

Definición 4. La *contracción* de la k -forma β (3) y el campo vectorial

$$X = \sum_i X^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

es la $k - 1$ -forma

$$i_X \beta = \sum_{i_1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) X^{i_1}(x) \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Observación 2. En terminología tensorial se dice que $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ es un tensor covariante antisimétrico y que X^i es un tensor contravariante. Entonces $a_{i_1 i_2 \dots i_k} X^{i_1}$ es la contracción de los tensores respecto del índice i_1 , donde el índice repetido i_1 indica suma.

Sea ω una 2-forma y X, Y dos campos vectoriales. Entonces podemos contraer repetidamente resultando en una función escalar de x

$$(8) \quad i_Y i_X \omega \equiv \omega(X, Y)$$

Definición 5. Una 2-forma se dice que es *no degenerada*, si $\omega(X, Y) = 0$, para todo campo vectorial Y implica $X = 0$. En otras palabras, la aplicación de campos vectoriales a 1-formas en \mathbb{R}^n , $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, $X \mapsto i_X \omega$ es inyectiva.

Definición 6. Una *forma simpléctica* ω en \mathbb{R}^{2n} es una 2-forma cerrada no degenerada; si además $\omega = d\alpha$ la forma se dice *exacta simpléctica*. Se dice que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ es un *espacio simpléctico*.

Ejemplo 1. La 2-forma en \mathbb{R}^{2n} con coordenadas (q, p) :

$$(9) \quad \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

es una forma simpléctica exacta. Por ejemplo $\omega = d(\sum_i p_i dq_i)$, pero también $\omega = -d(\sum_i q_i dp_i)$. La 1-forma

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

La formas (10) y (9) se llaman la 1-forma y la 2-forma canónicas en \mathbb{R}^{2n} .

La forma (9) es no degenerada porque si

$$X = \sum_j \left(A^j \frac{\partial}{\partial q_j} + B^j \frac{\partial}{\partial p_j} \right)$$

entonces

$$(11) \quad i_X \omega = \sum_{i=1}^n B^i dq_i - A^i dp_i = 0$$

lo cual implica $A^i = B^i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Observación 3. La forma simpléctica (9) se llama la forma simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} . Observe que la forma (9) tiene coeficientes constantes (no dependen de x). En este caso la 2-forma se puede identificar con una forma bilineal antisimétrica como sigue: Sean

$$X = \sum_i A^i \frac{\partial}{\partial q_i} + B^i \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad Y = \sum_i L^i \frac{\partial}{\partial q_i} + M^i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

campos vectoriales, entonces (8) se reduce a

$$\omega(X, Y) = i_Y \left(\sum_{i=1}^n B^i dq_i - A^i dp_i \right) = \sum_{i=1}^n B^i L^i - A^i M^i$$

que se puede escribir como

$$(12) \quad \omega(X, Y) = (L, M) \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$(13) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

se llama la matriz simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} . Con esto (\mathbb{R}^{2n}, J) es un *espacio vectorial simpléctico*.

Observación 4. El Teorema de Darboux afirma que localmente, toda forma simpléctica es equivalente a la forma canónica bajo un cambio de coordenadas simpléctico.

Definición 7. Un campo vectorial

$$X = \sum_{i=1}^n A_i(q, p) \frac{\partial}{\partial q_i} + B_i(q, p) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

se dice *Hamiltoniano*, si existe una función escalar $H(q, p)$ diferenciable tal que

$$(14) \quad i_X \Omega = -dH$$

Proposición 2.1. *Sea*

$$X = \sum_{i=1}^n A_i(q, p) \frac{\partial}{\partial q_i} + B_i(q, p) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

un campo vectorial con Hamiltoniano $H(q, p)$. Entonces las componentes del campo vectorial son

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

y las curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Demostración. De la expresión (11) y por ser Hamiltoniano, se tiene

$$i_X \omega = \sum_{i=1}^n B^i dq_i - A^i dp_i = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

comparando coeficientes se sigue el resultado. \square

3. FUNCIONES GENERADORAS DE TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Las transformaciones simplécticas son aquellas que preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton. Una clase importante se obtiene a partir de lo que se llama una *función generadora*. En esta sección recordamos los aspectos más elementales que son necesarios para desarrollar con soltura la ecuación de Hamilton–Jacobi.

Definición 8. La forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con coordenadas $z = (q, p)^T$ es la forma bilineal antisimétrica definida por la matriz

$$(15) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

donde I_n denota la matriz identidad $n \times n$, vgr.,

$$(16) \quad \omega(z, w) = z^T J w, \quad z, w \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Observación 5. Notese que la matriz J satisface las siguientes propiedades: $J^T = -J$, $J^2 = -I_{2n}$, $J^3 = -J$, $J^{-1} = -J$.

Definición 9. Una transformación lineal $M: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ se dice *simpléctica* si $M^T J M = J$, equivalentemente $\omega(Mz, Mw) = \omega(z, w)$. Un difeomorfismo $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (cambio de coordenadas) se dice *simpléctico* (simpléctica) si $M = Df(x): \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctica para toda $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Lema 3.1. Si M es una matriz simpléctica, entonces $M^{-1} = -JM^T J$.

Demostración.

$$(-JM^T J)M = -J(M^T J M) = -J^2 = I_{2n}$$

de donde se sigue el resultado. \square

Proposición 3.2. El conjunto de transformaciones lineales simplécticas forman un subgrupo del grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$.

Demostración. Es claro que la identidad es simpléctica. Si M y N son simplécticas entonces $M^T J M = J$ y $N^T J N = J$, luego

$$(MN)^T J (MN) = N^T (M^T J) MN = N^T J N = J$$

y por lo tanto MN es simpléctica. Para ver que M^{-1} es simpléctica, usaremos el lema anterior: $M^{-1} = -JM^T J$.

$$\begin{aligned} (M^{-1})^T J M^{-1} &= (-JM^T J)^T J M^{-1} = -(JM J) J M^{-1} \\ &= J M M^{-1} = J. \end{aligned}$$

\square

Lema 3.3. Sea M una matriz simpléctica; entonces $|M| = \pm 1$.

Demostración. Como $M^T J M = J$ se sigue que $|M^T| |J| |M| = |J|$, luego $|M|^2 = 1$, por lo tanto $|M| = \pm 1$. \square

Observación 6. De hecho se puede probar que para una matriz simpléctica se satisface $|M| = 1$. La prueba es más elaborada y usa la idea de escribir el polinomio característico de una matriz antisimétrica como el cuadrado de un polinomio, llamado Pfafiano.

Teorema 3.4 (del valor propio simpléctico). Si $p(\lambda)$ es el polinomio característico de una matriz simpléctica M , entonces

$$p(\lambda) = \lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Demostración. Como $M^{-1} = -JM^T J$ se sigue que $M = -J(M^T)^{-1} J$, luego

$$\begin{aligned} |M - \lambda I| &= |-J(M^T)^{-1} J - \lambda I| = |J|^2 |-(M^T)^{-1} + \lambda I| \\ &= |-(M^T)^{-1} + \lambda M^T (M^T)^{-1}| \\ &= |-I + \lambda M^T| |(M^T)^{-1}| = |-I + \lambda M| \\ &= \lambda^{2n} |M - \frac{1}{\lambda} J| = \lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

\square

Si $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es una transformación de coordenadas y escribimos $f(Q, P) = (q(Q, P), p(Q, P))$, en términos de sus componentes, entonces la matriz Jacobiana puede partitionarse como

$$(17) \quad M = \frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

La siguiente proposición caracteriza entonces a una transformación simpléctica, en términos de la partición (17) de su matriz Jacobiana:

Proposición 3.5. Un cambio de coordenadas (17) es simpléctico si y sólo si

- (a) $A^T C$ y $B^T D$ son simétricas.
- (b) $A^T D - C^T B = I_n$.

En particular para toda j, l

$$(18) \quad \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) = 0.$$

$$(19) \quad \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} - \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) = 0.$$

$$(20) \quad \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) = \delta_{jl}.$$

Demostración. La condición $M^T J M = J$ equivale a

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Comparando bloques se tiene

$$\begin{aligned} A^T C - C^T A &= 0 \\ B^T D - D^T B &= 0 \\ A^T D - C^T B &= I_n \\ B^T C - D^T A &= -I_n. \end{aligned}$$

Las primeras dos igualdades dan la afirmación (a); las siguientes son equivalentes a la afirmación (b).

De (17) se tiene

$$\begin{aligned} (A_{ij}) &= \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right), & (C_{ij}) &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \right) \\ (B_{ij}) &= \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right), & (D_{ij}) &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right), \end{aligned}$$

y de la condición $(A^T C - C^T A)_{lj} = 0$ se sigue

$$0 = \sum_i (A_{il} C_{ij} - C_{il} A_{ij}) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right).$$

Análogamente la condición $B^T D - D^T B = 0$ implica

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i (B_{il} D_{ij} - D_{il} B_{ij}) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_l} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} - \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_l} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} - \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \right) \end{aligned}$$

que son las identidades (18) y (19). La relación (20) se obtiene de la identidad $(D^T A - B^T C)_{lj} = \delta_{lj}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \delta_{jl} &= \sum_i (D_{ij} A_{il} - B_{ij} C_{il}) = \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.6. *El conjunto de difeomorfismos simplécticos, $\text{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ es un subgrupo del grupo de difeomorfismos de \mathbb{R}^{2n} , $\text{Diff}(\mathbb{R}^{2n})$, ambos de dimensión infinita.*

Observación 7. Para simplificar la notación, en lo sucesivo índices repetidos indican suma.

Proposición 3.7. *Consideremos un cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(q, p) = f(Q, P)$ y las formas simplécticas canónicas $\omega = dp \wedge dq$, $\Omega = dP \wedge dQ$. La transformación de coordenadas es simpléctica si y sólo si $f^*(\omega) = \Omega$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
 f^*(dp_i \wedge dq_i) &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial p_i}{\partial P_j} dP_j \right) \wedge \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_l} dQ_l + \frac{\partial q_i}{\partial P_l} dP_l \right) \\
 &= \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} dQ_j \wedge dQ_l + \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} dP_j \wedge dP_l \\
 &\quad + \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} dQ_j \wedge dP_l + \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} dP_j \wedge dQ_l \\
 &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) dQ_j \wedge dQ_l \\
 &\quad + \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_l} - \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) dP_j \wedge dP_l \\
 &\quad + \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_l} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) dP_j \wedge dQ_l
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de $dQ_j \wedge dQ_l$, $dP_j \wedge dP_l$ son cero debido a (18) y (19), por (20) el último término es

$$\delta_{jl} dP_j \wedge dQ_l = dP_j \wedge dQ_j = \Omega.$$

□

Consideremos ahora las 1-formas diferenciales en el contradominio \mathbb{R}^{2n} con coordenadas (q, p) y en el dominio \mathbb{R}^{2n} con coordenadas (Q, P)

$$(21) \quad \alpha = pdq = \sum_{i=1}^n p_i dq_i, \quad A = PdQ = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i.$$

y observe que $\omega = d\alpha$, $\Omega = dA$, es decir las formas simplécticas son exactas.

Proposición 3.8. *Si el cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctico; α , A son las 1-formas (21), entonces existe una función $W(Q, P)$, posiblemente definida localmente, tal que*

$$(22) \quad f^*(\alpha) - A = dW.$$

Demostración. Como

$$d(f^*(\alpha) - A) = d f^*(\alpha) - dA = f^*(d\alpha) - \Omega = \Omega - \Omega = 0.$$

por Lema de Poincaré toda forma cerrada es localmente exacta, luego existe una función $W(Q, P)$ posiblemente localmente definida, satisfaciendo (22). □

Observación 8. La relación (22) se acostumbra escribir como

$$(23) \quad p_i dq_i - P_i dQ_i = dW.$$

“donde p_i y la diferencial dq_i se expresan como funciones de Q y P a través del cambio de coordenadas” (véase por ejemplo [7], p. 67) y W es función de Q . Alternativamente podemos considerar que el lado izquierdo de (23) es una 1-forma $\tilde{\alpha}$ en el espacio producto $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ de coordenadas (Q, P, q, p) . De hecho $\tilde{\omega} = dp_i \wedge dq_i - dP_i \wedge dQ_i$ es una forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ exacta pues $\tilde{\omega} = d\tilde{\alpha}$. El espacio simpléctico $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \tilde{\omega})$ contiene a la gráfica de f :

$$(24) \quad \Gamma_f = \{(Q, P, q, p) \mid (q, p) = f(Q, P)\}.$$

y si $i_{\Gamma_f}: \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ denota la inclusión, entonces

$$i_{\Gamma_f}^*(\tilde{\omega}) = i_{\Gamma_f}^*(d\tilde{\alpha}) = d(i_{\Gamma_f}^*(\tilde{\alpha})) = 0$$

Por el Lema de Poincaré

$$(25) \quad i_{\Gamma_f}^*(\tilde{\alpha}) = dW$$

para alguna función local W definida sobre Γ_f con coordenadas (Q, P) . La última expresión es precisamente (22).

Observación 9. La gráfica de la función f (24) es un ejemplo de *variedad Lagrangiana* en el espacio vectorial simpléctico producto $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ con la forma simpléctica $\tilde{\omega} = dp_i \wedge dq_i - dP_i \wedge dQ_i$. Véase también la sección 5.

Lema 3.9. Las siguientes 1-formas diferenciales en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} F_1 &= p_k dq_k - P_k dQ_k, & F_2 &= q_k dp_k + P_k dQ_k, \\ F_3 &= p_k dq_k + Q_k dP_k, & F_4 &= q_k dp_k - Q_k dP_k, \end{aligned}$$

difieren por la diferencial de una función escalar.

Demostración. Se puede verificar que

$$F_1 = -F_2 + d(p_i q_i) = F_3 + d(Q_i P_i) = -F_4 + d(p_i q_i - P_i Q_i).$$

Verifiquemos la primera identidad para ilustrar el proceso conocido como *transformada de Legendre*. Primero notemos que

$$F_1 = p_k dq_k - P_k dQ_k = -(P_k dQ_k - p_k dq_k)$$

Las variables independientes son Q_k y q_k ; debemos sustituir q_k por p_k como variables independientes así que sumamos y restamos

$$\begin{aligned} F_1 &= -(P_k dQ_k - p_k dq_k \pm q_k dp_k) \\ &= -(P_k dQ_k + q_k dp_k - (p_k dq_k + q_k dp_k)) \\ &= -(P_k dQ_k + q_k dp_k - d(p_k q_k)) \\ &= -(P_k dQ_k + q_k dp_k) + d(p_k q_k) \\ &= -F_2 + d(p_k q_k). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.10. Si el cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctico entonces existen funciones $W_i(Q, P)$, $i = 1, 2, 3, 4$ tales que

$$\begin{aligned} f^*(p_k dq_k) - P_k dQ_k &= dW_1, & f^*(q_k dp_k) + P_k dQ_k &= dW_2, \\ f^*(p_k dq_k) + Q_k dP_k &= dW_3, & f^*(q_k dp_k) - Q_k dP_k &= dW_4 \end{aligned}$$

Teorema 3.11. Si el cambio de coordenadas $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es simpléctico entonces:

1. Si $\left| \frac{\partial f_1}{\partial P} \right| \neq 0$, entonces existe una función $S(q, Q)$ tal que

$$(26) \quad \frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_k} = -P_k.$$

2. Si $\left| \frac{\partial f_2}{\partial P} \right| \neq 0$, entonces una función $S(p, Q)$ tal que

$$(27) \quad \frac{\partial S}{\partial p_k} = q_k, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_k} = P_k.$$

3. Si $\left| \frac{\partial f_1}{\partial Q} \right| \neq 0$, entonces existe una función $S(q, P)$ tal que

$$(28) \quad \frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial S}{\partial P_k} = Q_k.$$

4. Si $\left| \frac{\partial f_2}{\partial Q} \right| \neq 0$, entonces existe una función $S(p, P)$ tal que

$$(29) \quad \frac{\partial S}{\partial p_k} = q_k, \quad \frac{\partial S}{\partial P_k} = -Q_k.$$

Demostración. La relación

$$p_k dq_k - P_k dQ_k = dW_1$$

es una relación entre formas diferenciales sobre la variedad Γ_f de dimensión $2n$, la cual naturalmente está parametrizada por (Q, P) , así que W_1 es función de (Q, P) . Si el cambio de coordenadas es $q = f_1(Q, P)$, $p = f_2(Q, P)$ y se satisface la hipótesis del ítem 1, entonces es posible despejar $P = g_1(q, Q)$ y se puede parametrizar Γ_f con las variables (q, Q) como sigue

$$\Gamma_f = \{(Q, P, q, p) \mid P = g_1(q, Q), p = f_2(Q, g_1(q, Q))\}.$$

Si hacemos $S(q, Q) = W_1(Q, g_1(q, Q))$ entonces

$$p_k dq_k - P_k dQ_k = dS(q, Q),$$

con (q, Q) variables independientes, implica

$$(30) \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$$

$$(31) \quad -P_k = \frac{\partial S}{\partial Q_k}.$$

El resto de los casos se prueba de manera similar. \square

El teorema anterior tiene una versión recíproca: Supongamos que está dada una función S de $2n$ variables con las correspondientes ecuaciones de transformación (26), (27), (28) y (29), queremos dar condiciones suficientes para que dichas ecuaciones definan una transformación canónica; al menos localmente.

Teorema 3.12. 1. Sea $S(q, Q)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$(32) \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, Q)$$

$$(33) \quad -P_k = \frac{\partial S}{\partial Q_k}(q, Q),$$

bajo la condición de no degeneración

$$(34) \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_k \partial q_j} \right| \neq 0$$

definen una transformación de coordenadas

$$q = f_2(Q, P), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}(f_2(Q, P), Q)$$

que es simpléctico.

2. Sea $S(p, Q)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$(35) \quad q_k = \frac{\partial S}{\partial p_k}(p, Q)$$

$$(36) \quad P_k = \frac{\partial S}{\partial Q_k}(p, Q).$$

bajo la condición de no degeneración

$$(37) \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_k \partial p_j} \right| \neq 0$$

definen una transformación de coordenadas

$$p = f_2(Q, P), \quad q = \frac{\partial S}{\partial p}(f_2(Q, P), Q)$$

que es simpléctica.

3. Sea $S(q, P)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$(38) \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, P)$$

$$(39) \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}(q, P),$$

bajo la condición de no degeneración

$$(40) \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial P_k \partial q_j} \right| \neq 0$$

definen una transformación de coordenadas

$$q = f_2(Q, P), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}(f_2(Q, P), P)$$

que es simpléctico.

4. Sea $S(p, P)$ una función escalar de clase C^2 . Las ecuaciones implícitas

$$(41) \quad q_k = \frac{\partial S}{\partial p_k}(p, P)$$

$$(42) \quad -Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}(p, P),$$

bajo la condición de no degeneración

$$(43) \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial P_k \partial p_j} \right| \neq 0$$

definen una transformación de coordenadas

$$p = f_2(Q, P), \quad q = \frac{\partial S}{\partial p}(f_2(Q, P), P)$$

que es simpléctica.

4. LAS ECUACIONES DE HAMILTON

Si $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 , las ecuaciones de Hamilton están definidas por el sistema dinámico

$$(44) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$(45) \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad q, p \in \mathbb{R}^n$$

donde $\frac{\partial H}{\partial q} = (\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n})^T$, etc. que se pueden escribir como

$$(46) \quad \dot{z} = J\nabla H(z), \quad z = (q, p)^T.$$

Proposición 4.1. Sea $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un cambio simpléctico de coordenadas de clase C^1 , $z = f(Z)$. Entonces las ecuaciones (46) se transforman en las ecuaciones de Hamilton

$$(47) \quad \dot{Z} = J\nabla \tilde{H}(Z), \quad Z = (Q, P)^T,$$

con Hamiltoniano $\tilde{H}(Z) = H(f(Z))$.

Probaremos primero el siguiente lema

Lema 4.2. $\nabla \tilde{H}(Z) = Df(Z)^T \nabla H(f(Z))$.

Demostración. Por definición de gradiente, para cualquier $W \in \mathbb{R}^{2n}$ se cumple,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \tilde{H}(Z), W \rangle &= D\tilde{H}(Z) \cdot W = DH(f(Z)) \cdot Df(Z) \cdot W \\ &= \langle \nabla H(f(Z)), Df(Z) \cdot W \rangle = \langle \nabla Df(Z)^T \cdot H(f(Z)), W \rangle, \end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación. \square

Veamos ahora la demostración de la Proposición.

Demostración. Por la regla de la cadena y con $z = f(Z)$, de (46) se sigue

$$\begin{aligned} Df(Z) \cdot \dot{Z} &= J\nabla H(f(Z)) \\ \dot{Z} &= Df(Z)^{-1} J\nabla H(f(Z)) \\ &= -JDf(Z)^T J^2 \nabla H(f(Z)) \\ &= JDf(Z)^T \nabla H(f(Z)) \\ &= J\nabla \tilde{H}(Z). \end{aligned}$$

\square

5. ESPACIOS VECTORIALES SIMPLÉCTICOS

En esta sección veremos la geometría que subyace en la formulación de los sistemas Hamiltonianos, tal como se ha definido en la sección anterior. Posteriormente veremos que es posible globalizar estos conceptos al considerar una variedad simpléctica. Recuerde que una aplicación multilinear es una aplicación $\omega: V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que es lineal en cada argumento por separado, manteniendo el resto constantes. Se reserva el término *forma* cuando la aplicación multilinear es simétrica o antisimétrica, vgr., cuando

$$\begin{aligned} \omega(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \dots, v_{\sigma_k}) &= \omega(v_1, v_2, \dots, v_k) \text{ (simétrica)} \\ \omega(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \dots, v_{\sigma_k}) &= \text{sgn}(\sigma)\omega(v_1, v_2, \dots, v_k) \text{ (antisimétrica)} \end{aligned}$$

para cualquier permutación $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ y $\text{sgn}(\sigma)$ el signo de la permutación.

Definición 10. Un *espacio vectorial simpléctico* es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} equipado con una forma bilinear $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, antisimétrica y no degenerada. Esto último significa:

$$\omega(u, v) = 0, \quad \forall v \in V \Rightarrow u = 0.$$

Observación 10. La condición de no degeneración obliga a que el espacio vectorial, en caso de ser de dimensión finita, tenga dimensión par. Esto se sigue del hecho de que el determinante de una matriz antisimétrica de dimensión impar es cero. En lo sucesivo denotamos por $d = \dim(V)$, la dimensión del espacio vectorial simpléctico. La forma simpléctica define un isomorfismo de espacios vectoriales $V \rightarrow V^*$, mediante la fórmula $u \mapsto u^*$, $u^*(v) = \omega(u, v)$.

El Teorema de Darboux afirma que es posible escoger una base en la cual la matriz asociada a la forma simpléctica toma la forma canónica (13).

Teorema 5.1. Si V es un espacio vectorial simpléctico y ω la forma simpléctica, entonces existe una base de V , $e_i, f_i, i = 1, 2, \dots, d$ tal que

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}.$$

es decir la matriz asociada a ω en esta base es precisamente la matriz simpléctica (13).

Definición 11. Si W es un subespacio del espacio vectorial simpléctico (V, ω) denotamos por $i_W^* \omega$ la restricción de ω a $W \times W$, es decir $i_W^* \omega = \omega|_{W \times W}$. Decimos que W es un subespacio:

- a) *Simpléctico*, si $i_W^* \omega$ es no degenerada.
- b) *Isotrópico*, si $i_W^* \omega = 0$.
- c) *Lagrangiano*, si es isotrópico y $\dim(W) = \frac{1}{2} \dim(V)$.

5.1. Variedades simplécticas. La versión global o “no lineal” de los espacios vectoriales simplécticos son las variedades simplécticas. Recuerde que una variedad diferenciable M de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff dotado de un atlas de cartas coordenadas $(V_i, \phi_i)_{i \in I}$, donde V_i es un abierto en M , tales que $M = \cup_{i \in I} V_i$ y $\phi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua con la propiedad de que si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \phi_j(V_i \cap V_j)$$

es una función diferenciable (C^∞) entre abiertos de \mathbb{R}^n . En lo sucesivo denotamos por $\phi(x) = (q_1(x), \dots, q_n(x))$, las funciones coordenadas. En una variedad tiene sentido hablar de funciones (reales) diferenciables y curvas diferenciables. Decimos que una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable, si para cualquier carta coordenada (U, ϕ) , $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable como función definida en el abierto $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Sean c_1, c_2 gérmenes de curvas alrededor del origen que pasan por el mismo punto $x \in M$. Decimos que son equivalentes, si para cualquier carta coordenada (U, ϕ) tal que $x \in U$ y $\phi(x) = p$, se satisface $\frac{d}{dt}(\phi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c_2)(0)$. Una clase de equivalencia de curvas se llama un vector tangente en x y la colección de vectores tangentes forma el espacio tangente $T_x M$ con la siguiente estructura natural de espacio vectorial: Si

$v_i = \frac{d}{dt}(\phi \circ c_i)(0)$, con c_i curvas como antes, entonces $c_3 \equiv \phi^{-1}(p + t(v_1 + v_2))$ es un germen de curva que define la suma de clases: $[c_3] = [c_1] + [c_2]$. Análogamente la diferencial de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal en cada fibra: $df_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, donde $df_x \cdot v = w$ se define como sigue: para una curva c representante del vector tangente $v \in T_x M$ entonces $df_x \cdot v = \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$. Sea (U, ϕ) una carta coordenada como antes; entonces $\phi^{-1}(p + te_i)$ es una curva cuya clase se denota por $\frac{\partial}{\partial q_i}(x)$.

Fibra a fibra, los espacios tangente y cotangente (el dual) pueden agruparse en el haz tangente y cotangente: $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$, $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M$. Sean $\pi: TM \rightarrow M$, $\lambda: T^*M \rightarrow M$

las proyecciones. Tanto TM como T^*M son variedades diferenciables. Por ejemplo, dada una carta (U, ϕ) en M , $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en TM y para $\xi \in \pi^{-1}(U)$ existen funciones $\dot{q}_i: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\xi = \sum_i \dot{q}_i(\xi) \frac{\partial}{\partial q_i}(x)$. Entonces $T\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $T\phi = (q \circ \pi, \dot{q})$ es una carta coordenada. La base dual de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ se denota por dq_i y permite definir una carta coordenada en $\lambda^{-1}(U) \subset T^*M$, asociando a $\alpha \in T_x^* M$ las coordenadas $\alpha = \sum p_i(\alpha) dq_i$, de modo que $T^*\phi = (q \circ \lambda, p)$ es una carta coordenada. Un campo vectorial es una sección de TM es decir $X: M \rightarrow TM$ y $\pi \circ X = id_M$. Una forma diferencial es una sección de T^*M .

Definición 12. Una *variedad simpléctica* es una variedad P dotada de una 2-forma $\omega \in \Lambda^2(P)$ es cerrada y no degenerada.

En otras palabras $d\omega = 0$ y para cada $x \in P$, $\omega_x(u, v) = 0$ para toda $v \in T_x P$ implica $u = 0 \in T_x P$.

El ejemplo canónico de variedad simpléctica es el haz cotangente a una variedad T^*M . La forma simpléctica canónica es la derivada exterior de la 1-forma canónica definida como sigue: La aplicación tangente de la proyección $\lambda: T^*M \rightarrow M$ es $T\lambda: T(T^*M) \rightarrow TM$, luego si $\xi \in T_\alpha(T^*M)$, con $\alpha \in T^*M$, sea entonces $x = \lambda(\alpha)$, luego $T\lambda \cdot \xi \in T_x M$ y podemos aplicar $\langle \alpha, T\lambda \cdot \xi \rangle$, donde \langle, \rangle denota el apareamiento natural $T_x^* M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$. Como la aplicación $\xi \mapsto \langle \alpha, T\lambda \cdot \xi \rangle$ depende linealmente de $\xi \in T_\alpha(T^*M)$ se ha definido una forma diferencial Γ en T^*M . La forma simpléctica es $\omega = d\Gamma$.

Observación 11. Tomando coordenadas $(q \circ \lambda, p)$ no es difícil ver que ω y Γ coinciden con la 2-forma y 1-forma canónicas en \mathbb{R}^{2n} del Ejemplo 1, (10) y (9).

El Teorema de Darboux se extiende al caso de variedades

Teorema 5.2. Si (P, ω) es una variedad simpléctica, para cada $x \in P$ existe una carta coordenada (U, ϕ) con coordenadas $\phi(x) = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ tal que

$$(48) \quad \omega|_U = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Definición 13. Una variedad L de una variedad simpléctica (P, ω) se dice *Lagrangiana*, si $\dim(L) = \dim(P)/2$ e $i_L^* \omega = 0$. En otras palabras $T_x L \subset T_x P$ es un subespacio Lagrangiano para cada x .

Como ω es cerrada entonces es exacta, al menos localmente digamos $\omega = d\alpha$. Si L es Lagrangiana, entonces $i_L^* \alpha$ es una forma cerrada, luego existe una función posiblemente definida sólo localmente, tal que $i_L^* \alpha = dF$. Llamamos a F una función generadora de la variedad Lagrangiana.

Usando el Teorema de Darboux, se puede obtener una forma canónica local de una variedad Lagrangiana, ya que $p_i dq_i = dF$, implica

$$L = \left\{ (q, p) \mid p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}(q, p) \right\}.$$

En la primera parte de este trabajo se han visto múltiples ejemplos de funciones generadoras de variedades Lagrangianas dadas por gráficas de transformaciones canónicas en la variedad simpléctica producto $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$.

6. SISTEMAS HAMILTONIANOS

Definición 14. Sea (P, ω) una variedad simpléctica. Un campo vectorial $X: P \rightarrow TP$ se dice *Hamiltoniano*, si existe una función $H \in C^\infty(P)$ tal que

$$(49) \quad i_X \omega = -dH.$$

Recuerde que si X es un campo vectorial y α una k -forma entonces $i_X \alpha$ es una $k-1$ forma definida como

$$(i_X \alpha)_x(u_1, u_2, \dots, u_k) = \alpha_x(X(x), u_1, u_2, \dots, u_k).$$

Así, $i_X \omega$ es una 1-forma globalmente exacta, si el campo es Hamiltoniano.

Observación 12. En una carta de Darboux, si

$$X = A_i(q, p) \frac{\partial}{\partial q_i} + B_i(q, p) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

entonces

$$i_X \omega = -A_i(q, p) dp_i + B_i(q, p) dq_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

lo cual implica $A_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $B_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$. Luego, a lo largo de una curva solución del campo se satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = A_i(q(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = B_i(q(t), p(t)) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

7. PRINCIPIOS VARIACIONALES

Consideremos el siguiente problema variacional: sea $L(t, x, v)$ una función definida para $t \in [t_1, t_2]$, $(x, v) \in D \times \mathbb{R}^d$ y $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto, L de clase C^r , con $r \geq 2$. Definamos el funcional definido para una curva $x: [t_1, t_2] \rightarrow D$ por

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(s, x(s), \dot{x}(s)) ds, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

Analicemos primero la existencia de minimales en el espacio de curvas de clase C^1 con extremos fijos

$$\Gamma = \{x \in C^1[t_1, t_2] \mid x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2\}.$$

Definición 15. Decimos que $x^* \in \Gamma$ es *minimal en Γ* , si

$$I(x^*) \leq I(x), \quad \forall x \in \Gamma.$$

Observación 13. El ínfimo puede existir, sin que se alcance.

Considere por ejemplo $d = 1$, $L(t, x, v) = t^2 v^2$, $[t_1, t_2] = [0, 1]$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Para la familia de curvas $x_m(t) = t^m$ se tiene

$$I(x_m) = \frac{1}{m+3} \quad \text{por lo que} \quad \inf_{m \in \mathbb{N}} I(x_m) = 0,$$

pero $I(x) > 0$ para toda $x \in \Gamma$.

Sin embargo se tiene el siguiente resultado:

Proposición 7.1. Si x es minimal en Γ entonces $x \in C^2[t_1, t_2]$ y

$$(50) \quad \frac{\partial L}{\partial v_j}(t, x, \dot{x}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x_j}(s, x(s), \dot{x}(s)) ds = \text{const.}$$

para toda $t \in [t_1, t_2]$.

Las ecuaciones (50) se llaman las *ecuaciones integrales de Euler-Lagrange*.

Definición 16. Una curva minimal $x^* \in \Gamma$ se dice *regular*, si $\det(L_{v_i, v_j}) \neq 0$ a lo largo de x^* , $v = \dot{x}^*$.

El siguiente resultado de regularidad aplica a curvas minimales.

Proposición 7.2. Si $x^* \in \Gamma$ es una curva minimal regular, entonces $x^* \in C^2[t_1, t_2]$ y se satisface

$$(51) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_j}, \quad v = \frac{dx^*}{dt}.$$

Definición 17. Una curva x^* que satisfaga las ecuaciones de Euler–Lagrange (51) se dice *extremal* en Γ .

Observación 14. La teoría detrás de los métodos variacionales es muy extensa y referimos al lector a la referencia [6] donde se caracterizan las propiedades topológicas de las curvas minimales y en particular los conjuntos de Mather.

8. LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE

En secciones anteriores hemos introducido la transformada de Legendre en el contexto de pasar de una función generadora de un tipo a otro bajo hipótesis locales de convexidad. Aquí supondremos hipótesis suficientes para que la transformada de Legendre pueda definirse globalmente, lo cual nos permitirá relacionar la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica.

Definición 18. Un Lagrangiano $L(q, v)$ se dice de *Tonelli*, si la aplicación $L(x, \cdot)$ es de crecimiento superlineal y estrictamente convexa, es decir

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{|v|} = +\infty \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)$$

es estrictamente definida positiva. Análogamente un Hamiltoniano $H(x, p)$ se dice de *Tonelli*, si la aplicación $H(x, \cdot)$ es de crecimiento superlineal y estrictamente convexa, es decir

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(x, p)}{|p|} = +\infty \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x, p)$$

es estrictamente definida positiva.

Observación 15. Si $L(x, v)$ es un Lagrangiano de Tonelli de clase C^2 , entonces la transformación

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)$$

es invertible globalmente de manera continuamente diferenciable respecto de v y continuamente respecto de x . La demostración del siguiente resultado se deja al lector.

Proposición 8.1. Sea $L(x, v)$ un Lagrangiano de Tonelli. Defina el Hamiltoniano asociado

$$(52) \quad H(x, p) = v \cdot p - L(x, v)$$

donde, $v = v(x, p)$ de acuerdo a la última observación, entonces $H(x, p)$ es un Hamiltoniano de Tonelli. Viceversa, si $H(x, p)$ es un Hamiltoniano de Tonelli y $L(x, v) = v \cdot p - H(x, p)$ donde $p = p(x, v)$ de acuerdo a la última observación, entonces $L(x, v)$ es de Tonelli.

