



LA INTUICIÓN Y LA ESTRUCTURA ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.

LUIS MORENO ARMELLA

INTRODUCCIÓN

Las culturas matemáticas anteriores a la cultura griega, por ejemplo, las de Mesopotamia y Egipto, tuvieron un marcado rasgo empírico. Desarrollaron conocimientos prácticos aplicados a la medición de tierras, a la arquitectura y a la cosmología. Por ejemplo, sabían que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades, es un triángulo rectángulo. Tal vez *el hecho* en sí era lo que les interesaba y no era necesario ir más lejos en busca de *una razón* que lo explicara.

Al enfrentarse a la complejidad de su mundo, la cultura griega, adoptó una estrategia diferente. Los griegos se plantearon un acercamiento a los fenómenos del mundo mediante la *búsqueda de razones*. Explicar consistía, para ellos, en encontrar razones.

Desde luego, la cultura griega no es un fenómeno aislado en la historia. Como todas, la suya es una cultura que se nutrió del contacto con otras y, de manera significativa, del impacto de la escritura. Pasar de ser un mundo oral a ser un mundo en el cual la escritura encontró una atmósfera propicia para su desarrollo, tuvo consecuencias determinantes sobre el curso que tomaron los acontecimientos entre los griegos. Previamente, los sumerios habían creado hacia el año 3500 a. C., el que tal vez haya sido el primer sistema de escritura, (véase D. Schmandt-Besserat, 1996).

En el desarrollo de la escritura se llegó, eventualmente, a la versión alfabética. Esa fue la que acogieron los griegos adoptando una forma previa desarrollada por los fenicios.

La escritura es el resultado más acabado de los esfuerzos del ser humano para producir soportes externos de la memoria. Las marcas encontradas en huesos de hace 35 mil años, por ejemplo, (Moreno, Hegedus y Kaput, 2008) atestiguan la necesidad de prolongar externamente la memoria. Esto ocurre a medida que las comunidades desarrollan actividades crecientemente complejas y aumenta casi sin control lo que hay que recordar. Así ocurrió originalmente en Sumeria en el terreno de los intercambios comerciales y, de este lado del mundo, en el seno de la cultura Maya.

Entre los griegos, se fue más allá y de hecho reflexionaron profundamente sobre las consecuencias cognitivas que venían de la mano de la escritura. En su obra *Fedro*, Platón dice:

Este descubrimiento tuyo creará el olvido en el espíritu de los estudiosos, pues ya no tendrán que recordar; pondrán toda su fe en los caracteres externos y no recordarán por sí mismos...

Consciente pues del impacto que aquella tecnología estaba produciendo en la sociedad. Esta actitud no es exclusiva de Platón, desde luego. Hoy día podemos leer (resaltamos: *leer*) sobre las preocupaciones en nuestra sociedad por los efectos que Google pueda tener entre nosotros. Por ejemplo, recientemente ha salido a la luz un libro de N. Carr (2011) con el inquietante título: *Superficiales ¿Qué está haciendo internet con nuestras mentes?* y allí se pregunta si no estaremos sacrificando nuestra capacidad para *leer* y pensar con profundidad. ¿Qué habría pensado Platón si supiera que pensar con profundidad está hoy ligado a la escritura?

La escritura trajo una revolución en la comunicación, en la manera de capturar las ideas y, más profundamente todavía, generó una especie de espejo cognitivo donde se puede mirar lo que uno mismo ha escrito y tomar distancia sobre el pensamiento propio.

No podría entenderse la cultura matemática griega sin la escritura que da estabilidad a la reflexión y produce una copia de las ideas que atraviesa el tiempo y el espacio. Esa copia siempre está ante nuestros ojos guardando las ideas que serán activadas mediante la lectura. La idea misma de estudiar difícilmente existe en una cultura oral.

Sin duda, la racionalidad con la que los griegos proyectaron su mirada sobre el mundo tuvo en la escritura una de sus raíces principales. Entre los matemáticos, el resultado fue descomunal. Ante nuestros ojos está la obra de sistematización de Euclides que como un hilo, enhebra los resultados previos, las perlas del collar. Pero es el hilo el que sostiene al collar, no las perlas. La escritura permite descontextualizar las ideas y abstraerlas de las situaciones concretas de donde emergen. Cuando esto se logra, entonces se pueden extraer principios generales que de otro modo permanecerían ocultos. Un poco de experiencia matemática permite reconocer esta cualidad entre los griegos, en particular entre los filósofos y matemáticos. Alrededor del siglo VI a. C., los pensadores pitagóricos ya habían iniciado una labor de refinamiento de sus nociones matemáticas tornándolas gradualmente en herramientas conceptuales mediante las cuales podían construir modelos de interpretación del mundo material. En efecto, los pitagóricos habían tenido la idea de que los números constituían la estructura profunda del mundo. Si uno podía observar cuidadosamente un fenómeno, debía ser capaz de percibir, con el entendimiento, su íntima naturaleza numérica. Las matemáticas pitagóricas constituían entonces una especie de esqueleto, de estructura interna de la realidad material. Esa misma idea la iba a expresar mucho tiempo después Galileo cuando en su obra *El Mensajero Celeste* de 1610, expresa que *el universo está escrito en caracteres matemáticos*. Lo dice en un párrafo que vale la pena citar por lo que revela de su concepción de las matemáticas (Kline, 1985, p. 95):

La [naturaleza] está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos. Me refiero al universo, pero no podemos comprenderlo si no aprendemos el lenguaje y dominamos los símbolos en el que está escrito. El libro está escrito en el lenguaje matemático, y los símbolos son los triángulos, los círculos y otras figuras geométricas sin cuya ayuda es humanamente imposible comprender una sola palabra de lo que dice; sin él vagamos sin rumbo en un oscuro laberinto.

Para Galileo (al igual para Newton y muchos otros que compartieron convicciones e ideología de su cultura matemática) el conocimiento matemático era absoluto y sus búsquedas iban orientadas a entender cómo era que Dios había diseñado el plan matemático del universo. Entre los años 600 y 300 a.C., tuvo lugar lo que los historiadores han llamado el cénit de la cultura griega. En esa etapa tomó cuerpo la convicción de que había un orden interno en la naturaleza, que los acontecimientos no estaban regidos por el azar. Fue ganando terreno la consideración de que unas pocas pero cuidadosas observaciones del mundo material podrían constituir las bases para ir encontrando *mediante el razonamiento*, el orden, la estructura subyacente en la naturaleza.

Bajo esa convicción se desarrolló la geometría que reflejaba la estructura matemática del mundo material. La racionalidad era el instrumento para develar lo que estaba oculto tras la fachada material dando acceso a la verdadera naturaleza, a saber, la naturaleza matemática.

En manos de Euclides (330-275 a.C.) la geometría alcanzaría una organización global mostrando así toda la fuerza del método deductivo. Es admirable cómo a partir de unos pocos *acuerdos* (los llamados postulados) desarrolla todo el cuerpo matemático que se había venido acumulando durante siglos.

Es crucial señalar que la manera de entender lo que es un sistema axiomático hoy en día, es radicalmente distinta a como la entendía Euclides. La investigación de la naturaleza ya desde los tiempos de Pitágoras, estaba encaminada a revelar su esencia que debía ser matemática. Por lo tanto, los postulados tal y como los recoge Euclides no son proposiciones arbitrarias sino proposiciones sobre las que se está de acuerdo puesto que reflejan verdades evidentes sobre el mundo material. De allí que el listado de sus postulados empiece con el *acuerdo*:

Dos puntos determinan una única recta.

