



EL MUNDO DE HIPERBÓLICO UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

JUAN JOSÉ RIVAUD MORAYTA

ÍNDICE

Presentación	32
1. Introducción	33
2. Las rectas de Hiperbólico	34
3. La longitud de una curva en el mundo de Hiperbólico	37
4. Ángulos en el plano de Hiperbólico	40
5. El mundo de Hiperbólico y las áreas	42
6. Las transformaciones rígidas en el mundo de Hiperbólico	43
7. Teorema del cambio de variable	48
8. El comportamiento de rectas y circunferencias bajo inversiones euclidianas	48
9. Las transformaciones rígidas en el mundo de Hiperbólico (Continuación)	49
10. El ángulo de paralelismo y la función π de Lobachevski	50
11. El área de un triángulo de Hiperbólico	51
12. Las circunferencias de Hiperbólico y haces de circunferencias	53
13. Cómo ve Hiperbólico las rectas y las circunferencias euclidianas	55
14. Longitud y Área de las circunferencias en el plano de Hiperbólico	58
15. Área del círculo hiperbólico	60
16. Recubrimiento del Plano de Hiperbólico por polígonos regulares	60
17. El mundo de Hiperbólico tridimensional	64
18. Hiperbólico y las horoesferas	68
19. Un poco de la geometría de la esfera de Hiperbólico: recubrimientos y poliedros regulares	68
20. Para terminar	74
21. Apéndice	74
21.1. Cálculo de la h-longitud de la circunferencia	74
21.2. Cálculo h-área de la circunferencia	75

PRESENTACIÓN

En 1999, la Sociedad Matemática Mexicana me invitó a dar, en su congreso nacional, una conferencia plenaria sobre geometría no euclidiana, cuyo borrador es el origen del presente trabajo. Posteriormente dicho escrito aumentó su tamaño considerablemente (todavía no sé si para bien o para mal) producto de impartir diversos cursillos sobre el mismo asunto; el último, en el 2001, en la Semana de las Matemáticas, que organiza el Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa.

Pretendemos que el lector tenga la sensación de que la situación geométrica con la que está lidiando es “real”, que lo que se cuenta es algo que está pasando, o pasó, en este mundo, o en uno muy parecido. Por supuesto sin que deje de ser matemáticas, más precisamente geometría.

En nuestro tratamiento no nos limitamos al uso de herramientas geométricas, o de cualquier otra índole, sino que, en cada momento, echamos mano de lo que nos permite seguir el camino más simple y directo; aunque hay que admitir un sesgo hacia la utilización del cálculo diferencial e integral, que, junto con algunos resultados geométricos muy simples, constituyen los únicos prerrequisitos. (Una buena referencia para los resultados de cálculo que se usan son los dos volúmenes de la obra *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático* de R. Courant y F. John, Limusa, 1971, pero también aparecen en cualquier otro texto sobre la materia.)

Los temas tratados fueron elegidos para que el lector que quiere asomarse al asunto, sepa de qué se trata y obtenga, en pocas páginas, una visión de conjunto suficientemente amplia. Siguiendo, por supuesto, los gustos personales del que escribe.

A través de diversas lecturas ocasionales, que empezaron hace mucho tiempo, y que, aunque parezca contradictorio, fueron cuidadosas, pero profundamente desordenadas, fui haciendo mío el material y elaborando mi propio acercamiento al tema, para al final darme cuenta que este punto de vista es compartido con muchos más. Espero que estas páginas hagan que este círculo crezca.

Por último, expreso mi agradecimiento a los colegas y amigos Gerardo Hernández, Laura Hidalgo, Carlos Ímaz, Ana Irene Ramírez y Sonia Ursini quienes, en distintas etapas de la elaboración del trabajo lo leyeron, señalaron errores e hicieron sugerencias y comentarios.

Las lecturas arriba mencionadas corresponden a:

EFIMOV, N.V., *Higher Geometry*. Mir Publishers Moscow.

EFIMOV, N.V., *Geometría Superior*. Editorial Mir, Moscú.

MESCHKOWSKI, H., *Non euclidean Geometry*. Academic Press, New York and London, 1964.

SMOGORZHEVSKI, A.S., *Acerca de la Geometría de Lobachevski*, Editorial MIR, Moscú, 1978.

THURSTON, W., *Three Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton Mathematical Series 35, 1997.

STILLWELL, J., *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, 1992.