Teorema 8.2. Sea $L(x, v)$ un Lagrangiano de Tonelli de clase C^2 en $x \in D$ abierto de \mathbb{R}^d , $v \in \mathbb{R}^d$. Entonces la aplicación

$$\mathcal{L}: D \times \mathbb{R}^d \rightarrow D \times \mathbb{R}^d,$$

$$(53) \quad (x, v) \mapsto \left(x, p = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \right)$$

es un difeomorfismo global, con inversa

$$(54) \quad (x, p) \mapsto \left(x, v = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \right).$$

Demostración. Sea $v(q, p)$ la función implícitamente definida por la primera relación en (53). Derivando H respecto de p ,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = v + p \cdot \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} = v + \left(p - \frac{\partial L}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial p} = v$$

de la definición de p . □

Teorema 8.3. *Bajo las mismas hipótesis que el Teorema anterior. La transformada de Legendre (53) manda las ecuaciones de Euler-Lagrange en las ecuaciones de Hamilton y viceversa:*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Demostración. Nótese que de la definición (52) se satisface

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Ahora, partiendo de las ecuaciones de Lagrange, de la definición de p (ver 53) se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

que es la segunda ecuación de Hamilton. Por otro lado,

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\partial H}{\partial p} + p \cdot \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

donde se ha derivado (52) respecto de p , suponiendo $v = v(x, p)$. El recíproco se muestra de manera similar y se deja como ejercicio. \square

9. TERMODINÁMICA DE SISTEMAS QUÍMICOS

Las variables medibles de los sistemas macroscópicos cuando son perturbados, evolucionan de manera complicada y pueden variar de punto a punto (variables distribuidas). En muchos casos tienden a estabilizarse con el tiempo en valores determinados independientemente del punto donde son medidas (variables conglomeradas). Decimos que se ha alcanzado el equilibrio termodinámico. Los efectos disipativos pueden atenuarse perturbando poco a poco y ligeramente el sistema, esperando un tiempo suficiente a que los valores de las variables se hayan estabilizado. Un proceso de este tipo se llama *quasiestático* y se representa por una curva en el espacio de estas variables. El parámetro de esta curva no es el tiempo, sino que simplemente indica el orden en el que el proceso se lleva a cabo. De las variables conglomeradas se distinguen las de tipo extensivo que dependen proporcionalmente del volumen del sistema, vgr., si $r - 1$ del total de r son aumentadas por un factor λ , entonces la variable restante varía en la misma proporción; las del tipo intensivo son independientes de esta transformación de escala¹.

Postulado I. *En los sistemas simples existen estados particulares, llamados estados de equilibrio termodinámico que están caracterizados macroscópicamente por la energía interna U , el volumen V y las cantidades molares N_1, N_2, \dots, N_r de los componentes químicos.*

Las variables a las que se hace referencia en el Postulado I son del tipo extensivo. Más adelante veremos que las variables intensivas están determinadas a partir de la relación funcional entre estas variables y otra más, la entropía S que será introducida más adelante, de modo que se puede suponer una relación funcional $U = U(S, V, N_1, \dots, N_r)$; veremos que los valores de las variables intensivas están completamente determinados por las derivadas de primer orden de esta relación funcional. Equivalentemente se puede suponer una relación funcional $S = S(U, V, N_1, \dots, N_r)$ en igual circunstancia. Más aún, veremos que más que la relación funcional de un tipo u otro, el contenido geométrico de la termodinámica está resumido en la suposición (postulado) de que los estados de equilibrio termodinámico están caracterizados por los valores de sus variables extensivas e intensivas, las cuales forman una *subvariedad Lagrangiana*.

La primera ley reconoce el calor como una forma de energía que aunque no es una variable de estado, el cambio en la energía interna se debe al calor suministrado al sistema menos el trabajo realizado por éste.

$$(55) \quad dU = \delta Q - \delta W,$$

¹Caratheodory llama a las variables extensivas *variables de forma* y las variables intensivas, *variables de estado*. Nosotro usaremos el término variables de estado para referirnos a ambas.

donde δQ representa el calor suministrado al sistema, una 1-forma diferencial y δW el trabajo producido por el sistema.

El trabajo $\delta W = -p dV + \sum_i \mu_i dN_i$. En general las 1-formas de calor y trabajo δQ , δW no son exactas por lo que el calor o el trabajo total dado por la integral sobre una trayectoria que especifica el proceso que siguen las variables extensivas $\gamma(t)$ en general depende de ésta. Un proceso se dice adiabático, si $\delta Q(\dot{\gamma}(t)) = 0$.

Segunda ley. *Alrededor de cualquier punto P y cualquier vecindad de éste, existen estados que no pueden ser alcanzados por un proceso adiabático. En particular, existen funciones T , S de las coordenadas extensivas V, N_1, \dots, N_r , tales que $\delta Q = T dS$.*

Caratheodory muestra que la condición de la existencia de puntos inalcanzables por procesos adiabáticos es equivalente a pedir que la distribución definida por $\delta Q = 0$ (ecuación de Pfaff) sea integrable en el sentido de Frobenius, de lo cual se sigue la existencia de un factor integrante $1/T$ que hace que δQ sea exacta:

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Para una sola sustancia química, de las tres variables V, U, N sólo dos son independientes, debido a la propiedad de homogeneidad, luego δQ es una 2-forma en un espacio de dimensión 2 y por lo tanto es integrable. Sin embargo, para más de una sustancia, la integrabilidad no es automática, por ello la segunda ley no se trata de un enunciado matemático, sino de una ley física,

La primera (55) y segunda leyes pueden enunciarse en el solo apartado

$$(56) \quad T dS = dU - p dV + \sum_i \mu_i dN_i.$$

La definición precisa de estados de equilibrio termodinámico es la siguiente: Consideremos el espacio vectorial simpléctico de pares de variables extensivas-intensivas y dentro de éste, el cono abierto

$$U: (S, V, N_1, \dots, N_c, T, -p, \mu_1, \dots, \mu_c), \quad S, V, N_i > 0$$

con la forma simpléctica $\omega = d\alpha$, con

$$(57) \quad \alpha = T dS + p dV - \sum_i \mu_i dN_i$$

Los estados de equilibrio termodinámico forman una variedad Lagrangiana L : $0 = i_L^* \omega = d(i_L^* \alpha)$, lo cual implica que $i_L^* \alpha = dU$ para alguna función escalar U . Cuando L se puede parametrizar por (S, V, N_1, \dots, N_c) y entonces L es la gráfica de dU es decir $\alpha = dU$ con $U = U(S, V, N_1, \dots, N_c)$; explícitamente

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial U}{\partial V}, \quad \mu_i = \frac{\partial U}{\partial N_i}, \quad i = 1, 2, \dots, c.$$

Así, la variedad Lagrangiana L se identifica con los estados de equilibrio termodinámico y sólo para ellos las variables extensivas toman valores bien definidos.

Postulado II. *Los estados de equilibrio de un sistema termodinámico forman una subvariedad Lagrangiana.*

Para una sólo especie se tiene que $U = U(S, V, N)$ y la propiedad extensiva de la energía interna implica que U es una función homogénea de grado 1. Comúnmente se fija la cantidad molar N o el volumen V y se habla de la entropía o energía interna molares $U = Nu$, $S = Ns$, $V = Nv$ o específicas $U = Vu$, $S = Vs$, $N = Vn$. En este caso el potencial químico es $\mu = \frac{\partial U}{\partial N} = 0$ y (57) se reduce a $\alpha = T ds + p dv$. En este caso la condición de integrabilidad para α es satisfecha automáticamente, ya que $d\alpha$ es una 2-forma en un abierto de $\mathbb{R}^2(s, v)$.

Para dos sustancias químicas que no reaccionan hay un potencial químico por cada fase de la sustancia $\mu_{1,2}^a, \mu_{1,2}^b, \dots, \mu_{1,2}^\nu$. El equilibrio termodinámico de las ν fases se describe por las igualdades $\mu_1^j = \mu_2^j$ para $j = 1, 2, \dots, \nu$; así las condiciones de equilibrio dan ν restricciones entre las $c+2$ variables, dando un total de $r = c + 2 - \nu$ grados de libertad.

9.1. Potenciales termodinámicos. La relación de estado $U = U(S, V, N_1, N_2, \dots, N_c)$ no es sino una parametrización de la variedad Lagrangiana L , de ahí que en muchos casos sea conveniente usar otras coordenadas u otros potenciales, en vez de U , para describir mejor determinados procesos o propiedades.

Un cambio de coordenadas para el potencial U se lleva a cabo mediante un transformación de Legendre parcial. Por ejemplo, para una sustancia habiendo fijado el número de moles, $U = U(S, V)$. Si queremos expresar a U como función de T y V entonces hacemos $G = U - TS$, donde se supone que

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}(S, V)$$

permite expresar a $S = S(T, V)$, luego $G = G(T, V)$, ahora

$$dG = dU - TdS - SdT = TdS - pdV - TdS - SdT = -pdV - SdT,$$

de donde se obtiene

$$-p = \frac{\partial G}{\partial V}, \quad -S = \frac{\partial G}{\partial T}.$$

El potencial termodinámico G se llama *el potencial de Helmholtz*. Vemos que el cambio de coordenadas se lleva a cabo agregando un término que es el producto de la variable extensiva que se quiere sustituir por su correspondiente variable extensiva ($S-T$ en el caso de la función de Helmholtz). Para el estudio de reacciones químicas que generalmente se llevan a cabo a presión constante es más conveniente usar p y V como variables independientes; se define entonces la entalpía como $H = U + pV$, de donde

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS - pdV + pdV + Vdp = TdS + Vdp,$$

de donde la variedad Lagrangiana se describe por

$$T = \frac{\partial H}{\partial S}, \quad V = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

La energía libre de Gibbs es el potencial $G = U + PV - TS$ en el que se sustituyen (S, V) por variables intensivas (P, T) . Se tiene $dG = -SdT + Vdp$.

Alternativamente, se puede expresar $U = U(T, V)$ al despejar $S = S(T, V)$ de la relación $T = \frac{\partial U}{\partial S}(S, V)$, luego $U(T, V) = U(S(T, V), V)$. Esta parametrización se usará explícitamente en el caso del gas ideal.

9.2. Relaciones de Maxwell. Son consecuencia de la exactitud de la forma $i_L^* \alpha$. Por ejemplo, tomando T, p como variables independientes para el potencial de Gibbs, $dG = -SdT + Vdp$ es una diferencial exacta, luego

$$(58) \quad -\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial T}.$$

Otras relaciones entre derivadas parciales pueden derivarse de manera parecida, por ejemplo para los potenciales químicos

$$(59) \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial N_j} = \frac{\partial \mu_j}{\partial N_i}.$$

9.3. Ejemplo el gas ideal. Para un sistema PVT de una sola sustancia la capacidad calorífica se define como el número de calorías necesarias para elevar en un grado su temperatura. Es una cantidad extensiva que depende del proceso. La capacidad calorífica a volumen constante se define a partir de $U = U(T, V)$ como se mostró antes

$$(60) \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

aunque hemos usado la notación clásica que enfatiza que en el proceso el volumen se mantiene constante, esto es innecesario.

La capacidad calorífica a presión constante se define a partir de $H = H(T, P)$ como se mencionó antes, luego

$$(61) \quad C_p = \frac{\partial H}{\partial T}$$

El uso de la energía interna en el primer caso y de la entalpía en el segundo es consistente con la definición física, ya que $\delta Q = dU$ si $dV = 0$ en el primer caso y $\delta Q = dH$, si $dp = 0$.

Para un gas ideal la ecuación de estado es

$$(62) \quad pV = NRT$$

donde R es la constante de los gases ideales.

Proposición 9.1. *Para un gas ideal la energía interna sólo depende de la energía.*

Demostración. Consideremos $U = U(T, V)$, luego

$$(63) \quad dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV.$$

De la segunda ley y usando la ecuación de estado se tiene

$$(64) \quad dS = \frac{dU}{T} + \frac{NR}{V} dV$$

Sustituyendo (63) en (64) se tiene

$$(65) \quad dS = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} dT + \left[\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial V} + \frac{NR}{V} \right] dV.$$

Sin embargo usando $S = S(T, V)$ y comparando con $dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV$ se tiene de inmediato

$$(66) \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$(67) \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial V} + \frac{NR}{V}.$$

Usando la igualdad de las parciales mixtas

$$(68) \quad \frac{1}{T} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \right) = -\frac{1}{T^2} \frac{U}{V} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}$$

cancelando las derivadas mixtas se obtiene finalmente

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0.$$

□

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece encarecidamente a los editores y a los árbitros su cuidadosa revisión de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Abbot, M.M. & Van Ness, H.C. *Termodinámica*. Serie de compendios Schaum. McGraw-Hill, 1975.
- [2] Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York, Heidelberg Berlin, 1978.
- [3] Guillemin, V. & Sternberg, Sh. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [4] Kirkwood, John G. and Oppenheim, Irwin. *Chemical Thermodynamics* (pg. 36). McGraw-Hill, 1961.
- [5] Maslov, V.P. & Nazaikinskii, V.E. Tunnel canonical operator in thermodynamics. *Funct. Anal. and its Appl.*, 40, no.3, 173–187, 2006.
- [6] Moser, J. Selected chapters in the calculus of variations. Notas no publicadas.
- [7] Pollard, H. *Celestial Mechanics*. The Carus Mathematical Monographs No. 18, 1966.
- [8] Schutz, B. *Geometric methods of mathematical physics*. Cambridge, 1980.

Dirección del autor:

Joaquín Delgado Fernández
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: jdf@xanum.uam.mx



LA TEORÍA ZF^-

JUAN CARLOS AGUILAR FRANCO

RESUMEN. En esta nota daremos una definición en la teoría ZFE de la noción de encaje elemental entre modelos de ZFE , aun si éstos son clases propias. Lo realizamos mediante la definición de estructura dócil.

1. INTRODUCCIÓN Y PRELIMINARES

Los conceptos e ideas que se desarrollan en esta nota están basados en un resultado que el Dr. Ronald Jensen planteó hace tiempo para poder generalizar algunas de las ideas más importantes en la teoría de modelos.

Una de las herramientas fundamentales en la teoría de conjuntos moderna es la de encaje elemental. Este tipo de funciones son bien conocidas en la teoría de modelos.

En la teoría moderna de conjuntos encontraremos frecuentemente “modelos” de la teoría de conjuntos que no son conjuntos sino clases propias. También es frecuente la necesidad de “definir” en ZFE encaje elemental. El propósito de esta nota es presentar una forma de definir encaje elemental en ZFE , aun si los modelos involucrados son clases propias.

A continuación se proporcionan algunas definiciones útiles; consideraremos como el universo a la clase de todos los conjuntos V , el cual se define como $V = \{x : x = x\}$. Las clases que se trabajan, se les llama términos clase y son aquellas clases que se pueden caracterizar mediante una fórmula del lenguaje: $A = \{x | \varphi(x)\}$.

Las estructuras que consideraremos son \in -estructuras, es decir, la estructura interpreta el símbolo de relación binaria \in .

Para poder construir la teoría de conjuntos, es necesario hacer algunas precisiones, como por ejemplo, los axiomas en los cuales se basa la teoría además del lenguaje en el cual trabajaremos.

Respondiendo a lo mencionado en el párrafo anterior, se establece que nuestro lenguaje formal será el de la teoría de conjuntos (LTC) que consiste en lo siguiente:

1. Relaciones de igualdad y pertenencia ($=, \in$).
2. Conectivos lógicos: \wedge (y), \vee (o), \neg (no), \exists (existe), \forall (para todo), \rightarrow (implica) y \leftrightarrow (si y sólo si).
3. Variables: $u, v, x, y, z, v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$ (un conjunto numerable de símbolos para variables).
4. Paréntesis: (izquierdo,) derecho y “,” coma.

Al utilizar la relación de igualdad implícitamente están incluidos los siguientes axiomas (de igualdad):

1. Reflexividad $\forall x(x = x)$.
2. Transitividad $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$.

3. Simetría $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$.

La teoría de Zermelo-Fraenkel-Axioma de elección (*ZFE*) consiste en los siguientes axiomas:

- *Existencia*: Existe un conjunto que no tiene elementos. En símbolos: $\exists x \forall y \neg (y \in x)$.
- *Extensionalidad*: Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos. En símbolos: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.
- *Parejas*: Para cada dos conjuntos existe un tercero que tiene exactamente a los dos conjuntos originales como elementos. En símbolos: $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$.
- *Unión*: La unión de un conjunto es un conjunto. En símbolos: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u))$.
- *Comprensión*: Para cada conjunto a y para cada fórmula de *LTC* φ , posiblemente con parámetros, existe un conjunto b que contiene exactamente a aquellos elementos de a que satisfacen φ :

$$\forall \vec{v} \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, \vec{v}))).$$

- *Potencia*: Para cada conjunto a existe un conjunto b , cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de a :

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x)).$$

- *Infinito*: Existe un conjunto que contiene al conjunto vacío y es cerrado respecto a la operación sucesor: $x \mapsto x \cup \{x\}$. En símbolos:

$$\begin{aligned} & \exists x (\exists y (y \in x \wedge \forall z \neg (z \in y)) \wedge \\ & \forall y \exists z (y \in x \rightarrow (z \in x \wedge \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in y \vee u = y)))). \end{aligned}$$

- *Reemplazo*: Si se sustituye cada elemento de un conjunto a por su imagen respecto a una relación funcional φ se obtiene un conjunto. En símbolos:

$$\begin{aligned} & \forall \vec{v} (\forall x \forall y \forall z ((\varphi(x, y, \vec{v}) \wedge \varphi(x, z, \vec{v})) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ & \forall y \forall z \forall w (w \in z \leftrightarrow \exists u (u \in y \wedge \varphi(u, w, \vec{v}))). \end{aligned}$$

- *Fundación*: Si una propiedad es cierta para al menos un conjunto, entonces la propiedad se cumple para algún conjunto y no lo hace para los elementos de este conjunto. En particular, si $\varphi(x, y)$ es la fórmula $x \in y$, se asegura que todo conjunto tiene un elemento \in -mínimo. En símbolos:

$$\forall \vec{v} (\exists x \varphi(x, \vec{v}) \rightarrow \exists y (\varphi(y, \vec{v}) \wedge \forall z (z \in y \rightarrow \neg \varphi(z, \vec{v}))).$$

- *Axioma de elección* Para cada conjunto no vacío a formado de conjuntos ajenos entre sí, existe un conjunto b que interseca a cada elemento de a en exactamente un elemento. En símbolos:

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y ((\forall z (z \in x \rightarrow \exists u u \in z) \wedge \\ & \forall v \forall w ((v \in x \wedge w \in x \wedge \neg v = w) \rightarrow \neg \exists u (u \in v \wedge u \in w))) \wedge \\ & \forall z (z \in x \rightarrow \exists u (u \in z \wedge u \in y) \wedge \\ & \forall v (v \in z \wedge v \in y) \rightarrow v = u))). \end{aligned}$$

Definición 1.1. Un \in -término es una variable o un término clase.

Definición 1.2. Sean W un \in -término y φ una fórmula de *LTC* tales que φ y W no tienen variables libres en común. Definimos la *relativización de φ con respecto a W* , denotada por φ^W , mediante recursión sobre la construcción de fórmulas de *LTC* como sigue:

1. $(v_i = v_j)^W = v_i = v_j$
2. $(v_i \in v_j)^W = v_i \in v_j$
3. $(\neg \psi)^W = \neg \psi^W$
4. $(\psi \wedge \chi)^W = \psi^W \wedge \chi^W$

5. $(\psi \vee \chi)^W = \psi^W \vee \chi^W$
6. $(\psi \rightarrow \chi)^W = \psi^W \rightarrow \chi^W$
7. $(\forall v_i \psi)^W = \forall v_i (v_i \in W \rightarrow \psi^W)$
8. $(\exists v_i \psi)^W = \exists v_i (v_i \in W \rightarrow \psi^W)$.

Si Ψ es un conjunto de fórmulas, entonces Ψ^W denota el conjunto $\{\psi^W \mid \psi \in \Psi\}$.

Definición 1.3. Se escribe $\pi : M \rightarrow_{\Sigma_0} N$, la *preservación de validez de Σ_0 -fórmulas entre M y N* , si y sólo si para cualquier Σ_0 -fórmula φ del lenguaje ocurre que

$$M \models \varphi(x) \leftrightarrow N \models \varphi(\pi(x)).$$

Definición 1.4. Sean $W, W' \in$ -términos con $W \subseteq W'$ y $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una LTC fórmula que no tiene variables en común con W ni con W' . Decimos que φ es W - W' -absoluta si

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \in W (\varphi^W(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{W'}(x_1, \dots, x_n)).$$

En particular, a las fórmulas W - V -absolutas se les llama simplemente W -absolutas.

La fórmula φ es W -absoluta si y sólo si

$$\forall x_1 \in W \dots \forall x_n \in W (\varphi^W \leftrightarrow \varphi).$$

Lema 1.1. Las Σ_0 -fórmulas son W - W' -absolutas para cualesquiera W y W' modelos transitivos con $W \subseteq W'$.

Demostración. Sean $\varphi(\vec{x})$ una Σ_0 -fórmula, y W, W' modelos transitivos con $W \subseteq W'$.

Supongamos que $W \models \varphi(\vec{x})$ con $x_1, \dots, x_n \in W$ y debemos mostrar que $W' \models \varphi(\vec{x})$.

Procedemos por inducción en la construcción de φ .

Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv x_i \in x_j$.

Dado que se satisface $W \models x_i \in x_j$ y que $W \subseteq W'$ se concluye que se satisface $W' \models x_i \in x_j$.

Ahora si $W' \models \varphi(x_1, \dots, x_j)$, es decir si $W' \models x_i \in x_j$ habrá que demostrar que $W \models x_i \in x_j$, pero esto es inmediato, pues los testigos están en W , por lo tanto, $W \models x_i \in x_j$.

Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv x_i = x_j$.

Por hipótesis y dado que $W \subseteq W'$ se obtiene que $W' \models x_i = x_j$.

Si $W' \models x_i = x_j$ dado que $x_i, x_j \in W$, se concluye que

$$W \models x_i = x_j.$$

Sea $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, donde ψ_1 y ψ_2 son W - W' -absolutas.

Se supone $W \models \varphi \leftrightarrow W \models \psi_1 \wedge \psi_2$, entonces, por definición de conjunción se obtiene que $W \models \psi_1$ y $W \models \psi_2$, aplicando la hipótesis se deduce que $W' \models \psi_1$ y $W' \models \psi_2$, de donde se concluye que $W' \models \psi_1 \wedge \psi_2$, es decir $W' \models \varphi$.

Dado que $x_1, \dots, x_n \in W$ y si $W' \models \varphi$ entonces $W' \models \psi_1 \wedge \psi_2$ por definición de la conjunción, se obtiene $W' \models \psi_1$ y $W' \models \psi_2$, porque los $x_i \in W$, para todo $1 \leq i \leq n$, se satisface que $W \models \psi_1$ y $W \models \psi_2$, es decir, $W \models \psi_1 \wedge \psi_2$.

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$ con ψ una fórmula W - W' -absoluta.

Si $W \models \varphi$ entonces $W \models \neg\psi$, por hipótesis $W' \models \neg\psi$, es decir $W' \models \varphi$.

Aquí si $W' \models \neg\psi$ se sigue que $W \models \neg\psi$, pues $x_i \in W \subseteq W'$.

Sea $\varphi(z, \vec{x}) \equiv \exists z \in u\psi(z, \vec{x})$, donde ψ es W - W' -absoluta.

Si $W \models \exists z \in u\psi(z, \vec{x})$, es decir existe un testigo en W , tal que $W \models \psi(a, \vec{x})$, por hipótesis y dado que $W \subseteq W'$ se concluye que $W' \models \psi(a, \vec{x})$, es decir,

$$W' \models \exists z \in u\psi(z, \vec{x}).$$

Aquí, al igual que en los casos anteriores, el testigo está en W , por lo tanto en W se satisface φ . \square

Lema 1.2. *Las siguientes expresiones son definibles en ZFE:*

1. u es transitivo.
2. $\langle u, \in \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.
3. $\pi : V \rightarrow W$.
4. $\pi[V]$.

Demostración. 1. u es transitivo $\leftrightarrow \forall x \in u \forall y \in x (y \in u)$ es una fórmula en ZFE.

2. $\langle u, \in \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ significa que:

Si $\varphi \equiv x_i \in x_j$ existen $a_i, a_j \in u$ tal que $a_i \in a_j$.

Si $\varphi \equiv x_i = x_j$ existen $a_i, a_j \in u$ tal que $a_i = a_j$.

Si $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ entonces existen $a_1, \dots, a_n \in u$ tal que

$$\psi_1[a_1, \dots, a_n] \wedge \psi_2[a_1, \dots, a_n].$$

Si $\varphi \equiv \neg\psi$ entonces para todo $a_1, \dots, a_n \in u$ ocurre $\neg\psi[a_1, \dots, a_n]$.

Para $\varphi \equiv \exists x\psi$ significa que existen $b, a_1, \dots, a_n \in u$ con

$$\varphi[b, a_1, \dots, a_n].$$

3. $\pi : V \rightarrow W \leftrightarrow \forall x \in V \exists y \in W ((x, y) \in \pi)$.
4. $\pi[V] = \{\pi(v) \mid v \in V\}$.

\square

Definición 1.5. Sea φ una Σ_0 -fórmula, la *relación de satisfacción para Σ_0 -fórmulas* se define como

$$\models^{\Sigma_0} \varphi[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \exists u (u \text{ es transitivo} \wedge a_1, \dots, a_n \in u \wedge \langle u, \in \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]).$$

Esto se justifica por la absolutéz de las Σ_0 -fórmulas.

Definición 1.6. Sean π, W términos clase. La expresión $\pi : V \rightarrow_{\Sigma_0} W$ *cofinal* es la fórmula:

W es transitivo $\wedge \pi : V \rightarrow W \wedge W = \bigcup \pi[V] \wedge$ para toda Σ_0 -fórmula φ y cualesquiera a_1, \dots, a_n se cumple $\models^{\Sigma_0} \varphi[\vec{a}] \leftrightarrow \models^{\Sigma_0} \varphi[\pi(\vec{a})]$.

Por lo demostrado en el Lema anterior, se observa que tanto la relación de satisfacción como π cofinal, se pueden definir en ZFE, pues cada parte que compone a las expresiones que las definen son definibles en ZFE.

Definición 1.7. Sean π, W términos clase. π es un *encaje elemental* se define mediante el siguiente esquema:

$$\pi : V \rightarrow W \wedge W \text{ es transitivo} \wedge \forall \vec{v} (\varphi(\vec{v}) \leftrightarrow \varphi^W(\pi(\vec{v})))$$

para toda L -fórmula φ .

No es evidente cómo definir este esquema en ZFE dada la presencia de φ^W .

Con ZF^- se denota a la teoría que contiene a los axiomas de ZF sin el axioma de potencia, además de cambiar el esquema de reemplazo por:

$$(1) \quad \forall x \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \forall u \exists v \forall x \in u \exists y \in v \varphi(x, y).$$

2. ESTRUCTURAS DÓCILES

En esta sección se hace un estudio de las estructuras dóciles, herramienta indispensable para lograr el objetivo planteado.

A partir de ahora se considerará $L(A)$ el lenguaje que se obtiene al agregar $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, un conjunto de nuevos predicados, al lenguaje L . Es importante señalar que la aparición de nuevos símbolos de predicado modifica la definición de Σ_0 -fórmula, la cual es entonces la siguiente:

Definición 2.1. Una Σ_0 -fórmula de $L(A)$ es una fórmula en donde todos sus cuantificadores son acotados, en la fórmula pueden aparecer símbolos de predicado.

Definición 2.2. Sea N transitivo, $A \subset N$. Se dice que $\langle N, A \rangle$ es *dócil* si y sólo si $x \cap A \in N$ para todo $x \in N$.

Si A es un símbolo de predicado, $A \subseteq N$, por lo que puede ocurrir $x \cap A \notin N$ para algún (o todo) $x \in N$. Lo cual no se cumple si $\langle N, A \rangle$ es dócil. La estructura $\langle N, A_1, \dots, A_n \rangle$ es dócil si $\langle N, A_1 \rangle, \dots, \langle N, A_n \rangle$ lo son.

En lo que sigue se considera a $\langle N, A_1, \dots, A_n \rangle$ un ZF^- -modelo, donde los axiomas de ZFE consideran ahora fórmulas en $L(A)$.

Definición 2.3. Se escribirá $\pi : \langle N, \vec{A} \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}' \rangle$ si y sólo si para toda $L(A)$ -fórmula Σ_0 , φ y para toda $x_1, \dots, x_n \in N$ se satisface:

$$\langle N, \vec{A} \rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \langle N', \vec{A}' \rangle \models \varphi[\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)].$$

Lema 2.1. Sean $\pi : \langle N, \vec{A} \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}' \rangle$, donde N' es transitivo y $\langle N, A_1, \dots, A_n \rangle$ dócil. Para $1 \leq i \leq n$ suponga que $A'_i \subset N'$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a. $\pi : \langle N, \vec{A} \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}' \rangle$;
- b. $\pi(x \cap A_i) = \pi(x) \cap A'_i$ para $x \in N$, $1 \leq i \leq n$.

Demostración. (a) \rightarrow (b) Supongamos $\pi : \langle N, \vec{A} \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', \vec{A}' \rangle$ y lo que queremos demostrar es que $\pi(x \cap A_i) = \pi(x) \cap A'_i$ para $x \in N$, $1 \leq i \leq n$.

Sean $A_i \subseteq N$ para algún i y $x \in N$ arbitrario.

Dado que $\langle N, \vec{A} \rangle$ es dócil se deduce que $\langle N, A_i \rangle$ es dócil, por lo tanto $x \cap A_i \in N$.

Por otro lado se sabe que N' es transitivo y que $A'_i \subseteq N'$, con esta información se demuestran las dos contenciones.

(\subseteq) Sea $z \in \pi(x \cap A_i)$. Dado que N es transitivo y π preserva LTC fórmulas debe ser el colapso de Mostowski, en consecuencia $z = \pi(y)$ para algún $y \in x \cap A_i$. Se sigue que $z \in \pi(x)$. Como π preserva Σ_0 -fórmulas se tiene que si $\langle N, A \rangle \models Ax$ entonces $\langle N', A' \rangle \models A'\pi(x)$, ahora $y \in x \cap A_i$, por lo que $\pi(y) \in A'_i$, así que $z \in A'_i$.

(\supseteq) Sea $z \in \pi(x) \cap A'_i$. Entonces $z = \pi(y)$ para algún $y \in x$ y $\langle N', A' \rangle \models A'_i z$, es decir, $\langle N', A' \rangle \models A'_i \pi(y)$, se deduce que $\langle N, A \rangle \models A_i y$, así que $y \in x \cap A_i$, por lo que

$z \in \pi(x \cap A_i)$.

(b) \rightarrow (a) Por simplicidad en la notación, la demostración se realiza para $n = 1$, consideremos $A = A_1$.

Sean M transitivo, $u \subset M$ también transitivo y $x_1, \dots, x_n \in u$ tales que satisfacen lo siguiente:

$$(2) \quad \langle M, A \rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \langle u, A \cap u \rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Para Σ_0 -fórmulas φ , lo anterior se satisface por la absolutez de Σ_0 -fórmulas, pues $\langle u, A \cap u \rangle$ es una subestructura de $\langle M, A \rangle$ y los testigos están en el universo de la estructura menor.

Si $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ es una fórmula del lenguaje de $\langle N, A \rangle$, sea $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(u, a, v_1, \dots, v_n) = \varphi^{(u, a)}$, es decir se obtiene al realizar la relativización de todos los cuantificadores de φ a u y de la sustitución de todas las fórmulas primitivas Ax por $x \in a$.

Entonces $\bar{\varphi}$ es una Σ_0 -fórmula en el lenguaje L y para toda $u, a \in N$, $x_1, \dots, x_n \in u$ se cumple que:

$$\langle N, A \rangle \models \bar{\varphi}[u, a, \bar{x}] \leftrightarrow \langle u, a \rangle \models \varphi[\bar{x}].$$

Sean $x_1, \dots, x_n \in N$ arbitrarios y $u \in N$ transitivo, tal que $x_1, \dots, x_n \in u$.

Sea φ es una Σ_0 -fórmula. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle N, A \rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n] &\leftrightarrow \langle u, A \cap u \rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \\ &\leftrightarrow \langle N, A \rangle \models \bar{\varphi}[u, A \cap u, x_1, \dots, x_n] \\ &\leftrightarrow \langle N', A' \rangle \models \bar{\varphi}[\pi(u), \pi(A \cap u), \dots, \pi(x_n)] \\ &\leftrightarrow \langle \pi(u), \pi(A \cap u) \rangle \models \varphi(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) \\ &\leftrightarrow \langle N', A' \rangle \models \varphi[\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)] \end{aligned}$$

por (2) y por $\pi(A \cap u) = A' \cap \pi(u)$. □

Lema 2.2. *Sea $\pi : N \rightarrow_{\Sigma_0} N'$ cofinal. Entonces N' es cerrado respecto a $x \cap y$, $x \cup y$, $\langle x, y \rangle$.*

Demostración. Para demostrar $x \cap y \in N'$ supongamos que $x, y \in N'$.

Por estar x y y en N' se sabe que $x \in \pi(x_0)$ y $y \in \pi(y_0)$, con $x_0, y_0 \in N$, pues π es cofinal. Sea $z = \{z_1 \mid z_1 \in x_0 \wedge z_1 \in y_0\}$.

La Σ_0 -fórmula

$$\forall z_1 \in x_0 \forall z_1 \in y_0 \exists z_1 \in z (z_1 \in x \wedge z_1 \in y)$$

se satisface en $\langle N, A \rangle$, por lo tanto es válida en $\langle N', A' \rangle$ con

$$\pi(x_0), \pi(y_0), \pi(z),$$

en particular $x \cap y \in N'$.

Para observar que $x \cup y \in N'$ supongamos que $x, y \in N'$.

Por estar x y y en N' se sabe que $x \in \pi(x_0)$ y $y \in \pi(y_0)$, con $x_0, y_0 \in N$, pues π es cofinal. Sea $z = \{z_1 \mid z_1 \in x_0 \vee z_1 \in y_0\}$.

La Σ_0 -fórmula

$$\forall z_1 \in x_0 \forall z_1 \in y_0 \exists z_1 \in z (z_1 \in x \vee z_1 \in y)$$

se satisface en $\langle N, A \rangle$, por lo tanto es válida en $\langle N', A' \rangle$ con $\pi(x_0)$, $\pi(y_0)$, $\pi(z)$, en particular $x \cup y \in N'$.

Si se demuestra que: $x_1, \dots, x_n \in N' \rightarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in N'$ para $i = 1, \dots, n$ sea $x_i \in \pi(u_i)$, $u_i \in N$ (π es cofinal).

Sea $u' = \{\langle z_1, \dots, z_n \rangle \mid z_1 \in u_1, \dots, z_n \in u_n\}$.