Esta es, desde luego, la versión geométrica de una observación sencilla pero básica: tensar una cuerda. A partir de los postulados se deduce racionalmente todo el cuerpo geométrico. Pero siempre está presente, en la mentalidad del matemático griego, que el proceso deductivo es el método para extraer *verdades* de la naturaleza.

Pero había un problema: si se dice que *por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela*, entonces estamos afirmando algo sobre el comportamiento de una recta más allá de donde alcanza nuestra visión, más allá de donde la evidencia perceptiva nos pueda informar (Hilbert no tenía ese problema pues para él, el postulado no comportaba el requerimiento de evidencia sino tan solo el de coherencia lógica. Pero todavía no llegamos a este punto). Euclides lo comprendió muy bien, si seguimos atentamente lo que hizo entonces: eligió la siguiente versión del postulado,

Dadas dos rectas, m y n , y una transversal t , si la suma de los ángulos (α y β) del mismo lado de la transversal es menor que dos rectos, entonces al prolongar las rectas m y n , se cortarán de ese lado (véase figura 1).

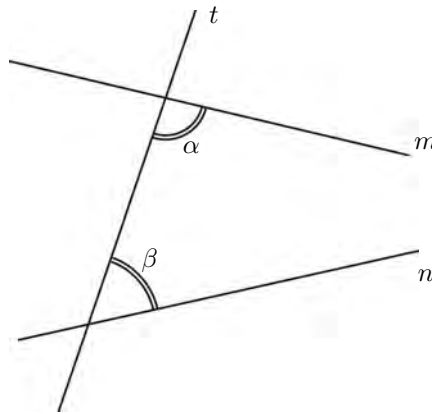


FIGURA 1.

Euclides debió pensar y con razón, que de esta manera se evitaba la alusión a lo que ocurría con las rectas al prolongarlas más allá de donde el control perceptivo podía dar fe del comportamiento de dichas rectas. Recuérdese la expresión: *por más que se prolonguen nunca llegan a cortarse* que se suele emplear para dar una descripción del comportamiento de dos rectas que son paralelas. El postulado afirma que hay *una única* que se comporta de tal manera, bajo ciertas condiciones. Pues bien, esa falta de evidencia es lo que Euclides evitó con su nueva versión del postulado. Sin embargo, esta nueva versión conllevaba otros problemas: el enunciado es muy largo, tiene una hipótesis sobre la suma de ángulos que se forman con una transversal y concluye que, bajo esa condición las rectas (m y n en la figura anterior) se cortan.

Los postulados debían ser proposiciones concisas, que expresaran un hecho básico, con una carga de evidencia que los hiciera incontestables. La versión de Euclides, empero, tenía más los rasgos de un teorema que de un postulado. Euclides se encontraba en una encrucijada. ¿Qué hacer entonces? En su mundo cultural no tenía cabida el infinito. La racionalidad griega era la fuente de sus concepciones matemáticas y estaba orientada hacia un ideal de simplicidad. Frente al postulado de las paralelas se levantaba un dilema: optar por lo escueto de un enunciado que hacía explícita la presencia (indeseada) del infinito, o elegir la versión que finalmente eligió Euclides, pagando el costo de un enunciado alejado de la concisión propia de los principios de donde debía partir el proceso deductivo en el plan euclidiano de reorganización del conocimiento.

Los estudiosos del tema están casi todos de acuerdo en que Euclides mismo debió sentir cierta incomodidad, cierta reticencia al empleo de este postulado: no lo utilizó a lo largo de las primeras 28 proposiciones del libro 1 de sus Elementos. No por consideraciones lógicas

principalmente, insistimos, sino por la falta de correspondencia del postulado con un hecho que resultara evidente por sí mismo. Naturalmente el proceso deductivo era lógico, pero no así la elección de los postulados.

En consecuencia, si los postulados provenían de observaciones finas de la naturaleza, el proceso deductivo tendría como frutos, verdades sobre la naturaleza. Esto será crucial a lo largo de la historia que aquí se está tratando de narrar.

Las primeras 26 proposiciones se refieren a la geometría del triángulo. Luego, entre la 27 y la 34 se exploran los teoremas relativos a los ángulos que forman dos rectas cortadas por una transversal. Vale la pena recordar algunas de ellas. Por ejemplo, la proposición 27 dice:

Si una transversal t corta dos rectas m y n de modo tal que los ángulos α y β sean iguales entonces las rectas m y n son paralelas.

La demostración procede por contradicción: si m y n se cortaran (véase la figura 2) en un punto P , entonces en el triángulo que se forma el ángulo exterior β sería igual al ángulo interior no adyacente α . Esto es una contradicción pues ya ha sido demostrado (proposición 16) que un ángulo externo es mayor que el ángulo interno no adyacente en un triángulo. Pero

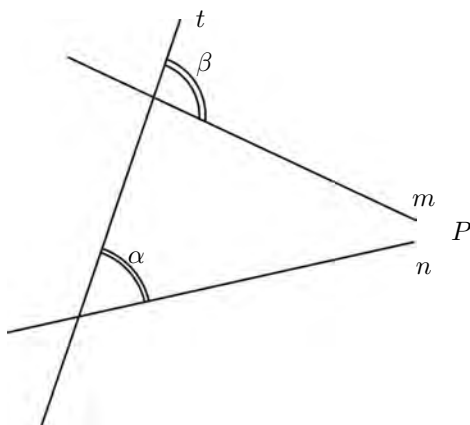


FIGURA 2.

finalmente llega la proposición 29 y entonces Euclides ya no logra evitar el concurso de su *incómodo* postulado de las paralelas. Esta proposición 29 constituye así, en el seno de la obra euclidiana, el punto de inflexión más allá del cual entramos propiamente al mundo euclidiano. Esta proposición crucial dice:

Sea t una transversal a las rectas paralelas m y n . Entonces los ángulos alternos internos α y β son iguales.

(véase la figura 3).

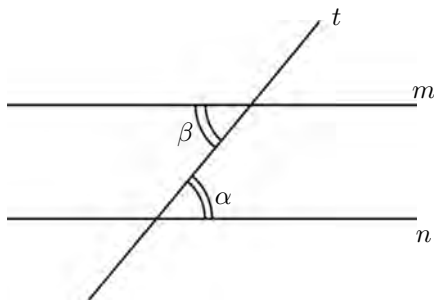


FIGURA 3.

A partir de aquí, ya se podrá demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo equivale a dos rectos (es decir a 180°). Aún más: este último resultado ¡es equivalente al postulado de las paralelas!

Euclides no solamente heredó a las generaciones que lo sucedieron, una obra maestra. También les heredó lo que devendría una tormenta intelectual, a saber, dilucidar la naturaleza del quinto postulado. ¿Era necesario como postulado? ¿o podría demostrarse como un teorema más?

La búsqueda de respuestas a estos interrogantes constituye una de las aventuras más extraordinarias de la historia de las matemáticas.

1. LA INTUICIÓN Y LA LÓGICA I

Los segmentos son abstracciones de cuerdas tensas y por lo tanto la manera como se representan debe trasladar a la representación las propiedades básicas de una cuerda tensa.

Las representaciones euclidianas de segmentos, triángulos, circunferencias y demás objetos geométricos, son esencialmente *representaciones que miran al mundo material*. Por eso mismo, los postulados euclidianos son *verdades evidentes en sí mismas*.

Solamente hay un espacio y el sistema euclidiano lo retrata fielmente. Esta concepción del espacio y más generalmente, la idea de que las matemáticas reflejan la esencia de la naturaleza, puede verse reflejada de mil maneras en la historia de las ciencias. Por ejemplo, Laplace (1749-1827) solía decir que Newton era el científico con mejor suerte ya que solamente había un universo y él, Newton, ya lo había explicado.