1. INTRODUCCIÓN

Pensemos que el plano cartesiano es atravesado, a lo largo del eje x , por un ducto cuya temperatura es el cero absoluto y que, producto de esta peculiar situación, los seres y objetos que pueblan el semiplano superior ($\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$) se contraen o dilatan, según cambia su posición, en razón directa a su distancia al eje x . Así pues, una bicicleta situada a una distancia 1 del eje x , cuando cambia su posición a una distancia y_0 , nosotros la vemos, desde fuera del semiplano, como una reproducción a escala y_0 de sí misma, sucediendo lo mismo con cualquier otro objeto o con el hombrecillo que la maneja (véase figura 1)

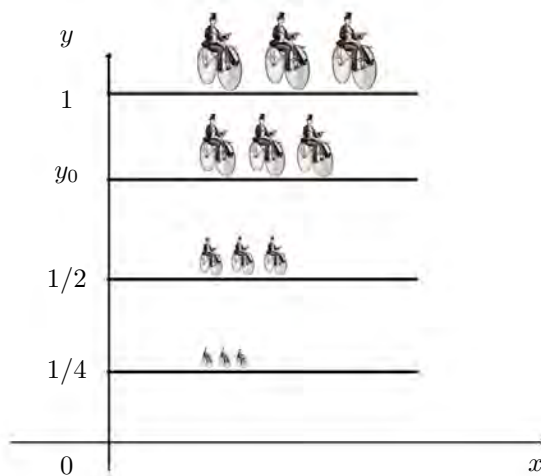


FIGURA 1.

mientras que el hombrecillo, acostumbrado a los cambios de temperatura, no percibe ninguna diferencia. Tampoco deja de sorprendernos verlo trasladarse apuradamente en su bicicleta de un punto a otro a lo largo de una trayectoria que, para nuestros ojos, se aleja bastante de lo que es una recta; sin embargo él jura y vuelve a jurar que se movió en línea recta (véase figura 2).

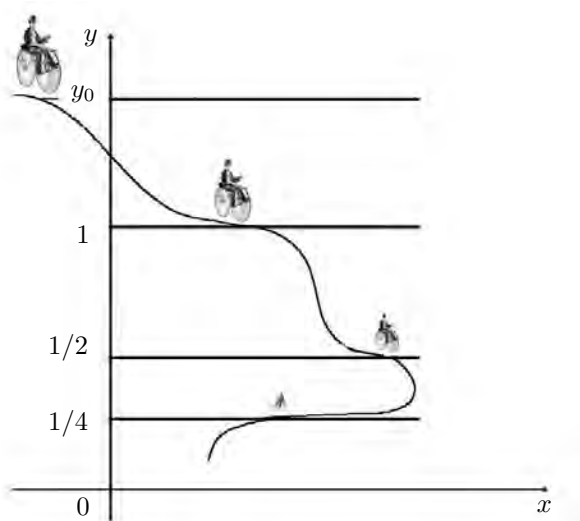


FIGURA 2.

Antes de seguir adelante, permítanme decirles algo acerca de nuestro hombrecillo. Él acostumbra pasar muchas horas enfrente de su mesa llenando hoja tras hoja de números y dibujos y sólo sale en su bicicleta para comprar más papel y lápices. Ello le ha creado fama de flojo entre sus vecinos. Su nombre o apodo es Hiperbólico.

Entender cómo se mueve Hiperbólico y las razones de ello, es decir, la geometría de su mundo, es el propósito de este trabajo. Con más precisión, los seres que habitan el semiplano superior, con estas peculiares condiciones, en forma similar a nosotros, perciben rectas, triángulos, polígonos y toda clase de entes geométricos, pero estos objetos geométricos se comportan en forma muy distinta a como nos tiene acostumbrados la geometría euclidiana; nuestro problema es comprenderlo.

Para ello contamos con nuestro conocimiento de la geometría euclidiana, que aplicamos a los fenómenos de ese mundo tal como los ven nuestros ojos, y con el hecho de que en el mundo de Hiperbólico el tamaño de las cosas varía proporcionalmente a la distancia al eje x .

2. LAS RECTAS DE HIPERBÓLICO

Pensemos en Hiperbólico montado en su bicicleta y pedaleando a ritmo constante, es decir, siempre el mismo número de pedalazos por unidad de tiempo. También imaginemos que pedaleando a este ritmo y manteniéndose a distancia uno del eje x , en una unidad de tiempo, recorre una longitud que tanto él como nosotros estamos de acuerdo en tomar como unitaria. En este caso, para Hiperbólico y para nosotros la velocidad a la que se mueve la bicicleta también será unitaria, y por lo tanto, la distancia recorrida coincidirá con el tiempo transcurrido; lo cual nos permite medir la distancia recorrida con un reloj.

Pero Hiperbólico puede realizar lo anterior para cualquier trayectoria: sólo necesita mantener su ritmo de pedaleo. Así, para Hiperbólico, la longitud de la trayectoria será igual al tiempo utilizado en recorrerla con ese ritmo de pedaleo (véase la figura 2).