La Σ_0 -fórmula

$$\forall x_1 \in u_1 \forall x_2 \in u_2 \dots \forall x_n \in u_n \exists y \in u' y = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

se satisface en $\langle N, A \rangle$, por lo tanto también es verdadero en $\langle N', A' \rangle$ con $\pi(u_1), \dots, \pi(u_n), \pi(u')$. En particular $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in N'$. □

Lema 2.3. *Sea $\pi : \langle N, A \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A' \rangle$ cofinal, donde $\langle N, A \rangle$ es dócil. Entonces existe un único A' tal que $\pi : \langle N, A \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A' \rangle$. $\langle N', A' \rangle$ es entonces también dócil.*

Demostración. Se demuestra primero la existencia.

$$\text{Sea } A' = \bigcup_{x \in N} \pi(x \cap A).$$

Afirmación 1. $\pi : \langle N, A \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A' \rangle$

Demostración. Por el Lema 2.1 se debe de mostrar que: $\pi(x \cap A) = \pi(x) \cap A'$ para todo $x \in N$.

- (\subseteq) Es inmediato pues $\pi(x \cap A) \subseteq A'$ que es la unión de los $\pi(x \cap A)$ para todo $x \in N$.
- (\supseteq) Sea $z \in \pi(x) \cap A'$. Entonces $z \in \pi(y \cap A)$ para algún $y \in N$. Por lo tanto $z \in \pi(x) \cap \pi(y \cap A) = \pi(x \cap y \cap A) \subseteq \pi(x \cap A)$. □

Afirmación 2. $\langle N', A' \rangle$ es dócil.

Demostración. Sea $x \in N'$, $x \in \pi(u)$, suponga, sin pérdida de generalidad, que u es transitivo (pues los ZF^- -modelos son cerrados respecto a CT). Entonces $\pi(u)$ es transitivo, así que $x \subset \pi(u)$. Por lo tanto, se satisface que

$$x \cap A' = x \cap \pi(u) \cap A' = x \cap \pi(u \cap A) \in N'. \quad \square$$

Para demostrar la unicidad suponga que existen dos conjuntos, sean A'_1 y A'_2 y se demostrará que son iguales.

Sea $z \in N'$. Por ser dóciles $\langle N', A'_1 \rangle$ y $\langle N', A'_2 \rangle$ se tiene que $z \cap A'_1 \in N'$ y que $z \cap A'_2 \in N'$, ahora, dado que $\pi(z) \cap A'_1 = \pi(z \cap A'_1)$ y que $\pi(z) \cap A'_2 = \pi(z \cap A'_2)$ siempre que $\pi : \langle N, A \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A' \rangle$, entonces existen $x, w \in N$ tal que $z = \pi(x) = \pi(w)$, se concluye que $x = w$, de aquí se deduce que $A_1 = A_2$ y por lo tanto $A'_1 = A'_2$, pues π es el colapso de Mostowski. □

Lema 2.4. *$\langle N, A \rangle$ es un ZF^- -modelo.*

Demostración. Los axiomas de ZFE que no involucran fórmulas se cumplen pues N es un modelo de ZFE , entonces sólo debemos probar los axiomas que involucran $L(A)$ -fórmulas.

- **Comprensión:** Sea φ una $L(A)$ fórmula. Entonces se cumple lo siguiente $\langle N, A \rangle \models \forall v \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, v)))$.

Es decir debemos mostrar que

$$\forall v \in N \forall x \in N \exists y \in N \forall z \in N (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi^N(z, v))).$$

Caso 1: Si en φ no aparece A , no hay nada que probar, pues N es modelo de ZFE .

Caso 2: Si en φ aparece A , se hace la relativización a N de todos los cuantificadores y la sustitución de toda aparición de Ax por $x \in a$. Ahora, dado que el axioma es válido en V , el conjunto y existe y sólo basta mostrar que $y \in N$, pero éste está pues $x \in N$ y por transitividad de N , implica que $x \subseteq N$, es decir, si $z \in x$, entonces $z \in N$ y además dado que φ está relativizado a N , todo se queda en N , por lo tanto $y \in N$.

■ Reemplazo:

$$\begin{aligned} & \forall \vec{v} \in N (\forall x \in N \forall y \in N \forall z \in N ((\varphi^N(x, y, \vec{v}) \wedge \varphi^N(x, z, \vec{v})) \\ & \rightarrow y = z) \rightarrow \forall y \in N \forall z \in N \forall w \in N (w \in z \cap W \leftrightarrow \\ & \exists u \in N (u \in y \cap W \wedge \varphi^N(u, w, \vec{v}))). \end{aligned}$$

Al igual que en el axioma anterior existen dos casos:

Caso 1: Si en φ no aparece A , no hay nada que probar, pues el axioma se satisface en V y por lo tanto en N , pues N es modelo de ZFE .

Caso 2: Si en φ aparece A , realizamos la relativización de φ a N y toda aparición de Ax la sustituimos por $x \in a$, además por ser válido el axioma en V , sólo basta mostrar que $u \in N$.

Para eso, se observa que $y \cap N = y$ y que por la transitividad de N , si $u \in y \cap N$ entonces $u \in N$ y por estar φ relativizada a N , todo está en N . □

Hasta aquí se ha utilizado muy poco el hecho de que N es un ZF^- -modelo, pero en el siguiente lema se utilizará fuertemente.

Lema 2.5. *Sea $\pi : N \rightarrow_{\Sigma_0} N'$ cofinal. Entonces $\pi : N \prec N'$. Por lo tanto N' es también un ZF^- -modelo.*

Demostración. Para cada fórmula $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ del lenguaje de N sea

$$A_\varphi = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \langle N, A \rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Afirmación: $\langle N, A_{\varphi_i} \rangle$ es dócil.

Demostración. Sea $x \in N$. Por demostrar que $x \cap A_{\varphi_i} \in N$.

Basta mostrar que $\{y \in x \mid \langle N, A \rangle \models \varphi(y)\}$ es un conjunto, y lo es por el axioma de comprensión el cual es válido en $\langle N, A \rangle$, pues se mostró en el Lema 2.4 que $\langle N, A \rangle$ es un ZF^- -modelo. □

Dado que cada $\langle N, A_{\varphi_i} \rangle$ es dócil para todo i , entonces

$$\langle N, A_{\varphi_1}, \dots, A_{\varphi_n} \rangle$$

es dócil y por lo tanto es un ZF^- -modelo. Sea $\pi : \langle N, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_\varphi \rangle$.

Entonces por el Lema 2.3 A'_φ es único y $\langle N', A'_\varphi \rangle$ es dócil.

Ahora lo que falta demostrar es que es un encaje elemental y eso se hace por inducción en la construcción de fórmulas.

Afirmación 1. Sea $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$. Entonces $A'_\varphi \subset N'^n$.

Demostración. Sea $z \in A'_\varphi$, $z \in \pi(u)$, con u transitivo. Entonces se satisface en $\langle N, A_\varphi \rangle$ que $\forall y \in u (A_\varphi y \rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in uy = \langle x_1, \dots, x_n \rangle)$, es decir, se satisface la misma Σ_0 -fórmula pero con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\varphi \rangle$. □

Afirmación 2. $A'_\varphi = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \langle N', A' \rangle \models \varphi[x_1, \dots, x_n]\}$.

Demostración. La prueba se sigue por inducción en la construcción de fórmulas.

Sea φ una fórmula atómica, por ejemplo $\varphi(v_1, \dots, v_n) = v_i \in v_j$.

Entonces para $x_1, \dots, x_n \in \pi(u)$, con u transitivo se satisface en N que

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in u(z = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \wedge x_i \in x_j)).$$

Es decir se satisface la misma Σ_0 -fórmula con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\varphi \rangle$.

Sea $\varphi(v_1, \dots, v_n) \equiv (v_i = v_j)$. Entonces para $x_1, \dots, x_n \in \pi(u)$, con u transitivo se satisface en N que

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in u(z = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \wedge x_i = x_j)).$$

Es decir, se satisface la misma Σ_0 -fórmula con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\varphi \rangle$.

Ahora sea $\varphi = \varphi_0 \vee \varphi_1$. Se debe mostrar que

$$A'_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \vee A'_{\varphi_1} z).$$

Sea $z \in \pi(u)$ con u transitivo. Entonces

$$\pi : \langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle$$

y en $\langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle$ se satisface:

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \vee A_{\varphi_1} z)).$$

Y por lo tanto se satisface la misma fórmula con $\pi(u)$ en

$$\langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle.$$

Sea $\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_1$. Se debe mostrar que

$$A'_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \wedge A'_{\varphi_1} z).$$

Sea $z \in \pi(u)$ con u transitivo. Entonces

$$\pi : \langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle$$

y en $\langle N, A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, A_\varphi \rangle$ se satisface:

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow (A'_{\varphi_0} z \wedge A_{\varphi_1} z)).$$

Y por lo tanto se satisface la misma fórmula con $\pi(u)$ en

$$\langle N', A'_{\varphi_0}, A'_{\varphi_1}, A'_\varphi \rangle.$$

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$. Se debe mostrar que

$$A'_\varphi z \leftrightarrow \neg(A'_\psi z).$$

Sea $z \in \pi(u)$ con u transitivo. Entonces

$$\pi : \langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle$$

y en $\langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle$ se satisface:

$$\forall z \in u(A_\varphi z \leftrightarrow \neg(A'_\psi z)).$$

Y por lo tanto se satisface la misma fórmula con $\pi(u)$ en $\langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle$.

Ahora sea $\varphi = \exists w\psi$, $\psi = \psi(w, v_1, \dots, v_n)$. Entonces

$$\pi : \langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle \rightarrow_{\Sigma_0} \langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle.$$

□

Afirmación 3. $A'_\varphi \langle x_1, \dots, x_n \rangle \leftrightarrow \exists y A'_\psi \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle$.

Demostración. Para (\Leftarrow) sea $A'_\psi \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle$, con $\langle y, x_1, \dots, x_n \rangle \in \pi(u)$ y u transitivo. Considere $u' = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1, \dots, x_n \in u\}$. Entonces se satisface en $\langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle$:

$$\begin{aligned} \forall z \in u \forall y x_1 \dots x_n \in u ((z = \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle \wedge A_\psi z) \rightarrow \\ \exists z' \in u' (z' = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \wedge A_\psi z')) \end{aligned}$$

es decir la misma Σ_0 -fórmula se satisface en $\langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle$ con $\pi(u)$ y $\pi(u')$.

Para (\Rightarrow) se debe mostrar que si $A'_\varphi \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ entonces

$$\exists y A'_\psi \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Sean $A'_\varphi \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ con $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \pi(u)$ y u transitivo. Entonces en $\langle N, A_\psi, A_\varphi \rangle$ se satisface:

$$\begin{aligned} \forall z \in u \forall y \forall x_1 \dots x_n \in u (\exists z' \in u (z' = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \wedge A_\varphi z') \rightarrow \\ z = \langle y, x_1, \dots, x_n \rangle \wedge A_\psi z). \end{aligned}$$

Por lo tanto se satisface la misma Σ_0 -fórmula con $\pi(u)$ en

$$\langle N', A'_\psi, A'_\varphi \rangle.$$

□

Una vez realizado lo anterior se inicia la prueba de encaje:

Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv x_i \in x_j$ una Σ_0 -fórmula. Por la preservación de Σ_0 -fórmulas se tiene que $\langle N, A \rangle \models x_i \in x_j$ entonces $\langle N', A' \rangle \models \pi(x_i) \in \pi(x_j)$.

Sea $\varphi(\vec{x}) \equiv \psi_1(\vec{x}) \wedge \psi_2(\vec{x})$ con $\langle N, A \rangle \models \psi_i(\vec{x}) \leftrightarrow \langle N', A' \rangle \models \psi_i(\pi(\vec{x}))$ para $i = 1, 2$.

Suponga $\langle N, A \rangle \models \psi_1 \wedge \psi_2$ por definición de la conjunción se obtiene $\langle N, A \rangle \models \psi_1$ y $\langle N, A \rangle \models \psi_2$; por hipótesis se obtiene $\langle N', A' \rangle \models \psi_1$ y $N' \models \psi_2$ por lo tanto $\langle N', A' \rangle \models \psi_1 \wedge \psi_2$.

Sea $\varphi \equiv \neg\psi$, suponga que $\langle N, A \rangle \models \varphi$. Entonces $\langle N, A \rangle \models \neg\psi$ por lo tanto $\langle N', A' \rangle \models \neg\psi$, se concluye que $\langle N', A' \rangle \models \varphi$.

Sea $\varphi \equiv \exists x \psi(a, x)$ con

$$\langle N, A \rangle \models \psi(a, x) \leftrightarrow \langle N', A' \rangle \models \psi(\pi(a), \pi(x)).$$

Suponga que $\langle N, A \rangle \models \exists x \psi(a, x)$. Sea

$$A_\psi = \{x \mid \langle N, A \rangle \models \psi(a, x)\} \subset N.$$

Habrá que demostrar que $\langle N, A_\psi \rangle$ es dócil.

Sea $y \in N$. Por demostrar que $y \cap A_\psi \in N$. Basta mostrar que $\{x \in y \mid \langle N, A \rangle \models \psi(a, x)\}$ es un conjunto y lo es por el axioma de comprensión pues $\langle N, A \rangle \models ZF^-$, por lo tanto es dócil.

\Rightarrow) Dado que $\langle N, A \rangle \models \exists x \psi(a, x)$ se tiene que existe $b \in N$ tal que $\langle N, A \rangle \models \psi(a, b)$ por lo tanto $b \in A_\psi$, es decir $\pi(b) \in A'_\psi$ de donde se obtiene que $\langle N', A' \rangle \models \psi(\pi(a), \pi(b))$ se concluye que $\langle N', A' \rangle \models \exists x \psi(\pi(a), x)$.

\Leftarrow) Suponga $\langle N', A' \rangle \models \exists x \psi(\pi(a), x)$, entonces $\langle N', A' \rangle \models \exists x \in \pi(b) A'_\psi(\pi(a), x)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle N', A' \rangle \models \exists x \in \pi(b) A'_\psi(\pi(a), x) \\ \langle N, A \rangle \models \exists x \in b A_\psi(a, x) \\ \langle N, A \rangle \models \exists x \in b \psi(a, x) \end{aligned}$$

$$\langle N, A \rangle \models \exists x \psi(a, x).$$

Con lo que la demostración se acaba. \square

Como resultados adicionales se tienen los siguientes:

Lema 2.6. *Sea $\pi : M \rightarrow_{\Sigma_0} N$ -cofinal. Entonces se satisface $\pi : M \rightarrow_{\Sigma_1} N$.*

Demostración. Sea φ una Σ_1 -fórmula, $\varphi \equiv \exists x \psi(x, \vec{y})$ con $\vec{y} \in M$, y ψ una Σ_0 -fórmula. Se debe mostrar que $M \models \varphi \leftrightarrow N \models \varphi$.

\Rightarrow) Se supone cierto

$$M \models \varphi,$$

es decir

$$M \models \exists x \psi(x, \vec{y}),$$

entonces existe $a \in M$ tal que

$$M \models \psi(a, \vec{y}),$$

por hipótesis se obtiene

$$N \models \psi(\pi(a), \pi(\vec{y}))$$

por lo tanto

$$N \models \exists x \psi(x, \pi(\vec{y})).$$

\Leftarrow) Se supone que

$$N \models \exists x \psi(x, \pi(\vec{y})),$$

entonces existe $b \in N$ tal que

$$N \models \psi(b, \pi(\vec{y})),$$

por definición de cofinal existe $u \in M (b \in \pi(u))$, por lo tanto

$$N \models \exists x \in \pi(u) \psi(x, \pi(\vec{y})),$$

por hipótesis se obtiene

$$M \models \exists x \in u \psi(x, \vec{y}),$$

de donde se deduce

$$M \models \exists x \psi(x, \vec{y}).$$

\square

Lema 2.7. *Sean $\langle N, A \rangle$ y $\langle N', A' \rangle$ dos L -estructuras. Suponga que φ es una Σ_n -fórmula y $\langle N, A \rangle \models \varphi[\vec{x}]$ ocurre si y sólo si ocurre $\langle N', A' \rangle \models \varphi[\vec{x}]$. Entonces para ψ una Π_n -fórmula se cumple que $\langle N, A \rangle \models \psi[\vec{x}]$ ocurre si y sólo si $\langle N', A' \rangle \models \psi[\vec{x}]$ ocurre.*

Demostración. Supongamos que la conclusión no es cierta, es decir existe una Π_n -fórmula ψ tal que $\langle N, A \rangle \models \psi$ y $\langle N', A' \rangle \not\models \psi$.

Sea $\psi \equiv \forall u \varphi_0$ una Π_n -fórmula. Entonces φ_0 debe de ser una Σ_{n-1} -fórmula.

Se aplica la hipótesis a φ_0 y se obtiene que $\langle N, A \rangle \models \varphi_0$ si y sólo si $\langle N', A' \rangle \models \varphi_0$, pues es una Σ_{n-1} -fórmula.

Además por hipótesis se sabe que $\langle N', A' \rangle \not\models \psi$, lo que es equivalente a $\langle N', A' \rangle \models \neg\psi$, es decir

$$\langle N', A' \rangle \models \neg\forall u \varphi_0$$

por lo tanto

$$\langle N', A' \rangle \models \exists u \neg\varphi_0$$

observe que el lado derecho es una Σ_n -fórmula y por hipótesis se obtiene

$$\langle N, A \rangle \models \exists u \neg\varphi_0$$

es decir

$$\langle N, A \rangle \models \neg\forall u \varphi_0$$

que es equivalente a

$$\langle N, A \rangle \neq \psi$$

lo cual es una contradicción. □

REFERENCIAS

- [1] Jensen, R., Grosse kardinalzahlen. Notas sin publicar.
- [2] Kanamori, A., The Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings. Second Edition, Springer, 2009.

Dirección del autor:

Juan Carlos Aguilar Franco
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: jcafranco@gmail.com



PRODUCCIÓN DE ENTROPÍA EN CADENAS DE MARKOV

JORGE BOLAÑOS SERVÍN

RESUMEN. La descomposición en ciclos de cadenas de Markov finitas y de la tasa de producción de entropía debida a Qian-Kalpazidou es expuesta brevemente. Además se obtienen condiciones equivalentes a la reversibilidad de la cadena en términos de los ciclos.

1. INTRODUCCIÓN

Las Cadenas de Markov (C.M.), llamadas así en honor al matemático Andrey Markov –quien sentó la base teórica de las mismas–, son ampliamente usadas para modelar fenómenos tanto físicos como sociales, desde la actividad enzimática, para la cual se emplea la cinemática de Michaelis - Menten - Henri, ver [4], hasta más recientemente la manera en que Google cataloga una página electrónica mediante su sistema *PageRank* desarrollado en la universidad de Standford, ver [2] y [3].

Siguiendo el trabajo de Kalpazidou en [5], la escuela china de los Qian da una descripción de la tasa de producción entropía de una C.M. en términos de los ciclos formados, ver [6]. El presente trabajo es una breve exposición de la construcción de esta teoría para una C.M. finita, rellenando detalles y presentando los teoremas de mayor importancia junto con un ejemplo nuevo. (Una exposición autocontenida con todas las demostraciones y una aplicación, que no dan los Qian, a una clase de sistemas cu ánticos abiertos puede encontrarse en [1].)

La noción de circuito dirigido y ciclo es el punto de partida de la teoría. Estos conceptos son introducidos en la Sección 2. En la Sección 3, se estudia la cadena derivada y su distribución invariante con la cual se obtiene una representación probabilística y una descripción de la tasa de producción entropía en términos de los ciclos. Finalmente, en la Sección 3 se extienden los resultados al caso de tiempo continuo. También se presenta un ejemplo discreto y un ejemplo continuo en su respectiva Sección.

2. CIRCUITOS

Un circuito o ciclo es un concepto topológico que puede definirse geoméricamente o algebraicamente. Desde el punto de vista geométrico, un circuito de puntos distintos es la imagen, bajo cierta función, de un círculo o de cualquier curva homeomorfa a un círculo, mientras que la definición algebraica requiere la noción de orientación, es decir, distinguir un punto inicial y un punto final en cada arco. Cuando los arcos de un circuito tienen la misma orientación lo llamaremos circuito dirigido.

Una propiedad que poseen los circuitos dirigidos es que regresan periódicamente a sus puntos, esto motiva una definición que exprese dicha periodicidad.

Definición 2.1. Una *función de circuito dirigido* en un conjunto numerable S es una función periódica c , $c : \mathbb{Z} \rightarrow S$.

A las parejas $(c(n), c(n + 1))$, $n \in \mathbb{Z}$, les llamamos aristas, mientras que al menor entero $p = p_c \geq 1$ que satisface la ecuación $c(n + p) = c(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ le llamaremos periodo de c .

Con cada función de circuito dirigido c podemos asociar una clase de funciones de circuito dirigido c' , construida a partir de c mediante el grupo de translaciones en \mathbb{Z} de

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60J99.

Palabras clave. Cadenas de Markov, entropía, ciclos, Qian, Kalpazidou, reversibilidad.

la siguiente manera: para cualquier $i \in \mathbb{Z}$ fijo, definimos la función $t_i(n) := n+i, n \in \mathbb{Z}$. Con ello obtenemos una nueva función de circuito dirigido c' mediante la composición $c' = c \circ t_i$, es decir, $c'(n) = c(n+i), n \in \mathbb{Z}$.

El hecho de que c y c' no difieren esencialmente motiva definir la siguiente relación.

Definición 2.2. Decimos que *dos funciones de circuito dirigido c y c' están relacionadas*, denotándolo por $c \sim c'$, si y sólo si existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $c' = c \circ t_i$.

Esta relación es de equivalencia sobre la clase de todos los circuitos dirigidos:

- I) Reflexiva Una función de circuito dirigido c satisface $c \sim c$, pues $c = c \circ t_0$.
- II) Simétrica Supongamos que $c \sim c'$, es decir existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $c'(n) = c(n+i)$. A partir de ello vemos que $-i$ satisface $c(n) = c'(n+(-i))$. Por lo tanto $c' \sim c$.
- III) Transitiva Si $c \sim c'$ y $c' \sim c''$, entonces existen $i, j \in \mathbb{Z}$ tales que $c'(n) = c(n+i)$ y $c''(n) = c'(n+j)$. De donde $c''(n) = c'(n+j) = c(n+i+j)$. Así que $c \sim c''$.

Definición 2.3. Le llamamos *circuito dirigido* a cada una de las clases de equivalencia inducidas por \sim .

Un circuito dirigido c está completamente determinado por

- El periodo p_c
- Cualquier $(p_c + 1)$ -tupla $(i_1, i_2, \dots, i_{p_c}, i_{p_c+1})$ con $i_{p_c+1} = i_1$ ó cualesquiera p_c parejas ordenadas $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{p_c}, i_{p_c+1})$ con $i_{p_c+1} = i_1$ donde $i_l = c(n+l-1), 1 \leq l \leq p_c$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.4. El *ciclo dirigido* asociado con un circuito dirigido dado $c = (i_1, i_2, \dots, i_p, i_1), p \geq 1$, con puntos distintos i_1, i_2, \dots, i_p , es la sucesión ordenada $\hat{c} = (i_1, \dots, i_p)$.

Como consecuencia de las definiciones anteriores, un ciclo dirigido es invariante respecto a permutaciones cíclicas.

Definición 2.5. Dado un circuito dirigido $c = (i_1, i_2, \dots, i_p, i_1)$ definimos el *circuito en reversa* como $c_- = (i_1, i_p, i_{p-1}, \dots, i_2, i_1)$.

2.1. Funciones de pasaje. Dado un conjunto finito S y un circuito dirigido c en S , para el estudio de sus propiedades es útil saber cuándo un circuito pasa a través de un punto. La manera más sencilla de hacerlo es usar una idea similar a la función indicadora de dicho evento.

Definición 2.6. Dado un circuito dirigido $c = (i_1, \dots, i_p, i_1)$, definimos la *función de pasaje de c* denotada por J_c como

$$J_c(k) = \text{card}\{l \in \mathbb{Z} : i_{l+1} = k, 0 \leq l \leq p_c - 1\}$$

Decimos que c *pasa por k* si y sólo si $J_c(k) \neq 0$. $J_c(k)$ es el número de veces que c pasa por k .

Proposición 2.1. Si c es un circuito dirigido entonces $J_{c \circ t_j}(k) = J_c(k)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Como $c \circ t_j$ es una permutación cíclica de c es claro que $J_{c \circ t_j}(k) = J_c(k)$. \square

Definición 2.7. Dados $k_1, \dots, k_r \in S$ con $r > 1$ y un circuito dirigido c en S con periodo p , definimos $J_c(k_1, \dots, k_r)$ como

$$J_c(k_1, \dots, k_r) = \text{card}\{l \in \mathbb{Z} : c \circ t_l(m) = k_m, m = 1, 2, \dots, r, 0 \leq l \leq p_c - 1\}$$

Decimos que c *pasa a través de (k_1, \dots, k_r)* si y sólo si $J_c(k_1, \dots, k_r) \neq 0$. $J_c(k_1, \dots, k_r)$ es el número de veces que c pasa por (k_1, \dots, k_r) .

En particular para $r = 2$ en la definición anterior se tiene que

$$J_c(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \text{ es arista de } c; \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

3. CADENAS DE MARKOV TIEMPO DISCRETO

Sea $\xi = \{\xi_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto irreducible, positiva recurrente y estacionaria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con espacio de estados S finito, matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$ y distribución invariante $\Pi = \{\pi_i\}_{i \in S}$. Pensaremos a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ como el espacio canónico dado por el Teorema de Extensión de Kolmogorov para ξ , es decir,

$$\Omega = S^{\mathbb{Z}} = \{\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} : \omega_k \in S, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

con $\xi_n(\omega) = \omega_n$.

Supongamos que la órbita ω de ξ es

$$\{3, 4, 7, 3, 1, 2, 5, 2, 4, 1, \dots\}$$

En cada tiempo n , sea $\eta_n(\omega)$ la órbita de la cadena original hasta el tiempo n , respetando el orden en que aparecen los estados, pero descartando los ciclos formados hasta dicho tiempo. Es decir,

n	0	1	2	3	4	5	6
$\xi_n(\omega)$	3	4	7	3	1	2	1
$\eta_n(\omega)$	[3]	[3, 4]	[3, 4, 7]	[3]	[3, 1]	[3, 1, 2]	[3, 1]
Ciclos descartados				(3, 4, 7)			(1, 2)

En la siguiente sección se definirá $\{\eta_n(\omega)\}_n$ de manera rigurosa.

3.1. La cadena derivada.

Definición 3.1. Definimos a $[S]$ como el conjunto de sucesiones finitas ordenadas de elementos distintos de S . En símbolos

$$[S] = \{[i_1, i_2, \dots, i_r] : i_1, i_2, \dots, i_r \in S \text{ y son distintos, } r \geq 1\}.$$

La concatenación de dos elementos de $[S]$ está bien definida siempre y cuando no tengan puntos en común, i.e.

$$[[i_1, \dots, i_r], [i_{r+1}, \dots, i_{r+n}]] = [i_1, \dots, i_r, i_{r+1}, \dots, i_{r+n}].$$

Claramente $[S]$ es finito. Tomaremos la σ -álgebra $[\Sigma] = 2^{[S]}$.

Definición 3.2. Definimos una *operación binaria*

$$\uplus : [S] \times S \rightarrow [S]$$

mediante

$$[i_1, i_2, \dots, i_r] \uplus i = \begin{cases} [i_1, i_2, \dots, i_r, i] & \text{si } i \notin \{i_1, \dots, i_r\} \\ [i_1, i_2, \dots, i_k], & \text{si } i = i_k, \text{ para algún } 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

Definición 3.3. Definimos el *proceso estocástico* $\{\eta_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\eta_n : \Omega \rightarrow [S]$ recursivamente como sigue:

$$\eta_0(\omega) = [\xi_0(\omega)] \quad \eta_n(\omega) = \eta_{n-1}(\omega) \uplus \xi_n(\omega) \text{ para } n \geq 1.$$

Proposición 3.1. *El proceso estocástico $\{\eta_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ donde $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k : 0 \leq k \leq n)$.*

Demostración. Tenemos que ver que η_n es \mathcal{F}_n -medible para cada n . Usaremos inducción. Sea A cualquier medible de $[S]$.

Para $n = 0$,

$$\eta_0^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : [\xi_0(\omega)] = \eta_0(\omega) \in A\} = \bigcup_{[n_1] \in A} \xi_0^{-1}(\{n_1\}) \in \mathcal{F}_0.$$

Supongamos que el resultado es válido para n . La función $\uplus : [S] \times S \rightarrow [S]$ es trivialmente medible al ser S finito. Por otro lado para $(\eta_n, \xi_{n+1}) : \Omega \rightarrow [S] \times S$ tomamos un conjunto rectangular $A \times B$ en $[S] \times S$.

$$(\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(A \times B) = \eta_n^{-1}(A) \cap \xi_{n+1}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{n+1} \text{ pues } \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

La familia de conjuntos rectangulares medibles es una álgebra, por tanto es π -sistema contenido en la familia \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \{C \in [S] \times S : (\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(C) \in \mathcal{F}_{n+1}\}$$

Es facil ver que \mathcal{L} es un λ -sistema. Por el lema de Dynkin (η_n, ξ_{n+1}) es medible. Usando la relación de recurrencia $\eta_{n+1} = \bigoplus \circ (\eta_n, \xi_{n+1})$ concluimos que η_{n+1} es \mathcal{F}_{n+1} medible. \square

Definición 3.4. Definimos $[S]_i$ como el conjunto de elementos $[i_1, \dots, i_r]$, $r \geq 1$ de $[S]$ tales que $i_1 = i$ y $p_{i_k, i_{k+1}} > 0 \forall 1 \leq k \leq r$.

De acuerdo a la manera en que está definida η , si $\eta_0(\omega) = [i]$ entonces $\eta_n(\omega) \in [S]_i$ para todo n .

Lema 3.2. $\eta = \{\eta_n\}_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $[S]$ y distribución inicial

$$\mathbb{P}(\eta_0 = [i]) = \begin{cases} \pi_i & i \in S \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

Cada $[S]_i$ es una clase irreducible y positiva recurrente de η . Además para cualquier par de estados $y_1 = [i_1, \dots, i_s], y_2 = [j_1, \dots, j_r] \in [S]_i$ la probabilidad de transición en un solo paso viene dada por

$$\tilde{p}_{y_1, y_2} = \begin{cases} p_{i_s, j_r} & \text{si } r \leq s \text{ y } i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_r = j_r \\ 0 & \text{ó } r = s + 1 \text{ y } i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_s = j_s, \\ & \text{otro caso} \end{cases}$$

Y la distribución invariante única $\tilde{\Pi}^i$ de η en cada clase irreducible $[S]_i$ satisface

$$\tilde{\Pi}^i([i]) = \pi_i$$

La propiedad de Markov y la descripción de las probabilidades de transición es clara pues para transiciones permitidas $y_2 = [y_1, j_r]$ ó $y_1 = [y_2, [i_{r+1}, \dots, i_s]]$ y cualesquiera $z_1, \dots, z_{n-1} \in [S]_i$ adecuados, tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta_{n+1}(\omega) = y_2 | \eta_n(\omega) = y_1, \eta_{n-1}(\omega) = z_{n-1}, \dots, \eta_0(\omega) = [i]) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1}(\omega) = y_2, \xi_{n+1}(\omega) = j_r | \xi_n(\omega) = i_s, \eta_n(\omega) = y_1, \dots, \eta_0(\omega) = [i]) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1}(\omega) = j_r | \xi_n(\omega) = i_s, \eta_n(\omega) = y_1, \eta_{n-1}(\omega) = z_{n-1}, \dots, \eta_0(\omega) = [i]) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1}(\omega) = j_r | \xi_n(\omega) = i_s) \\ &= p_{i_s, j_r}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de Markov de ξ .

La irreducibilidad no es difícil de verificar mientras que al ser $[S]_i$ finito la cadena es recurrente positiva. Como consecuencia de un hecho bien conocido de las cadenas de Markov irreducibles y positivas recurrentes se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^i([i]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\eta_k = [i] | \eta_0 = [i]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\xi_k = [i] | \xi_0 = [i]) = \pi_i. \end{aligned}$$

3.2. Distribución estacionaria de η . En esta sección se probarán algunos resultados necesarios para dar la forma explícita la distribución estacionaria, $\tilde{\Pi}^i$, de η , en términos de las entradas de la matriz de transición P de ξ .

Definición 3.5. Dado un conjunto índice $H = \{h_1, \dots, h_k\}$, definimos $D(H)$ como el subdeterminante de la matriz $\mathbf{D} = I - P$ tomando como renglones y columnas a los elementos de H , es decir,

$$D(H) = \begin{vmatrix} d_{h_1, h_1} & d_{h_1, h_2} & \cdots & d_{h_1, h_k} \\ d_{h_2, h_1} & d_{h_2, h_2} & \cdots & d_{h_2, h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{h_k, h_1} & d_{h_k, h_2} & \cdots & d_{h_k, h_k} \end{vmatrix}.$$

Si $H = \emptyset$ definimos a $D(H) = 1$.

Lema 3.3. La distribución estacionaria única $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$ de la cadena de Markov ξ puede expresarse como

$$(1) \quad \pi_i = \frac{D(\{i\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)}.$$

Demostración. Sabemos que Π existe, es única y satisface

$$\Pi P = P, \quad \Pi \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

equivalentemente,

$$\Pi \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \Pi \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Como la suma de cada renglón de \mathbf{D} es cero, el anterior sistema de ecuaciones es equivalente al sistema

$$(\pi_1, \dots, \pi_N) \begin{pmatrix} 1 & d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j-1} & d_{1,j+1} & \cdots & d_{1,N} \\ 1 & d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j-1} & d_{2,j+1} & \cdots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{N,1} & d_{N,2} & \cdots & d_{N,j-1} & d_{N,j+1} & \cdots & d_{N,N} \end{pmatrix} = (1, 0, \dots, 0),$$

para cada $j \in S$.

Llamaremos \mathbf{D}_j a la matriz del sistema anterior. Como consecuencia del teorema de Perron-Frobenius se tiene que $\det \mathbf{D}_j \neq 0$. Resolviendo el sistema obtenemos,

$$\begin{aligned} \Pi &= (1, 0, \dots, 0) \mathbf{D}_j^{-1} \\ &= (\text{vector de cofactores de la primera columna de } \mathbf{D}_j). \end{aligned}$$

La j -ésima entrada de Π es

$$(2) \quad \pi_j = \frac{D(\{j\}^c)}{(-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_j}.$$

Recordando que $\sum_l d_{i,l} = 0 \Rightarrow -d_{i,k} = \sum_{l \neq k} d_{i,l}$ para toda k , sumamos todas las columnas, excepto la primera, a la segunda columna. Como el intercambio de columnas dentro de un determinante sólo le cambian el signo, obtenemos que si $2 \leq j \leq N$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{D}_j &= \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -d_{1,j} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j-1} & d_{1,j+1} & \cdots & d_{1,N} \\ 1 & -d_{2,j} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j-1} & d_{2,j+1} & \cdots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -d_{N,j} & d_{N,2} & \cdots & d_{N,j-1} & d_{N,j+1} & \cdots & d_{N,N} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_1 \end{aligned}$$

Por otro lado dado que $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ y que $\pi_j (-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_j = D(\{j\}^c)$

$$\det \mathbf{D}_1 = \det \mathbf{D}_1 \sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \pi_j (-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_j = \sum_{j \in S} D(\{j\}^c)$$

Finalmente combinando lo anterior

$$\pi_i = \frac{D(\{i\}^c)}{(-1)^{i+1} \det \mathbf{D}_i} = \frac{D(\{i\}^c)}{\det \mathbf{D}_1} = \frac{D(\{i\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)}.$$

□

Lema 3.4.

$$\begin{aligned} & D(\{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}\}^c) \\ &= d_{i_s, i_s} D(\{i_1, \dots, i_s\}^c) \\ &- \sum_{r>0, j_1, \dots, j_r} p_{i_s, j_1} p_{j_1, j_2} \cdots p_{j_{r-1}, j_r} p_{j_r, i_s} D(\{j_1, \dots, j_r, i_1, \dots, i_s\}^c), \end{aligned}$$

en donde la suma se toma sobre todas las elecciones distintas de $j_1, \dots, j_r \in \{i_1, \dots, i_s\}^c$.