El descontento con el postulado de las paralelas provenía esencialmente de su falta de evidencia, en una versión que involucraba al infinito y en la otra, la que finalmente eligió Euclides, en que tenía toda la apariencia de teorema, no de postulado. Pero no había duda alguna que el sistema describía al espacio, tal y como este era. Euclides había logrado el retrato del espacio.

Para solventar el problema los geómetras, inquietos, se lanzaron a encontrar una versión más sencilla que cumpliera los requisitos deseables de sencillez y evidencia intuitiva. Otros, intentaron demostrar el postulado y de este modo pasarlo a la lista de los teoremas. Es fácil decirlo: durante 23 siglos se intentó encontrar una solución por estos caminos pero resultó todo vano.

Wallis (1616-1703) por ejemplo, abordó el problema de la siguiente manera: Como existen circunferencias de distintos radios y siempre son figuras semejantes aceptemos entonces que dado un triángulo siempre puedo construir otro triángulo semejante al primero. Parece una condición bastante fácil de aceptar. A partir de ella y con todo lo que se sabía y que estaba contenido en las primeras 28 proposiciones (recordemos: que no empleaban para nada al postulado de las paralelas) Wallis logró dar una prueba del postulado. Fin de la historia, aparentemente. Y decimos aparentemente porque esa hipótesis adicional que Wallis introdujo no era tan inocente como parecía: la existencia de triángulos semejantes no congruentes es equivalente al postulado de las paralelas... igual que afirmar que existe un triángulo cuya suma de ángulos es de 180° . A lo largo del tiempo, los geómetras interesados en limpiar de una vez por todas al sistema euclidiano de esta *mancha* (como la llamó Saccheri, el ilustre lógico italiano) se estrellaron contra una pared de granito: todos sus intentos resultaban fallidos. Nadie dudaba de la veracidad de la geometría, nadie dudaba que Euclides había logrado una representación fiel del espacio pero este escrúpulo, es decir, esa piedrita en el zapato, no dejaba en paz a los estudiosos. Desde luego, después de tanto tiempo el problema de la fidelidad de la geometría, fue arrojando luz sobre el problema lógico subyacente. La fe estaba intacta pero la lógica parecía ser el camino para despejar las sombras. Tal vez haya sido Saccheri (1667-1733) quien mostró de forma más clara la toma de conciencia sobre el problema lógico subyacente. Añadió a los cuatro primeros postulados euclidianos la negación del quinto en sus dos versiones. Primero, la hipótesis de que no hay paralela alguna por un punto exterior. Y después, la hipótesis de que hay más de una. En ambos casos pretendía llegar a una contradicción y de allí a concluir que la única hipótesis sostenible era la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta. En el camino de su extraordinario ejercicio lógico

fue encontrando resultados que le parecían cada vez más absurdos pero persistió hasta el final, cuando ya no pudo más y él mismo llegó a conclusiones absurdas afirmando que ciertos hechos repugnaban a la naturaleza de la línea recta y por lo tanto la única hipótesis admisible era la que Euclides había postulado. En realidad, al suponer que había más de una paralela, lo que estaba desarrollando era el sistema de geometría hiperbólica sobre el que tendremos que decir mucho un poco más adelante, pero nada que repugnara a la naturaleza de las rectas.

Era, para Saccheri un triunfo, pero también una derrota: se había visto en la necesidad de aceptar que un postulado no necesariamente tenía ese rasgo de claridad meridiana que convenía al ideal de simplicidad de las matemáticas griegas. El que se aceptara que un postulado pudiese ser poco transparente empezaba a minar la manera tradicional de concebirlos entre los griegos y sus herederos. Un postulado así empezaba a ocupar un espacio entre la intuición y su carácter lógico – espacio que crecientemente va a ocupar en el desarrollo posterior de las matemáticas. Ya entrando al siglo XIX, la manera de abordar el problema de las paralelas da muestra de estos cambios: hay una nueva mirada: los géometras levantan la vista del papel y miran al espacio que los rodea y al espacio astronómico en busca de nuevas evidencias sobre la justeza de la descripción euclidiana de ese espacio. Si bien todavía se sostiene la validez de la correspondencia entre el sistema euclidiano y la naturaleza geométrica del espacio físico, esa convicción empieza a ser vista desde una nueva perspectiva. Se trata de ir a medir, por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo para *comprobar* que esa suma es 180° . Pero no de un triángulo cualquiera, de los que pueden dibujarse sobre una hoja de papel: se trataba de triángulos de dimensiones enormes.

La experiencia adquirida hasta entonces se circunscribía a sectores del espacio mas bien limitados y por eso, cuando se hablaba del comportamiento global de las paralelas se hablaba de un hecho geométrico que no tenía contraparte en la experiencia adquirida del espacio hasta ese momento: eso es lo que está en el núcleo de los intentos de medir la suma de los ángulos de triángulos muy grandes, para ver si su comportamiento es como el de los triángulos pequeños. No olvidemos que la suma igual a 180° es equivalente al postulado de las paralelas y por ello fue elegido para esta experiencia empírica sobre la geometría.

2. LA INTUICIÓN Y LA LÓGICA II

Desde muy joven, Gauss (1777-1855) se interesó por el postulado de las paralelas. Pero a diferencia de su trabajo sobre la teoría de números, por ejemplo, en geometría su trabajo es muy fragmentario y cubierto con un manto de sigilo según él mismo lo dice, para “evitar las voces escandalosas de los beocios”. Gauss usa esta expresión referida a una clase de personas rústicas que eran objeto de menosprecio en la época de oro de Atenas (Gray, 2007).

Casi toda su reflexión sobre la geometría de las paralelas, Gauss la dejó escrita en cartas a sus amigos, en forma de comentarios y rectificaciones a los intentos de demostración que ellos producían sobre el ya milenar postulado. Siempre demandaba un cauteloso silencio advirtiendo sobre la confianza que depositaba en ellos. En una carta de 1817 dirigida a Olbers (Gray, 2007, p. 91) Gauss expresa que,

Cada día me convengo más de que la necesidad de nuestra geometría no se puede demostrar, por lo menos no mediante la razón humana. Es posible que en otra vida seremos capaces de conseguir una intuición mas profunda sobre la naturaleza del espacio, que hoy es imposible.

Para ese entonces las meditaciones de Gauss llevaban ya un buen rato cocinándose a fuego lento en las cartas con sus amigos. Cuando dice que *la necesidad de nuestra geometría no puede demostrarse* se refiere a las dificultades de probar que el sistema euclidiano es una representación fiel, icónica, del espacio físico. Aquí hay una primera grieta en la fe que hasta entonces parecía acompañar al sistema euclidiano como modelo exacto del espacio físico. La naturaleza del problema de las paralelas empezaba a dejar de ser una especie de rompecabezas para ser ahora cuestionado desde una perspectiva mucho más profunda. Ahora se ponía en tela de juicio la verdad de la geometría; se ponía en tela de juicio la convicción profunda de la doctrina pitagórica sobre la estructura matemática de la naturaleza. Si las matemáticas no

estaban incrustadas en la naturaleza, ¿cómo explicar entonces que resultaran tan eficaces en sus aplicaciones?