Para nosotros, que lo observamos desde fuera, la situación nos parecerá muy distinta y lo veremos moverse más rápidamente a medida que se aleja del eje x y más despacio cuando se acerca a él. Pero cuando nos fijamos en el ritmo del pedaleo comprendemos su apreciación.

Dicho de otra manera, cuando Hiperbólico se mueve, a una distancia y del eje x , con una velocidad que él percibe como unitaria, para nosotros se estará moviendo a una velocidad \bar{v} , cuya magnitud v sólo depende de la distancia al eje x y en ese caso es igual a y (esto lo denotaremos como $v(y) = y$). A la magnitud de la velocidad se le llama rapidez, pero algunas veces, abusando del lenguaje, también le llamamos velocidad.

La pregunta, nada trivial, que nos interesa contestar en este momento es: Dados dos puntos P y Q , en el semiplano superior, ¿qué trayectoria debemos seguir para, moviéndonos con rapidez $v(y) = y$, ir de P a Q en el menor tiempo posible? (véase figura 3).

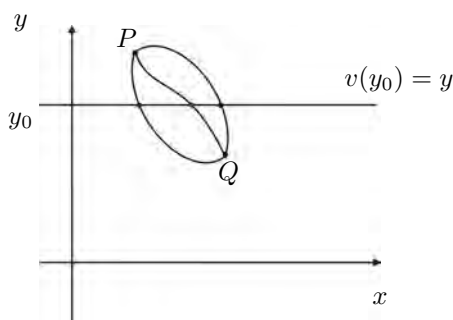


FIGURA 3.

Para Hiperbólico, esta trayectoria será el segmento de la recta de su mundo que une P y Q y su longitud estará dada por el tiempo utilizado en recorrerla. Nosotros, en general no veremos un segmento recto, ni el tiempo usado en recorrer la curva coincidirá con su longitud, pero el análisis realizado nos permitirá comprender a nuestro amigo.

El argumento que presentamos a continuación es esencialmente el mismo que dio, en 1696, Johann Bernoulli, para el problema de la Braquistócrona, el cual es una verdadera joya del pensamiento matemático.

Como paso previo recordemos que si tenemos dos medios

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad \text{y} \quad M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$$

en los que podemos desplazarnos con rapidez constante v_1 y v_2 respectivamente, y $P_1 \in M_1$ y $P_2 \in M_2$ son dos puntos dados, entonces la trayectoria para ir de P_1 a P_2 en el menor tiempo posible es la poligonal formada por dos segmentos, que une a P_1 y P_2 , teniendo su vértice en el eje x y tal que los ángulos α_1 y α_2 , que forman los lados de la poligonal con la vertical en dicho vértice (véase figura 4), satisfacen la siguiente condición:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_2}$$

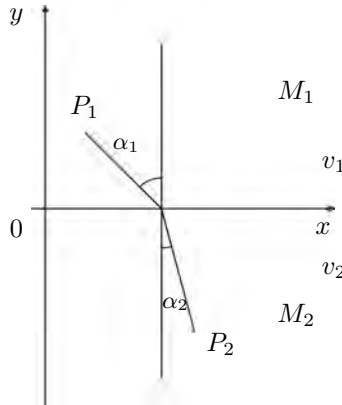


FIGURA 4.

Esta cuestión la planteó y resolvió Fermat para justificar la ley de Snell , tomando como punto de partida el principio que dice que “la luz viaja de un punto a otro en el menor tiempo posible”.

Tradicionalmente éste es uno de los primeros problemas de máximos y mínimos que enfrentamos en un primer curso de cálculo, por lo que omitimos su solución.

De lo que acabamos de analizar se sigue claramente que si, en lugar de dos medios, tenemos n medios $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, limitados por rectas paralelas al eje x , y en ellos nos desplazamos con rapidez constante v_1, v_2, \dots, v_n , respectivamente, entonces la trayectoria para ir de $P \in M_1$ a $Q \in M_n$, en el menor tiempo posible, es la poligonal descrita en la figura 5 y que cumple con la condición siguiente sobre sus ángulos de incidencia:

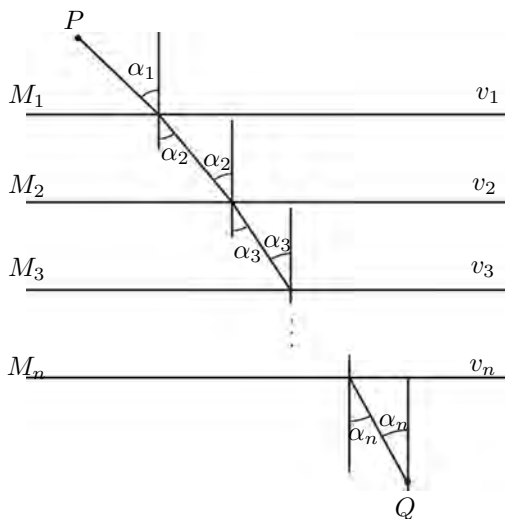


FIGURA 5.