Lema 3.5. Para todo $j \in \{i_1, \dots, i_s\}^c$ fijo tenemos que

$$\begin{aligned} & D(\{i_1, \dots, i_s\}^c) \\ &= \sum_{k=1}^s \sum_{\substack{r \geq 0 \\ j_1, \dots, j_r}} p_{j, j_1} p_{j_1, j_2} \cdots p_{j_r, i_k} D(\{j, j_1, \dots, j_r, i_1, \dots, i_s\}^c), \end{aligned}$$

donde la suma está tomada sobre las distintas elecciones

$j_1, \dots, j_r \in \{j, i_1, \dots, i_s\}^c$.

Lema 3.6. Para cualquier $i \in$

$$\sum_{j \in S} D(\{j\}^c) = \sum_{[i_1, \dots, i_s] \in [S]_i} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} D(\{i_1, \dots, i_s\}^c).$$

Para el caso $s = 1$, entendemos a $p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_{s-1}, i_s}$ como 1.

Demostración. Usando el lema anterior y sumando

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} D(\{j\}^c) &= \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i_1, \dots, j_r}} \sum_{r \geq 0} p_{i, j_1} p_{j_1, j_2} \cdots p_{j_r, j} D(\{i, j_1, \dots, j_r, l\}^c) + D(\{i\}^c) \\ &= \sum_{\substack{s \geq 2, i_2, \dots, i_s \\ i_1=1}} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} D(\{i_1, \dots, i_s\}^c) + D(\{i\}^c) \\ &= \sum_{[i_1, \dots, i_s] \in [S]_i} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} D(\{i_1, \dots, i_s\}^c). \end{aligned}$$

□

Finalmente con la ayuda de los lemas anteriores podemos dar una descripción de la distribución invariante de la cadena derivada η ,

Teorema 3.7. Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible, positiva recurrente con espacio de estados S finito y distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$, entonces su cadena derivada η es recurrente positiva en cada $[S]_i$ con distribución invariante $\tilde{\Pi}^i$ dada por

$$(3) \quad \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s]) = p_{i_1, i_2} p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} \frac{D(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)}.$$

Además se tiene que

$$(4) \quad \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s]) p_{i_s, i_1} = \sum_{k=1}^s \sum_{\substack{r \geq 1 \\ j_2, \dots, j_r}} \tilde{\Pi}^{j_1}([j_1, \dots, j_r, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+s-1}]) p_{i_{k-1}, i_s},$$

donde j_1 es fijo en $\{i_1, \dots, i_s\}^c$, la suma es sobre las distintas elecciones $j_2, \dots, j_r \in \{j_1, i_1, \dots, i_s\}^c$ y las sumas donde aparece k se entienden modulo s .

Demostración. Sólo resta demostrar las ecuaciones (3) y (4). Como η es recurrente positiva en la clase irreducible $[S]_i$ entonces $\tilde{\Pi}^i$ es la única solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^i \tilde{P}_i &= \tilde{\Pi}^i \\ \sum_{[i_1, \dots, i_s] \in [S]_i} \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s]) &= 1. \end{aligned}$$

Por el lema anterior se sigue que $\tilde{\Pi}^i$ dado por (3) satisface la segunda ecuación. Recordando que $d_{j,j} = 1 - p_{j,j}$ y usando el lema (3.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s]) &= p_{i_1, i_2} p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} \frac{D(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)} \\ &= p_{i_1, i_2} p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} \frac{D(\{i_1, \dots, i_{s-1}\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)} \\ &\quad + p_{i_1, i_2} p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} p_{i_s, i_s} \frac{D(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)} \\ &\quad + \sum_{\substack{r \geq 1 \\ j_1, \dots, j_r}} p_{i_1, i_2} p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} p_{i_s, j_1} p_{j_1, j_2} \cdots p_{j_{r-1}, j_r} p_{j_r, i_s} \frac{D(\{j_1, \dots, j_r, i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)} \\ &= \underbrace{p_{i_{s-1}, i_s}}_c \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_{s-1}]) + \underbrace{p_{i_s, i_s}}_b \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s]) \\ &\quad + \sum_{\substack{r \geq 1 \\ j_1, \dots, j_r}} \underbrace{p_{j_r, i_s}}_a \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_r]) \end{aligned}$$

Veamos que esto es exactamente la primera ecuación. Recordemos que si $x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_m] \in [S]_i$ entonces $\tilde{p}_{x,y} \neq 0$ sólo cuando

- a) $m < n$
- b) $m = n$
- c) $m = n + 1$

y en los tres casos $\tilde{p}_{x,y} = p_{x_n, y_m}$.

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\tilde{p}_{x', y}}_{\substack{x' = [i_1, \dots, i_{s-1}] \\ y = [x', i_s] \\ c)}} \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_{s-1}]) + \underbrace{\tilde{p}_{x'', y}}_{\substack{x'' = y = [i_1, \dots, i_s] \\ b)}} \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s]) \\ &\quad + \sum_{\substack{r \geq 1 \\ j_1, \dots, j_r}} \underbrace{\tilde{p}_{x, y}}_{\substack{x = [i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_r] \\ y = [i_1, \dots, i_s] \\ a)}} \tilde{\Pi}^i([i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_r]) \\ &= \sum_{x \in [S]_i} \tilde{\Pi}^i(x) \tilde{p}_{x, [i_1, \dots, i_s]}. \end{aligned}$$

Esto demuestra (3). Usando la descripción de $\tilde{\Pi}^i$ junto con el lema (3.5), fijando un $j_1 \in \{i_1, \dots, i_s\}^c$ se concluye la validez de (4). □

3.3. Representación probabilística en ciclos.

Definición 3.6. Le llamamos $\mathcal{C}_n(\omega)$ a la clase de todos los ciclos que ocurren hasta el tiempo n a lo largo de la órbita $\{\xi_l(\omega)\}_{l \geq 0}$

Definición 3.7. Para un ciclo c , definimos

$$w_{c,n}(\omega) = \sum_{l=1}^n 1_{\cup_{k=1}^s} \{\tilde{\omega} : \eta_{l-1}(\tilde{\omega}) = [\eta_l(\tilde{\omega}), [i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+s-1}]]\}(\omega).$$

Es claro que $w_{c,n}(\omega)$ cuenta el número de veces que aparece el ciclo c ó alguna permutación cíclica en la órbita $\{\xi_l(\omega)\}_{l \geq 0}$ hasta el tiempo n .

Buscamos obtener una familia de ciclos, a la que llamaremos \mathcal{C}_∞ , que no dependa de ω y que contenga a todos los ciclos posibles de la cadena ξ . Esto se hace mediante un proceso estocástico auxiliar γ

$$\begin{aligned}\gamma_n &: \Omega \longrightarrow S \times S \\ \gamma_n(\omega) &= (\xi_{n-1}(\omega), \xi_n(\omega))\end{aligned}$$

Proposición 3.8. *El proceso estocástico γ es una cadena de Markov positiva recurrente e irreducible con distribución estacionaria única dada por*

$$\Pi_\gamma(i, j) = \pi_i p_{i,j}$$

Definición 3.8. Denotamos por $\sigma_n(\omega; i, j)$ al número promedio de transiciones de i a j en la órbita de $\{\xi_l(\omega)\}_{l \geq 0}$ hasta el tiempo n .

En símbolos

$$\sigma_n(\omega; i, j) = \frac{1}{n} \text{card}\{m : 0 \leq m < n, \xi_m(\omega) = i, \xi_{m+1}(\omega) = j\}$$

Proposición 3.9. *Para todo $i, j \in S$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\omega; i, j) = \pi_i p_{i,j} \quad \text{c.s.}$$

Demostración. Es consecuencia de la ley de los grandes números para cadenas de Markov aplicada al proceso γ . \square

Proposición 3.10. *Para cada ciclo $c = (i_1, \dots, i_s)$ el siguiente límite existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} = w_c \quad \text{c.s.,}$$

donde

$$w_c = p_{i_1, i_2} p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} p_{i_s, i_1} \frac{D(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)}$$

Es importante notar que el límite w_c **no** depende de ω .

Por otro parte la sucesión $(\mathcal{C}_n(\omega))_n$ converge casi seguramente a una clase de ciclos que denotamos por \mathcal{C}_∞ . Esto es claro observando que los $\mathcal{C}_n(\omega)$ forman una sucesión es creciente. El límite es la unión de todos ellos.

Para ver que no depende de la trayectoria, sean ω_1, ω_2 fuera del conjunto de probabilidad cero dado por la proposición anterior. Entonces para cada $c \in \mathcal{C}_\infty(\omega_1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{c,n}(\omega_1)}{n} = w_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{c,n}(\omega_2)}{n},$$

y así $c \in \mathcal{C}_\infty(\omega_2)$.

Definición 3.9. La clase de ciclos \mathcal{C}_∞ dada por la proposición anterior es la colección de ciclos que ocurren en casi todas las órbitas $\{\xi_n(\omega)\}_n$. Al conjunto de pesos $\{w_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ de las proposiciones anteriores se les llama *distribución circulatoria* de ξ .

Finalmente podemos obtener una representación probabilística en ciclos, siendo esto la mitad del trabajo para obtener una descripción en ciclos de la entropía.

Teorema 3.11. (Representación Probabilística en Ciclos) *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible, positiva recurrente con espacio de estados S finito y distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$, entonces*

$$\begin{aligned}\pi_i p_{i,j} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} J_n(i, j) \quad \text{c.s} \\ &= \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i, j) \quad \forall i, j \in S.\end{aligned}$$

Demostración. Para esta demostración definimos la función $\epsilon_n(\omega; i, j)$ como

$$\epsilon_n(\omega; i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si la última transición de } i \text{ a } j \text{ pertenece} \\ & \text{a algún ciclo de } \mathcal{C}_n(\omega) \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

Con ello vemos que

$$\sigma_n(\omega; i, j) = \sum_{c \in \mathcal{C}_n(\omega)} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} J_c(i, j) + \frac{\epsilon_n(\omega; i, j)}{n}.$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en ambos lados y usando la Proposición 3.9, obtenemos

$$\pi_i p_{i,j} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i, j).$$

□

3.4. Producción de entropía. Sea r la transformación medible que invierte el tiempo,

$$\begin{aligned} r : (\Omega, \mathcal{F}) &\rightarrow (\Omega, \mathcal{F}) \\ rw(n) &= w(-n) \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Definición 3.10. Definimos el proceso estocástico ξ^- como

$$\xi_n^-(\omega) = \xi_n(r\omega) = \xi_{-n}(\omega)$$

y la medida $\mathbb{P}^- = r\mathbb{P}$ sobre (Ω, \mathcal{F}) , en donde

$$\mathbb{P}^-(A) = r\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(r^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

ξ^- es el proceso ξ con el tiempo en reversa, y su distribución viene dada por \mathbb{P}^- .

El proceso ξ^- es una cadena de Markov estacionaria en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con matriz de transición

$$P^- = (p_{i,j}^-)_{i,j \in S} = \left(\frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i} \right)_{i,j \in S},$$

y distribución invariante $\Pi^- = \Pi$. Es bien sabido que ξ es reversible si y sólo si $\mathbb{P} = \mathbb{P}^-$

A continuación definimos entropía relativa de medidas de probabilidad.

Definición 3.11. Supongamos que μ y λ son dos medidas de probabilidad sobre un espacio medible (M, \mathcal{A}) , la entropía relativa de μ respecto a λ se define como

$$H(\mu, \lambda) = \begin{cases} \int_M \log \frac{d\mu}{d\lambda}(x) \mu(dx) & \text{si } \mu \ll \lambda \text{ y } \log \frac{d\mu}{d\lambda} \in L_1(\mu) \\ +\infty & \text{otro} \end{cases}$$

En adelante usaremos la siguiente notación para la sub σ -álgebra generada por un número finito de variables aleatorias sucesivas y para las medidas restringidas a dichas sub σ -álgebras

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m^n &= \sigma(\xi_k : m \leq k \leq n) \\ \mathbb{P}_{[m,n]} &= \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_m^n} \\ \mathbb{P}_{[m,n]}^- &= \mathbb{P}^-|_{\mathcal{F}_m^n}. \end{aligned}$$

Definición 3.12. La tasa de producción de entropía de la cadena de Markov estacionaria ξ se define por

$$e_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathbb{P}_{[0,n]}, \mathbb{P}_{[0,n]}^-)$$

donde $H(\mathbb{P}_{[0,n]}, \mathbb{P}_{[0,n]}^-)$ es la entropía relativa de \mathbb{P} con respecto a \mathbb{P}^- restringidas a la σ -álgebra \mathcal{F}_0^n .

Lema 3.12. Si la matriz de transición P de ξ satisface

$$p_{i,j} > 0 \iff p_{j,i} > 0 \quad \forall i, j \in S$$

entonces para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ las medidas $\mathbb{P}_{[m,m+n]}$ y $\mathbb{P}_{[m,m+n]}^-$ son equivalentes, es decir, $\mathbb{P}_{[m,m+n]} \ll \mathbb{P}_{[m,m+n]}^-$ y $\mathbb{P}_{[m,m+n]}^- \ll \mathbb{P}_{[m,m+n]}$.

Además la derivada de Radon-Nikodym viene dada por

$$(5) \quad \frac{d\mathbb{P}_{[m,m+n]}^+}{d\mathbb{P}_{[m,m+n]}^-}(\omega) = \frac{\pi_{\xi_m(\omega)} p_{\xi_m(\omega), \xi_{m+1}(\omega)} \cdots p_{\xi_{m+n-1}(\omega), \xi_{m+n}(\omega)}}{\pi_{\xi_{m+n}(\omega)} p_{\xi_{m+n}(\omega), \xi_{m+n-1}(\omega)} \cdots p_{\xi_{m+1}(\omega), \xi_m(\omega)}} \quad \mathbb{P} - c.s$$

Demostración. La medida de un conjunto generador $B \times S^{\mathbb{Z}^{-N}}$ de la σ -álgebra \mathcal{F}_m^{m+n} , es decir, de un conjunto de la forma $\{i_m\} \times \cdots \{i_{m+n}\} \times S^{\mathbb{Z}^{-N}}$ es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[m,m+n]}^+(B \times S^{\mathbb{Z}^{-N}}) &= \mathbb{P}(\xi_m(\omega), \dots, \xi_{m+n}(\omega) \in B) \\ &= \pi_{i_m} p_{i_m, i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1}, i_{m+n}}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[m,m+n]}^-(B \times S^{\mathbb{Z}^{-N}}) &= \pi_{i_m}^- p_{i_m, i_{m+1}}^- \cdots p_{i_{m+n-1}, i_{m+n}}^- \\ &= \pi_{i_{m+n}} p_{i_{m+n}, i_{m+n-1}} \cdots p_{i_{m+1}(\omega), i_m}. \end{aligned}$$

Y usando la relación entre P y P^- obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[m,m+n]}^+(B \times S^{\mathbb{Z}^{-N}}) &= \\ \frac{\pi_{i_m} p_{i_m, i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1}, i_{m+n}}}{\pi_{i_{m+n}} p_{i_{m+n}, i_{m+n-1}} \cdots p_{i_{m+1}}} \mathbb{P}_{[m,m+n]}^-(B \times S^{\mathbb{Z}^{-N}}). \end{aligned}$$

Así bajo la hipótesis de la proposición las medidas son equivalentes.

Recordemos que los conjuntos cilíndricos forman un álgebra, por lo que forman un π -sistema contenido en el siguiente conjunto

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F}_m^{m+n} : \mathbb{P}_{[m,m+n]}^+(A) = \int_A f d\mathbb{P}_{[m,m+n]}^-\}$$

donde f es la función dada por (5). Es fácil verificar que \mathcal{L} es un λ -sistema y por el lema de Dynkin $\mathcal{L} = \mathcal{F}_m^{m+n}$. Por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym se concluye (5). \square

Teorema 3.13. *La tasa de producción de entropía e_p de la cadena de Markov estacionaria ξ puede expresarse como*

$$(6) \quad e_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in S} (\pi_i p_{i,j} - \pi_j p_{j,i}) \log \frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}}$$

$$(7) \quad = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) \log \frac{w_c}{w_{c_-}}$$

Demostración. Basta considerar el caso en que

$$p_{i,j} > 0 \iff p_{j,i} > 0 \quad \forall i, j \in S,$$

de lo contrario $e_p = +\infty$ mientras que en el lado derecho de (6) ningún término puede ser $-\infty$ y por lo menos uno de ellos es $+\infty$. En dicho caso (6) se cumple.

Así pues, bajo la hipótesis del lema anterior,

$$\begin{aligned} e_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathbb{P}_{[0,n]}, \mathbb{P}_{[0,n]}^-) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i_0, \dots, i_n \in S} \pi_{i_0} p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n} \log \frac{\pi_{i_0} p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}}{\pi_{i_n} p_{i_n, i_{n-1}} \cdots p_{i_1, i_0}} \end{aligned}$$

y utilizando propiedades del logaritmo para separar productos en sumas,

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_k, i_{k+1} \in S} \pi_{i_k} p_{i_k, i_{k+1}} \log \frac{\pi_{i_k} p_{i_k, i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}} p_{i_{k+1}, i_k}} \\ &= \sum_{i,j \in S} \pi_i p_{i,j} \log \frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}}, \quad \text{pues la suma interna no depende de } n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in S} (\pi_i p_{i,j} - \pi_j p_{j,i}) \log \frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}} \end{aligned}$$

Esto demuestra el primer renglón. Para el segundo renglón se tiene que

$$\begin{aligned}
 e_p &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in S} \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) J_c(i, j) \log \frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} \sum_{i,j \in S} (w_c - w_{c_-}) J_c(i, j) \log \frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{c=(\dots, i_k, i_{k+1}, \dots)} \sum_{k=1}^s (w_c - w_{c_-}) \log \frac{\pi_{i_k} p_{i_k, i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}} p_{i_{k+1}, i_k}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) \log \prod_{k=1}^s \frac{\pi_{i_k} p_{i_k, i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}} p_{i_{k+1}, i_k}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) \log \frac{w_c}{w_{c_-}}.
 \end{aligned}$$

□

Hemos encontrado condiciones equivalentes para la reversibilidad de una cadena de Markov en términos de los ciclos ó distribución circulatoria:

- 1) La cadena de Markov ξ es reversible.
- 2) La cadena de Markov está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \forall i, j \in S.$$

- 3) La cadena de Markov satisface el criterio de Kolmogorov,

$$p_{i_1, i_2} p_{i_2, i_3} \cdots p_{i_{s-1}, i_s} = p_{i_s, i_{s-1}} \cdots p_{i_3, i_2} p_{i_2, i_1},$$

para cualquier colección finita $\{i_1, \dots, i_s\}$ de elementos distintos de S .

- 4) Los elementos de la distribución circulatoria $\{w_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ satisfacen la condición de simetría

$$w_c = w_{c_-} \quad \forall c \in \mathcal{C}_\infty.$$

- 5) La tasa de producción de entropía es cero

$$e_p = 0$$

Ejemplo 3.14.

El caso mas simple no trivial es cuando el espacio de estados es $S = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix},$$

donde $p, q > 0$ y $p + q = 1$. La distribución invariante es $\Pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Los ciclos que aparecen en casi todas las trayectorias son

$$\mathcal{C}_\infty = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

Recordemos que un ciclo es equivalente a sus permutaciones cíclicas. Los pesos asociados a cada ciclo en virtud de la proposición (3.10) son

$$\begin{aligned}
 w_{(1,2,3)} &= \frac{p_{1,2} p_{2,3} p_{3,1}}{\begin{vmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{vmatrix}} = \frac{p^3}{3(1-pq)}, \\
 w_{(3,2,1)} &= \frac{q^3}{3(1-pq)}, \\
 w_{(1,2)} = w_{(2,3)} = w_{(3,1)} &= \frac{pq}{3(1-pq)},
 \end{aligned}$$

Es importante notar que para cada ciclo c de longitud 2, se tiene que c_- es la única permutación cíclica de c , y por la equivalencia conocida entonces $w_c = w_{c_-}$. Esto y la

ecuación (7) muestra que los ciclos que contribuyen a la tasa de producción de entropía son aquellos de longitud 3 o más.

En nuestro ejemplo la tasa de producción de entropía es

$$\begin{aligned} e_p &= (w_{(1,2,3)} - w_{(3,2,1)}) \log \frac{w_{(1,2,3)}}{w_{(3,2,1)}} = \frac{p^3 - q^3}{3(1-pq)} \log \left(\frac{p}{q} \right)^3 = \frac{p^3 - q^3}{1-pq} \log \frac{p}{q}, \\ &= \frac{(p-q)(p^2 + pq + q^2)}{1-pq} \log \frac{p}{q} = (p-q) \log \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Pues si $p + q = 1$, entonces $(p+q)^2 = 1$ y con ello $p^2 + pq + q^2 = 1 - pq$.

De lo anterior vemos que la cadena de Markov ξ es reversible si y sólo si $p = q = \frac{1}{2}$.

4. CADENAS DE MARKOV TIEMPO CONTINUO

Para el caso cuando $\xi = \{\xi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una cadena de Markov a tiempo continuo, irreducible, recurrente y estacionaria con espacio de estados finito $S = \{1, \dots, N\}$ y distribución invariante $\Pi = \{\pi_i\}_{i \in S}$ sobre el espacio de probabilidad canónico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de ξ . Denotaremos a su matriz de intensidades de transición, o generador infinitesimal, por $Q = (q_{i,j})_{i,j \in S}$ donde

$$q_i := \sum_{j \in S, j \neq i} q_{i,j} = -q_{i,i} < \infty \quad \forall i \in S.$$

Denotaremos por $\tilde{\xi}$ a la cadena de Markov encajada, y $\tilde{\Pi}$ su distribución invariante.

Proposición 4.1. *Las distribuciones invariantes de ξ y $\tilde{\xi}$ satisfacen las siguientes relaciones*

$$(8) \quad \begin{aligned} \tilde{\pi}_i &= \frac{D(\{i\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)} = \frac{\tilde{D}(\{i\}^c)q_i}{\sum_{j \in S} \tilde{D}(\{j\}^c)q_j} \quad \forall i \in S. \\ \pi_i &= \frac{\tilde{D}(\{i\}^c)}{\sum_{j \in S} \tilde{D}(\{j\}^c)} = \frac{\tilde{\pi}_i/q_i}{\sum_{j \in S} \tilde{\pi}_j/q_j} \quad \forall i \in S. \end{aligned}$$

Demostración. Las primeras igualdades en (8) se siguen del Lema 3.3 de la sección anterior y del hecho de que $\Pi Q = 0$.

Para obtener la última igualdad para $\tilde{\pi}_i$ bastará ver que para $i \neq j$ se tiene que $D(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i = D(\{i\}^c)\tilde{D}(\{j\}^c)q_j$. En efecto, utilizando la relación entre los elementos de matriz de Q y D y propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned} D(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i &= D(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i \prod_l \frac{-q_l}{-q_l} \\ &= \tilde{D}(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_j \prod_{l \neq i} \frac{1}{-q_l} \\ &= \tilde{D}(\{j\}^c)D(\{i\}^c)q_j. \end{aligned}$$

A partir de esta relación se ve que la última igualdad para π_i es inmediata pues,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\{j\}^c)q_j\tilde{\pi}_i &= \left(\frac{\tilde{D}(\{j\}^c)q_j}{\sum_{l \in S} \tilde{D}(\{l\}^c)q_l} \right) \tilde{D}(\{i\}^c)q_i \\ &= \tilde{\pi}_i \tilde{D}(\{i\}^c)q_i. \end{aligned}$$

□

Aplicando los resultados de la sección anterior a la cadena encajada obtenemos la descomposición en ciclos de la cadena continua. Sin embargo, hay algunas consideraciones técnicas que hay que tratar con cuidado, las cuales abordaremos a continuación.

4.1. Representación Probabilística.

Definición 4.1. Definimos $n_t(\omega)$ como

$$n_t(\omega) = \sup\{n \geq 0 : T_n(\omega) \leq t\}$$

De la definición se ve que $n_t(\omega)$ es el número de transiciones en la órbita ω hasta el tiempo t de la cadena ξ .

Definición 4.2. Para la cadena ξ definimos

$$\tilde{w}_{c,t}(\omega) = w_{c,n_t(\omega)}$$

Es claro que $\tilde{w}_{c,t}(\omega)$ es el número de veces que se completa el ciclo c en la órbita ω hasta el tiempo t .

La sección anterior establece la existencia de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n}$, mientras que para el caso continuo buscamos la existencia de $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{w}_{c,t}(\omega)}{t}$. El siguiente lema nos proporciona el paso intermedio para lograrlo.

Lema 4.2. Para \mathbb{P} -casi todo $\omega \in \Omega$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_t(\omega)}{t} = \frac{\sum_{i \in S} \tilde{D}(\{i\}^c) q_i}{\sum_{i \in S} \tilde{D}(\{i\}^c)}$$

Proposición 4.3. Para cada ciclo $c = (i_1, \dots, i_s)$ el siguiente límite existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{w}_{c,t}(\omega)}{t} = w_c \quad c.s.,$$

donde

$$w_c = (-1)^{s-1} q_{i_1, i_2} q_{i_2, i_3} \cdots q_{i_{s-1}, i_s} q_{i_s, i_1} \frac{\tilde{D}(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} \tilde{D}(\{j\}^c)}.$$

Demostración. Para cada ciclo c por la Proposición 3.10, aplicada a la cadena encajada $\tilde{\xi}$, obtenemos que casi seguramente

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} &= \tilde{p}_{i_1, i_2} \tilde{p}_{i_2, i_3} \cdots \tilde{p}_{i_{s-1}, i_s} \tilde{p}_{i_s, i_1} \frac{D(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} D(\{j\}^c)} \\ &= \frac{q_{i_1, i_2} \cdots q_{i_s, i_1}}{q_{i_1} \cdots q_{i_s}} \frac{\prod_{l \in \{i_1, \dots, i_s\}^c} \frac{1}{-q_l} \tilde{D}(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\prod_{l \in S} \frac{1}{-q_l} \sum_{j \in S} -q_j \tilde{D}(\{j\}^c)} \\ &= \prod_{l \in \{i_1, \dots, i_s\}} -q_l \frac{q_{i_1, i_2} \cdots q_{i_s, i_1}}{q_{i_1} \cdots q_{i_s}} \frac{\tilde{D}(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} -q_j \tilde{D}(\{j\}^c)} \\ &= (-1)^{s-1} q_{i_1, i_2} q_{i_2, i_3} \cdots q_{i_{s-1}, i_s} q_{i_s, i_1} \frac{\tilde{D}(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{j \in S} q_j \tilde{D}(\{j\}^c)}. \end{aligned}$$

Y usando el lema anterior

$$\begin{aligned} w_c &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{w}_{c,t}(\omega)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_t(\omega)}{t} \frac{w_{c,n_t(\omega)}(\omega)}{n_t(\omega)} \\ &= (-1)^{s-1} q_{i_1, i_2} q_{i_2, i_3} \cdots q_{i_{s-1}, i_s} q_{i_s, i_1} \frac{\tilde{D}(\{i_1, \dots, i_s\}^c)}{\sum_{i \in S} \tilde{D}(\{i\}^c)}. \end{aligned}$$

□

Al igual que en caso discreto, la sucesión $\{\mathcal{C}_t(\omega)\}_{t>0}$ converge casi seguramente a una clase de ciclos que denotaremos por \mathcal{C}_∞ .

Teorema 4.4. (Representación Probabilística en Ciclos) *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con generador Q , irreducible, recurrente positiva con espacio de estados S finito y distribución estacionaria Π , entonces*

$$\pi_i q_{i,j} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i, j) \quad \forall i, j \in S \quad i \neq j.$$

Demostración. Para cada $c \in \mathcal{C}_\infty$ denotamos $\tilde{w}_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n}$ c.s, entonces claramente $\{\tilde{w}_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ es la distribución circulatoria de la cadena encajada $\tilde{\xi}$, aún más por la Proposición 4.3 sabemos que

$$\tilde{w}_c = w_c \frac{\sum_{i \in S} \tilde{D}(\{i\}^c)}{\sum_{j \in S} q_j \tilde{D}(\{j\}^c)}.$$

Utilizando la representación probabilística en ciclos de la cadena encajada $\tilde{\xi}$ dada por el Teorema 3.11,

$$\tilde{\pi}_i \tilde{p}_{i,j} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} \tilde{w}_c J_c(i, j),$$

las relaciones entre las distribuciones invariantes Π y $\tilde{\Pi}$, de la Proposición 4.1 obtenemos que

$$\pi_i q_{i,j} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i, j).$$

□

4.2. Producción de entropía. Mediante la transformación que invierte el tiempo,

$$r : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F}),$$

$$rw(t) = \lim_{s \uparrow -t} w(s), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

definimos el proceso estocástico ξ^- como sigue.

Definición 4.3. Sea

$$\xi_t^- (\omega) = \xi_t(r\omega),$$

y $\mathbb{P}^- = r\mathbb{P}$ una medida sobre (Ω, \mathcal{F}) , en donde

$$\mathbb{P}^-(A) = r\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(r^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

ξ^- es la cadena en reversa de ξ y su distribución viene dada por \mathbb{P}^- .

El proceso ξ^- es una cadena de Markov estacionaria en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^-)$ con generador

$$Q^- = (q_{i,j}^-)_{i,j \in S} = \left(\frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i} \right)_{i,j \in S},$$

y distribución invariante $\Pi^- = \Pi$.

En adelante usamos la siguiente notación, para cualquier $s < t$ denotamos por \mathcal{F}_s^t a la sub σ -álgebra generada por $\{\xi_u : s \leq u \leq t\}$, es decir,

$$\mathcal{F}_s^t = \sigma(\xi_u : s \leq u \leq t)$$

$$\mathbb{P}_{[s,t]} = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_s^t}$$

$$\mathbb{P}_{[s,t]}^- = \mathbb{P}^-|_{\mathcal{F}_s^t}.$$

Definición 4.4. La tasa de producción de entropía de una cadena de Markov estacionaria ξ se define por

$$e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}_{[0,t]}^-),$$

donde $H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}_{[0,t]}^-)$ es la entropía relativa de \mathbb{P} con respecto a \mathbb{P}^- restringidas a la σ -álgebra \mathcal{F}_0^t .

Definición 4.5. Para cualquier $t > 0$, $n \geq 0$ y $[i_0, i_1, \dots, i_n] \in [S]$, denotamos por

$$A_{i_0, i_1, \dots, i_n}(t) = \{\omega \in \Omega : n_t(\omega) = n, \xi_{T_k(\omega)}(\omega) = i_k, k = 0, 1, \dots, n\},$$

al conjunto de trayectorias ω que hasta el tiempo t contienen n transiciones sobre el conjunto i_0, i_1, \dots, i_n .

Lema 4.5. Si la Q -matriz de ξ satisface

$$q_{i,j} > 0 \iff q_{j,i} > 0 \quad \forall i, j \in S,$$

entonces para todo $s, t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ las medidas $\mathbb{P}_{[s, s+t]}$ y $\mathbb{P}_{[s, s+t]}^-$ son equivalentes, es decir, $\mathbb{P}_{[s, s+t]} \ll \mathbb{P}_{[s, s+t]}^-$ y $\mathbb{P}_{[s, s+t]}^- \ll \mathbb{P}_{[s, s+t]}$.

Demostración. Para $t > 0$, $n \geq 0$, $[i_0, i_1, \dots, i_n] \in [S]$, $0 < t_1 < \dots < t_n < t$ y δ suficientemente pequeño para que no haya traslapes escribimos

$$A = \{\omega \in A_{i_0, i_1, \dots, i_n}(t) : t_1 < T_1(\omega) \leq t_1 + \delta t_1, \dots, t_n < T_n(\omega) \leq t_n + \delta t_n\}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \pi_{i_0} \tilde{p}_{i_0, i_1} \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} q_{i_0} e^{-q_{i_0} s_1} \tilde{p}_{i_1, i_2} \int_{t_2 - s_1}^{t_2 + \delta t_2 - s_1} q_{i_1} e^{-q_{i_1} s_2} \dots \tilde{p}_{i_{n-1}, i_n} \\ &\int_{t_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k}^{t_n + \delta t_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k} q_{i_{n-1}} e^{-q_{i_{n-1}} s_n} \int_{t - \sum_{k=1}^n s_k}^{\infty} q_{i_n} e^{-q_{i_n} s_{n+1}} ds_{n+1} ds_n \dots ds_2 ds_1 \\ &= \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \dots \int_{t_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k}^{t_n + \delta t_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k} \int_{t - \sum_{k=1}^n s_k}^{\infty} \pi_{i_0} q_{i_0, i_1} \dots q_{i_{n-1}, i_n} q_{i_n} \\ &\prod_{k=0}^n e^{-q_{i_k} s_{k+1}} ds_{n+1} \dots ds_1. \end{aligned}$$

De manera similar calculando $\mathbb{P}^-(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) = 0 &\iff q_{i_0, i_1} \dots q_{i_{n-1}, i_n} q_{i_{n-1}, i_n} = 0 \\ &\iff \\ q_{i_0, i_1}^- \dots q_{i_{n-1}, i_n}^- q_{i_{n-1}, i_n}^- &= 0 \iff \mathbb{P}^-(A) = 0. \end{aligned}$$

Aún más, para $\mathbb{P}(A) > 0$ usando la relación entre $q_{i,j}$ y $q_{i,j}^-$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\pi_{i_0} q_{i_0, i_1} \dots q_{i_{n-1}, i_n} q_{i_{n-1}, i_n}}{\pi_{i_n} q_{i_n, i_{n-1}} \dots q_{i_2, i_1} q_{i_1, i_0}} \mathbb{P}^-(A).$$

Como $\mathcal{F}_0^t \subset \sigma(n_t, \xi_0, T_i, \xi_{T_1}, \dots, T_k, \xi_{T_k}, \dots)$, esta última siendo generada por conjuntos del tipo de A , entonces tenemos que $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^-$ y $\mathbb{P}^- \ll \mathbb{P}$ en \mathcal{F}_0^t , en donde si $\omega \in A_{i_0, \dots, i_1}(t)$

$$\frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}(\omega)}{d\mathbb{P}_{[0,t]}^-(\omega)} = \frac{\pi_{\xi_0(\omega)} q_{\xi_0(\omega), \xi_{T_1}(\omega)} \dots q_{\xi_{T_{n-1}}(\omega), \xi_{T_n}(\omega)} q_{\xi_{T_{n-1}}(\omega), \xi_{T_n}(\omega)}}{\pi_{\xi_n(\omega)} q_{\xi_n(\omega), \xi_{T_{n-1}}(\omega)} \dots q_{\xi_{T_2}(\omega), \xi_{T_1}(\omega)} q_{\xi_{T_1}(\omega), \xi_{T_0}(\omega)}} \quad \mathbb{P} - c.s.$$

□

Teorema 4.6. Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con generador $Q = (q_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible, positiva recurrente con espacio de estados S finito, y con distribución estacionaria

$\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$, entonces su tasa de producción de entropía puede ser expresada como

$$(9) \quad e_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in S} (\pi_i q_{i,j} - \pi_j q_{j,i}) \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}}$$

$$(10) \quad = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) \log \frac{w_c}{w_{c_-}}$$

Al igual que en el caso discreto tenemos condiciones equivalentes a la reversibilidad de a cadena de Markov en términos de su distribución circulatoria:

- 1) La cadena de Markov estacionaria ξ es reversible.
- 2) La cadena de Markov estacionaria ξ está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i, j \in S$$

- 3) La cadena de Markov estacionaria satisface el criterio de Kolmogorov

$$q_{i_1, i_2} q_{i_2, i_3} \cdots q_{i_{s-1}, i_s} = q_{i_s, i_{s-1}} \cdots q_{i_3, i_2} q_{i_2, i_1}$$

para cualquier colección finita $\{i_1, \dots, i_s\}$ de elementos distintos de S .