Una pequeña y necesaria digresión filosófica

Durante el ciclo vital de Gauss, en los círculos universitarios europeos se sentía fuertemente la presencia de la filosofía de Kant (1724-1804). Esta filosofía había logrado una síntesis entre las corrientes empiristas, sobre todo de los ingleses, y el racionalismo cartesiano. Los empiristas herederos de Aristóteles solían afirmar que nada había en el intelecto que no hubiese estado antes en los sentidos. Según John Locke (1632-1704) lo expresa en su obra *Sobre el Entendimiento Humano*, el intelecto es como una tabula rasa en la que originalmente no hay nada escrito. Los sentidos constituyen entonces una especie de mediador cognitivo entre el mundo que nos rodea y el conocimiento que alcanzamos sobre este mundo. Pero Leibniz (1646-1716) racionalista a ultranza, le respondía diciendo que sí, que lo que había en el intelecto había pasado antes por los sentidos *excepto el intelecto mismo*. Y añadía, en sus *Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano*, en respuesta a Locke, que *todas las verdades contenidas en la aritmética son accesibles considerando solamente lo que ya tenemos en el intelecto...sin tener que recurrir a lo que pueda aprenderse mediante la experiencia*.

Estas posiciones tensaban la filosofía europea y habían llegado a un callejón sin salida. Fue entonces que Kant, bajo la enorme influencia de los *Principia Mathematica* (1687) de Newton, articuló una respuesta a este enredo filosófico. La respuesta está contenida en su *Crítica de la Razón Pura* de 1781 – cuando Gauss tenía 4 años de edad. Debe entenderse *crítica* como la posición opuesta al dogmatismo.

Kant se pregunta que *cómo es posible que la conciencia adquiera ideas generales si toda su experiencia es particular*, y afirma por otra parte que ha tomado el único camino que quedaba disponible para evitar los errores que se producen cuando la razón actúa sin basarse en la experiencia. Pero no deja dudas que ese camino no es el empirismo de Locke pues añade desde la primera línea de su introducción que:

No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer...como no fuera por medio de objetos que hieren nuestros sentidos y...ponen en movimiento nuestra capacidad intelectual para compararlos, enlazarlos, o separarlos y *elaborar así, con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos llamado experiencia?*

(énfasis añadido)

El conocimiento pues, no puede separarse de la experiencia pero eso no significa que allí resida. La experiencia vista como experiencia sensorial es, siguiendo a Kant, la *materia prima* con la cual la maquinaria intelectual (la maquinaria cognitiva) construye la verdadera experiencia.

Es como si el intelecto del que disponemos *a priori*, recibiera las impresiones sensoriales, como un líquido, y les diera forma de ese recipiente llamado intelecto humano. De esa forma quedan fusionados el empirismo y el racionalismo: redefiniendo la experiencia como el resultado de aplicar la maquinaria cognitiva a las impresiones sensibles. En la mirada kantiana ambos, empirismo y racionalismo, son insuficientes pero cada uno tiene una parte de razón. Era cuestión de articularlos adecuadamente. Solo así, argumenta Kant, puede entenderse que a partir de la experiencia sensible del espacio que nos rodea, pueda llegarse a una proposición general como el teorema de Pitágoras. El intelecto impone a la experiencia sensible del espacio un molde euclidiano y de allí resulta que solamente podemos ver al espacio a través de esos ojos euclidianos. No es que el espacio sea intrínsecamente euclidiano, sino que nuestro intelecto le impone ese rasgo a la experiencia de los sentidos. Kant nos propone abandonar la idea de que somos observadores pasivos de lo que nos rodea (sin duda, esta es una contribución primordial a la teoría del conocimiento) a la espera que la naturaleza imprima sobre nuestro entendimiento sus regularidades. Por lo tanto, la naturaleza lleva la marca de nuestro intelecto, pero de un intelecto previamente determinado hasta sus estructuras más íntimas. El sujeto parece autónomo pero en realidad obedece a esas estructuras cognitivas ya definidas con las que viene *equipado de fábrica*. Así como al mirar a nuestro alrededor vemos las cosas de

colores sin que lo podamos evitar, vemos el espacio organizado como euclidiano. Eso nos cuenta Kant.

Fin de la pequeña y necesaria digresión filosófica

Regresemos ahora a Gauss. Ya para la segunda década del siglo XIX, había empezado a manifestar sus dudas sobre la correspondencia exacta entre el espacio físico y el sistema euclidiano. Tal vez el escrito donde Gauss expresa más elocuentemente sus hallazgos y nuevas concepciones es la carta de 1824, que envía a su amigo Taurinus. Este había iniciado sus estudios de geometría convencido de poder demostrar el postulado de las paralelas a partir de los restantes de Euclides. Ni la más ligera duda concebía sobre la falta de correspondencia entre el sistema euclidiano y el espacio físico. En una carta que escribió a Gauss (y cuya respuesta se va a comentar ampliamente en unos momentos) propone una demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , y Gauss entonces, en su respuesta, le explica que la demostración no es rigurosa (en realidad queriendo decir que es errónea). Taurinus intenta la demostración por contradicción: primero supone que la suma es mayor que 180° y llega a una contradicción. El resultado no es muy complicado puesto que la hipótesis de que la suma es mayor que 180° , impone al “plano” una geometría como la de la esfera; la contradicción proviene del hecho que la recta euclidiana tiene longitud arbitrariamente grande lo cual no sucederá si la suma es mayor que 180° (esencialmente como en la superficie esférica). El problema crucial ocurre cuando se supone que la suma es inferior a 180° . Hasta ese momento *no se conocía una superficie en donde esto pudiera ocurrir*. Esto es muy importante y vale la pena tenerlo en mente al leer la respuesta de Gauss (que puede consultarse en extenso en el libro de M. Greenberg, 1974, pp. 145-146). Es toda una confesión matemática. Vale la pena detenerse en ese magistral texto:

[... pero la situación se torna más compleja cuando se supone que la suma es menor que 180°]. Este es el punto crítico; el arrecife donde tienen lugar todos los naufragios...he meditado sobre este caso durante treinta años... aunque nada he publicado sobre él.

La hipótesis que la suma es menor que 180° conduce a una geometría extraña, muy diferente de la nuestra (la euclidiana) pero totalmente consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción y puedo resolver en ella todo problema excepto la determinación de una constante que no puede ser designada a priori. Cuanto mayor es esa constante (nota añadida: más adelante sabremos que esa constante es el recíproco de la curvatura de la superficie aún desconocida, portadora de la geometría no euclidiana) más nos aproximamos a la geometría euclidiana (nota añadida: la superficie *desconocida* se aproximará al plano euclidiano) y si la constante es infinita las dos geometrías coinciden. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y para el lego en la materia, absurdos. Pero, calma. Una reflexión sostenida revela que no contiene nada imposible. Por ejemplo, los ángulos de un triángulo se tornan tan pequeños como se desee si se toman los lados suficientemente grandes y aun así, el área nunca excede una cantidad fija. Todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia en esta geometría, han sido vanos... pero me parece, a pesar de la vacía sabiduría de los metafísicos, que casi nada sabemos acerca de la verdadera naturaleza del espacio como para pensar que lo que nos parece antinatural sea imposible.

Uno de los resultados aparentemente absurdos se refiere a la fórmula mediante la cual calculamos el área de un triángulo. Suponer que por un punto externo a una recta pasa más de una paralela implica que, dado un triángulo cuyos ángulos miden (en grados) α , β , y γ , su área es:

$$\text{área} = k(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma))$$

donde k es una constante positiva que no se puede determinar a priori. Es claro de esta fórmula, que a diferencia de lo que ocurre con la geometría euclidiana, el área de los triángulos depende de la longitud de los lados así: a medida que aumenta la longitud de los lados, disminuyen los ángulos, y por lo tanto aumenta el área, pero *permanece siempre*

acotada. Gauss tenía razón en pedirnos calma, pues este resultado es asombroso. Desde luego, esta situación no puede presentarse en la geometría euclidiana donde la medida angular es independiente de la medida de longitud. Recordemos que Wallis intentó demostrar el postulado de las paralelas tomando como hipótesis adicional que en la geometría podían existir triángulos de área arbitrariamente grande (triángulos semejantes cuando uno de ellos era arbitrariamente grande). La fórmula del área hiperbólica hallada por Gauss muestra con mucha claridad en donde estaba la petición de principio, como dicen los lógicos, cometida por Wallis. *Explica* la ilegitimidad de su hipótesis.