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_2} = \dots = \frac{\text{sen } \alpha_n}{v_n}$$

o, en forma comprimida:

$$\frac{\text{sen } \alpha_i}{v_i} = k, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k \text{ constante}$$

Si ahora pensamos que los medios M_i tienen un grosor infinitesimal (véase figura 6), la trayectoria deja de ser una curva poligonal, y se transforma en una curva suave, entonces la rapidez es una función de y que llamamos $v(y)$ y también lo es el valor de ángulo de incidencia $\alpha(y)$ que es el que forma la trayectoria con la vertical a la altura y . O dicho en otra forma, $\alpha(y)$ es el ángulo que forma la tangente a la trayectoria con la vertical.

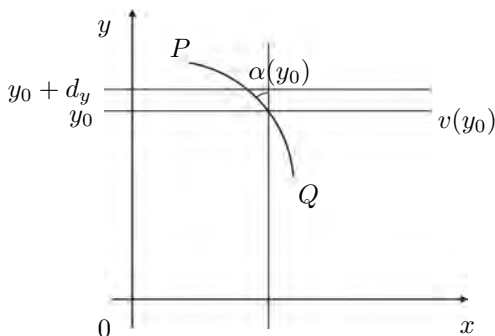


FIGURA 6.

Y la condición correspondiente, para la trayectoria que une P y Q , toma la forma

$$\frac{\text{sen } \alpha(y)}{v(y)} = k$$

donde k es una constante que sólo depende de P y Q .

Ésta es la condición general que J. Bernoulli obtuvo con un argumento similar al que acabamos de dar, y que usó para encontrar en forma explícita las trayectorias, en el caso $v(y) = \sqrt{2gy}$ (g es la aceleración producida por la gravedad), resolviendo así el problema de la curva de descenso más rápido (Braquistócrona).

Antes de seguir adelante, observemos que el ángulo que forma la normal a la trayectoria con el eje x es igual a $\alpha(y)$ (véase figura 7).

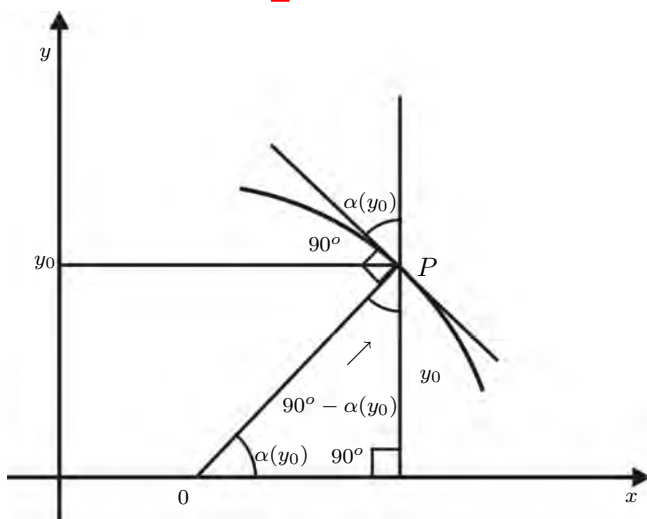


FIGURA 7.

¹Véase Tippens, P.E. Física, Conceptos y Aplicaciones, Ed. Mc Graw Hill, México, pag.114-116

Partiendo de lo anterior, nuestro caso es directo, pues como el lector recordará $v(y) = y$ lo cual hace que la condición $\frac{\text{sen } \alpha(y)}{v(y)} = k$ tome la forma:

$$\text{sen } \alpha(y) = ky,$$

que en el caso $k \neq 0$, recordando la definición del seno de un ángulo y sustituyendo, nos da:

$$\text{sen } \alpha(y) = \frac{y}{OP} = ky$$

o sea,

$$k = \frac{1}{OP}.$$

Luego $0 < \overline{OP} < \infty$ tiene longitud constante a lo largo de la trayectoria. Propiedad que caracteriza a las semicircunferencias con centro en el eje x .