- 4) Los elementos de la distribución circulatoria $\{w_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ satisfacen la condición de simetría

$$w_c = w_{c_-} \quad \forall c \in \mathcal{C}_\infty.$$

- 5) La tasa de producción de entropía de ξ es cero

$$e_p = 0.$$

Ejemplo 4.7.

Consideremos la cadena de Markov estacionaria, irreducible y recurrente ξ sobre el espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ con generador

$$Q = \begin{pmatrix} -(q_{0,1} + q_{0,2}) & q_{01} & q_{0,2} & 0 \\ q_{1,0} & -(q_{1,0} + q_{1,3}) & 0 & q_{1,3} \\ q_{2,0} & 0 & -(q_{2,0} + q_{2,3}) & q_{2,3} \\ 0 & q_{3,1} & q_{3,2} & -(q_{3,1} + q_{3,2}) \end{pmatrix},$$

donde las entradas indicadas son no nulas, y distribución invariante Π .

Los ciclos que aparecen en casi todas las trayectorias son

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\infty = \{ & (0, 1, 2, 3), (0, 1, 3, 2), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 3, 1), (0, 3, 1, 2), (0, 3, 2, 1), \\ & (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 1, 3), (0, 3, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (0, 2, 3), \\ & (0, 3, 2), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}. \end{aligned}$$

Sabemos que los ciclos que contribuyen son aquellos de longitud 3 ó más, pues si $c = (i_1, i_2)$ entonces $c_- = (i_2, i_1)$, es decir, c y c_- son equivalentes en \mathcal{C}_∞ al ser c_- una permutación cíclica de c y con ello $w_c = w_{c_-}$.

Calculando los pesos vemos que todos ellos se anulan excepto los correspondientes a los ciclos $\{(0, 1, 3, 2), (0, 2, 3, 1)\}$, de modo que en este ejemplo la tasa de producción de entropía es

$$\begin{aligned} e_p &= (w_{(0,2,3,1)} - w_{(0,1,3,2)}) \log \frac{w_{(0,2,3,1)}}{w_{(0,1,3,2)}} \\ &= - \frac{q_{0,2} q_{2,3} q_{3,1} q_{1,0} - q_{0,1} q_{1,3} q_{3,2} q_{2,0}}{\sum_{j=0}^3 \tilde{D}(\{j\}^c)} \log \frac{q_{0,2} q_{2,3} q_{3,1} q_{1,0}}{q_{0,1} q_{1,3} q_{3,2} q_{2,0}}. \end{aligned}$$

Y la cadena ξ es reversible si y sólo si $q_{0,2} q_{2,3} q_{3,1} q_{1,0} = q_{0,1} q_{1,3} q_{3,2} q_{2,0}$.

REFERENCIAS

- [1] Bolaños J., Quezada R., Producción de entropía en Cadenas de Markov, Tesis de Maestría, Posgrado en Matemáticas, UAM-I, México 2010.
- [2] Richardson M., Domingos P., The intelligent surfer: Probabilistic combination of link and content information in PageRank, Advances in N.I.P.S. 14 (pp. 1441-1448), 2002.
- [3] Langville A.N., Meyer C.D., Deeper inside page rank, Internet Mathematics Vol 1 No. 23, 2003.
- [4] Merrill S.J., Sathananthan S., Approximate Michaelis-Menten kinetics displayed in a stochastic model of cell-mediated cytotoxicity, Mathematical Biosciences Volume 80 Issue 2, 1986.

- [5] Kalpazidou S.L., Cycle Representations of Markov Processes, Springer, 2006.
- [6] Qian M-P., Qian M., Jiang D-J., Mathematical Theory of Nonequilibrium Steady States, Springer, 2003.
- [7] Norris J.R., Markov Chains, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics (No. 2), Cambridge University Press, 1997.
- [8] Chung K.L., Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Grund. Math. Wiss 104, Springer-Verlag, Primera edición 1960.

Dirección del autor:

Jorge Bolaños Servín
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: kajit@gmail.com



PROPIEDADES RELACIONADAS A LA COMPACIDAD DEFINIDAS POR REDES

MAIRA MADRIZ MENDOZA

RESUMEN. Se definen y se estudian propiedades relativas a la compacidad secuencial.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo consideramos la relación entre las propiedades de convergencia y puntos de acumulación de sucesiones, redes y κ -redes. Se brindan generalizaciones de los espacios de Fréchet y secuenciales, con el fin de hacer algunas observaciones. Como las propiedades de tipo compacidad se definen usualmente en términos de cubiertas más que en términos de sucesiones y redes, para un cardinal arbitrario κ se prueban κ -generalizaciones de varios teoremas famosos sobre los espacios numerablemente compactos y secuencialmente compactos. Se muestra, entre otras cosas, que el producto finito de espacios fuertemente κ -compactos es fuertemente κ -compacto; mejor aún, se enuncia que el producto numerable de espacios fuertemente κ -compactos es fuertemente κ -compacto; el producto de un espacio inicialmente κ -compacto con un espacio fuertemente κ -compacto es inicialmente κ -compacto y, el producto de un espacio κ -red con un espacio κ -red, T_3 y localmente fuertemente κ -compacto es un espacio κ -red.

Una parte muy importante de muchas áreas de las matemáticas es la aplicación e investigación de la convergencia. Por ejemplo, en el análisis clásico se estudia la convergencia de series y sucesiones, en análisis funcional la convergencia de funciones y operadores; mientras que, en el análisis real, la convergencia sirve para expresar la continuidad de una función o para expresar el hecho de que un punto está cerca de un conjunto. Todas las aplicaciones anteriores están estrechamente ligadas al concepto de sucesión. No obstante, para la topología general las sucesiones suelen ser insuficientes, como se ilustra en [4], [6], [7], [13] y [19], debido a que normalmente una topología no se determina por sus sucesiones convergentes, pero sí por sus sucesiones generalizadas, mejor conocidas como redes. Las redes fueron introducidas en 1922 por Moore y Smith en [17], pero no fue sino hasta 1937 que la convergencia en topología general fue descrita en términos de redes, por Birkhoff en [4].

Cabe mencionar que en la literatura, algunos topólogos las llaman *supersucesiones* debido a que dejan el nombre castellano de *red* para el concepto de *network*. Para evitar posibles confusiones, daremos la definición de lo que entendemos en este trabajo por red. Para tal efecto, sea D un conjunto no vacío y \leq una relación binaria en D . Se dice que (D, \leq) es un *conjunto dirigido* si \leq es reflexivo, transitivo y dirigido (para todos $d, d' \in D$ existe un $d^* \in D$ tal que $d \leq d^*$ y $d' \leq d^*$).

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Una *red* f en X es un mapeo $f : D \rightarrow X$, donde D es un conjunto dirigido.

Obsérvese que, si el conjunto dirigido es el conjunto de los números naturales con el orden usual, entonces f se llama sucesión.

Hodel ha mostrado recientemente en [10] la utilidad de una cierta clase de redes, a las que denomina κ -redes. Una aproximación similar fue empleada por Meyer en [16].

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60J99 .

Palabras clave. Espacio κ -red, κ -Fréchet, fuertemente κ -compacto, inicialmente κ -compacto, Fréchet, secuencial, Whyburn, espacio disperso T_3 .

En el presente trabajo, todos los espacios son de Hausdorff y κ denotará un cardinal infinito y, en particular, diremos que una *red* tiene cardinalidad κ si su dominio tiene cardinalidad κ .

Definición 1.2. Una κ -red en X es una función $f : \kappa^{<\omega} \rightarrow X$, donde $\kappa^{<\omega} = \{F : F \text{ es un subconjunto finito de } \kappa\}$ y es dirigido por \subseteq . La κ -red f también se denota por $\langle x_F : F \in \kappa^{<\omega} \rangle$, donde $x_F = f(F)$ para cada $F \in \kappa^{<\omega}$.

Nótese que una κ -red tiene cardinalidad κ .

Definición 1.3. Sea X un espacio, $q \in X$ y $f : \kappa^{<\omega} \rightarrow X$ una κ -red en X .

- El punto q es un *punto de acumulación* de f si dada cualquier vecindad abierta V de x y cualquier $F \in \kappa^{<\omega}$, existe $G \in \kappa^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $f(G) \in V$.
- Decimos que una κ -red f *converge a* x , si para cualquier vecindad abierta V de x existe $F \in \kappa^{<\omega}$ tal que $f(G) \in V$ para todo $G \in \kappa^{<\omega}$ con $F \subseteq G$.

Sea X un espacio topológico. El *carácter en un punto* $p \in X$, denotado por $\chi(p, X)$, es la mínima cardinalidad de una base local para p .

Lema 1.1 ([10]). *Sean X un espacio y $p \in X$.*

- Si f es una κ -red en X y f converge a p , entonces p es un punto de acumulación de f .
- Si $\chi(X, p) \leq \kappa$ y $p \in \text{cl } A$, entonces existe una κ -red g en A tal que g converge a p .

Definición 1.4. Se dice que $g : (D_1, <_1) \rightarrow X$ es una *emphsubred* de $f : (D_2, <_2) \rightarrow X$ si existe $\rho : D_1 \rightarrow D_2$ tal que $g = f \circ \rho$ y para cada $d_0 \in D_2$ existe $e_0 \in D_1$ tal que si $e \geq_1 e_0$, entonces $\rho(e) \geq_2 d_0$. Si $D_1 = D_2 = \kappa^{<\omega}$, un mapeo ρ con las propiedades anteriores será llamado un *mapeo κ -red*.

Lema 1.2 ([10]). *Sea X un espacio. Si f es una red de cardinalidad κ en X y p es un punto de acumulación de f , entonces existe una λ -subred g de f que converge a p (para alguna λ).*

Lema 1.3. *Sean X un espacio, f una red en X y g una subred de f ; entonces se satisfacen las siguientes:*

- Si f converge a p , entonces g converge a p .
- Si p es un punto de acumulación de g , entonces p es un punto de acumulación de f .

2. ESPACIOS κ -FRÉCHET Y κ -RED

En este apartado consideramos la relación entre las propiedades de convergencia y puntos de acumulación de sucesiones, redes y κ -redes.

Teorema 2.1 ([10]). *Sean X un espacio y $p \in X$. Para cualquier ω -red $f : \omega^{<\omega} \rightarrow X$ existe una sucesión $g : \omega \rightarrow X$ que es una subred de f y que satisface lo siguiente:*

- Si $f \rightarrow p$, entonces $g \rightarrow p$;
- Si p es un punto de acumulación de g , entonces p es un punto de acumulación de f .

Demostración. Definimos $\phi : \omega \rightarrow \omega^{<\omega}$ por $\phi(n) = \{0, 1, \dots, n\}$ para cada $n \in \omega$. Entonces $g = f \circ \phi$ es una subred de f . En efecto, sea $F = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \in \omega^{<\omega}$ donde $a_j < a_{j+1}$ si $j \in \{0, \dots, m-1\}$. Obsérvese que $k \geq a_m$ implica que

$$\phi(k) = \{0, 1, \dots, k\} \supseteq \{a_0, a_1, \dots, a_m\}.$$

Las propiedades (1) y (2) son consecuencia de que g es una subred de f . □

Los espacios de Fréchet y secuenciales pertenecen al folklore casi desde los orígenes de la topología general. Sin embargo, tales espacios fueron estudiados por primera vez como los conocemos actualmente a partir de 1965 por Franklin en [8] y [9]. Los espacios de Fréchet y secuenciales son generalizaciones de los espacios primero numerables y han sido objeto de estudio en distintas áreas de las matemáticas. A continuación, veamos que se pueden utilizar ω -redes en el lugar de *sucesiones* en su definición.

- X es de *Fréchet* si y sólo si para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ y para cualquier $x \in \text{cl } A$ existe una ω -red $\langle x_F \rangle \subseteq A$ que converge a x .
- X es *secuencial* si y sólo si para cualquier subconjunto no cerrado $A \subseteq X$ existe una ω -red $\langle x_F \rangle \subseteq A$ que converge a algún $x \in \text{cl } A \setminus A$.

Ahora analizaremos hasta que punto las redes se pueden limitar a κ -redes en una teoría general de convergencia y puntos de acumulación. Sea (D, \leq) un conjunto dirigido; nótese que la relación \leq no es necesariamente antisimétrica y en tal caso, se puede definir la relación de equivalencia \sim en $D \times D$ como sigue:

$$d \sim e \Leftrightarrow d \leq e \text{ y } e \leq d.$$

Entonces $(D/\sim, \preceq)$ definido por $[d] \preceq [e] \Leftrightarrow d \leq e$ es un conjunto dirigido en que \preceq es antisimétrico.

Lema 2.2 ([10]). *Sea $f : (D, <) \rightarrow X$ una red en X ; para cada $[d] \in D/\sim$ escogemos $e_d \in [d]$ y definimos $\phi : D/\sim \rightarrow D$ por $\phi([d]) = e_d$. Entonces, $f \circ \phi$ es una subred de f .*

Demostración. Dado $d_0 \in D$, si $[c] \geq [d_0]$ entonces $\phi([c]) = e_c \geq d_0$. Por tanto, $f \circ \phi$ es una subred de f . \square

Lema 2.3. *Sea $f : (D, \ll) \rightarrow X$ una red en X tal que $|D| = \kappa$ y \ll es antisimétrico. Entonces existe una κ -subred $g : \kappa^{<\omega} \rightarrow X$ de f .*

Lema 2.4 ([10]). (Propiedad de expansión) *Sea X cualquier espacio; si $\varphi : \lambda^{<\omega} \rightarrow X$ es una λ -red en X , entonces para cada $\kappa \geq \lambda$, existe una κ -subred $\psi : \kappa^{<\omega} \rightarrow X$ de φ .*

Como consecuencia de los Lemas 2.2, 2.3 y 2.4, se tiene que para cualquier cardinal infinito κ , las siguientes son equivalentes:

- cada κ -red en X tiene un punto de acumulación;
- cada λ -red en X con $\lambda \leq \kappa$ tiene un punto de acumulación;
- cada red $\langle x_d : d \in D \rangle$ en X con $|D| \leq \kappa$ tiene un punto de acumulación.

Las siguientes definiciones brindan generalizaciones de los conceptos de los espacios de Fréchet y secuenciales. Esto ya fue hecho por Meyer en [16], con redes cuyos conjuntos dirigidos tienen cardinalidad a lo más κ .

Definición 2.1. Un espacio X es κ -Fréchet, si para cada subconjunto $A \subset X$ y para cualquier $x \in \text{cl } A \setminus A$ existe una red de cardinalidad a lo más κ -o equivalentemente, para alguna $\lambda \leq \kappa$ existe una λ -red -en A que converge a x .

Definición 2.2. Un espacio X es κ -red, si para cualquier subconjunto no cerrado $A \subset X$ y para algún $x \in \text{cl } A \setminus A$ existe una red de cardinalidad a lo más κ -o equivalentemente, para alguna $\lambda \leq \kappa$ existe una λ -red -en A que converge a x .

Un ejemplo clásico de un espacio secuencial que no es de Fréchet, es *el espacio de Arens-Franklin*. Una generalización de tal ejemplo se describe a continuación.

Sea $X = [\kappa \times (\kappa \cup \{\kappa\})] \cup \{p\}$, para cada $\alpha < \kappa$ sean $C_\alpha = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \beta < \kappa\}$ una columna en X y $C'_\alpha = C_\alpha \cup \{(\alpha, \kappa)\}$. La topología en X se describe como sigue:

1. Cada punto (α, β) con $0 \leq \beta < \kappa$ es aislado;

2. $\{C'_\alpha \setminus A : A \subset C_\alpha \text{ y } |A| < \kappa\}$ es una base local para (α, κ) ;
3. La topología de p es la más fina para que $\{(\alpha, \kappa) : \alpha < \kappa\}$ converja a p .

Analizando varios casos, se concluye que X es un espacio κ -red que no es κ -Fréchet.

El conjunto A junto con los límites de todas las redes cuyo rango está en A es llamado la *cerradura κ -red* de A , denotada por $cl^\kappa(A)$.

Hagamos algunas observaciones y recapitemos.

1. Para cada $A \subseteq X$, se tiene que $A \subseteq cl^\kappa(A) \subseteq cl A$.
2. A es κ -red cerrado si y sólo si $cl^\kappa(A) = A$.
3. Un espacio X es κ -red siempre que un conjunto A es cerrado si y sólo si $A = cl^\kappa(A)$.
4. Un espacio X es κ -Fréchet si y sólo si para cada $A \subseteq X$, $cl^\kappa(A) = cl A$.
5. Para todo κ , $\chi(X) \leq \kappa$ implica que X es κ -Fréchet, de manera que, X es un espacio κ -red y, por tanto, $t(X) \leq \kappa$ (ver [11] y [12]).
6. Si X es un espacio λ -Fréchet (respectivamente, un espacio λ -red) y $\lambda \leq \kappa$, entonces X es κ -Fréchet (respectivamente, un espacio κ -red).
7. X es un espacio de Fréchet si y sólo si X es un espacio ω -Fréchet.
8. X es un espacio secuencial si y sólo si X es un espacio ω -red.

3. TIPOS DE COMPACIDAD

En esta sección nos enfocamos a estudiar dos clases de espacios afines a la compacidad, llamados espacios inicialmente κ -compactos y fuertemente κ -compactos.

Para empezar, diremos que un espacio X es compacto si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. En términos de κ -redes, este concepto equivale a decir que para toda κ , cualquier κ -red tiene un punto de acumulación. Entre los resultados importantes que se siguen cumpliendo en este contexto, encontramos el Teorema de Tychonoff, que dice que cualquier producto de espacios compactos es compacto.

Un espacio X es *numerablemente compacto* si cualquier cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita. Así cualquier espacio compacto es numerablemente compacto. Dicho esto, un espacio numerablemente compacto se puede generalizar a cardinales superiores a través de la siguiente definición.

Definición 3.1. Un espacio topológico X es *inicialmente κ -compacto* si cualquier cubierta abierta \mathcal{U} de X con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ tiene una subcubierta finita.

Teorema 3.1 ([18]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) *Un espacio X es inicialmente κ -compacto.*
- ii) *Cualquier κ -red (o equivalentemente, cualquier red de cardinalidad κ) tiene un punto de acumulación.*
- iii) *Cada κ -red (o bien, cada red de cardinalidad κ) tiene una λ -subred convergente para algún cardinal λ .*

En la compactación de Stone-Čech de los naturales, $\beta\omega$, λ es necesariamente más grande que ω . Este hecho, motiva la siguiente definición, la cual es un caso especial del concepto de *secuencialmente compacto* (esto es, cualquier sucesión tiene una subsucesión convergente).

Definición 3.2. Un espacio es *fuertemente κ -compacto* si para toda $\lambda \leq \kappa$, cada red de cardinalidad λ tiene una subred convergente de cardinalidad a lo más λ .

Por tanto, por un argumento muy similar al del Teorema 2.4, la red tiene una subred convergente de cardinalidad igual a λ .

Teorema 3.2. *Un espacio es fuertemente κ -compacto si y sólo si para cada $\lambda \leq \kappa$, cualquier λ -red tiene una λ -subred convergente.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 1.2 y de la definición de fuertemente κ -compacto. □

Como cualquier red numerable tiene una subred que es una sucesión, un espacio es fuertemente ω -compacto si y sólo si es secuencialmente compacto.

Lema 3.3 ([14]). *Si X es un espacio inicialmente κ -compacto y $\chi(X) \leq \kappa$, entonces cada red en X de cardinalidad a lo más κ tiene una subred convergente de cardinalidad a lo más κ .*

Un corolario inmediato del lema previo es el conocido resultado de que cada espacio primero numerable y numerablemente compacto es secuencialmente compacto. Sin embargo, si κ es no numerable no se puede concluir del lema previo que X es fuertemente κ -compacto. Un importante contraejemplo es el espacio $\beta\omega$, pues es numerablemente compacto, tiene carácter \mathfrak{c} y no es fuertemente κ -compacto para ninguna κ .

Lema 3.4. *Cualquier subespacio cerrado de un espacio fuertemente κ -compacto es fuertemente κ -compacto.*

Demostración. Sean X fuertemente κ -compacto y Y un subconjunto cerrado de X . Si $\lambda \leq \kappa$ y $f : D \rightarrow Y$ es una red en Y con $|D| = \lambda$, se tiene por hipótesis que existe una subred $f \circ H : E \rightarrow Y$ de f , donde $H : E \rightarrow D$ y $|E| \leq \lambda$, que converge a un punto p . Como Y es cerrado en X , tenemos que $p \in Y$. Por tanto, Y es fuertemente κ -compacto. □

Lema 3.5. *Imágenes continuas de espacios fuertemente κ -compactos son fuertemente κ -compactas.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos, $H : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Para $\lambda \leq \kappa$, sea $g : D \rightarrow H(X)$ una red de cardinalidad λ en Y y definida por $g(d) = y_d$ para cada $d \in D$. Como H es suprayectiva, para cada $d \in D$ existe $x_d \in X$ tal que $H(x_d) = y_d$ y definimos $f : D \rightarrow X$ por $f(d) = x_d$. Por hipótesis, existe una subred $f \circ J : E \rightarrow X$ donde $J : E \rightarrow D$, definida por $f \circ J(d) = x_{J(d)}$ para cada $d \in E$ que converge a un punto $x \in X$. Luego, como H es continua, $(H(x_{J(d)}))_{d \in E}$ converge a $H(x) \in Y$. Por tanto, Y es fuertemente κ -compacto. □

Dados dos espacios X y Y de Hausdorff, una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ se llama pseudoabierta, si para todo $y \in Y$ y U abierto en X tal que $U \supset f^{-1}(y)$ se tiene que $y \in \text{int}[Y]f(U)$.

Lema 3.6. *Sea $H : X \rightarrow Y$ una función pseudoabierta entre espacios topológicos. Si $y \in Y$ y $B \subset Y$ son tales que $y \in \text{cl}[Y]B$, entonces $H^{-1}(y) \cap \text{cl}H^{-1}(B) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos lo contrario; entonces, para el conjunto $U = X \setminus \text{cl}H^{-1}(B)$ tenemos que $U \cap H^{-1}(B) = \emptyset$ y, en consecuencia, $H^{-1}(y) \subset U$. Como H es pseudoabierta, se tiene que $y \in \text{int}[Y](H(U))$. Luego, como $y \in \text{cl}[Y]B$ se sigue que $\text{int}[Y]H(U) \cap B \neq \emptyset$, implica que $H(U) \cap B \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por tanto, $H^{-1}(y) \cap \text{cl}[X]H^{-1}(B) \neq \emptyset$. □

Teorema 3.7. *Si X es un espacio κ -Fréchet y $H : X \rightarrow Y$ una función pseudoabierta, entonces el espacio Y es κ -Fréchet.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y $B \subset Y$ tales que $y \in \text{cl}[Y]B$. Por el Lema 3.6, podemos tomar un punto $x \in H^{-1}(y) \cap \text{cl}H^{-1}(B)$. Considerando que X es κ -Fréchet, existe una red de cardinalidad a lo más κ , $f : D \rightarrow H^{-1}(B)$ definida por $f(d) = x_d$ para

cada $d \in D$ en $H^{-1}(B)$, que converge a x . Luego, por la continuidad de H , se tiene que $(H(x_d))_{d \in D} \subset B$ converge a $H(x) = y$. Por tanto, Y es κ -Fréchet. \square

Definición 3.3. Un espacio X es C_κ -cerrado si cualquier subconjunto fuertemente κ -compacto de X es cerrado.

Proposición 3.8. Si X es fuertemente κ -compacto y C_κ -cerrado, entonces X es un espacio κ -red.

Demostración. Sea A un subconjunto no cerrado de X . Por hipótesis, A no es fuertemente κ -compacto, así que existe una red f en A de cardinalidad $\lambda \leq \kappa$ que no tiene subredes convergentes de cardinalidad a lo más λ . Como un cerrado en un fuertemente κ -compacto es fuertemente κ -compacto, $\text{cl } A$ es fuertemente κ -compacto. De manera que, existe una subred g de f de cardinalidad a lo más λ que converge a algún $x \in \text{cl } A \setminus A$, esto se debe a que f no tiene subredes convergentes de cardinalidad a lo más λ en A . Por tanto, X es un espacio κ -red. \square

Un espacio X es de *Whyburn* siempre que para cualquier conjunto no cerrado $A \subseteq X$ y para todo $x \in \text{cl } A \setminus A$ existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\text{cl } B \setminus A = \{x\}$.

Proposición 3.9. Si X es un espacio de Hausdorff, Whyburn e inicialmente κ -compacto y cualquier subconjunto inicialmente κ -compacto de X es cerrado, entonces X es un espacio κ -Fréchet.

Demostración. Sea $A \subset X$ y $x \in \text{cl } A \setminus A$. Como X es de Whyburn, existe $B \subset A$ tal que $\text{cl } B \setminus A = \{x\}$. Luego, $C = \text{cl } B \setminus \{x\}$ no es cerrado y, por tanto, no es inicialmente κ -compacto. Entonces existe una red $f : D \rightarrow C$ de cardinalidad a lo más κ en C que no tiene puntos de acumulación en C . Como X es inicialmente κ -compacto, $\text{cl } B$ es inicialmente κ -compacto, por ser cerrado en X . Así que la red f tiene un punto de acumulación en $\text{cl } B$. En consecuencia, x es el único punto de acumulación de f en $\text{cl } B$.

Ahora, sólo falta corroborar que f converge a x . Supongamos lo contrario. Entonces existe una vecindad abierta V de x en X tal que f no está eventualmente en V . Obsérvese que $\text{cl } B \setminus V$ es inicialmente κ -compacto, por ser cerrado en $\text{cl } B$. Así que existe una λ -subred convergente g de f tal que $\text{Im}(g) \subset \text{cl } B \setminus V$. Luego, x no es punto de acumulación de g . Puesto que g es una λ -subred de f y x es el único punto de acumulación de f en $\text{cl } B$, se sigue que g no tiene puntos de acumulación en $\text{cl } B$. Esto contradice la definición de g y por lo tanto, X es κ -Fréchet. \square

En lo sucesivo, las funciones $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ representarán las proyecciones naturales sobre X y Y , respectivamente.

Teorema 3.10. El producto finito de espacios fuertemente κ -compactos es fuertemente κ -compacto.

Demostración. Supongamos que X y Y son espacios fuertemente κ -compactos. Sea $f : \lambda^{<\omega} \rightarrow X \times Y$ una λ -red en $X \times Y$ para alguna $\lambda \leq \kappa$, definida por $f(F) = \{(x_F, y_F)\}_{F \in \lambda^{<\omega}}$, entonces $\pi_X \circ f$ es una λ -red en X , que tiene por hipótesis, una λ -subred $\pi_X \circ f \circ \psi : \lambda^{<\omega} \rightarrow X$ que converge a un punto $x \in X$, donde ψ es un mapeo λ -red.

Para cada $F \in \lambda^{<\omega}$ sea $(\pi_X \circ f \circ \psi)(F) = x_{\psi(F)}$ y elegimos $y_{\psi(F)} \in Y$. Puesto que Y es fuertemente κ -compacto, la λ -subred $(y_{\psi(F)})_{F \in \lambda^{<\omega}}$ de $(y_F)_{F \in \lambda^{<\omega}}$ tiene una λ -subred $(y_{\psi \circ \phi(F)})_{F \in \lambda^{<\omega}}$ que converge a un punto $y \in Y$. Luego, la λ -red $\xi : \lambda^{<\omega} \rightarrow X \times Y$ definida por $\xi(G) = (x_{\psi \circ \phi(G)}, y_{\psi \circ \phi(G)})$ es una λ -subred de f que converge a (x, y) . \square

El teorema anterior se puede mejorar con estrategias más elaboradas, a saber:

Teorema 3.11 ([14]). El producto numerable de espacios fuertemente κ -compactos es fuertemente κ -compacto.

Teorema 3.12 ([14]). *Si Y es un espacio inicialmente κ -compacto y X es fuertemente κ -compacto, entonces $X \times Y$ es inicialmente κ -compacto.*

Demostración. Supongamos que $f : D \rightarrow X \times Y$ es una red de cardinalidad $\lambda \leq \kappa$ en $X \times Y$. Como X es fuertemente κ -compacto, existe una subred $\pi_X \circ f \circ \phi : E \rightarrow X$ de $\pi_X \circ f$, donde $|E| \leq \lambda$ que converge, digamos a $x \in X$. Como Y es inicialmente κ -compacto, la subred correspondiente $\pi_Y \circ f \circ \phi : E \rightarrow Y$ (de cardinalidad a lo más κ) de $\pi_Y \circ f$ tiene un punto de acumulación $y \in Y$. Puesto que x y y son puntos de acumulación de sus respectivas coordenadas, se puede concluir que el punto (x, y) es un punto de acumulación de la red f . Por tanto, $X \times Y$ es inicialmente κ -compacto. \square

Definición 3.4. Un espacio X es *localmente fuertemente κ -compacto* si cada punto tiene una vecindad cerrada que es fuertemente κ -compacta.

En un espacio T_3 que es localmente fuertemente κ -compacto, cada punto tiene una base local de vecindades cerradas que son fuertemente κ -compactas. Además, en un espacio κ -red, un subespacio inicialmente κ -compacto, es necesariamente cerrado.

El producto de un abanico de Fréchet y una sucesión convergente no es de Fréchet y, por tanto, el producto de dos espacios ω -Fréchet donde uno de ellos es compacto y secuencialmente compacto no necesariamente es ω -Fréchet. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.13 ([14]). *El producto de un espacio κ -red X con un espacio κ -red, T_3 y localmente fuertemente κ -compacto Y , es un espacio κ -red.*

Como corolarios se obtienen dos resultados de Boehme (ver [5]). El primero de ellos dice que, el producto de espacios secuenciales, donde uno de ellos es localmente secuencialmente compacto, es secuencial. El segundo afirma que el producto de espacios secuenciales, donde uno de ellos es localmente numerablemente compacto, es secuencial.

Problema abierto 1. ¿La condición de ser localmente fuertemente κ -compacto puede ser reemplazado por localmente compacto en el Teorema 3.13?

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría expresar mi gratitud al profesor Richard G. Wilson por sus valiosos consejos en este trabajo. También estoy muy agradecida con el árbitro por sus numerosas sugerencias y correcciones que han contribuido a la versión final de este artículo.

REFERENCIAS

- [1] A.V. Arhangel'skii, *Frequency spectrum of a topological space and classification of spaces* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 206 (1972), 265–268.
- [2] J.W. Baker, *Ordinal subspaces of topological spaces*, General Topology Appl., 3 (1973), 85–91.
- [3] A. Bella, *On spaces with the property of weak approximation by points*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 35 (1994), no. 2, 357–360.
- [4] G. Birkhoff, *Moore-Smith convergence in general topology*, The Annals of Mathematics, 38, No. 1 (1937), 39–56.
- [5] T.K. Boehme, *Linear s -spaces*, Symposium on Convergence Structures, University of Oklahoma, Norman 1965.
- [6] H. Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 205 (1937), 777–779.
- [7] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [8] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math. 57 (1965), 107–115.
- [9] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice II*, Fund. Math. 61 (1967), 51–56.
- [10] R.E. Hodel, *A theory of convergence and cluster points based on κ -nets*, Topology Proceedings 35 (2010), 291–330.
- [11] R. Hodel, *Cardinal Functions I*, Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. por K. Kunen y J.E. Vaughan, North Holland P.C., Amsterdam, 1–61.
- [12] I. Juhász, *Cardinal functions in topology -Ten years later*, Math. Centre Tracts 123, Amsterdam 1980.

- [13] J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand (1955).
- [14] M. Madriz-Mendoza and R.G. Wilson, *Topological Properties defined by nets*, por aparecer en *Topology and Its Applications*.
- [15] P.R. Meyer, *Sequential properties of ordered topological spaces*, *Compositio Mathematicae* 21 (1969), 102–106.
- [16] P.R. Meyer, *Sequential space methods in general topological spaces*, *Colloquium Mathematicum*, 22 (1971), 223–228.
- [17] E.H. Moore and H.L. Smith, *A general theory of limits*, *Amer. J. Math.* 44 (1922), 102–121.
- [18] R.M. Jr., Stephenson, *Initially κ -compact and related spaces*, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, eds. K. Kunen, J. E. Vaughan, North Holland P. C., Amsterdam, 1984, 603–632.
- [19] J.W. Tukey, *Convergence and Uniformity in Topology*, *Annals of Mathematics Studies*, Princeton (1940).

Dirección de la autora:

Maira Madriz Mendoza

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina

Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.

e-mail: `seber@xanum.uam.mx`



CONTROL DE SISTEMAS CUÁNTICOS

MARCO ANTONIO CRUZ DE LA ROSA

RESUMEN. Revisamos algunas nociones de controlabilidad para sistemas cuánticos cerrados de dimensión finita y discutimos condiciones necesarias y suficientes para su controlabilidad completa en términos del grupo de Lie del sistema. Formulamos la ecuación de control dinámico para sistemas cuánticos abiertos y damos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de su solución. Desarrollamos dos ejemplos que ilustran los conceptos estudiados.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la primera realización del láser en 1960, los físicos, químicos e ingenieros vislumbraron la posibilidad de usarlo para controlar sistemas cuánticos. Desde el punto de vista tecnológico, en las últimas tres décadas los progresos en esta dirección han sido notables en físico química [24, 26, 30, 6], física atómica y molecular [3], y óptica cuántica [36, 32], véanse también las referencias [8, 21]. Pero los avances tecnológicos no son suficientes. En los años recientes se ha reconocido que el desarrollo de los principios matemáticos generales de una teoría de control de sistemas cuánticos es un requisito esencial para futuras aplicaciones de las tecnologías cuánticas, véase [23]. Esto ha motivado que muchos físicos, químicos, matemáticos e ingenieros se interesen por desarrollar una teoría de control de sistemas cuánticos que resuelva, entre otras, dos preguntas fundamentales.