Es ostensible la profundidad del pensamiento de Gauss. Entre los tesoros matemáticos que revela hay aquí escondida una joya cuyo valor no podemos exagerar:

Lo que es lógico, consistente, no necesariamente es aceptable para la intuición. Es decir,

Intuición \neq *lógica*

La diferenciación del mundo de la intuición y del mundo lógico no significa que estén contrapuestos ni tampoco que sean irreconciliables. A pesar de que la “sabiduría vacía de los metafísicos” aludida por Gauss era la de Kant, aquél ofrece una conclusión muy de acuerdo con el filósofo de Königsberg, a saber, que la naturaleza de los problemas **no** nos es impuesta por los sentidos. Pero aquí mismo terminan las coincidencias. El ser humano, en sus actos cognitivos revela una cierta autonomía; en el caso de Kant, esa autonomía queda fuertemente limitada por el hecho que obedece, ineluctablemente, a las estructuras cognitivas a priori, que poseemos. Esas estructuras determinan la interpretación que formulemos del espacio y del tiempo, por ejemplo. Es como si desde nuestro intelecto arrojáramos la estructura euclidiana sobre el espacio de nuestras experiencias, de manera tan instantánea que lo que acabamos percibiendo es un mundo euclidiano desde el principio. No nos damos cuenta que nuestro aparato cognitivo nos puso ante nuestros ojos una especie de velo para estructurar nuestra percepción sensible. Ante eso, el ser humano no puede sino concluir que ya de antemano, el espacio era euclidiano. Para Gauss ese modo de interpretar el espacio y su naturaleza resultaba inaceptable. Para él, el espacio tenía una estructura geométrica que no estaba predeterminada. Hacía falta investigar empíricamente, pero dejando que la intuición sensible fuese guiada por los conceptos geométricos al tiempo que los conceptos quedasen modulados por la intuición en una danza dialéctica, en nuestro afán de revelar la naturaleza geométrica del espacio.

¿Podría responderse la pregunta sobre la *verdadera* naturaleza del espacio?

3. EL CONOCIMIENTO HUMANO: EL EXTRAVÍO DE LA VERDAD

La segunda década del siglo XIX vio nacer la consolidación de una nueva forma de concebir el problema de las paralelas. Hasta aquí había dos componentes del problema. Por un lado, una convicción inamovible en la veracidad del espacio como euclidiano; por el otro lado, el sistema euclidiano como una expresión organizada de las observaciones sobre el espacio. Ese sistema era como un retrato que capturaba por completo la naturaleza del espacio. A los objetos materiales correspondían los objetos matemáticos que los representaban fielmente. De nueva cuenta, vale la pena recordar a Galileo quien defendía la convicción de que el libro de la naturaleza estaba escrito en lenguaje matemático. Es decir, que la esencia del mundo natural era matemática, de modo que conocerlo, equivalía a conocerlo según las matemáticas. Para Galileo y muchos otros antes que él, los principios geométricos estaban encarnados en la naturaleza: Lo que valía en el espacio era igualmente válido en la representación. Por lo tanto lo que se deducía en la representación (es decir, en el sistema matemático) era veraz. También tenía una dimensión de validez lógica, pero lo importante era la consideración de que lo que se deducía *era verdad*. Cuando Saccheri intentó demostrar que un sistema no euclidiano de geometría era contradictorio, su meta última era probar que los resultados que contenían eran falsos. Por eso concluyó diciendo que *repugnaban* a la razón. Se trataba de mostrar que algo era *falso* mediante la estrategia de probar que era *inconsistente*.

En 1822, Fourier (Bottazzini, 1986, pp. 79-80) se encargaría de recordárnoslo con estas palabras:

El estudio de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos...
por ello, el análisis matemático es tan extenso como la misma naturaleza...
Nuestra teoría [del calor] reduce las investigaciones físicas al cálculo integral.

Y añade que: “las técnicas están *legitimadas* por la naturaleza física de los problemas a resolver”.

Los instrumentos de la razón que había creado, es decir, las series de Fourier, le suministraban un medio que amplificaba su capacidad de observación del mundo material. Esas series eran para Fourier como un instrumento simbólico que permitía “meter la mano” en la realidad material para explorarla y extraer lo que a simple vista no se percibía. Newton desde antes, también se había adherido a esa tradición. Lo dice con estas palabras en el prefacio de sus *Principia*:

... ofrezco este tratado como los principios matemáticos de la filosofía, ya que la tarea de la filosofía natural parece consistir en esto: a partir de los fenómenos del movimiento, investigar las fuerzas de la naturaleza, y a partir de estas fuerzas, investigar los demás fenómenos... entonces, de estas fuerzas y mediante otras proposiciones *que también son matemáticas*, deduzco los movimientos de los planetas, de los cometas, de la luna...

(énfasis añadido)

Así era, a grandes rasgos, la concepción de las matemáticas a la entrada al siglo XIX cuando las cosas empezaron a tornarse diferentes. Empieza entonces, muy lentamente, una toma de conciencia sobre la idea de *estructura formal* que la va a separar de los referentes materiales que, hasta entonces, habían servido para caracterizar a los objetos de la geometría. Hay una distinción explícita entre lo apriorístico y lo que se conoce sensorialmente. Esta distinción marca la línea divisoria entre Gauss y Kant en cuanto al origen del conocimiento y de los objetos de conocimiento. Eso lo expresa Gauss cuando, en una carta de 1830 a Bessel, le confiesa :

De acuerdo con mis más íntimas convicciones [...] nuestro conocimiento del espacio carece por completo de esa certeza absoluta [...] que es característica de la teoría de las magnitudes. Debemos aceptar humildemente que *si bien el número es justamente producto de nuestro intelecto, el espacio tiene una realidad fuera de nuestro intelecto cuyas leyes no pueden prescribirse a priori*.

(énfasis añadido.)

Gauss hubiese podido ser una figura aún más destacada en la historia de la geometrías no-euclidianas (Gauss fue el primero que usó este nombre). La penetración que logró en la naturaleza del problema así lo sugiere. Tenía todo para ello. Sin embargo, era consciente de que estaba investido de un prestigio excepcional que no quiso poner en juego asumiendo la vanguardia frente a un tema tan revolucionario. Eso parece desprenderse del sigilo que pedía a sus amigos en sus intercambios epistolares. Por ejemplo en la extraordinaria carta (citada previamente) que escribió a Taurinus, se leen estas palabras hacia el final:

No temo que cualquier persona que haya demostrado tener una genuina mente matemática vaya a malinterpretar lo que se ha dicho antes, pero en cualquier caso considere esta una comunicación privada de la que no debe hacerse uso público o cualquier otro que le añada publicidad. Tal vez, en el futuro si llego a tener el tiempo suficiente para dedicárselo, haré yo mismo públicas mis investigaciones.