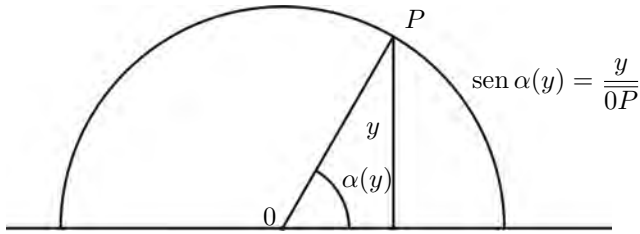


FIGURA 8.

La figura 8 nos muestra que las circunferencias satisfacen que la distancia \overline{OP} sea constante. Para demostrar que son las únicas trayectorias con esta propiedad falta un pequeño argumento que invitamos al lector a proporcionar.

Si $k = 0$, entonces $\alpha(y) = 0$ y nuestra trayectoria es una semirrecta perpendicular al eje x .

¡Ya sabemos cuáles son las rectas de Hiperbólico! Desde nuestro punto de vista son semirrectas perpendiculares al eje x y semicircunferencias con centro en el eje x (véase figura 9).

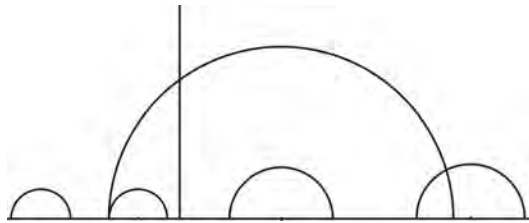


FIGURA 9.

Antes de seguir adelante, permítasenos convenir con el lector que, con objeto de que la presencia de Hiperbólico no nos avasalle, cuando nos refiramos a su mundo, las rectas y circunferencias, o cualquier otro objeto en él, antes pondremos una h , por ejemplo en lugar de “la recta de Hiperbólico que pasa por p y q ” escribiremos “la h -recta que pasa por p y q ”.

3. LA LONGITUD DE UNA CURVA EN EL MUNDO DE HIPERBÓLICO

Como es de esperar, las curvas tienen distinta longitud para nosotros y para Hiperbólico, lo cual nos sugiere preguntarnos cómo están relacionadas estas dos longitudes. Para aclarar este punto, empecemos viendo qué sucede en el caso de un segmento *infinitesimal* de curva, que podemos, puesto que es infinitesimal, tomarlo como un segmento infinitesimal de una de nuestras rectas.

Sean A y B los extremos de dicho segmento, que denotaremos por \overline{AB} y llamemos dS y dS_h a su longitud euclidiana y h-longitud respectivamente. Si el segmento infinitesimal se encuentra a una altura uno ($y = 1$) entonces $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ y dS_h tienen el mismo valor, pues a esta altura nuestro metro y el metro de Hiperbólico miden esencialmente lo mismo. Pero a una altura dada y , para el hombrecillo su longitud y la de su metro se han alterado, creciendo o disminuyendo, en razón inversamente proporcional a y (véase figura [10](#)) o sea $dS = y dS_h$. De donde $dS_h = \frac{dS}{y}$.

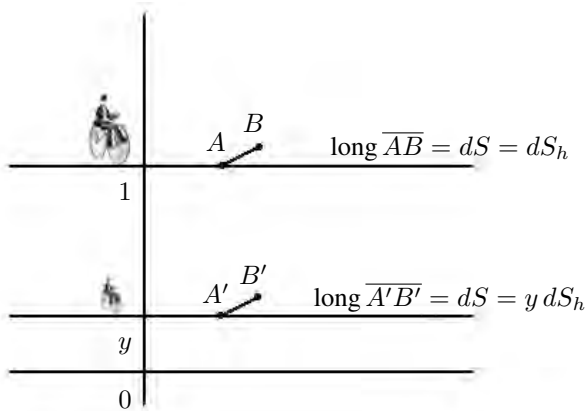


FIGURA 10.

De aquí obtenemos que, para Hiperbólico, la longitud de una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, es:

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{y} \frac{dS}{d\theta} d\theta \quad \text{donde} \quad dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Veamos qué longitud tienen las curvas más simples: los segmentos de *h-rectas*.

Empecemos por considerar el caso en que esta recta es el semieje y y los extremos del segmento son a y b ($0 < a < b$). Para calcular su longitud parametricemos el segmento por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, $\gamma(y) = (0, y)$. Su h-longitud está dada por:

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

Notamos que el segmento se puede prolongar indefinidamente tanto en una dirección como en la otra: $a \rightarrow 0$ o $b \rightarrow \infty$. El caso de cualquier otra semirrecta perpendicular al eje x es exactamente igual, pudiéndose ver como una h-recta. Tales rectas tienen longitud S_h infinita y se pueden prolongar indefinidamente en ambas direcciones.

Pensemos ahora en una circunferencia de radio r con centro en el origen, que parametrizamos como se indica en la figura [11](#).