- **Controlabilidad.** Dado un cierto sistema cuántico: ¿es posible alcanzar el objetivo de control?
- En caso de que el sistema sea controlable: encontrar la manera óptima de alcanzar el objetivo de control.

Esta información teórica es crucial, contribuye al conocimiento del proceso de control y puede ayudar a determinar parámetros experimentales importantes para el diseño de los controles.

El objetivo general de un proceso de control consiste en aplicar una acción externa al sistema para alcanzar el objetivo de control, [5, 11, 26, 30, 35]. En el caso de sistemas cuánticos, tal acción externa se puede realizar mediante un *control coherente*, por ejemplo, un campo de luz que permita controlar la dinámica unitaria de un sistema cerrado, ver [1, 8, 28]. En el caso de sistemas cuánticos abiertos, tal acción externa se puede realizar confeccionando adecuadamente el entorno del sistema para inducir un *control incoherente*, de la dinámica no-unitaria (disipativa) del sistema, [1, 37, 27, 9].

El control coherente se aplica a sistemas cuánticos aislados, que no interactúan con su entorno y cuya dinámica se describe mediante transformaciones unitarias. No obstante, en la práctica todos los sistemas cuánticos son abiertos e interactúan con su entorno, de tal manera que su dinámica es disipativa.

En la Sección 2 se plantea el problema de control para sistemas cerrados y se dan condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de control. En la Sección 3 se revisan varias nociones de controlabilidad de sistemas cuánticos cerrados y, en dimensión finita, se describen condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad completa en términos del grupo de Lie del sistema,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 81Q93, 93B05.

Palabras clave. Control cuántico, Controlabilidad.

siguiendo las referencias [2, 28, 29]. Para el caso de dimensión infinita el lector interesado puede consultar las referencias [12, 17]. A la fecha no existe una solución del correspondiente problema de control para sistemas abiertos. En esta dirección, en la Sección 4 revisamos un resultado sobre la controlabilidad cinemática, formulamos el problema de control dinámico y damos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución para la ecuación de control, que en este caso es una ecuación de Lindblad con coeficientes dependientes del tiempo.

La literatura en el tema es muy extensa, nuestro propósito principal es revisar y discutir sólo algunos aspectos del problema de controlabilidad de sistemas cuánticos, mediante una estrategia de lazo abierto (open-loop control), desarrollada con el rigor matemático necesario. En particular hacemos notar que las ecuaciones de control (8) y (28) tienen Hamiltoniano o generador de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan dependientes del tiempo, este es un aspecto que se pasa por alto en varias de las referencias que revisamos. Otras técnicas de control como aquellas de lazo cerrado (closed-loop control), así como control estocástico y filtraje, quedan fuera de este trabajo, el lector interesado puede consultar la referencia [8].

Para la lectura de este artículo es conveniente que el lector conozca (o revise) los conceptos de operador continuo, compacto y de traza finita en un espacio de Hilbert; así como las definiciones de álgebra de Lie, grupo de Lie y tenga conocimientos básicos de teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS CERRADOS

2.1. Estados.

Definición 2.1. Un *estado* ρ es un operador positivo de traza uno, actuando sobre un espacio de Hilbert complejo y separable \mathcal{H} .

Como ρ es autoadjunto y compacto, por el teorema espectral, existe una base ortonormal $(\psi_n)_{n \geq 1}$ de \mathcal{H} , algunas veces llamada *la base de ρ* , que lo diagonaliza, i.e., tal que

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|,$$

donde $\sigma(\rho) = \{\rho_n : n \geq 1\}$ es el espectro (valores propios) de ρ y $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ es el operador de rango 1 definido mediante $|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\varphi = \langle\psi_n, \varphi\rangle\psi_n$, $\varphi \in \mathcal{H}$.

Definición 2.2. Dos estados ρ_0 , ρ_1 son *cinemáticamente equivalentes* si existe un operador unitario U tal que

$$(1) \quad \rho_1 = U\rho_0U^*.$$

El siguiente resultado caracteriza a la clase de estados cinemáticamente equivalentes, véase [4].

Teorema 2.1. Dos estados ρ_0 y ρ_1 son *cinemáticamente equivalentes* si y sólo si tienen el mismo espectro: $\sigma(\rho_0) = \sigma(\rho_1)$.

La evolución de un sistema cuántico cerrado se describe mediante un operador unitario. Si ρ_s y ρ_t son estados del sistema en los tiempos $s \leq t$, existe un operador unitario $U(t, s)$, tal que

$$(2) \quad \rho_t = U(t, s)\rho_sU(t, s)^*.$$

En general, la familia de operadores unitarios $(U(t, s))_{s \leq t}$ tiene la propiedad de sistema de evolución

$$(3) \quad U(t, r)U(r, s) = U(t, s), \quad s \leq r \leq t.$$

En el caso cuando $U(t, s)$ depende sólo de $\tau = t - s$ la familia de operadores unitarios $(U(\tau))_{\tau \geq 0}$ forman un semigrupo.

Si la familia $(U(\tau))_{\tau \geq 0}$ es un grupo unitario uniformemente continuo, su generador infinitesimal es un operador sesquiadjunto A que se puede escribir como $A = iH$, donde H es un operador autoadjunto que se llama Hamiltoniano del sistema. En este caso $(U(\tau))_{\tau \geq 0}$ satisface la ecuación de Schrödinger,

$$(4) \quad \begin{aligned} i\hbar \frac{dU(\tau)}{d\tau} &= HU(\tau), \\ U(0) &= I. \end{aligned}$$

En el caso general, cuando el Hamiltoniano H no es constante en t , la ecuación de Schrödinger toma la forma,

$$(5) \quad \begin{aligned} i\hbar \frac{dU(t, s)}{dt} &= H(t)U(t, s), \\ U(s, s) &= I, \quad s \leq t. \end{aligned}$$

Definición 2.3. Un sistema cerrado es *dinámicamente controlable* en un subconjunto \mathcal{S} de estados si para cualquier par de estados $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$ existe un tiempo finito T y un conjunto de controles $\{c_1(t), \dots, c_k(t)\} \subset \mathcal{C}$, tales que la solución $U(t, 0)$ de la ecuación de Schrödinger (5), con Hamiltoniano dependiente de los controles

$$(6) \quad H(t) = H(c_1(t), \dots, c_k(t)),$$

transforma ρ_1 en ρ_2 , i.e.,

$$\rho_2 = U(T, 0)\rho_1 U(T, 0)^*.$$

En la literatura es usual que se considere la ecuación de control coherente (5) con Hamiltoniano dado por

$$(7) \quad H(t) = H_0 + \sum_{j=1}^n c_j(t)H_j.$$

En este caso $(U(\tau))_{\tau \geq 0}$ satisface la ecuación de Schrödinger,

$$(8) \quad \begin{aligned} i\hbar \frac{dU(t, 0)}{dt} &= \left(H_0 + \sum_{j=1}^n c_j(t)H_j \right) U(t, 0), \\ U(0, 0) &= I, \end{aligned}$$

donde los controles c_j pertenecen a alguna de las siguientes clases:

- (i) $\mathcal{C} = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : \text{localmente acotadas y continuas}\}$.
- (ii) $\mathcal{C}_b = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : \text{constante a trozos con } \text{Ranf} = \{1, -1\}\}$. Controles “bang-bang”.

La existencia y unicidad locales, es decir en intervalos finitos $[0, T]$, $0 < T < \infty$, de la solución de la ecuación de control coherente (8), se obtiene a partir del siguiente teorema que es una consecuencia del Teorema 5.3 de [7], véase también [4].

Teorema 2.2. *Sea H una función definida sobre $[0, T]$, $T > 0$, tal que*

- i) Para cada $t \in [0, T]$, $H(t)$ es un operador autoadjunto acotado sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} .*
- iii) La función $H(t)\varphi$ de $[0, T]$ en \mathcal{H} es continua en t para cada $\varphi \in \mathcal{H}$.*

Entonces existe una única función con valores en los operadores acotados sobre \mathcal{H} , $U(t, s)$ para cada $t, s \in [0, T]$, $s \leq t$ tal que

- a) $U(t, s)$ es un operador unitario y $U(s, s) = I$,*
- b) $U(t, s)$ es fuertemente continuo en cada variable, esto es, para cada $\varphi \in \mathcal{H}$ la función $U(t, s)\varphi$ de $\Delta = \{(t, s) : s \leq t, s, t \in [0, T]\}$ en \mathcal{H} es continua,*
- c) $U(t, s) = U(t, r)U(r, s)$ para $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$,*

d)

$$(9) \quad \frac{d}{dt}U(t, s) = -iH(t)U(t, s)$$

La derivada es en la topología de la norma.

Explícitamente, para cada $\varphi \in \mathcal{H}$ y $s \leq t$,

$$(10) \quad U(t, s) = \lim_{\|P_m\| \rightarrow 0} U_m(t, s);$$

donde $P_m = \{0 = r_1 < r_2 < \dots < r_m = T\}$ es una partición del intervalo $[0, T]$, $\|P_m\| = \max\{\Delta r_k = r_k - r_{k-1} : 1 \leq k \leq m\}$ es la norma de la partición,

$$U_m(t, s) = e^{-iH(t)(t-r_k)} e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})} \dots e^{-iH(r_1)(r_1-s)},$$

con $t \in [r_k, r_{k+1}]$ y $s \in [r_{l-1}, r_l]$ y el límite es en la norma de operadores.

3. EL ÁLGEBRA DE LIE DE UN SISTEMA DE CONTROL

Denotaremos con \mathbf{L} al *álgebra de Lie del sistema cuántico cerrado gobernado por la ecuación (8)* (o simplemente *álgebra de Lie del sistema*), este es el espacio vectorial generado por los operadores autoadjuntos H_0, \dots, H_n provisto del producto de Lie definido por el conmutador; en particular, los conmutadores $[H_i, H_j]$ son combinaciones lineales de los H'_k 's, i.e., existen constantes $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$, llamadas constantes de estructura, tales que

$$(11) \quad [H_i, H_j] = \sum_{k=0}^n c_{ij}^k H_k, \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

Y llamaremos *grupo de Lie del sistema* al grupo de Lie conexo \mathbf{S} asociado con esta álgebra, este es un subgrupo cerrado de Lie de $U(n)$, el grupo de las matrices complejas unitarias de $n \times n$, véase el apéndice de [4]. El siguiente teorema nos asegura que la solución 8 vive en el grupo de Lie del sistema, para su demostración usamos la fórmula de Zassenhaus, cuya convergencia fue establecida por Susuki en [31].

Teorema 3.1. *Supóngase que las funciones de control son localmente acotadas y continuas, i.e., cada $c_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$. Entonces para cada $t \in [0, T]$, $T > 0$, la solución $U(t)$ de la ecuación de control coherente (8) pertenece al grupo cerrado de Lie \mathbf{S} correspondiente al álgebra de Lie \mathbf{L} del sistema.*

Demostración. La continuidad de los controles asegura que se cumplen las hipótesis del Teorema (2.2). Tomando en cuenta la forma explícita de $U_m(t, s)$ en (10) y que \mathbf{S} es cerrado en la topología de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ inducida por la norma de operadores, bastará demostrar que para cada k el factor $e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})}$ pertenece a \mathbf{S} . Consideraremos primero el caso cuando $H(t) = c_1(t)H_1 + c_2(t)H_2$ y aplicaremos la fórmula de Zassenhaus, véase [31]. Para cada k tomemos

$$\lambda_k = \Delta r_k = (r_k - r_{k-1}), \quad A_k = -ic_1(r_k)H_1 \quad \text{y} \quad B_k = -ic_2(r_k)H_2.$$

Entonces tenemos que

$$(12) \quad \begin{aligned} |\lambda_k|(\|A_k\| + \|B_k\|) &= |\Delta r_k|(|c_1(r_k)|\|H_1\| + |c_2(r_k)|\|H_2\|) \leq \\ |\Delta r_k| \left(\max_{1 \leq j \leq 2} \sup_{t \in [0, T]} |c_j(t)| \right) (\|H_1\| + \|H_2\|) &< \log(2) - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

si la norma de la partición $\|P_m\| = \max_{1 \leq k \leq m} |\Delta r_k|$ satisface

$$(13) \quad \|P_m\| \leq \frac{\log 2 - \frac{1}{2}}{\left(\max_{1 \leq j \leq 2} \sup_{t \in [0, T]} |c_j(t)| \right) (\|H_1\| + \|H_2\|)}.$$

Entonces, bajo la condición (13), para cada k fija se satisface la hipótesis del Teorema 1 de [31] y podemos concluir que

$$(14) \quad e^{\lambda_k(A_k+B_k)} = \lim_{l \rightarrow \infty} e^{\lambda_k A_k} e^{\lambda_k B_k} e^{\lambda_k^2 C_{k,2}} \dots e^{\lambda_k^l C_{k,l}}.$$

El límite es en la norma de operadores y la sucesión $(C_{k,l})_{l \geq 1}$ se define recursivamente de la siguiente manera:

$$(15) \quad \begin{aligned} C_{k,2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial^2 \lambda_k} (e^{-\lambda_k A_k} e^{-\lambda_k B_k} e^{\lambda_k(A_k+B_k)}) \right]_{\lambda_k=0} = \frac{1}{2} [B_k, A_k], \\ C_{k,3} &= \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3}{\partial^3 \lambda_k} (e^{-\lambda_k^2 C_{k,2}} e^{-\lambda_k A_k} e^{-\lambda_k B_k} e^{\lambda_k(A_k+B_k)}) \right]_{\lambda_k=0} \\ &= \frac{1}{3!} [C_{k,2}, A_k + 2B_k], \end{aligned}$$

y en general

$$C_{k,l} = \frac{1}{l!} \left[\frac{\partial^l}{\partial^l \lambda_k} (e^{-\lambda_k^{l-1} C_{k,l-1}} \dots e^{-\lambda_k C_{k,2}} e^{-\lambda_k A_k} e^{-\lambda_k B_k} e^{\lambda_k(A_k+B_k)}) \right]_{\lambda_k=0}.$$

Cada factor en (14) pertenece al grupo de Lie \mathbf{S} del sistema pues es la exponencial de un conmutador en el álgebra \mathbf{L} . Entonces para cada k el elemento $e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})} = e^{\lambda_k(A_k+B_k)}$ pertenece al grupo \mathbf{S} .

Para el caso general cuando $H(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)H_j$ aplicamos inducción sobre n . Suponiendo que $e^{-iH(r_k)(r_k-r_{k-1})} \in \mathbf{S}$ con $H(t) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t)H_j$, tómesese λ_k como antes, $A_k = -i \sum_{j=1}^{n-1} c_j(r_k)H_j$, $B_k = -ic_n(r_k)H_n$. Entonces tenemos que (14) se cumple si la norma de la partición $\|\mathcal{P}_m\| = \max_{1 \leq k \leq m} |\Delta r_k|$ satisface

$$\|\mathcal{P}_m\| \leq \frac{\log 2 - \frac{1}{2}}{\left(\max_{1 \leq j \leq n} \sup_{t \in [0, T]} |c_j(t)| \right) (\|H_1\| + \dots + \|H_n\|)}.$$

Esto demuestra que cada factor en (10) pertenece al grupo de Lie \mathbf{S} del sistema y con esto se termina la demostración del teorema. \square

3.1. Tipos de controlabilidad.

Definición 3.1. Un sistema es *completamente controlable* si cualquier operador unitario U es accesible desde la identidad. Esto es, si existen $T > 0$, un conjunto de funciones de control $\{c_1(t), \dots, c_n(t)\}$ definidas para $0 \leq t \leq T$ y la trayectoria $U(t, 0)$ satisfaciendo la ecuación de Schrödinger (8) con condiciones $U(0, 0) = I$, $U(T, 0) = U$.

Definición 3.2. Un sistema es *controlable en los estados* si para cualquier estado inicial ρ_0 , los estados cinemáticamente equivalentes con ρ_0 pueden ser alcanzados en algún tiempo $T > 0$. Es decir, si dado cualquier estado ρ_1 cinemáticamente equivalente con ρ_0 , existen $T > 0$, un conjunto de controles en \mathcal{C} , $\{c_1(t), \dots, c_n(t)\}$ definidos $0 \leq t \leq T$ y un sistema de evolución $U(t, 0)$ satisfaciendo la ecuación (8) tales que

$$U(0, 0) = I, \quad \rho_1 = U(T, 0)\rho_0 U(T, 0)^*.$$

Proposición 3.2. *Un sistema es controlable en los estados si es completamente controlable.*

Demostración. Si ρ_0, ρ_1 son dos estados cinemáticamente equivalentes, i.e., existe un operador unitario U tal que

$$\rho_1 = U\rho_0 U^*,$$

y el sistema es completamente controlable, entonces existen un tiempo $T > 0$, un conjunto de controles $\{c_1(t), \dots, c_n(t)\} \subset \mathcal{C}$ y una solución $U(t, 0)$ de la ecuación (8) tal que $U(T, 0) = U$. Consecuentemente,

$$\rho_1 = U(T, 0)\rho_0U(T, 0)^*,$$

es decir el sistema es controlable en los estados. \square

El recíproco del resultado anterior también es cierto, pero su demostración requiere resultados de álgebras y grupos de Lie cuya revisión queda fuera del propósito de este trabajo, véase [2].

3.2. Controlabilidad en grupos de Lie. Tomando en cuenta el resultado del Teorema 3.1 podemos situarnos en un contexto abstracto y plantear nuestro problema como un problema de control en un grupo de Lie G . En nuestro caso, si $\dim \mathcal{H} = N < \infty$, $G = U(N)$ es el grupo de Lie de las matrices complejas unitarias $N \times N$. En esta parte seguiremos la exposición de la referencia [18]. Hemos desarrollado con mayor detalle algunas partes de las demostraciones, con la intención de facilitar su lectura.

Si \mathbf{H} es una $n + 1$ -upla de elementos del álgebra de Lie de G , que denotaremos por $L(G)$, $\mathbf{H} = (H_0, \dots, H_n)$ y \mathcal{C} la clase de controles admisibles, entonces denotaremos por $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ al sistema de control

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= X_{-iH_0}(u(t)) + \sum_{j=1}^n c_j(t)X_{-iH_j}(u(t)) \\ u(0) &= e, \end{aligned}$$

donde $X_{-iH_j}(u(t))$ denota el campo vectorial invariante a la derecha asociado con el elemento $-iH_j \in L(G)$. Para una descripción de esta correspondencia véase [4]. La acción de X_{-iH_j} sobre los elementos $u(t) \in U(N)$ está dada por

$$X_{-iH_j}(u(t)) = -iH_j u(t).$$

Entonces el sistema de control $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ coincide con el sistema de control (8).

Si $u \in \mathcal{C}^n$ y $g \in G$, denotaremos a la solución U de (8) que satisface $U(0) = g$ mediante $\pi(g, u, \cdot)$, i.e.

$$U(t) = \pi(g, u, t), \quad t \in [0, \infty).$$

Lema 3.3. Sean $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre G y $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}^n$, entonces para cada $g \in G$ existe una única solución U de (8) definida para $0 \leq t < \infty$ tal que $U(0) = g$.

Demostración. Para demostrar la existencia local, basta tomar $U(t, 0) = V(t, 0)g$, donde $V(t, s)$ es la solución de la ecuación (8) dada por el Teorema 2.2. Sea $[0, T)$ un intervalo máximo donde existe una solución $U(t)$ con $U(0) = g$. Demostraremos que $T = \infty$. Supóngase $T < \infty$ y tómesese una solución $V(t)$ definida en $T - \delta < t < T + \delta$, con $\delta > 0$ y tal que $V(T) = e$. Sean $g' = V(T - \frac{1}{2}\delta)$, $g'' = U(T - \frac{1}{2}\delta)$. Defínase $W(t)$ como

$$W(t) = \begin{cases} U(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T - \frac{1}{2}\delta, \\ V(t)(g')^{-1}g'' & \text{si } T - \frac{1}{2}\delta < t \leq T + \delta. \end{cases}$$

Entonces $W(t)$ es una solución de (8) que satisface $W(0) = g$ y está definida para $0 \leq t < T + \delta$. Esto contradice la maximalidad de $[0, T)$ y por lo tanto $T = \infty$. \square

Si para algún $t \geq 0$, $\pi(g, u, t) = g'$, decimos que el control u manda g en g' en t unidades de tiempo. Si existe $u \in \mathcal{C}^n$ que manda g en g' en t unidades de tiempo, decimos que g' es accesible desde g al tiempo t .

Al conjunto de todos los $g' \in G$ que son accesibles desde g al tiempo t , lo denotamos por $A(g, t)$, además definimos

$$\mathbb{A}(g, T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} A(g, t) \quad \text{y} \quad \mathbb{A}(g) = \bigcup_{0 \leq t \leq \infty} A(g, t).$$

$\mathbb{A}(g)$ es el conjunto accesible desde g .

Al sistema de control $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ sobre un grupo de Lie G le asociamos las siguientes subálgebras

- (i) La subálgebra \mathbf{L} generada por los elementos $\langle H_0, \dots, H_m \rangle$.
- (ii) La subálgebra L de $L(G)$ generada por $\langle H_1, \dots, H_m \rangle$

Denotaremos los correspondientes subgrupos de Lie conexos por \mathbf{S} y S .

Lema 3.4. *Si $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ es un sistema de control sobre G , entonces $\mathbb{A}(e)$ está contenido en \mathbf{S} .*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 3.1 y del Lema 3.3. □

Enseguida obtendremos algunas propiedades topológicas elementales de los conjuntos alcanzables, cuyas demostraciones se encuentran en [4], véase también [18]. Si $T \geq 0$ denotaremos por $\mathcal{C}(T)$ al conjunto de las restricciones de todos los elementos de \mathcal{C} al intervalo $[0, T]$.

Lema 3.5. *Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre G , entonces para cada $T > 0$, $\mathbb{A}(e, T)$ está contenido en \mathbf{S} , $\text{int}\mathbb{A}(e, T)$ es denso en $\mathbb{A}(e, T)$, en la topología de \mathbf{S} .*

En particular se sigue del lema anterior que el interior de $\mathbb{A}(e)$ en \mathbf{S} es no vacío.

Lema 3.6. *Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre G , entonces el conjunto $\mathbb{A}(e)$ es un semigrupo.*

Demostración. Sean $g, g' \in \mathbb{A}(e)$, para ciertos controles u, u' y $t, t' \geq 0$, se tiene $g = \pi(e, u, t)$, $g' = \pi(e, u', t')$, definamos el control v como

$$v(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & 0 \leq \tau \leq t, \\ u'(\tau - t) & \tau > t. \end{cases}$$

Para $0 \leq \tau \leq t$ tenemos que $\pi(e, v, \tau) = \pi(e, u, \tau)$ y para $\tau > t$ tenemos que

$$(17) \quad \pi(e, v, \tau) = U(\tau, 0) = U(\tau, t)U(t, 0) = U(\tau, t)g,$$

donde $U(\tau, 0)$ es la solución de (8) con función de control v . Ahora bien, tenemos que $U(t, t) = e = \pi(e, u', 0)$ así que por la unicidad, para $\tau > t$ tenemos que $U(\tau, t) = \pi(e, u', \tau - t)$. Consecuentemente de (17) se obtiene que para $\tau > t$,

$$\pi(e, v, \tau) = \pi(e, u', \tau - t)g.$$

Entonces

$$\pi(e, v, t + t') = \pi(e, u', t')g = g'g.$$

Por lo tanto $g'g \in \mathbb{A}(e)$. □

Lema 3.7. *Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre G . Entonces los subconjuntos*

$$\mathbb{A}(e, T), \mathbb{A}(e), A(e, T),$$

son arco conexos para cada $T \geq 0$.

Necesitaremos el siguiente teorema general sobre grupos de Lie que se encuentra en [19], p. 275.

Teorema 3.8. *Sea G un grupo de Lie y sea H un subgrupo arco conexo de G . Entonces H es un subgrupo de Lie de G .*

Teorema 3.9. *Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre G . Si $\mathbb{A}(e)$ es un subgrupo de G , entonces $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$.*

Demostración. Como $\mathbb{A}(e)$ es arco conexo y por hipótesis es un subgrupo, entonces por el Teorema 3.8 se sigue que es un subgrupo de Lie de G . Sea Λ su álgebra de Lie. Entonces $\Lambda \subset \mathbf{L}$, pues $\mathbb{A}(e) \subset \mathbf{S}$ por el Lema 3.4. Por otra parte, sea $u = (a_1, \dots, a_n) \in \{-1, 1\}^n$ un control constante. Tenemos que $u \in \mathcal{C}$ y, consecuentemente, la trayectoria $t \rightarrow \pi(e, u, t)$, $0 \leq t \leq \infty$ está contenida en $\mathbb{A}(e)$. En otras palabras, la solución $U(t, 0)$ de la ecuación (8) pertenece a $\mathbb{A}(e)$ para toda $t \geq 0$. Como $\mathbb{A}(e)$ es un subgrupo, esto vale para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces por un resultado de [16], p. 94, podemos concluir que $H_0 + \sum_{j=1}^m a_j H_j \in \Lambda$. Como los elementos $\{H_0, \dots, H_m\}$ generan \mathbf{L} , concluimos que $\mathbf{L} \subset \Lambda$, consecuentemente, $\mathbf{L} = \Lambda$ y $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$. \square

Lema 3.10. *Sea $(\mathbf{X}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre G . Si el conjunto accesible desde la identidad es denso en \mathbf{S} , entonces $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$.*

Demostración. Sea $g \in \mathbf{S}$ en el interior de $\mathbb{A}(e)$ relativo a \mathbf{S} . Sea $V \subset \mathbb{A}(e)$ un abierto relativo en \mathbf{S} que contiene a g . Definimos el conjunto

$$W = \{h^{-1} : h \in V\}.$$

Entonces, $W \neq \emptyset$ y es un abierto relativo de \mathbf{S} . Por la hipótesis existe $h \in W \cap \mathbb{A}(e)$, entonces el conjunto $Vh = \{gh : g \in V\}$ es abierto relativo a \mathbf{S} , $Vh \subset \mathbb{A}(e)$, pues $\mathbb{A}(e)$ es semigrupo y además $e \in Vh$. Entonces $\mathbb{A}(e)$ contiene una vecindad de la identidad en \mathbf{S} . Afirmamos que $\mathbf{S} = \mathbb{A}(e)$. Sean $k \in \mathbf{S}$ y $(k_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{A}(e)$ tal que $k_n \rightarrow k$, entonces $k_n^{-1}k \rightarrow e$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k_n^{-1}k \in \mathbb{A}(e) \forall n \geq N$. Como $\mathbb{A}(e)$ es semigrupo $k_n(k_n^{-1}k) \in \mathbb{A}(e)$ para $n \geq N$, entonces $k \in \mathbb{A}(e)$. Por lo tanto $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$. \square

Teorema 3.11. *Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre G . Supongamos que el subgrupo \mathbf{S} es compacto, entonces*

- i) $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$,
- ii) $\exists T > 0$ tal que $\mathbb{A}(e, T) = \mathbb{A}(e)$.

Demostración. i) Sea $H = \overline{\mathbb{A}(e)}$ en \mathbf{S} , entonces H es semigrupo, pues por el Lema 3.6 $\mathbb{A}(e)$ es semigrupo y esta propiedad es heredada por H . Demostraremos que H es grupo y por el Teorema 3.9 obtendremos que $\mathbb{A}(e) = \mathbf{S}$.

Sea $h \in H$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $h^n \in H$. Como \mathbf{S} es compacto la sucesión $\{h^n\}_{n \geq 1}$ tiene una subsucesión convergente $\{h^{n(k)}\}_{k \geq 1}$ y podemos suponer que $n(k) < n(k+1)$, $\forall k$. Definamos

$$h^{-1} := \lim_{k \rightarrow \infty} h^{n(k+1) - n(k) - 1}.$$

Como $n(k+1) - n(k) - 1$ es no negativo, entonces $h^{n(k+1) - n(k) - 1} \in H$, $\forall k$, así que $h^{-1} \in H$ pues H es cerrado. Además

$$hh^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} h^{n(k+1)} h^{-n(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} h^{nk} h^{-nk} = e.$$

Por lo tanto H es grupo. Sabemos que $\mathbb{A}(e) \subset H$, y que $\mathbb{A}(e)$ tiene interior no vacío (por Lema 3.5), entonces H también tiene interior no vacío relativo a \mathbf{S} . Puesto que H es grupo y \mathbf{S} es conexo, afirmamos que $H = \mathbf{S}$. Observemos que H es arco conexo, pues si $g \in H$ y $g_n \rightarrow g$ con $g_n \in \mathbb{A}(e)$. Entonces $(1-t)e + tg_n \in \mathbb{A}(e)$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-t)e + tg_n = (1-t)e + tg \in H$ para cada $t \in [0, 1]$.

Esto demuestra que $\mathbb{A}(e)$ es denso en \mathbf{S} y por el Lema 3.10 el inciso (i) queda demostrado.

(ii) Para cada $t > 0$, sea $W(t) = \text{int}(\mathbb{A}(e, t))$ relativo a \mathbf{S} . Afirmamos que

$$\bigcup_{0 < t} W(t) = \mathbf{S}.$$

Sean $g \in \mathbf{S}$ entonces existe $T > 0$ tal que $g \in \mathbb{A}(e, T)$. Tomemos $h \in \text{int}(\mathbb{A}(e, T'))$, $T' > 0$ y supóngase que $h^{-1} \in \mathbb{A}(e, T'')$, $T'' > 0$. Demostraremos que $g \in W(T + T' + T'') = \text{int}(\mathbb{A}(e, T + T' + T''))$. En efecto, existen un control u_g y un tiempo t_g con $0 \leq t_g \leq T$, tales que $\pi(e, u_g, t_g) = g$. Así mismo existen u_h y $t_h \in [0, T']$ tales que

$\pi(e, u_h, t_h) = h$. Sea V_h una vecindad de h con $V_h \subset \mathbb{A}(e, T')$. Definamos el conjunto $A = \{bh^{-1} : b \in V_h\} = V_h h^{-1}$ y consideremos la aplicación continua $f_k : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ definida por $f_k(l) = kl, \forall l \in \mathbf{S}$. Tenemos que

$$(f_{g^{-1}})^{-1}(A) = \{x : xg^{-1} \in A\} = Ag.$$

Entonces Ag es abierto. Así que $Ag = V_h h^{-1}g$ es una vecindad de g .

Sea $v \in Ag$, entonces existe $b \in V_h$ tal que $v = bh^{-1}g$. Como $V_h \subset \mathbb{A}(e, T')$ existen un control u_b y un tiempo $t_b \in [0, T']$ tales que $\pi(e, u_b, t_b) = b$. Considérese el control

$$u_v = \begin{cases} u_g(s) & 0 \leq s \leq t_g \\ u_{h^{-1}}(s - t_g) & t_g < s \leq t_g + t_{h^{-1}} \\ u_b(s - t_g - t_{h^{-1}}) & t_g + t_{h^{-1}} < s \leq t_g + t_{h^{-1}} + t_b. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$U(s) = \begin{cases} \pi(e, u_g, s) & 0 \leq s \leq t_g \\ \pi(e, u_{h^{-1}}, s - t_g)g & t_g < s \leq t_g + t_{h^{-1}} \\ \pi(e, u_b, s - t_g - t_{h^{-1}})h^{-1}g & t_g + t_{h^{-1}} < s \leq t_g + t_{h^{-1}} + t_b, \end{cases}$$

donde $U(s) = \pi(e, u_v, s)$ y $\pi(e, u_v, t_g + t_{h^{-1}} + t_b) = v$. Como $t_g + t_{h^{-1}} + t_b \leq T + T' + T''$ esto demuestra que $Ag \subset \mathbb{A}(e, T + T' + T'')$. Consecuentemente $g \in W(T + T' + T'')$. Puesto que la familia $W(t)$ es creciente y \mathbf{S} es compacto, se sigue que $W(t) = \mathbf{S}$ para algún t suficientemente grande y esto completa la demostración. \square

Sea $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ un sistema de control sobre un grupo G y $g \in G$. El sistema es *controlable desde g* si $\mathbb{A}(g) = G$. Y diremos que es simplemente *controlable* o *completamente controlable* si es controlable desde cualquier $g \in G$.

Teorema 3.12. *Una condición necesaria para que $(\mathbf{H}, \mathcal{C})$ sea completamente controlable es que G sea conexo y $\mathbf{L} = L(G)$. Si G es compacto la condición es suficiente.*

Demostración. La condición del teorema se satisface si y sólo si $G = \mathbf{S}$. Por el Lema 3.4 la condición es necesaria. La segunda parte se sigue del Teorema 3.11 y del hecho que $\mathbb{A}(e) = G$, entonces $\mathbb{A}(g) = G$ para todo g . \square

3.3. Controlabilidad completa. Para demostrar el Teorema de esta sección necesitamos el siguiente lema cuya demostración se puede ver en [4].

Lema 3.13. *$U(N)$ es un grupo de Lie conexo y compacto.*

Teorema 3.14. *(Schirmer-Solomon-Leahy) Una condición necesaria y suficiente para que un sistema cuántico con Hamiltoniano (7), controles en \mathcal{C} y álgebra de Lie \mathbf{L} sea completamente controlable es $\mathbf{L} \cong u(N)$*

Demostración. Puesto que (8) define un sistema de control invariante a la derecha sobre el grupo de Lie compacto y conexo $U(N)$, el Teorema 3.12 establece que el sistema es completamente controlable si y sólo si $\mathbf{L} \simeq u(N)$. Esta condición también es necesaria y suficiente para controlabilidad en los estados, pues las dos nociones de controlabilidad son equivalentes. \square

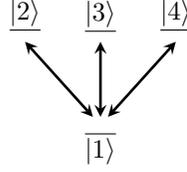
Ejemplo 3.15. [28] Consideremos un sistema cuántico con dos niveles ($i = 1, 2$) de energía y subniveles degenerados, donde el número de subniveles del nivel i está dado por la fórmula $2F_i + 1$, $F_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

En la figura 1 se muestra el caso trivial de transición entre dos niveles no degenerados, $F_i = 0$, $i = 1, 2$. El Hamiltoniano interno de este sistema es

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

y el Hamiltoniano de control es

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix},$$

Fig. 1: $F_1 = 0/F_2 = 0$ Fig. 2: $F_1 = 0/F_2 = 1$ 

donde $d \neq 0$ es el momento dipolar de la transición. Nótese que iH_0 y iH_1 generan $u(2)$ si $E_2 \neq E_1$. Así, el sistema es completamente controlable.

La figura 2 muestra un diagrama de transiciones entre subniveles de dos niveles atómicos con $F_1 = 0$ y $F_2 = 1$, respectivamente. Puesto que $F_2 = 1$ el nivel 2 tiene tres subniveles degenerados. El Hamiltoniano del sistema con cuatro estados está dado por

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

en la base estandar. Los Hamiltonianos de control son

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que iH_0, iH_1, iH_2 y iH_3 generan el álgebra de Lie $u(4)$, entonces el sistema es completamente controlable.

4. CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS ABIERTOS

En un sistema abierto, la dinámica de los estados se describe mediante un semigrupo de transformaciones completamente positivas que preservan la traza $(\mathcal{T}_{*t})_{t \geq 0}$ del espacio $L_1(\mathcal{H})$, de los operadores de traza finita sobre \mathcal{H} , en sí mismo. De manera que un estado inicial ρ es enviado por este semigrupo en un estado ρ_t al tiempo t : $\rho_t = \mathcal{T}_{*t}(\rho)$. La familia de estados $(\rho_t)_{t \geq 0}$ es la solución de la ecuación maestra

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho_t}{dt} &= \mathcal{L}_*(\rho_t), \\ \rho_0 &= \rho. \end{aligned}$$

Donde ρ es un estado inicial y \mathcal{L}_* es un operador, no necesariamente acotado, del espacio $L_1(\mathcal{H})$ en sí mismo, al que se le llama *generador de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan* (LGKS) en su representación predual. Se sabe, véase [10, 13], que en el caso cuando \mathcal{L}_* es un operador acotado tiene la forma canónica]]

$$(19) \quad \mathcal{L}_*(\rho) = \Phi_*(\rho) - G\rho - \rho G^*.$$

donde Φ_* es una transformación lineal completamente positiva y acotada sobre $L_1(\mathcal{H})$ y $G = \frac{1}{2}\Phi_*(I) - iH$ es el generador de un semigrupo uniformemente continuo sobre \mathcal{H} . Esta ecuación maestra es una generalización de la ecuación de Schrödinger. En el caso $\Phi \equiv 0$ la ecuación (18) se reduce a la ecuación de Schrödinger.

El Teorema de Schatten, véase [25], establece un isomorfismo isométrico entre el dual $L_1(\mathcal{H})^*$ de $L_1(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De manera que para cada funcional lineal continuo f sobre $L_1(\mathcal{H})$ existe un elemento $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $f(\rho) = \text{tr}(x\rho)$ para todo $\rho \in L_1(\mathcal{H})$.

Entonces para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y cada $t \geq 0$ el funcional $f(x, t)(\rho) = \text{tr}(x\mathcal{T}_{*t}(\rho))$ tiene asociado un elemento $\mathcal{T}_t(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$f(x, t)(\rho) = \text{tr}(x\mathcal{T}_{*t}(\rho)) = \text{tr}(\mathcal{T}_t(x)\rho).$$

Para cada t la aplicación $x \rightarrow \mathcal{T}_t(x)$ es completamente positiva. Y la familia $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ define un semigrupo cuántico de Markov sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que preserva la identidad. Si \mathcal{L} es el generador de este semigrupo entonces se tiene

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}_t(x)}{dt} &= \mathcal{L}(\mathcal{T}_t(x)), \\ \mathcal{T}_0(x) &= x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Esta es una ecuación en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que gobierna la evolución de las observables del sistema cuántico abierto. En el caso cuando \mathcal{L} es acotado, tiene la forma canónica [22, 13],

$$(21) \quad \mathcal{L}(x) = \Phi(x) - G^*x - xG,$$

donde Φ es una transformación lineal completamente positiva y acotada sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $G = \frac{1}{2}\Phi(I) - iH$ es el generador de un semigrupo uniformemente continuo sobre \mathcal{H} .

En el caso de dimensión finita $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ es el espacio de vectores complejos de dimensión N y $L_1(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_N$ es el espacio de matrices complejas de $N \times N$. Al conjunto de estados o matrices de densidad (i.e., el conjunto de operadores positivos sobre \mathcal{H} de traza uno) lo denotamos por $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, claramente $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset L_1(\mathcal{H})$.

Cualquier transformación completamente positiva que preserva la traza tiene la forma de Kraus, véase [20] y el Teorema 2.20 en [10]; es decir, es de la forma

$$(22) \quad \Phi[\rho] = \sum_{i=1}^n K_i \rho K_i^*$$

donde los K_i son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfacen la condición

$$(23) \quad \sum_{i=1}^n K_i^* K_i = I.$$

Esta representación no es única.

A una transformación completamente positiva que preserva la traza la llamaremos simplemente transformación de Kraus.

4.1. Controlabilidad cinemática. La noción de controlabilidad que discutimos en la sección anterior necesita ser modificada para adaptarla al caso de sistemas cuánticos abiertos, cuya dinámica no es necesariamente unitaria. La controlabilidad cinemática se define de la siguiente manera.

Definición 4.1. Un sistema cuántico abierto es *cinemáticamente controlable en un conjunto S_K de estados* si para cualquier par de estados $\rho_1, \rho_2 \in S_K$ existe una transformación de Kraus Φ , tal que $\rho_2 = \Phi(\rho_1)$.

Teorema 4.1. (Wu-Pechen-Brif-Rabitz, [37]) *Para cualquier estado ρ_f sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión finita N , existe una transformación de Kraus Φ_f , tal que $\Phi_f(\rho) = \rho_f$ para todos los estados ρ en \mathcal{H} .*

Demostración. Supóngase que la descomposición espectral del estado final ρ_f es

$$(24) \quad \rho_f = \sum_{i=1}^N p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|,$$

donde $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ es la base que diagonaliza ρ_f y $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, $p_i \geq 0$. Para una base ortonormal arbitraria $\{\chi_j\}$ en \mathcal{H} definimos los operadores

$$(25) \quad K_{ij} = \sqrt{p_i} |\phi_i\rangle \langle \chi_j| \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Los operadores K_{ij} satisfacen la condición de normalización (23), pues

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N K_{ij}^* K_{ij} &= \sum_{i,j=1}^N p_i |\chi_j\rangle \langle \phi_i| |\phi_i\rangle \langle \chi_j| = \sum_{i,j=1}^N \langle \phi_i, p_i \phi_i | \chi_j\rangle \langle \chi_j| \\ &= \sum_j^N \text{Tr}(\rho_f) |\chi_j\rangle \langle \chi_j| = I. \end{aligned}$$

Definamos la transformación de Kraus

$$(26) \quad \Phi_f(\rho) = \sum_{i,j=1}^N K_{ij} \rho K_{ij}^*.$$

Esta transformación Φ_f actúa sobre un estado ρ en \mathcal{H} de la siguiente manera

$$\Phi_f(\rho) = \sum_{i,j=1}^N p_i |\phi_i\rangle \langle \chi_j| \rho |\chi_j\rangle \langle \phi_i| = \text{Tr}(\rho) \sum_{i=1}^N p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = \rho_f.$$

Esto demuestra el teorema. \square

Corolario 4.2. *Para cualquier par de estados ρ_1 y ρ_2 en el espacio de Hilbert \mathcal{H} finito dimensional, existe una transformación de Kraus Φ tal que $\Phi(\rho_1) = \rho_2$.*

Corolario 4.3. *Un sistema cuántico abierto finito dimensional es cinemáticamente controlable en el conjunto $S_K = \mathcal{D}(\mathcal{H})$ de todos los estados sobre \mathcal{H} .*

4.2. El problema de control dinámico para sistemas abiertos. En analogía con el problema de control dinámico para sistemas cerrados, el problema de control dinámico se formula de la siguiente manera.

Definición 4.2. Un sistema abierto es *dinámicamente controlable* (o simplemente controlable) en un subconjunto \mathcal{S} de estados si para cualquier par de estados $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$ existen un tiempo finito T y un conjunto de controles admisibles $\{c_1(t), c_2(t), \dots, c_k(t)\} \subset \mathcal{C}$, tales que la solución $\mathcal{T}_{*(t,0)}$ de la ecuación maestra (18), con generador LGKS dependiente de los controles

$$(27) \quad \mathcal{L}_{*t} = \mathcal{L}_*(c_1(t), \dots, c_k(t)),$$

transforma ρ_1 en ρ_2 , i.e.,

$$\rho_2 = \mathcal{T}_{*(t,0)} \rho_1.$$

Es decir la ecuación de control en este caso tiene la forma

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_t &= \mathcal{L}_{*t}(\rho_t), \\ \rho_0 &= \rho. \end{aligned}$$

Con \mathcal{L}_{*t} como en (27).

De manera similar al caso de sistemas cerrados, se puede suponer que el generador LGKS es de la forma

$$\mathcal{L}_{*t} = \mathcal{L}_{*0} + \sum_{j=1}^n c_j(t) \mathcal{L}_{*j},$$

considerar el álgebra de Lie generada por los elementos $\{\mathcal{L}_{*0}, \dots, \mathcal{L}_{*n}\}$ y al correspondiente grupo de Lie, buscando aplicar el resultado de Sussman y Jurdjevic, Teorema 3.12, para obtener una condición necesaria y suficiente para controlabilidad.

Ejemplo 4.4. [1] Consideremos un sistema cuántico de dos niveles. El espacio de Hilbert asociado es \mathbb{C}^2 . El Hamiltoniano del sistema es

$$H_A = \varepsilon_0|0\rangle\langle 0| + \varepsilon_1|1\rangle\langle 1|,$$

donde ε_0 y ε_1 son las energías de los estados base y excitado, respectivamente. Las transiciones entre los niveles atómicos están descritas por los operadores

$$\sigma_- = |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El generador GKSL para este sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= 2\gamma\sigma_-\rho\sigma_+ \\ G &= -\sigma_+\sigma_- + iH, \\ \text{con } H &= \Delta\omega|1\rangle\langle 1| + \bar{\Omega}\sigma_- + \Omega\sigma_+, \end{aligned}$$

donde γ , $\Delta\omega$ y Ω son constantes. Para un estado estacionario, $\hat{\rho}_{st} = \sum_{0 \leq i, j \leq 1} \rho_{ij}|i\rangle\langle j|$, del sistema se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma\rho_{11} &= \text{Im}(\Omega\rho_{01}) \\ \gamma_\omega\rho_{10} &= i\Omega(\rho_{11} - \rho_{00}), \end{aligned}$$

donde $\gamma_\omega = \gamma + i\Delta\omega$. Sea $\alpha = -i\Omega/\gamma_\omega$, el estado estacionario es

$$\hat{\rho}_{st} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + 2|\alpha|^2} \begin{pmatrix} 1 + |\alpha|^2 & \alpha \\ \bar{\alpha} & |\alpha|^2 \end{pmatrix}.$$

El estado es puro sólo si $\alpha = 0$. Nótese que con $|\Omega|/|\gamma_\omega| \gg 1$, el sistema evoluciona desde un estado inicial hacia un estado invariante saturado, i.e.

$$\frac{1}{1 + 2|\alpha|^2} \begin{pmatrix} 1 + |\alpha|^2 & \alpha \\ \bar{\alpha} & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

con probabilidades iguales en los niveles superior e inferior, $\rho_{00} = \rho_{11} = 1/2$, $\rho_{01} = 0$.

Con $|\Omega|/|\gamma_\omega| \ll 1$,

$$\frac{1}{1 + 2|\alpha|^2} \begin{pmatrix} 1 + |\alpha|^2 & \alpha \\ \bar{\alpha} & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema evoluciona desde un estado inicial hacia el estado estacionario base $\rho_{11} = \rho_{01} = 0$, $\rho_{00} = 1$.

4.3. Existencia y unicidad para el problema de control incoherente. En esta sección discutimos el problema de existencia y unicidad de la solución para el problema de control incoherente. El resultado principal, Teorema 4.5, es una consecuencia de la existencia y unicidad de la solución para la ecuación de Lindblad con coeficientes dependientes del tiempo, sobre el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por esta razón abordaremos el estudio de la ecuación de Lindblad en la representación directa,

$$(29) \quad \frac{d}{dt}X_t = \mathcal{L}_t(X_t),$$

\mathcal{L}_t está dado por

$$(30) \quad \mathcal{L}_t(X) = \Phi_t(X) - G_t^*X - XG_t.$$

Donde para cada $t \geq 0$, Φ_t es una transformación completamente positiva acotada, i.e., $\Phi_t(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $G_t = \frac{1}{2}\Phi_t(I) - iH_t$, con $H_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto.

Partiendo de una motivación puramente matemática, es decir, sin conocer su relación con el problema de control de sistemas cuánticos abiertos, la existencia y unicidad de la solución para la ecuación de Lindblad dependiente del tiempo se demostró en [15, 14], en un contexto general para \mathcal{L}_t con coeficientes no acotados.

Una consecuencia del resultados de [15, 14] es la existencia y unicidad de la solución del problema de control incoherente. Es decir tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.5. *Si los controles $\{c_1(t), \dots, c_n(t)\}$ pertenecen a la clase \mathcal{C} o \mathcal{C}_b , definidas en el Capítulo 2, entonces la ecuación de control incoherente*

$$(31) \quad \frac{d}{dt}X_t = \mathcal{L}_0(X_t) + \sum_{1 \leq j \leq n} c_j(t)\mathcal{L}_j(X_t), \quad X_0 = X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

donde cada generador \mathcal{L}_j tiene la estructura de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan con coeficientes acotados y $\mathcal{L}_j(I) = 0$, $j = 0, \dots, n$, entonces existe una solución $X_t = P(t, 0)$ del problema de control incoherente (31), donde $\{P(t, s) : (t, s) \in \Delta\}$, $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ es la solución minimal de (31), que es única (por ser conservativa) y satisface

- (a) Para cada $(t, s) \in \Delta$, $P(t, s)$ es completamente positivo y normal.
- (b) $P(t, s) \leq I \quad \forall (t, s) \in \Delta$.
- (c) Es un sistema de evolución: $P(s, s) = I$, $P(t, s) = P(t, r)P(r, s)$ para $0 \leq s \leq r \leq t$.
- (d) Para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ y $s \geq 0$ fijos, $t \mapsto P(t, s)(X)$ es débilmente diferenciable.
- (e) Si $\{Q(t, s) : (t, s) \in \Delta\}$ es otra familia de transformaciones lineales que satisfacen la ecuación (31) entonces

$$P(t, s)(X) \leq Q(t, s)(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Demostración. La continuidad de los controles y el hecho que los coeficientes del generador, i.e., los operadores de Kraus y el Hamiltoniano, son acotados, implican que la familia $(\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_0 + \sum_{1 \leq j \leq n} c_j(t)\mathcal{L}_j)_{t \geq 0}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.1 de [15], véase también el Teorema 5.3.3 de [14]. La conservatividad se sigue de la condición $\mathcal{L}_j(I) = 0$, $j = 0, \dots, n$. \square

5. CONCLUSIONES

Hemos revisado algunas nociones de controlabilidad para sistemas cuánticos cerrados y abiertos. Revisamos un criterio para la controlabilidad completa de sistemas cerrados, obtenido por primera vez por Schirmer-Solomon-Leahy, usando un resultado de Sussman y Jurdjevic [18] sobre control en grupos de Lie. Incluimos un resultado de controlabilidad cinemática para sistemas cuánticos abiertos. Formulamos el problema de control dinámico para sistemas abiertos y obtuvimos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de su solución, en el caso de generadores GKSL con coeficientes acotados, enfatizando que las ecuaciones de control tienen Hamiltonianos o generadores de Gorini-Kossakowski-Sudarshan y Lindblad dependientes del tiempo.

REFERENCIAS

- [1] Accardi, L., Kozyrev, S.V. and Pechen, A.N., *Coherent quantum control of Λ -atoms through the stochastic limit*, Quantum Probability and White Noise Analysis, Vol. **19**, 2008.
- [2] Albertini, A. and D'Alessandro, D., *Regular section technical notes and correspondence*, IEEE Trans. Automat. Control **48**, 1399 (2003).
- [3] Chu, S., *Cold atoms and quantum control*, Nature **416**, 206–210, 2002.
- [4] Cruz de la Rosa, M.A., *Control de Sistemas Cuánticos*, Tesis de Maestría, Posgrado en Matemáticas, UAM-I, México, 2010.
- [5] Curtain, R.F., *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Springer Verlag, New York, 1995.
- [6] Dantuz, M. and Lozovoy, V., *Experimental laser coherent control of physico-chemical processes*, Chem. Rev. **104**, 1813–1859, 2004.
- [7] Dollard, J. and Friedman, C., *Product Integration*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. **10**, Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
- [8] Dong, D. and Petersen, I.R., *Quantum control theory and applications: A survey*, arXiv:0910.2350v1 [quant-physics], 13 oct. 2009.
- [9] Dong, D., Zhang, C., Rabitz, H., Pechen, A. and Tarn, T.J., *Incoherent control of locally quantum systems*, J. Chem. Phys. **129**, p. 154103, 2008.

- [10] Fagnola, F., *Quantum Markov semigroups and quantum flows*, *Proyecciones* **18**, 1-144, 1999.
- [11] Fattorini, H.O., *Infinite-dimensional optimization and control theory*, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [12] Garng M., Huang, T., Tarn, T.J. and Clark, J.W., *On the controlability of quantum-mechanical systems*, *J. Math. Phys.* **24 (11)**, 2608-2618, 1983.
- [13] Gorini, V., Kossakowski, A. and Sudarshan, E.C.G., *Completely positive dynamical semigroups of N -level systems*, *J. Math. Phys.* **17**, 821-825, 1976.
- [14] García, J.C., *Una Clase de Transformaciones Completamente Positivas no Acotadas y Conservatividad de la Solución Minimal de la Ecuación Maestra*, tesis de doctorado, UAM-Iztapalapa, 1998.
- [15] García, J.C. and Quezada, R., *On strong perturbations of covariant generators of QDS*, en *Memorias del V Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos, Aportaciones Matemáticas (Serie Investigación)* **12**, SMM, 1999.
- [16] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.
- [17] Lan C., Tarn T.J., Chi, Q.S. and Clark, J.W., *Analytic controlability of time-dependent quantum control systems*, *J. Math. Phys.* **46**, 052102, 2005.
- [18] Jurdjevic, V and Sussmann, H.J., *Control systems on Lie groups*, *Journal of Differential Equations* **12**, 313–329, 1972.
- [19] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. **1**, Interscience, New York, 1963.
- [20] Kraus, K., *General state changes in quantum theory*, *Ann. Phys.* **64**, 311–335, 1970.
- [21] Levis, R.J., Menkir, G.M. and Rabitz, H., *Selective bond dissociation and rearrangement with optimally tailored, strong-field laser pulses*, *Science* **292**, 709–, 2001.
- [22] Lindblad, L., *On the generators of quantum dynamical semigroups*, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119–130, 1976.
- [23] Rabitz, H., *The role of theory in the laboratory control of quantum dynamics phenomena*, *Theor. Chem. Acc.* **109**, 64–70, 2003.
- [24] Rabitz, H., de Vivie-Riedle, R., Motzkus, M. and Kompa, K., *Whither the future of controlling quantum phenomena?*, *Science* **288**, 824–828, 2000.
- [25] Reed, M. and Simon, B., *Modern Methods of Mathematical Physics*, vol **I**, *Functional Analysis*, Academic Press, 1975.
- [26] Rice, S.A. and Zhao, M.S., *Optical control of molecular dynamics*, John Wiley and Sons Inc., 1st. edition, 2000.
- [27] Romano, R. and D'Alessandro, D., *Incoherent control and entanglement for two-dimensional coupled systems*, *Phys. Rev. A* **73**, p. 022323, 2006.
- [28] Schirmer, S.G., Solomon, A.I. and Leahy, J.V., *Degrees of controllability for quantum systems and application to atomic systems*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 4125–4141, 2002.
- [29] Schirmer, S.G., Solomon, A.I. and Leahy, J.V., *Criteria for reachability of quantum states*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 8551–, 2002.
- [30] Shapiro, M. and Brumer, P., *Principles of quantum control of molecular processes*, John Wiley and Sons Inc., 1st edition, 2003.
- [31] Susuki, M., *On the convergence of exponential operators-the Zassenhaus formula, BCH formula and systematic approximants*, *Commun. Math. Phys.* **57**, 193-200, 1977.
- [32] van Handel, R., Stockton, J.R. and Mabuchi, H., *Modelling and feedback control desing for quantum state preparation*, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **7**, S179-S197, 2005.
- [33] Vandersypen, L.M.K. and Chuang, I.L., *NMR technics for quantum control and computation*, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1036-1069, 2004.
- [34] Warren, W.S., Rabitz, H. and Dahleh, M., *Coherent control of quantum dynamics: The dream is alive*, *Science* **259**, 1581-1589, 1993.
- [35] Wisemar, H.M. and Milburn, G.J., *Quantum measurement and control*, Cambridge Univ. Press, 1st edition, 2010.
- [36] Wisemar, H.M. and Milburn, G.J., *Quantum theory of optical feedback via homodyne detection*, *Phys. rev. Lett* **70**, 548-551, 1993.
- [37] Wu, R., Pechen A., Brif, C. and Rabitz, H., *Controllability of open quantum systems with Kraus-map dynamics*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 5681–5693, 2007.

Dirección del autor:

Marco Antonio Cruz de la Rosa
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: marco_esmas@hotmail.com



EL PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DE VALUACIÓN DE ACTIVOS PARA TIEMPO DISCRETO Y HORIZONTE FINITO

ALEJANDRO SÁNCHEZ PERALTA

RESUMEN. El Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos tiene una relevancia histórica que destaca por caracterizar la relación entre no-arbitraje y la existencia de una medida de probabilidad equivalente, bajo la cual el proceso de precios descontado de algún derivado financiero es una martingala. En este trabajo abordamos una de las pruebas del Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos en tiempo discreto y horizonte temporal finito, pero con un espacio de estados no necesariamente finito. Apegándonos a la referencia [3] establecemos en detalle la demostración de este resultado usando el principio de inducción matemática.

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de comprar y vender simultáneamente (o casi) un mismo instrumento financiero en diferentes mercados, generando algún beneficio económico con base en la diferencia de precios se denomina *arbitraje financiero*. Esta estrategia de mercado es tal, que nos permite generar una ganancia libre de riesgo de manera indiscriminada.

Si en un mercado financiero algún agente logra una oportunidad de arbitraje¹, dicho agente puede ejecutar tal estrategia de manera ilimitada, basado únicamente en la idea de que “más es mejor que menos”. No obstante, esta posición es incompatible dentro de un mercado en el que existan otros agentes competitivos, ya que no habría un portafolio de inversión óptimo para los otros agentes que también prefieren más por menos.

Esto da lugar a una de las ramas más importantes dentro de las finanzas matemáticas, que es la llamada valuación por arbitraje. El estudio contemporáneo del arbitraje financiero se centra en el análisis de las implicaciones de la ausencia de las oportunidades de arbitraje. Y es en esta línea que surge uno de los resultados más interesantes en las finanzas matemáticas actuales. Este es el Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos (PTFVA).

Fueron Phillip Dybvig y Stephen Ross quienes acuñaron el término *Teorema Fundamental de las Finanzas* en un diccionario de economía en 1987 (ver [2]). Sin embargo, un primer acercamiento a este resultado fue publicado por el segundo autor (S. Ross) once años antes. En nuestro caso comentaremos algunos aspectos del arbitraje financiero en un contexto matemático y financiero sencillo y, posteriormente desarrollamos en detalle la demostración del PTFVA en tiempo discreto y horizonte finito. Por último, comentaremos un ejemplo desarrollado por Stanley Pliska ([7]) para el que no se satisface el Primer Teorema Fundamental.

2. UN CASO SENCILLO DE ARBITRAJE FINANCIERO

A lo largo de esta sección trabajaremos en \mathbb{R}^D . Esto obedece a dos razones principalmente. La primera de ellas es que \mathbb{R}^D es un espacio vectorial, lo cual es

2010 *Mathematics Subject Classification.* 91B28 .

Palabras clave. Primer Teorema Fundamental, arbitraje financiero, medida martingala equivalente.

¹De existir una oportunidad de arbitraje, ésta es tomada de manera inmediata debido a la gran cantidad de agentes que participan en el mercado. Esto ocasiona que la ventana se cierre al momento, haciendo que el arbitraje se desvanezca.

ventajoso para establecer conceptos tales como el de portafolio financiero. La segunda razón es porque varias de las hipótesis de un mercado financiero real, se satisfacen suficientemente bien en este espacio como veremos más adelante.

Supongamos que trabajamos con un modelo de mercado en el que existen un número finito de activos del mercado (digamos D), cuyos perfiles de pago están dados en términos de bienes de consumo. Si $\bar{x}_d \in \mathbb{R}^J$ es el perfil de pago para el d -ésimo activo, definimos la matriz de perfiles de pago o de pagos $X \in \mathcal{M}_{J \times D}(\mathbb{R})$ como

$$X = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_D],$$

donde J es el número de escenarios del mercado (estados del mundo).

En términos generales, un portafolio es un conjunto de instrumentos financieros en el que un determinado agente del mercado coloca sus inversiones para su posterior intercambio. Para nosotros, un portafolio es un elemento de \mathbb{R}^D en el que cada entrada representa las deudas ó las posesiones del agente.

Consideramos portafolios en \mathbb{R}^D , ya que esto permite tener entradas positivas, negativas o cero en el portafolio². Además, dado que en la práctica es común intercambiar lotes de activos, al trabajar en este espacio se satisface la condición de divisibilidad del mercado.

Si h es un portafolio con D activos, su perfil de pago está dado como

$$Xh = \sum_{d=1}^D \bar{x}_d h_d,$$

donde h_d es el d -ésimo activo del portafolio y \bar{x}_d el perfil de pago correspondiente a esta entrada. Con esta noción de perfil de pago de un portafolio podemos establecer la siguiente

Definición 2.1. (Ley de un mismo precio). Si h y h' son dos portafolios cuyo perfil de pago es el mismo, entonces ambos portafolios tienen el *mismo precio*. Es decir, si $Xh = Xh'$ entonces $ph = ph'$, donde $p \in \mathbb{R}^D$ es un vector de precios.

En este caso podemos ver que cualquier portafolio cuyo perfil de pago es cero, tiene precio igual a cero. Veamos que si $\tilde{h} = h - h'$, entonces $X\tilde{h} = 0$ implica que $p\tilde{h} = 0$, i.e.,

$$(1) \quad \ker(X) \subset \ker(\hat{p}),$$

donde \hat{p} es un vector en \mathbb{R}^D , tal que existe un portafolio h con la propiedad de que $\hat{p}h \in \mathbb{R}_+$.

Si bien es posible establecer diferentes nociones de arbitraje, en el contexto que estamos trabajando es necesario introducir una definición en términos del perfil de pago de un portafolio.

Definición 2.2. Un *arbitraje fuerte* es un portafolio cuyo precio es estrictamente negativo y que tiene un perfil de pago positivo en algún tiempo futuro.

Definición 2.3. Un *arbitraje* es un portafolio que es un arbitraje fuerte o que tiene precio igual a cero y un perfil de pago positivo, hoy o en algún estado en el futuro.

En vista de que el precio inicial para un arbitraje no es mayor que cero, no requerimos de riqueza alguna para participar en el mercado. Sin embargo, es posible que al término del periodo hayamos conseguido algún beneficio gracias al perfil de pago final. Esto lo podemos conjuntar en forma de desigualdades como veremos a continuación.

Sea h un portafolio de arbitraje, entonces

$$ph \leq 0,$$

y su payoff siempre es positivo

$$Xh \geq 0.$$

²Esto es a lo que se le denomina liquidez del mercado.

Cuando escribamos \geq debemos entender *mayor que o igual que* en cada componente. Por otra parte $>$ quiere decir *mayor o igual estrictamente* y *mayor en algunas componentes*. Por último, cuando se trate de $>>$ estaremos hablando de *estrictamente mayor que* en todas las componentes. Observemos que el arbitraje h , tiene una desigualdad estricta en alguna de las desigualdades anteriores, al menos en una componente. Así, una oportunidad de arbitraje puede representarse como

$$(2) \quad \mathcal{Y}h = \begin{bmatrix} -p \\ X \end{bmatrix} h > 0,$$

donde $\mathcal{Y} \in \mathcal{M}_{J+1 \times D}(\mathbb{R})$.

Proposición 2.1. *Si no hay arbitraje entonces se satisface la ley de un mismo precio.*

Demostración. Sea $h \in \mathbb{R}^D$ un portafolio, tal que $h \in \ker(X)$ y $h \notin \ker(p)$. De esta manera hay dos casos para el precio del portafolio, a saber $ph > 0$ ó $ph < 0$.

Si ocurre el primer caso, entonces $-ph < 0$. De esta manera, con $-Xh = 0$ se satisface la definición de arbitraje fuerte para el portafolio $-h$. Es decir, $p(-h) < 0$ y en particular $X(-h) \geq 0$. Por otro lado el caso $ph < 0$ no es posible, ya que la otra condición para el arbitraje es que $ph = 0$. \square

Hemos establecido uno de los supuestos financieros más usados en la práctica, como una implicación del principio de no arbitraje en un contexto sencillo. Este hecho además, permite adentrarse en el concepto de equilibrio de mercado y algunas otras relaciones estructurales. Más por el momento nos limitaremos al Primer Teorema Fundamental.

Ejemplo 2.2. Consideremos dos activos cuyos perfiles de pago son $x_1 = (1, 1)^t$ y $x_2 = (1, 2)^t$ respectivamente. Supongamos que el precio de estos activos es $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$. En este caso el vector de precios $p = (1, 2)$ pertenece a la frontera del cono generado por los perfiles de pago, de hecho coincide con uno de ellos, tal como se muestra en la Figura 1.

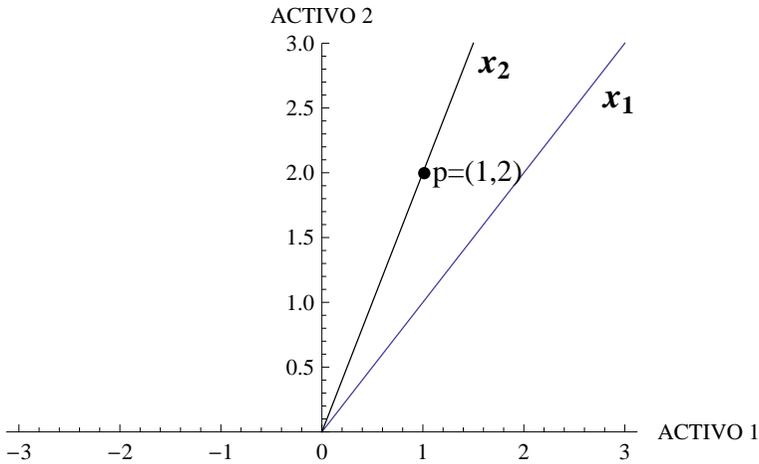


FIGURA 1. El precio p coincide con una de las fronteras del cono generado por los perfiles de pago.

La matriz de pagos es

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que con el portafolio $h = (1, -1/2)^t$, tenemos que $z = Xh = (1/2, 0)^t$. Este perfil de pago no pertenece al subespacio generado por x_1 y x_2 . Además $ph = 0$, es decir, h es un portafolio de arbitraje. Sin embargo, dado que $z \geq 0$ y $ph \not\leq 0$, se sigue que no es un arbitraje fuerte.

3. EL PTFVA DE DALANG-MORTON-WILLINGER

El Primer Teorema Fundamental caracteriza la existencia de una medida de probabilidad equivalente, bajo la cual el proceso de precios descontado de algún derivado financiero es una martingala.

Existen varias versiones de este resultado en múltiples contextos. Muchas de ellas de nivel elemental, y otras tantas sofisticadas y difíciles de abordar. En nuestro caso trabajamos con una versión de nivel intermedio, conocida como la versión de Dalang-Morton-Willinger. Vamos a proceder con el enfoque presentado en [11] y, apegándonos a [3] construimos la prueba de este resultado mediante el principio de inducción matemática. Tal medida martingala equivalente es importante ya que nos permite valuar portafolios, derivados financieros, entre otras aplicaciones.

3.1. Estableciendo el teorema. Sea $(\Omega, (\mathfrak{S}_t)_{t=0}^T, P)$ un espacio de probabilidad filtrado, donde

$(\mathfrak{S}_t)_{t=0}^T$ es la filtración finita $\mathfrak{S}_0 \subsetneq \mathfrak{S}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{S}_T$.

Si $S_t = (S_0(t), \dots, S_d(t))$ es un vector de precios de algún mercado financiero, tenemos que la variable aleatoria $S_i(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ denota al vector de precios que prevalece al tiempo t . Suponemos que cada componente de $S(t)$ representa el proceso de precio para $d+1$ activos financieros distintos que son medidos en relación al primer activo. Este activo recibe el nombre de *numerario*. Y dado que los precios restantes son medidos relativos al numerario, se puede tomar $S_0(t) = 1$.

Definición 3.1. Sea \mathcal{P} la mínima σ -álgebra sobre $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ que contiene a los conjuntos $\{0\} \times A, A \in \mathfrak{S}_0$ y $(u, v] \times B, B \in \mathfrak{S}_u$, con $0 \leq u < v$. A \mathcal{P} se le denomina la σ -álgebra de los conjuntos predecibles.

Definición 3.2. Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ es \mathfrak{S}_t -predecible si es \mathcal{P} -medible.

A continuación establecemos formalmente el concepto de portafolio financiero. Este es uno de los conceptos que podemos considerar como universales en finanzas.

Definición 3.3. Un *portafolio* es un proceso predecible $(d+1)$ -dimensional denotado por $h = (h_0(t), \dots, h_d(t))$, donde cada $h_i(t)$ es el número de activos del i -ésimo tipo que hay en el portafolio durante el intervalo $(t-1, t]$.

Cuando algún agente del mercado adquiere las cantidades correspondientes a los portafolios $h(0), \dots, h(T-1)$ en los instantes $t = 0, 1, \dots, T-1$, para conformar cualquier estrategia de mercado deberá usar únicamente los recursos y la información disponibles hasta ese momento, atendiendo únicamente al pasado y al presente. Así, podemos decir que el agente no puede ver en el futuro debido a que se consideran estrategias predecibles.

Definición 3.4. Sea $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \geq 0}$ una familia creciente de σ -álgebras de conjuntos de Ω . Un *proceso* $X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama \mathfrak{S}_t -adaptado si para cada $t \geq 0$ la variable aleatoria $X(t, \omega)$ es \mathfrak{S}_t -medible.

Definición 3.5. Si h es un portafolio, el *proceso de valor* de dicho portafolio es $V = (V_t)_{t=0}^T$ y está dado como

$$(Vh)(0) = \sum_{i=0}^d h_i(1)S_i(0) \quad \text{y} \quad (Vh)(t) = \sum_{i=0}^d h_i(t)S_i(t-1), \quad t > 1.$$

Notemos que el proceso de valor es un proceso adaptado, debido a que tanto $S_i(t)$ y $h_i(t)$ son \mathfrak{S}_t -adaptados para toda $t \leq T-1$.

Definición 3.6. Un *portafolio* h es *autofinanciable* si su proceso de valor V satisface

$$\Delta V = \sum_{i=1}^d h_i(t)\Delta(S_i(t)), \quad \forall t \geq 1.$$

Los portafolios autofinanciables son de gran importancia pues son aquellos que no involucran movimientos de entrada o salida de dinero después de $t = 0$. Es decir, que no entran ni salen flujos de efectivo cuando $t > 0$. De esta manera lo que gana o pierde un agente del mercado viene dado mediante la siguiente expresión

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle h(t), S(t+1) - S(t) \rangle = (Vh)(0) + \sum_{t=1}^{T-1} \langle h(t), \Delta S(t) \rangle.$$

Si en general denotamos

$$(h \cdot S)_t = \sum_{u=1}^t \langle h(u), \Delta S(u) \rangle, \quad \forall t \geq 1,$$

entonces

$$(Vh)(t) = (Vh)(0) + (h \cdot S)_t$$

para un portafolio que sea autofinanciable. Una vez establecido lo anterior pasamos a definir el concepto de arbitraje.