Pero no parece que haya tenido, o querido tener, ese tiempo. Para sorpresa de muchos, no se encontró entre sus papeles mucho más que lo que quedó en esas famosas cartas. En otros temas sí quedó constancia para la posteridad que el Príncipe de las Matemáticas, había dejado una gran herencia. Y si alguna vez pensó realmente en sentarse a escribir sus meditaciones a fondo, esa decisión desoyó el consejo que Farkas Bolyai dio a su hijo János Bolyai cuando entendió el carácter revolucionario del trabajo de su vástago (Greenberg, 1974, p. 143):

Me parece aconsejable que por dos razones aceleres la publicación: primero, porque las ideas pasan de uno a otro fácilmente y alguien más puede publicarlas como tuyas; en segundo lugar, porque parece cierto que las cosas tienen una época en la que son descubiertas simultáneamente en distintos sitios, de la manera en que las violetas aparecen por doquier en la primavera.

En realidad, ese párrafo es visionario. Cuando Gauss respondió a Farkas Bolyai su antiguo compañero en la universidad, en marzo de 1832, sobre el trabajo de su hijo János, dijo algo que nunca le fue perdonado (Greenberg, p. 144):

Si comienzo diciendo que no puedo elogiar el trabajo de tu hijo, estarás de seguro sorprendido: pero no puedo hacerlo porque eso sería como elogiarme a mí mismo. El contenido completo, el camino que ha seguido, los resultados a los que ha arribado, coinciden casi exactamente con las meditaciones que han ocupado mi mente durante los últimos 35 años...

A estas alturas, la solución completa del enigma de las paralelas, ya se encontraba en la zona de desarrollo proximal de la geometría, o como se suele decir con frecuencia, estaba “en el aire”.

La geometría hizo vivir a Gauss en medio de la tensión intelectual y emocional. Eso se puede apreciar en sus cartas donde siempre está presente aparte de la preocupación social por su figura. Gauss se rodeó de una comunidad de interlocutores para pensar con ellos y a través de ellos. Tal vez Kant haya sido la figura que tenía presente y a quien cuestionaba secreta e intensamente. En determinado momento, Gauss comprendió que el problema de las paralelas daba lugar a dos acercamientos diferentes. Por un lado, estaba la geometría como un sistema de *verdades* sobre el espacio físico (esa era la convicción generalizada) y por el otro, el sistema lógico subyacente que había estado emergiendo lentamente y podía examinarse por sí mismo, al que se podía dar un estatus independiente del referente material. Ese es un momento crucial en el desarrollo de las matemáticas. Gauss se acerca a la geometría primero, desde su condición de científico, usando los conceptos matemáticos con el significado que le otorga su origen intuitivo. Esa es su posición cuando se involucra en 1817, y durante largo tiempo, en el proyecto geodésico en la región de Hanover (Breitenberger, 1984). De aquí surge la historia sobre la medición de los ángulos de un triángulo enorme: como parte de esa empresa, Gauss se vio en la necesidad de medir un triángulo identificado como HIB por las iniciales de los nombres de los tres picos (Hohenhagen, Inselsberg y Brocken) que sirvieron de vértices. El lado mayor del triángulo es de 105 kms. La medición de la suma de los ángulos del triángulo difirió de 180° en una cantidad inferior al error experimental aceptable en las mediciones del trabajo geodésico. De modo que o bien la geometría euclidiana representaba fielmente al espacio físico (era verdadera) o bien dicho triángulo era muy pequeño para apreciar su desviación con respecto a los 180° . Si el experimento fue hecho con estos propósitos, no arrojó la evidencia buscada. Lo que quedó mostrado fue que la geometría euclidiana era una excelente herramienta para dicho trabajo. Ese era Gauss como científico.

4. LAS VIOLETAS EN PRIMAVERA

Farkas Bolyai temía por la aparición de las violetas en primavera. Su desaliento hubiese sido mayor si se hubiera enterado de que, en efecto, florecían también en suelo ruso. La imagen que transporta esta metáfora sugiere que las ideas circulan a través de las infraestructuras de comunicación de las culturas; las ideas resuenan y eventualmente quedan cristalizadas en algún medio de representación entre las diversas opciones que ofrece una cultura. János Bolyai escribió a su padre en 1823, que de la nada había creado un extraño y nuevo universo. Tal vez las cosas no ocurrieron así. La capacidad de resonancia de una cultura tiene tonalidades que el oído normal no discierne, que el ojo normal no percibe. Las ideas viajan por otros caminos; no nos pertenecen a los individuos. Hay un proceso permanente de revisión y refinamiento de las ideas que genera la ilusión de que resultan de una búsqueda individual. Cada creador, más que una isla, se torna un vórtice dentro de una cultura, un punto de convergencia temporal de fuerzas en la conciencia personal de ese creador. Johann Bartels (1769 -1836), el

maestro de Lobachevsky, en su natal Kazán, había sido maestro juvenil de Gauss en Alemania; Farkas Bolyai, el padre de János, amigo cercano de Gauss en sus años universitarios. Tal vez algún comentario aparentemente aislado del tema de la geometría pudo hacer entrar en resonancia un tren de pensamiento poderoso, establecer una conexión entre ideas aparentemente inconexas, u orientar el proceso de conceptualización del problema por la dirección que finalmente ofrecería la solución.

Gauss dejó muy poco escrito sobre los aspectos más técnicos de la geometría no-euclidiana. Sin embargo, las reflexiones que dejó en sus cartas escritas en el seno de esa comunidad que conformó con sus correspondientes fueron goteando perlas en formas de hechos geométricos (que luego se han demostrado plenamente) que en su momento contribuyeron decididamente a crear las condiciones para acceder a una nueva concepción del espacio. Por ejemplo, el área de un triángulo es proporcional al *defecto* (la diferencia entre 180° y la suma de los ángulos que se sabía debía ser inferior a 180° si se tomaba como postulado que había más de una paralela). Esos son hechos que chocan a la intuición euclidiana. El triángulo geodésico que midió Gauss dejó constancia que aun considerando longitudes de un ciento de kilómetros, no alcanzamos a percibir que el espacio deje de comportarse como euclidiano. En su momento, esto debió parecer un argumento contundente a favor de modo que sostener que la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a 180° , *contra toda evidencia empírica*, debió exigir un esfuerzo psicológico considerable. Por otra parte, la exploración del sistema formal no euclidiano, no daba muestras ciertas de arrojar una contradicción desde *el punto de vista lógico*. Resaltamos esto. Tal vez por ello, la contribución más señera de Gauss y de sus correspondientes haya sido ayudar a abrir la mirada de la cultura matemática de su tiempo a una nueva manera de concebir las matemáticas. Sobre esto volveremos un poco más adelante.

La forma de Lobachevsky, de abordar conceptualmente el problema, es similar a la empleada por Gauss (y sus correspondientes). En su obra *Los Nuevos Principios de la Geometría* (1825) escribe (Bonola, 1955, p. 92):

Los sucesivos intentos fallidos por más de dos mil años, desde los tiempos de Euclides, hicieron que se despertase en mí la sospecha de que *la verdad que se deseaba probar no estaba contenida en los datos* [mismos del problema], y que para establecerla sería necesario recurrir a experimentos, por ejemplo, observaciones astronómicas, como es el caso para otras leyes de la naturaleza.

(énfasis añadido).

Uno no puede ignorar la resonancia de estas palabras con las de Gauss cuando, en la carta a Taurinus (ya citada), le revela: Todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia en esta geometría, han sido vanos... casi nada sabemos acerca de la verdadera naturaleza del espacio como para pensar que lo que nos parece antinatural sea imposible... Gauss escribe estas líneas en 1824, un año antes de la fecha del libro de Lobachevsky. Años antes, en 1817 había escrito a su amigo, el astrónomo Olbers: es posible que en otra vida seamos capaces de conseguir *una intuición mas profunda sobre la naturaleza del espacio*.