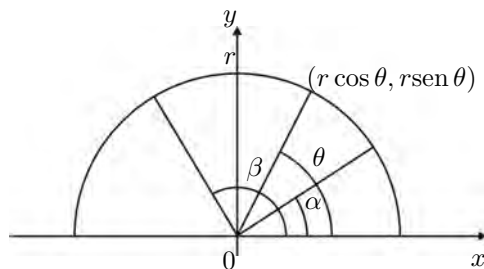


FIGURA 11.

O sea, $\gamma(\theta)$ es la función

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}_+^2 \\ \theta &\mapsto \gamma(\theta) := (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta), \end{aligned}$$

luego

$$S_h \gamma(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y(\theta)} \frac{dS(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}}{r \operatorname{sen} \theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Como

$$\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} = \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right|,$$

entonces

$$S_h \gamma(\alpha, \beta) = \left| \ln \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right|$$

Notemos que, cuando $\beta \rightarrow \pi$ o $\alpha \rightarrow 0$, la longitud $S_h \gamma(\alpha, \beta)$ tiende a infinito, es decir, también estas h-rectas tienen longitud infinita, y se pueden prolongar en ambos sentidos.

De lo que acabamos de ver en estos dos últimos incisos acerca de las h-rectas, podemos sacar algunas conclusiones.

- i) Las h-rectas son semirrectas perpendiculares al eje x o semicircunferencias con centro en el eje x (véase figura 9).
- ii) Para Hiperbólico las h-rectas tienen longitud infinita y se pueden prolongar indefinidamente en una y otra dirección. Como consecuencia, para él, el eje x es inalcanzable y, por lo tanto, está fuera de su mundo.
- iii) Dada una h-recta L y un punto P exterior a L , existen una infinidad de h-rectas que pasan por P y que no cortan a L (figura 12), son las que pasan por P y tienen su trazo en la parte gris de la ilustración. A todas estas h-rectas las llamamos paralelas a L y las dos h-rectas que limitan la parte blanca, reciben el nombre de hiperparalelas a L .

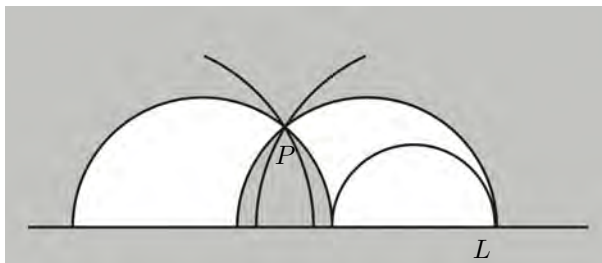


FIGURA 12.

- iv) Al igual que en el caso euclidiano las h-rectas dividen el plano en dos partes, cada una de ellas llamada *lado de la recta* (figura 13).
- v) Existe una colección infinita de h-rectas $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n, \dots$, dos a dos paralelas y situadas de tal forma que no importa cual sea la h-recta que se elija, todas las demás están del mismo lado de ella (figura 14). Situación muy distinta a la euclidiana; el lector puede imaginar otras situaciones que también difieran drásticamente de la euclidiana.

Sin duda, el lector tiene varias observaciones más del mismo estilo. Nosotros preferimos seguir adelante discutiendo la idea de ángulo y área que tiene nuestro buen amigo.

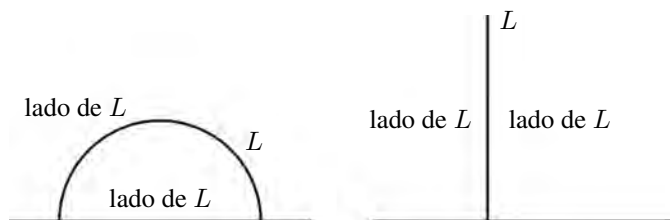


FIGURA 13.

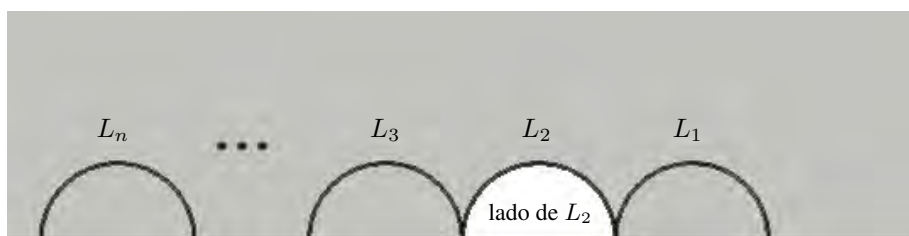


FIGURA 14.