Definición 3.7. Una *oportunidad de arbitraje* es un portafolio autofinanciable $h(t)$, para el cual su proceso de valor satisface las siguientes condiciones

- (i) $P[(Vh)(0) = 0] = 1$,
- (ii) $\exists \tau \in I = \{0, 1, \dots, T\}$, tal que $P[(Vh)(\tau) \geq 0] \geq 0$,
- (iii) $P[Vh(\tau) > 0] > 0$.

Si consideramos al conjunto

$$K = \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \langle h(t), \Delta S(t) \rangle : h(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ es } \mathfrak{F}_t\text{-adaptado para } t \in \{0, 1, \dots, T-1\} \right\},$$

tenemos que este es un subespacio de $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$. Este conjunto es el espacio de variables aleatorias real valuadas que son iguales P -casi seguramente (lo que denotaremos en adelante como P -c.s.). Podemos entonces reescribir la definición de arbitraje financiero en términos geométricos.

Definición 3.8. Decimos que *en un mercado financiero no hay arbitraje* si

$$K \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}, P) = \{0\},$$

donde L_+^0 es el cono de variables \mathbb{R} -valuadas que son iguales P -c.s.

Debemos verificar entonces que con las definiciones anteriores, en efecto el subespacio K es cerrado en $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Esto es lo que se establece en el teorema 3.2.

Definición 3.9. Sea $H \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_0, P; \mathbb{R}^d)$. Diremos que H *está en forma canónica para* $(S(0), S(1))$ si $H \in \mathcal{H}^X$, donde

$$\mathcal{H}^X = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f \text{ es } \mathfrak{F}_0\text{-medible y } Pf = f\},$$

aquí $X = S(1) - S(0)$.

A continuación introducimos la notación para sucesiones de integrales estocásticas de menos el máximo. Si $S(t)$ es un proceso adaptado a $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t=0}^T, P)$ y $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en forma canónica perteneciente a $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$, entonces

$$(H \cdot \Delta S)_- = -\max\{H \cdot \Delta S, 0\}.$$

Proposición 3.1. Sea $S = (S(0), S(1))$ un proceso adaptado a $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t=0}^1, P)$ y sea $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_0, P; \mathbb{R}^d)$ en forma canónica. Entonces

- (i) La sucesión $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ es acotada c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)\}_{n=1}^\infty$ es acotada.
- (ii) $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ converge c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)\}_{n=1}^\infty$ converge c.s.

Si suponemos además que el proceso S satisface la condición de no-arbitraje tenemos

- (iii) La sucesión $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ es acotada c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)_-\}_{n=1}^\infty$ es acotada.
 (iv) $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ converge c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)_-\}_{n=1}^\infty$ converge c.s.

Demostración. Véase [3], Cap. 6, pp. 92-93. □

Teorema 3.2. Sea $S = (S(0), S(1))$ un proceso estocástico \mathbb{R}^d -valuado a un paso adaptado a $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t=0}^1, P)$. Entonces

- (i) El subespacio vectorial K es cerrado³ en $L^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P)$.
 (ii) Si S satisface la condición de no-arbitraje, entonces el cono

$$C = K - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P)$$

es cerrado⁴ en $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Nota. A la parte (i) del enunciado se le conoce como el *Lema de Stricker*.

Demostración. (i) Sea $\{f_n\} = \langle H_n, \Delta S \rangle_{n=0}^\infty$ una sucesión en K que converge a $f_0 \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P)$ con respecto a la convergencia en medida. Por simplicidad podemos suponer que H^n está en forma canónica. Por otra parte, pasando a una subsucesión podemos suponer que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge casi seguramente a f_0 .

La Proposición 3.1, implica que la sucesión $\{H^n\}_{n=0}^\infty$ converge casi seguramente a $H^0 \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P; \mathbb{R}^d)$, de modo que $f_0 = \langle H^0, \Delta S \rangle$ y por lo tanto $f_0 \in K$.

(ii) Para probar esta afirmación supongamos que $f_n = g_n - h_n$, es una sucesión que converge en probabilidad a $f_0 \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P)$, donde $g_n = \langle H^n, \Delta S \rangle$, para lo cual H^n es un integrando en forma canónica y $h_n \in L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P)$. Tenemos que probar entonces que $f_0 \in C$, para esto de nueva cuenta podemos suponer que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge casi seguramente a f_0 . Como $f_n \leq g_n$ inferimos que $\{\langle H^n, \Delta S \rangle_-\}_{n=1}^\infty$ es acotada c.s., de tal forma que podemos concluir de la condición de no-arbitraje y de la Proposición 3.1, que $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ también es acotada c.s.

Pasando a una subsucesión parametrizada medible (ver [3], pp. 90) $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ podemos suponer que la subsucesión $g_{\tau_k} = \langle H^{\tau_k}, \Delta S \rangle$ converge casi seguramente a $\langle H^0, \Delta S \rangle$, para algún $H^0 \in E$. Obsérvese que la sucesión $\{f_{\tau_k}\}_{k=1}^\infty$ sigue convergiendo c.s. a f_0 , de modo tal que $h_{\tau_k} = f_{\tau_k} - g_{\tau_k}$ converge casi seguramente a algún $h_0 \geq 0$. Por lo tanto

$$f_0 = \langle H^0, \Delta S \rangle - h_0 \in K - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P) = C. \quad \square$$

Antes de pasar a la demostración, debemos introducir algunos elementos adicionales.

Sean $p, q \in [1, \infty]$, de modo tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y consideremos $E = L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $E' = L^q(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Vamos a denotar por

$$E_+ = \{f \in L^p \mid 0 \leq f \text{ c.s.}\}$$

al cono de variables aleatorias no-negativas en el espacio L^p .

Lema 3.3. Sea $C \subset E$ un cono convexo $\sigma(E, E')$ -cerrado en la topología de E (Ver [6] u [8]) que contiene a E_- y supongamos que $C \cap E_+ = \{0\}$. Entonces existe una medida de probabilidad Q sobre \mathfrak{F} , la cual es equivalente a P , satisface $\frac{dQ}{dP} \in E'$ y es tal que para cualquier $f \in C$, tenemos que $E_Q[f] \leq 0$.

Demostración. Ver [3], Cap. 5, pp. 81-82. □

Pasemos al PTFVA en una versión no-elemental. Esta es de hecho una versión que podemos calificar como intermedia, aunque no por eso menos interesante.

³Esta parte del teorema aparece en: C. Stricker, (1990), *Arbitrage et Lois de Martingale*. Annales de l' Institute Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques, vol 26, pp. 451-460.

⁴La demostración de esta afirmación es debida a Walter Schachermayer y apareció en W. Schachermayer, (1992), *A Hilbert space proof of the fundamental theorem of assets pricing in finite discrete time*. Insurance: Mathematics and Economics, vol. 11, no. 4, pp. 249-257.

Teorema 3.4. (PTFVA). Sea $(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(S(t))_{t=0}^T$ un proceso estocástico \mathbb{R}^d -valuado adaptado a la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t=0}^T$. Entonces se cumple la condición de no-arbitraje

$$K \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_T, P) = \{0\},$$

si y solo si existe una medida de probabilidad equivalente Q , ($Q \sim P$) tal que

- (i) $S(t) \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_T, Q)$, $t = 0, \dots, T$,
- (ii) $(S(t))_{t=0}^T$ satisface la propiedad martingala,
- (iii) $\frac{dQ}{dP}$ es acotada, i.e., $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$.

3.2. La base de la inducción. Vamos a establecer el enunciado del teorema para cuando $T = 1$. Sea $S = (S(0), S(1))$ un proceso \mathbb{R}^d -valuado, $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1)$ -adaptado que satisface la condición de no-arbitraje. Entonces existe una medida de probabilidad Q equivalente a P , tal que

- (i) $S(0), S(1) \in L^1(Q)$
- (ii) $S(0) = E[S(1)|\mathfrak{F}_0]$
- (iii) $\frac{dQ}{dP}$ es acotada.

Consideremos una medida de probabilidad equivalente P_1 , tal que $\frac{dP_1}{dP}$ sea acotada y $S(0), S(1) \in L^1(P_1)$.

En segundo lugar vamos a considerar al conjunto

$$C_1 = C \cap L^1(\Omega, \mathfrak{F}_1, P_1),$$

donde

$$C = K - L_+^0(\Omega, \mathfrak{F}_1, P).$$

En vista de que C es cerrado en $L^0(P)$, el conjunto C_1 es cerrado en $L^1(P_1)$. Tenemos además que C_1 es un cono convexo debido a que C es un cono convexo.

Por la condición de no-arbitraje tenemos que

$$C_1 \cap L_+^1(\Omega, \mathfrak{F}_1, P_1) = 0.$$

Denotamos como

$$E_+ = L_+^1(\Omega, \mathfrak{F}_1, P_1)$$

dado que

$$C_1 \cap E_+ = \{0\},$$

aplicando el lema (3.3), vemos que existe una medida de probabilidad equivalente Q en \mathfrak{F}_1 tal que $\frac{dQ}{dP_1}$ es acotada y $E_Q[f] \leq 0$, $\forall f \in C_1$.

Nota: Observemos que el hecho de que $\frac{dQ}{dP_1}$ sea acotada implica que $S(0), S(1) \in L^1(Q)$.

Puesto que para cada coordenada $j = 1, \dots, d$ y cada $A \in \mathfrak{F}_0$ tenemos que

$$\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j) \in C_1 \quad \text{y} \quad -\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j) \in C_1,$$

entonces

$$E_Q[\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j)] \leq 0 \quad \text{y} \quad E_Q[-\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j)] \leq 0.$$

Esto implica que $E[\mathbf{1}_A(S(1)^j - S(0)^j)] = 0$, con lo que queda demostrado que

$$E_Q[\mathbf{1}_A S(1)^j] = E_Q[\mathbf{1}_A S(0)^j].$$

Así, si usamos el hecho de que $S(0)^j$ es \mathfrak{F}_0 -medible para toda j , de la definición de esperanza condicional se tiene que

$$S(0) = E_Q[S(1)|\mathfrak{F}_0].$$

Por otra parte, dado que $P_1 \sim P$ se tiene que P_1 es absolutamente continua con respecto a P (y viceversa). De donde se sigue que $\frac{dQ}{dP} = \frac{dQ}{dP_1} \frac{dP_1}{dP}$, usando las propiedades de la derivada de Radon-Nikodym (ver [9]). Por consiguiente tenemos que $\frac{dQ}{dP}$ también es acotada.

Con lo anterior hemos demostrado la base de la inducción.

3.3. El paso inductivo. Supongamos ahora que el teorema es válido para cuando hay $T - 1$ periodos de tiempo y sea $(S(t))_{t=1}^T$ un proceso adaptado a la filtración $(\mathfrak{S}_t)_{t=1}^T$. Entonces existe una medida de probabilidad $\tilde{Q} \sim P$, definida sobre \mathfrak{S}_T y tal que

- (i) $\frac{d\tilde{Q}}{dP}$ está acotada
- (ii) $S(1), \dots, S(T) \in L^1(\Omega, \mathfrak{S}_T, \tilde{Q})$
- (iii) $(S(t))_{t=1}^T$ es una \tilde{Q} -martingala, es decir, que para cualquier $t \geq 1, A \in \mathfrak{S}_t$, tenemos

$$\int_A S(t) d\tilde{Q} = \int_A S(t+1) d\tilde{Q}.$$

La base de la inducción aplicada a $(S(t))_{t=0}^1$, al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{S}_1, \tilde{Q})$ y a la filtración $(\mathfrak{S})_{t=0}^1$, nos da una función acotada f_1 , que satisface las siguientes condiciones: (a) La función f_1 es \mathfrak{S}_1 -medible; (b) $f_1 > 0$; (c) $E_{\tilde{Q}}[f_1] = 1$; (d) $E_{\tilde{Q}}[|S(1)|f_1] < \infty$; (e) $E_{\tilde{Q}}[|S(0)|f_1] < \infty$ y (f) Para cualquier $A \in \mathfrak{S}_0$ tenemos

$$(3) \quad \int_A S(0) f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1) f_1 d\tilde{Q}.$$

Sin embargo, queda por especificar quien es f_1 . La base de la inducción nos provee de una medida Q equivalente a P en \mathfrak{S}_1 , y la hipótesis de inducción de una medida \tilde{Q} equivalente a P en \mathfrak{S}_T . De esta manera podemos definir $f_1 = \frac{dQ}{d\tilde{Q}}$, y es fácil entonces demostrar las propiedades mencionadas en el párrafo anterior.

Si para cualquier $A \in \mathfrak{S}_T$, definimos a la medida de probabilidad Q sobre la σ -álgebra \mathfrak{S}_T mediante la regla

$$Q(A) := \int_A f_1 d\tilde{Q},$$

entonces

$$(4) \quad \frac{dQ}{dP} = f_1 \frac{d\tilde{Q}}{dP}$$

es una variable aleatoria acotada, por (iii) de la base de la inducción. Por (b) tenemos la positividad de f_1 y dado que $\tilde{Q} \sim P$, se sigue que $\frac{d\tilde{Q}}{dP} > 0$ c.s., por lo tanto $\frac{dQ}{dP} > 0$ c.s., y así $Q \sim P$.

Debemos revisar ahora las propiedades de integrabilidad y la propiedad martingala para nuestro proceso. Así, cuando $t = 1, \dots, T$, tenemos

$$(5) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} |S_t| dQ &= \int_{\Omega} |S(t)| \frac{dQ}{d\tilde{Q}} d\tilde{Q} \\ &= \int_{\Omega} |S(t)| f_1 d\tilde{Q} < \infty. \end{aligned}$$

La propiedad martingala de $(S(t))_{t=0}^T$ se obtiene de la siguiente manera. De la ecuación (3.2) tenemos que

$$\int_A S(0) f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1) f_1 d\tilde{Q}, \quad \forall A \in \mathfrak{S}_0.$$

Por otra parte, si en la ecuación (3.4) usamos $t = 0$ y $t = 1$, llegamos a que

$$\int_A S(0) dQ = \int_A S(0) f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1) f_1 d\tilde{Q} = \int_A S(1) dQ.$$

Si ahora consideramos $A \in \mathfrak{S}_t$, cuando $T \geq 1$ tenemos que

$$(6) \quad \int_A S(t) dQ = \int_A S(t) f_1 d\tilde{Q}$$

y

$$(7) \quad \int_A S(t+1) dQ = \int_A S(t+1) f_1 d\tilde{Q}.$$

Lo que resta probar es que las dos ecuaciones anteriores son iguales. Recordemos que f_1 es \mathfrak{S}_1 -medible y acotada (Lema 3.3). Además, dado que $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{S}_T$, se tiene que f_1 es \mathfrak{S}_t -medible para toda $t = 1, \dots, T$. Usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\int_A S(t)d\tilde{Q} = \int_A S(t+1)d\tilde{Q}, \quad \forall A \in \mathfrak{S}_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Esto implica que

$$\int_A S(t)dQ = \int_A S(t)f_1d\tilde{Q} = \int_A S(t+1)f_1d\tilde{Q} = \int_A S(t+1)dQ,$$

es decir,

$$\int_A S(t)dQ = \int_A S(t+1)dQ, \quad \forall A \in \mathfrak{S}_t.$$

Con lo que queda demostrado que $(S(t))_{t=1}^T$ es una Q -martingala.

Probamos ahora la implicación recíproca. Supongamos que existe la medida martingala equivalente Q . Si $f \in K$, se sigue que $E_Q[f] = 0$. Como

$$K \subset L_+^0(\Omega, \mathfrak{S}, Q),$$

se tiene que si $f \in L_+^0(\Omega, \mathfrak{S}, Q)$, entonces

$$E_Q[f] = 0 \iff f = 0 - c.s.$$

Así, tenemos que $K \cap L_+^0(\Omega, \mathfrak{S}, Q) = \{0\}$. □

Hemos demostrado así la versión de Dalang-Morton-Willinger del Primer Teorema Fundamental. Si bien esta es una prueba constructiva, también es posible establecer este resultado en términos de la cerradura del cono convexo C (véase [11]).

Notemos además, la brevedad de esta última implicación. En general todos los desarrollos giran en torno a la implicación de que si no hay arbitraje, entonces hay una medida martingala equivalente.

4. UN CONTRAEJEMPLO AL PTFVA

Existen gran cantidad de ejemplos de aplicación para el PTFVA en tiempo discreto y horizonte temporal finito. No obstante cuando se considera un número infinito de periodos de tiempo, la implicación *No arbitraje implica la existencia de una MME* no se satisface. Este hecho es una consideración importante que comenta S. Pliska en [7].

Aclaremos primero a que nos referimos con horizonte infinito. Si consideramos un modelo de mercado para el cual el índice t indica el número de periodos, así como el tiempo transcurrido y para el cual cabe la posibilidad de que $T = \infty$ entonces hablamos de un modelo con horizonte temporal infinito.

Cierto tipo de estrategias consideradas como patológicas dentro de los mercados financieros dinámicos son los llamados “dobleteos”. Estas estrategias de mercado acarrear arbitraje si el espacio de estados no es finito. El problema del dobleteo radica en el hecho de que no tiene costo alguno, sin embargo dicha estrategia converge con probabilidad 1 a algo positivo.

4.1. El modelo binomial 1-periodo. El modelo binomial 1-periodo es la herramienta básica para entender los principios de la *valuación por arbitraje*. Y nos será de utilidad en la construcción de una estrategia de mercado que no satisface el PTFVA. En este modelo se considera un activo del stock cuyo precio unitario se denota por S_0 al tiempo $t_0 = 0$. Al tiempo t_1 el precio de este activo puede tomar uno de dos valores denotados como S_1^u si el mercado sube, y S_1^d si el mercado baja. Existe una medida de probabilidad asociada de tal manera que la probabilidad de que el precio de mercado suba es p , y la probabilidad de que el precio de mercado baje es $q = 1 - p$. Esto es lo que se ilustra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 & & S_1^u = uS_0 \\
 & \nearrow & \\
 S_0 & & \\
 & \searrow & \\
 & & S_1^d = dS_0
 \end{array}$$

Notemos que se introducen los factores

$$u = \frac{S_1^u}{S_0} \text{ y } d = \frac{S_1^d}{S_0},$$

los cuales son ambos positivos y satisfacen la desigualdad $d < u$. Si ocurre que $u = d$ el precio del stock no es aleatorio y el modelo es completamente trivial.

Introducimos además una *tasa de interés constante* r . Con la cual una unidad monetaria invertida en $t_0 = 0$, nos produce un total de $1 + r$ unidades monetarias al siguiente periodo de tiempo. Similarmente si se pide un préstamo a la tasa r , al final del periodo se tendrá una deuda de $1 + r$ unidades monetarias. En particular suponemos que la tasa de interés para un préstamo es la misma que para una inversión. Más aún, es sencillo verificar que para este modelo la única posibilidad de que no existan oportunidades de arbitraje es que se cumpla

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Para el modelo binomial 1-periodo un *derivado financiero* es un activo del mercado que paga cierta cantidad S_1^u al tiempo uno si el mercado sube y paga una cantidad diferente S_1^d si el precio del mercado baja. Las *opciones* constituyen un tipo particular de derivados financieros. El perfil de pago de una opción de compra de tipo europeo (call europeo) es $(S_1 - K)^+$, donde K es un valor constante que corresponde al precio de ejercicio de la opción.

En este caso la valuación por arbitraje se usa para encontrar el precio del derivado al tiempo cero, que es cuando se introduce al mercado. La idea es *replicar* al derivado⁵ de alguna manera. Si comenzamos con una riqueza inicial de X_0 y adquirimos Δ_0 activos del stock al tiempo cero, el portafolio $h(0) = (X_0, -\Delta_0)$ tiene el balance

$$(Vh)(0) = X_0 - \Delta_0 S_0.$$

Esto implica que al tiempo uno podemos alcanzar un portafolio para el cual su balance es

$$(Vh)(1) = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0),$$

en vista de la adquisición de Δ_0 en t_0 . Si elegimos las cantidades de riqueza inicial X_0 y Δ_0 de modo tal que $X_1^u = (Vh^u)(1)$ y $X_1^d = (Vh^d)(1)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1^u - S_0 \right) &= \frac{1}{1+r} (Vh^u) \\
 X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1^d - S_0 \right) &= \frac{1}{1+r} (Vh^d)
 \end{aligned}$$

Una manera para resolver este sistema de ecuaciones es multiplicar la primera ecuación por un número \tilde{p} y la segunda por $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$. Sumando ambas ecuaciones llegamos a

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} [\tilde{p}S_1^u + \tilde{q}S_1^d] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_1^u + \tilde{q}V_1^d]$$

Si

$$S_0 = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}S_1^u + \tilde{q}S_1^d],$$

⁵La replicación financiera se refiere a igualar el valor de algún instrumento financiero mediante otro tipo de instrumentos del mismo mercado.

obtenemos la fórmula para la riqueza inicial necesaria en la replicación

$$X_0 = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_1^u + \tilde{q}V_1^d].$$

Más aún, podemos encontrar fácilmente los valores de \tilde{p} y \tilde{q} , en términos de la tasa de interés y de los factores u y d . Así

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \text{ y } \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

El número de activos Δ_0 que debemos adquirir al inicio está dado por la llamada *delta para la cobertura*

$$\Delta_0 = \frac{V_1^u - V_1^d}{S_1^u - S_1^d}.$$

Y en vista de que queremos replicar una posición corta⁶ para el derivado por $(Vh)(1)$, este activo debe tener el precio

$$V(0) = X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} [\tilde{p}S_1^u + \tilde{q}S_1^d] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_1^u + \tilde{q}V_1^d]$$

al tiempo cero para no acarrear arbitraje.

El objetivo del siguiente ejemplo es mostrar que cuando se trabaja con un número infinito de periodos de tiempo, siempre es posible obtener una ganancia estrictamente positiva (digamos de \$1) con probabilidad uno, es decir, se logra un arbitraje. Implícitamente aparece una medida de probabilidad asociada y se pueden calcular explícitamente las probabilidades neutras al riesgo. Más no es lo que nos acomete en este momento.

Ejemplo 4.1. Consideremos un modelo binomial 1-periodo. Sean $u = 1.1$ y $d = 0.9$, los factores multiplicativos dependiendo si el precio del stock sube o baja. Supongamos que la tasa libre de riesgo es $r = 0$.

Si al tiempo $t = 0$ conformamos el portafolio $h(0) = (-10, 10) \sim (\text{efectivo}, \text{stock})$, usando el modelo binomial tenemos el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} & & S_1^u = 11 \\ & \nearrow & \\ S_0 = 10 & & \\ & \searrow & \\ & & S_1^d = 9 \end{array}$$

Con esta estrategia podemos lograr un “doblesteo”. Pidiendo un préstamo por \$10 para armar el portafolio, si el precio sube al tiempo uno podemos pagar el préstamo y quedarnos con \$1 libre. Por otro lado, si el precio del mercado baja quedamos en deuda por \$1. Sin embargo, una manera de “pararse de nuevo” es pedir un préstamo que duplique la cantidad inicial invertida, por ejemplo \$11. Así, al tiempo 1 tenemos \$1 para nuestras arcas y conformamos el portafolio $h(1) = (-20, 20)$. De acuerdo al modelo binomial tendríamos

$$\begin{array}{ccc} & & S_1^u = 22 \\ & \nearrow & \\ S_0 = 20 & & \\ & \searrow & \\ & & S_1^d = 18 \end{array}$$

En este caso si el mercado sube podemos pagar la deuda y retirarnos con \$1. Aunque si el mercado cae estaremos endeudados con \$3, por lo que si queremos tener siempre una ganancia de \$1, tendríamos que recurrir a la misma estrategia otra vez.

⁶Dentro de la jerga financiera se entiende que es algo que ya no se tiene o que se debe.

Podemos ver con este ejemplo que siempre que ocurra un movimiento de subida del mercado durante los primeros t periodos de tiempo, habremos logrado el objetivo de \$1 para nuestro bolsillo. Si por el contrario no ocurre un solo movimiento de subida durante los t primeros periodos, la deuda ascenderá a $1 - 2^t$. Con esto deberemos $11 \cdot 2^{t-1} - 1$, por encima del préstamo inicial y la inversión en el mercado es de $9 \cdot 2^{t-1}$, pues

$$\begin{aligned} 1 - 2^t &= 9 \cdot 2^{t-1} - 9 \cdot 2^{t-1} - 2 \cdot 2^{t-1} + 1 \\ &= 9 \cdot 2^{t-1} - (9 + 2) \cdot 2^{t-1} + 1 \\ &= 9 \cdot 2^{t-1} - [11 \cdot 2^{t-1} - 1]. \end{aligned}$$

En esta situación al tiempo t , para mantenerse andando el préstamo debe ser de $11 \cdot 2^{t-1}$. Con esto la inversión para este periodo de tiempo sube a $10 \cdot 2^t$. Así, si consideramos un número infinito de periodos de tiempo, la probabilidad de que el mercado siempre esté a la baja es cero. Por lo que en algún momento podremos realizar un arbitraje vía el “dobleteo”.

4.2. El contraejemplo de Pliska. El siguiente ejemplo es debido a Stanley Pliska ([7], pp. 246-248). En éste se muestra como en un mercado con un horizonte temporal infinito, la versión del PTFVA que manejamos en este trabajo no se cumple.

Consideremos un modelo de mercado con un activo con riesgo denotado por S , una tasa asociada constante $r = 0$ y un espacio de probabilidad contable $\Omega = \{1, 2, \dots\}$. Hagamos $S_0 = 1$ y para cualesquiera $t \geq 1$ y $\omega \in \Omega$ sea

$$S_t(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^t & , t < \omega; \\ (\omega^2 + 2\omega + 2) \left(\frac{1}{2}\right)^\omega & , t \geq \omega. \end{cases}$$

El cambio en el precio del activo con riesgo por periodo de tiempo viene dado mediante la siguiente expresión

$$\Delta S_t(\omega) = S_t(\omega) - S_{t-1}(\omega) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\right)^t & , t < \omega; \\ (\omega^2 + 2\omega) \left(\frac{1}{2}\right)^\omega & , t = \omega; \\ 0 & , t > \omega. \end{cases}$$

Intuitivamente esto quiere decir que en el estado del mundo ω , el precio cae un 50% por periodo para $\omega - 1$ periodos consecutivos. Del tiempo $\omega - 1$ al tiempo ω el precio aumenta en $(\omega^2 + 2\omega) \left(\frac{1}{2}\right)^\omega$. Es decir, si $t = \omega$

$$\begin{aligned} (8) \quad \Delta S_t(\omega) &= S_\omega(\omega) - S_{\omega-1}(\omega) \\ (9) &= (\omega^2 + 2\omega + 2)(1/2)^\omega - (1/\omega)^\omega - 1 \\ (10) &= (\omega^2 + 2\omega)(1/2)^\omega + 2(1/2)^\omega - (1/2)^\omega - 1 \\ (11) &= (\omega^2 + 2\omega)(1/2)^\omega. \end{aligned}$$

A partir de $t > \omega$ el precio permanece constante, es decir, para $t > \omega$ el valor del portafolio no cambia.

Sea $H(t)$ el número de activos con riesgo que se tienen del tiempo $t - 1$ al tiempo t . En vista de la naturaleza del proceso de precios, sin pérdida de generalidad podemos concentrarnos en aquellas estrategias para las cuales $\{H_t\}_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}$. Algo importante que debemos considerar es que la sucesión $\{H_t\}_{t \geq 1}$ es acotada (para evitar “dobleteos”) y que además cada estrategia de la sucesión es autofinanciable. De tal manera que las estrategias admisibles son descritas completamente por la riqueza inicial V_0 y la sucesión acotada $\{H_t\}_{t \geq 0}$.

Si consideramos la estrategia admisible $(V_0, \{H_t\}_{t \geq 0})$, el valor del portafolio es

$$V_t(\omega) = \begin{cases} V_0 - \sum_{s=1}^t (1/2)^s H_s & , t < \omega; \\ V_0 - \sum_{s=1}^{\omega-1} (1/2)^s H_s + (\omega^2 + 2\omega)(1/2)^\omega H_\omega & , t \geq \omega. \end{cases}$$

Como estamos suponiendo que la sucesión $\{H_t\}_{t \geq 0}$ es acotada, entonces el proceso para el valor del portafolio es acotado inferiormente.

La ausencia de oportunidades de arbitraje se sigue de tres factores: La fecha en la que el precio crecerá es impredecible; si ω es suficientemente grande el precio estará bajo aún cuando haya habido cierto crecimiento y solamente se permiten estrategias acotadas.

Sea B_t un factor de descuento y definamos $V_t^* = \frac{V_t}{B_t}$, así $V_0 = V_0^*$. Si $V_0 = 0$ y $\{H_t\}$ es tal que $V_t \rightarrow V$, con $V(\omega), \forall \omega \in \Omega$, entonces

$$(12) \quad - \sum_{t=1}^{\omega-1} \left(\frac{1}{2}\right)^t H_t + (\omega^2 + 2\omega) \left(\frac{1}{2}\right) H_\omega \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que para algún $k \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$(13) \quad \sum_{t=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^t > \epsilon.$$

Usando inducción matemática y la ecuación (12), llegamos a

$$(14) \quad (\omega^2 + 2\omega) \left(\frac{1}{2}\right)^\omega H_\omega > \epsilon, \quad \forall \omega > k.$$

Sin embargo, esto no puede ocurrir dado que la sucesión $\{H_t\}_{t \geq 0}$ es acotada. De esta manera no existe ningún $k \in \mathbb{Z}$, ni tampoco $\epsilon > 0$ tales que se cumpla (13). Es decir, debe ser

$$(15) \quad \sum_{t=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Si en la ecuación (14) tomamos $\omega = 1$ y $k = 1$, tenemos que $H_1 = 0$. Y en general cuando consideramos $H_1 = H_2 = \dots = H_{k-1} = 0$, las ecuaciones (12) y (15) implican que $H_k = 0$. Esto indica que nuestro candidato a oportunidad de arbitraje cumple con la condición $H_t = 0$ para cualquier elección de t , con lo que se concluye que no pueden existir oportunidades de arbitraje.

Por una parte ya verificamos que no hay arbitraje, lo que resta es ver que sucede en relación a la posible existencia de una medida de probabilidad equivalente a la medida neutra al riesgo. Para esto supongamos que q_{t-1} es la probabilidad condicional neutra al riesgo de que se de un movimiento a la alza del tiempo $t - 1$ al tiempo t .

La correspondiente esperanza condicional de ΔS_t debe ser cero, i. e.,

$$q_{t-1}(t^2 + 2t) \frac{1}{2^t} + (1 - q_{t-1}) - \frac{1}{2^t} = 0, \quad \forall t \geq 1.$$

La probabilidad incondicional $Q(\omega \geq t)$ debe igualar $(t + 1)/2t$, lo que converge a $1/2$, cuando t es arbitrariamente grande.

Para tener una medida de probabilidad válida, debe suceder que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\omega \geq t) = 0,$$

mientras que en nuestro caso el límite es $1/2$. De esta manera no existe ninguna medida de probabilidad equivalente bajo la cual el proceso de precios descontado sea martingala, con lo que se muestra que el PTFVA no se cumple en este caso.

5. AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer al Dr. Julio Cesar García Corte por sus comentarios y aclaraciones. De igual manera al árbitro que revisó este trabajo por sus observaciones y sugerencias.

REFERENCIAS

- [1] N.H. Bingham, R. Kiesel, Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives. Springer, Heidelberg, second edition, 2004.
- [2] Ph. Dybvig and S. Ross, *Arbitrage*. In: The new palgrave: a dictionary of finance, pp. 57–71, J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, Eds., WW Norton NYC, 1987.
- [3] F. Delbaen and W. Schachermayer, The Mathematics of Arbitrage. Springer Heidelberg New York, 2006.

- [4] C. Ibarra, La Fórmula de Black-Scholes. Notas de Métodos Matemáticos para Finanzas II, MCMAI, UAM-I, 2009.
- [5] S. Leroy and J. Werner, Principles of Financial Economics. Cambridge University Press, 2001.
- [6] R. E. Megginson, An Introduction to Banach space Theory. Springer-Verlag, 1998.
- [7] S. Pliska, Introduction to Mathematical Models: Discrete Models. Blackwell Publishing, 1997.
- [8] D. L. Royden, Real Analysis. Prentice Hall, Inc., 1998.
- [9] W. Rudin, Functional Analysis. McGraw-Hill, 1973.
- [10] A. Sánchez Peralta, *El Primer Teorema Fundamental de Valación de Activos*. Tesis de Maestría, MCMAI, UAM-I, 2010.
- [11] W. Schachermayer, *A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time*. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 11, No. 4, pp. 249–257, 1992.

Dirección del autor:

Alejandro Sánchez Peralta
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: sanchez.alexito@gmail.com



Casa abierta al tiempo

UAM-Iztapalapa



Posgrados : Maestría y Doctorado en Matemáticas

pmat@xanum.uam.mx

<http://pmat.izt.uam.mx/>

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Teoría de anillos y módulos.
Teoría de conjuntos y lógica.
Geometría algebraica.
Geometría diferencial y Riemanniana.
Teoría de números.
Teoría de códigos y criptografía.
Análisis geométrico.
Física matemática.
Análisis diferencial.
Matemáticas discretas, combinatoria y gráficas.
Dinámica de fluidos computacional.
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.
Métodos matemáticos en finanzas y economía.
Control y sistemas dinámicos.
Mecánica celeste, sistemas hamiltonianos y aplicaciones a la física.
Persistencia y bifurcación en sistemas dinámicos.
Control, estabilidad y robustez de sistemas estocásticos.
Metodología estadística.
Estadística asintótica.
Topología de conjuntos, grupos topológicos y Cp-teoría.
Métodos geométricos en mecánica. Dinámica de vórtices. Mecánica celeste

matemáticas

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales (MACMAI)

mlss@xanum.uam.mx

<http://mcmai.izt.uam.mx>

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Códigos y Criptografía
Control y Sistemas Dinámicos
Combinatoria y Optimización
Estadística
Métodos Matemáticos en Finanzas
Modelación y Simulación Computacional



UAM-Iztapalapa

CONTENIDO

9 Variedades Lagrangianas y aplicaciones a la Física
Joaquín Delgado Fernández

29 La teoría ZF
Juan Carlos Aguilar Franco

41 Producción de Entropía en Cadenas de Markov
Jorge Bolaños Servín

**59 Propiedades relacionadas a la compacidad
definida por redes**
Maira Madriz Mendoza

67 Control de Sistemas Cuánticos
Marco Antonio Cruz de la Rosa

**83 El Primer Teorema Fundamental de Valuación
de Activos para tiempo discreto y horizonte
finito**
Alejandro Sánchez Peralta