Lobachevsky llega a la conclusión de que no es posible demostrar el postulado de las paralelas a partir de los restantes del sistema euclidiano. Esta convicción lo impulsa a explorar lógicamente el sistema que incluye el postulado (que no es evidente por sí mismo) que de aquí en adelante llamaremos *hiperbólico*: a través de un punto exterior a una recta hay por lo menos dos rectas paralelas a la primera. (Desde luego, en el plano determinado por la primera recta y el punto exterior a ella.) Lobachevsky desarrolló las consecuencias lógicas del sistema hiperbólico sin hallar aparentemente contradicción alguna pero sabiendo, pues su actitud era la de un explorador, que una contradicción podría estarlo esperando a la vuelta de la esquina. Por ello, ideó otras maneras de penetrar en las entrañas del sistema hiperbólico. En su *Geometría Imaginaria* de 1835, (Efimov, 1980, pp 34-35) Lobachevsky escribió:

Basándome en observaciones astronómicas...verifiqué que en un triángulo cuyos lados son casi tan largos como la distancia de la Tierra al Sol, la suma de los ángulos difiere de dos rectos en menos de 0.0003 segundos. En consecuencia, puede afirmarse que las proposiciones de la geometría práctica han sido rigurosamente establecidas.

En realidad, Lobachevsky *no* demostró con este experimento que la geometría del espacio fuese euclidiana, sino que era un buen modelo para describir esa parte del espacio físico. Piénsese que este tipo de experimento involucra mediciones que están sujetas a error. Además estamos tomando como rectas euclidianas las trayectorias que siguen los rayos de luz. Por ello hablamos de que el sistema euclidiano (o cualquier otro para otros problemas) es un modelo *adecuado*. Las rectas euclidianas son una buena representación simbólica de los rayos de luz que son las “rectas” físicas. Ahora bien, si Lobachevsky hubiera probado que la suma de los ángulos del triángulo era, digamos 175° , entonces la conclusión sería que para esa porción gigantesca del espacio físico, el modelo euclidiano no era un buen modelo. En ese caso sería una mala representación, un mapa poco preciso. Pero hay que enfatizar que la idea de que un sistema matemático era tan solo un modelo y no un mapa exactamente del tamaño de lo que se quería representar, todavía no estaba madura. Justamente esa idea va a desarrollarse, en gran medida, a partir del trabajo con la geometría hiperbólica.

Lobachevsky no se detuvo aquí. Desarrolló la trigonometría hiperbólica para trasladar sus teoremas del sistema sintético hiperbólico a un sistema analítico y encontró que las fórmulas correspondientes eran totalmente coherentes. Era lo más lejos que, en ese momento, podía irse en la exploración de la coherencia del sistema. Es decir, Lobachevsky tomó la trigonometría hiperbólica como un *modelo* de la geometría hiperbólica con el afán de que aquella reflejara la estructura lógica de esta. Se podía entonces afirmar (con buena dosis de evidencia) que tanto el sistema euclidiano como el hiperbólico eran coherentes.

Desde los tiempos de Euclides y hasta entonces, el sistema euclidiano no era solo una representación sino una *encarnación del espacio físico*. Por eso los teoremas eran verdades. Esa correspondencia empezaba a agrietarse y la luz que entraba por la grieta anunciaba una nueva epistemología para las matemáticas. Es decir, una nueva forma de concebir los objetos matemáticos y una nueva manera de concebir el conocimiento matemático mismo, qué significa, cuándo lo podemos considerar válido. Sin embargo, la idea profundamente enraizada en la cognición humana de que un segmento de recta es una cuerda tensa, no iba a ceder tan fácilmente. Sobre un papel uno podía dibujar un segmento euclidiano, era cosa de trasladar la imagen que reside en la memoria al papel... pero ¿cómo dibujar un segmento hiperbólico? En otras palabras, ¿cuál era la imagen visual de un tal segmento? No había una respuesta todavía – aunque las violetas seguían floreciendo.

5. UNA RE-DESCRIPCIÓN REPRESENTACIONAL

La inexistencia de triángulos semejantes pero no congruentes en el sistema hiperbólico significa que la medición angular no es independiente de la medición de longitudes de segmentos hiperbólicos. La fórmula básica que relaciona la longitud con el ángulo es la siguiente (véase figura 4):

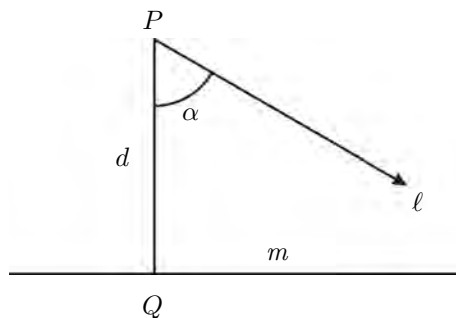


FIGURA 4.

Dada la recta m y P un punto exterior, denotamos por ℓ la paralela (a derecha) por el punto P a la recta m . El ángulo de paralelismo es α , que en el sistema euclidiano es recto. En el sistema hiperbólico es estrictamente menor que un ángulo recto. Se tiene entonces la relación:

$$\tan(\alpha/2) = \exp(-d).$$

De manera que al aumentar la distancia d el ángulo de paralelismo va disminuyendo y si disminuimos la distancia d entonces el ángulo aumenta de manera que en una región “muy pequeña” alrededor del punto Q , la geometría se parece mucho a la geometría euclidiana (ángulo de paralelismo = 90°). Eso explicaría que los experimentos de Gauss y Lobachevsky involucraron triángulos “muy pequeños” y por eso no pudieron detectar la desviación con respecto al sistema euclidiano, del espacio físico. Pero allí hay todavía tela de donde cortar. Una observación debe formularse de inmediato: La figura anterior es tan solo una ayuda para entender una relación hiperbólica central: el dibujo es euclidiano. Tendremos que encontrar (y ello será crucial) una hoja de papel hiperbólico donde podamos dibujar una imagen de un segmento hiperbólico, así como dibujamos en una hoja ordinaria un segmento euclidiano. ¿Existe ese papel *hiperbólico*? La respuesta es afirmativa y lo mostraremos en unos momentos más.

Gauss falleció en 1855. Entonces, cuando se conoció el contenido de su correspondencia eso tuvo un gran impacto benéfico para que la comunidad matemática internacional empezara a tomar la geometría hiperbólica con suficiente seriedad. No fue inmediato, todavía pasaron años antes que la nueva geometría quedara plasmada en el mapa matemático. Sin duda una razón de mucho peso tuvo que ver con el trabajo del matemático italiano E. Beltrami (1835-1899). Beltrami respondió a la pregunta sobre la existencia del papel hiperbólico. Es decir, exhibió una superficie sobre la cual valían los postulados del sistema hiperbólico. Para ello consideró la superficie llamada pseudo-esfera (véase figura 5)

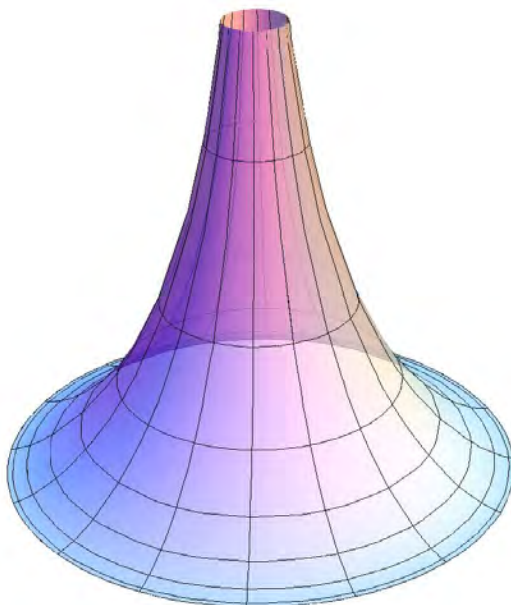


FIGURA 5.