4. ÁNGULOS EN EL PLANO DE HIPERBÓLICO

La idea más elemental de ángulo es la de la porción de plano limitada por dos semirrectas con extremo común. Un concepto de ángulo más elaborado es el de giro en una dirección de una semirrecta en torno a su extremo. Ambas ideas también son válidas en la h-geometría, pero el hecho de que sus rectas y las nuestras no coincidan (véase figura [15](#)) nos plantea algunas dudas que tenemos que resolver.

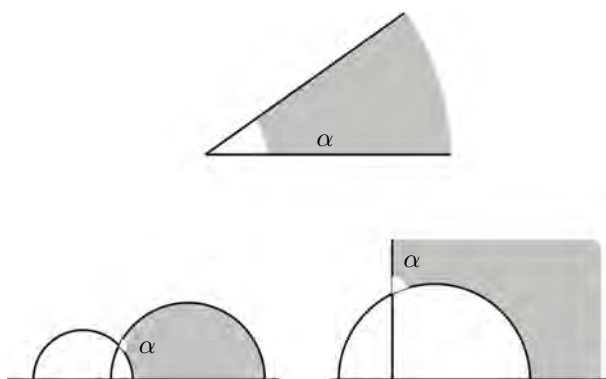


FIGURA 15.

La unidad angular *natural* es el ángulo correspondiente a un giro (en el sentido opuesto a las manecillas del reloj) de una vuelta. Si pensamos en que este giro lo llevamos a cabo, tanto nosotros como Hiperbólico, sujetos a uno de los extremos de un cordel, que mantenemos tenso, y cuyo otro extremo está fijo en el centro de giro y que además la trayectoria del giro la recorremos con rapidez constante (véase figura [16](#)), entonces podemos comparar o hablar de igualdad entre ángulos, así como dividirlos en partes iguales, comparando los tiempos usados en llevar a cabo los giros en cuestión.

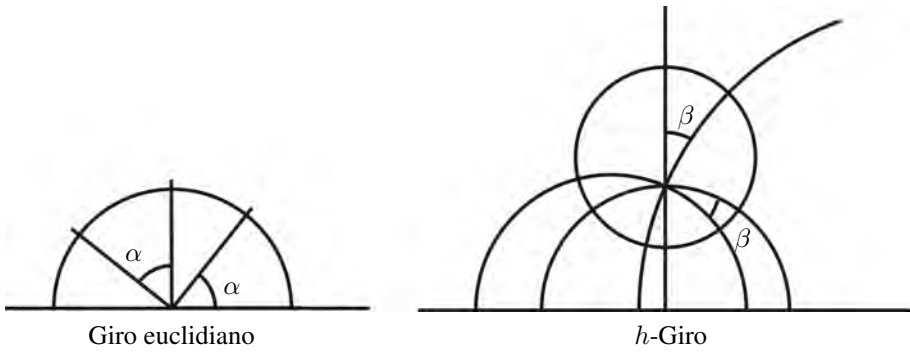


FIGURA 16.

Una pregunta que tiene sentido que nos hagamos es si, en el h-mundo, la relación que guardan dos ángulos no depende del radio tomado para realizar el giro. Efectivamente, esta relación es independiente de la longitud del cordel y es debido a que al mantener tenso éste, todos los puntos del cordel giran, para Hiperbólico, con la misma velocidad angular.

Por diversas razones, para *medir* ángulos, además de la *vuelta*, nosotros usamos otras unidades, principalmente grados y radianes. La manera de pasar de una unidad a otra es usando que una vuelta corresponde a 360° grados o 2π radianes. Hiperbólico puede usar estas mismas relaciones y definir sus grados o sus radianes.

Los ángulos en el h-mundo guardan una relación muy estrecha con los ángulos euclidianos. Ésta es:

La medida del ángulo formado por dos semirrectas en el h-mundo es el mismo que el del ángulo euclidiano que forman las tangentes a sus lados en el vértice del ángulo. (véase figura 17)

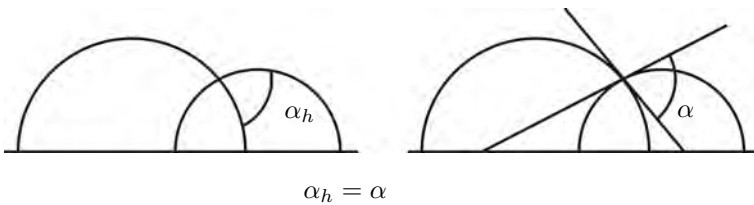


FIGURA 17.

Para convencernos de ello pensemos que el cordel al cual estamos sujetos para efectuar nuestros giros tiene una longitud infinitesimal y entonces no hay diferencia entre los segmentos de h-rectas y sus tangentes euclidianas ni tampoco hay diferencia entre su circunferencia y la nuestra, como lo sugieren el pequeño círculo y las h-rectas, dentro de éste, que aparecen en la figura 18.