Las líneas geodésicas sobre tal superficie corresponden, de acuerdo al mapa ideado por Beltrami, a las rectas hiperbólicas. Esta superficie tiene curvatura constante negativa (se puede tomar -1 como curvatura). Las líneas geodésicas se ilustran en la figura. Previamente consideramos la fórmula para calcular el área de un triángulo:

$$\text{área} = k(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)).$$

Pues bien, la constante k es igual a $1/c^2$ donde c es la curvatura constante negativa de la pseudo-esfera.

Cualquier otra superficie de curvatura constante negativa sirve como modelo *local* de la geometría hiperbólica. Por ejemplo, véase la figura 6: allí se pueden apreciar un triángulo hiperbólico cuya suma de ángulos es inferior a 180° y dos rectas que tienen una perpendicular

común y por lo tanto son divergentes. No vamos a entrar en detalles pues un estudio detallado de estos modelos demanda un conocimiento de la geometría diferencial. En particular del concepto de curvatura y de geodésicas. Sin embargo, las figuras anteriores permiten mostrar por qué son aceptables como papel hiperbólico, es decir, como modelos de la geometría hiperbólica. Lo que es de interés en este momento es señalar que estos modelos ayudaron a percibir que dentro del sistema hiperbólico no se escondía ninguna contradicción, ningún absurdo, sino una descripción o representación local de la geometría de superficies de curvatura negativa constante.

Beltrami era consciente de una fuerte limitación de estos modelos. Si observamos la pseudo-esfera apreciaremos que la circunferencia que es frontera de la superficie es una especie de *barrera* para las líneas rectas hiperbólicas. Por eso el modelo es local. La superficie se llama *completa* cuando las geodésicas sobre ella no encuentran barreras en su camino. ¿Habrá una superficie de curvatura negativa constante que sea completa? La pregunta fue respondida por Hilbert en 1901: no existe una superficie completa, de curvatura constante negativa contenida en el espacio de tres dimensiones. Esto significaba que nos podíamos asomar al universo hiperbólico, pero solo localmente. Como si en lugar de apreciarlo por una amplia ventana, solamente lo pudiésemos ver a través del ojo de una cerradura. Pero aquello era suficiente para dar contenido concreto al sistema hiperbólico. J. Bolyai y Lobachevsky habían desarrollado considerablemente la estructura formal de la geometría no-euclidiana siempre con la fuerte convicción de que estaba libre de contradicciones ya que el sistema euclidiano *no contenía la verdad completa sobre el espacio físico* y por lo tanto no podría erigirse como un obstáculo para la existencia de la geometría hiperbólica como una descripción posible del espacio físico. A pesar de su profunda convicción, nunca pudieron suministrar una demostración de la coherencia del nuevo sistema. En esencia, eso fue lo que hizo Beltrami al mostrar que el sistema formal vivía una vida auténtica sobre la pseudo-esfera. Es como si el sistema hiperbólico quedase incrustado fiel pero localmente, en la superficie de la pseudo-esfera. Con el modelo de Beltrami, el ojo humano recobró su papel de intérprete: una estructura formal alejada de la intuición euclidiana, alcanzó una representación que *se podía ver* a simple vista... la percepción y la abstracción formal eran las dos caras de la misma moneda.

La existencia simultánea de dos sistemas geométricos formales, el euclidiano y el hiperbólico, dejó ver con claridad meridiana que ninguno de ellos podía atesorar la realidad del espacio físico por completo. Dichos sistemas solamente tienen la capacidad de modelar la realidad física, de representarla simbólicamente – análogamente a la forma en que una novela puede representar un drama humano sin serlo. La realidad de la novela es otra – la realidad matemática es otra distinta a la realidad material. A partir de ese momento, del momento del reconocimiento del sistema hiperbólico como un sistema matemático genuino, las matemáticas dejan de ser entendidas como un espejo sobre el cual se ve la realidad tal cual es. El espejo queda roto. Allí reside el significado de la famosa cita de Einstein cuando escribió que:

En la medida en que las teorías matemáticas se refieran a la realidad, no son ciertas; en la medida que sean ciertas, no se refieren a la realidad.

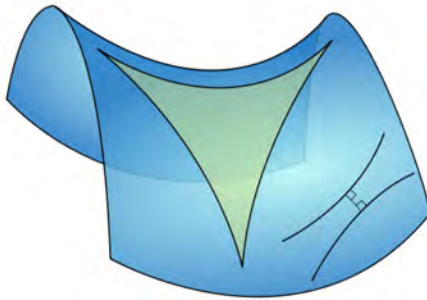


FIGURA 6.

Las matemáticas nos proveen de los mapas del territorio, pero no son el territorio.

Muchos años después, en 1941, en la brillante introducción al libro *¿Qué son las Matemáticas?*, R. Courant escribió unas líneas que se avienen a la intencionalidad del presente texto:

A través de los tiempos los matemáticos consideraron sus objetos—números, puntos etc.—como cosas sustanciales en sí. Pero en vista de que aquellos desafiaban una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron a la convicción de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas sustanciales no tenía sentido dentro de la matemática. Las únicas proposiciones relativas a ellos que importan son las que expresan las relaciones mutuas entre objetos indefinidos: su estructura y relaciones... la percepción de la necesidad de la de-sustanciación de los objetos matemáticos ha sido uno de los resultados más fecundos del desarrollo axiomático moderno.

Pero esa de-sustanciación puede generar nuevas tensiones entre la intuición y lo formal. Afortunadamente la imaginación permite recuperar por nuevos caminos, los vínculos entre las estructuras formales y el desarrollo del significado. Se nos ha explicado que las matemáticas consisten en una serie de grandes intuiciones cuidadosamente refinadas y organizadas con una lógica que nos es consustancial. Cuanto más refinemos nuestros conceptos, más profunda será nuestra intuición.

En otros términos: ¿existen las matemáticas con independencia del hombre, como las montañas y las piedras o son por completo una creación humana? De otro modo: ¿estamos desenterrando diamantes o fabricando una piedra sintética? Las matemáticas no son una sustancia eterna que provienen de un mundo independiente de los seres humanos — como hubiese querido Platón — sino resultado de la acción humana que busca permanentemente significado y coherencia.

REFERENCIAS

- [1] Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean geometry*. New York: Dover Publications.
- [2] Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. N. York: Springer-Verlag.
- [3] Breitenberger, E. (1984). Gauss's geodesy and the axiom of parallels. *Archive for the History of Exact Sciences*, 31, 273-289
- [4] Courant, R., Robbins H. (2002). *¿Qué son las Matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.
- [5] Efimov, N. V. (1980). *Higher geometry*. Moscow: Mir Publishers.
- [6] Euclid. (1956). *The thirteen books of Euclid's elements* (T. L. Heath, Trans. Vol. 2). New York: Dover Publications.
- [7] Gray, J. (2007). *Worlds out of nothing*. London: Springer-Verlag.
- [8] Greenberg, M. (1974). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. S. Francisco: Freeman and Company.
- [9] Kline, M. (1985). *Mathematics and the Search for Knowledge*. N. York: Oxford U. Press.
- [10] Moreno-Armella, L., Hegedus, S., Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 99-111.

Dirección del autor:

Luis Moreno Armella

CINVESTAV, IPN

Departamento de Matemática Educativa.

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508,

Col. San Pedro Zacatenco 07360, México, D.F.

e-mail: lmorenoarmella@gmail.com