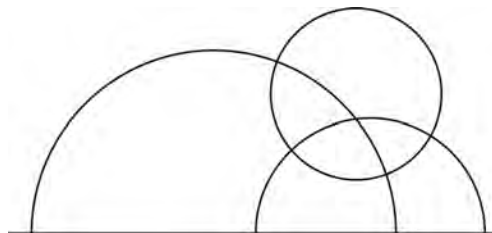


FIGURA 18.

Después de esta discusión ya sabemos cómo apreciar un ángulo de 30° o de cualquier otro valor en el h-mundo, así como “ver” la perpendicularidad entre rectas o curvas.

Al respecto analicemos la figura [19](#).

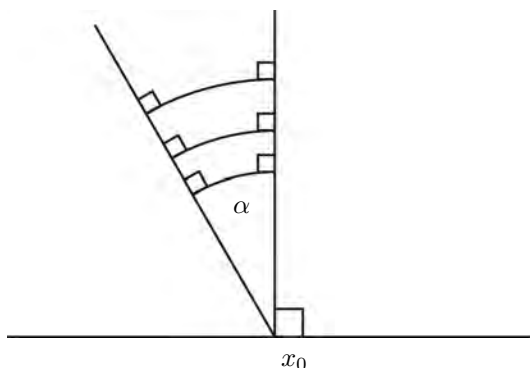


FIGURA 19.

En dicha figura aparecen dos semirrectas euclidianas concurrentes en un punto sobre el eje x , una de ellas perpendicular a él y la otra formando un ángulo α con ésta. Como sabemos, la semirrecta perpendicular es una h-recta, al igual que para Hiperbólico son segmentos de h-recta los arcos de circunferencia con centro en el eje x que abarcan el ángulo α y que aparecen en la figura. Estos arcos son perpendiculares a las dos semirrectas euclidianas, tanto para nosotros, como para él.

Usando ahora la fórmula para la longitud de dichos arcos o h-rectas (sección longitud de una curva en el mundo de Hiperbólico), vemos que todas las h-longitudes son iguales a:

$$\left| \ln \tan \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2} \right|$$

Y por lo tanto la semirrecta no perpendicular (que para Hiperbólico **no** es una recta) equidista de la h-recta (semirrecta perpendicular). En resumen: *la equidistante de una h-recta no es otra h-recta*. ¡Gran diferencia con lo que sucede en geometría euclidiana!

5. EL MUNDO DE HIPERBÓLICO Y LAS ÁREAS

Ya antes vimos cómo se relaciona la diferencial de longitud que nosotros percibimos con la que percibe Hiperbólico:

$$dS_h = \frac{dS}{y}$$

Nosotros pensamos la diferencial de área como el área de un “rectángulo” que tiene lados dx y dy , respectivamente; o sea:

$$dA = dx dy$$

Para Hiperbólico los lados del rectángulo, de acuerdo con la observación hecha arriba, serán dx/y y dy/y , respectivamente, y por lo tanto su diferencial de área es:

$$dA_h = \frac{dx dy}{y^2}$$

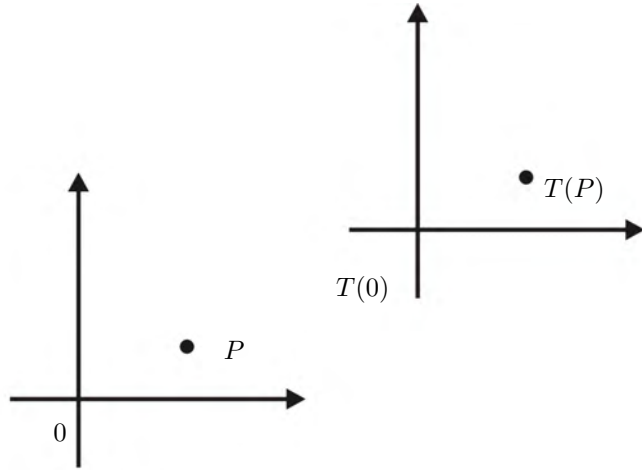
Lo que implica que el h-área $A_h(\Omega)$, de una región Ω contenida en el semiplano superior, viene dada por:

$$A_h(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2}$$

Usaremos esta fórmula más adelante para calcular las h-áreas de algunas regiones.

6. LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL MUNDO DE HIPERBÓLICO

Una idea central en la geometría euclidiana es la de transformación rígida. El propósito de este inciso es discutir cómo son y cómo se comportan tales transformaciones en el plano euclidiano, para después ver qué pasa en el h-mundo.



Traslación

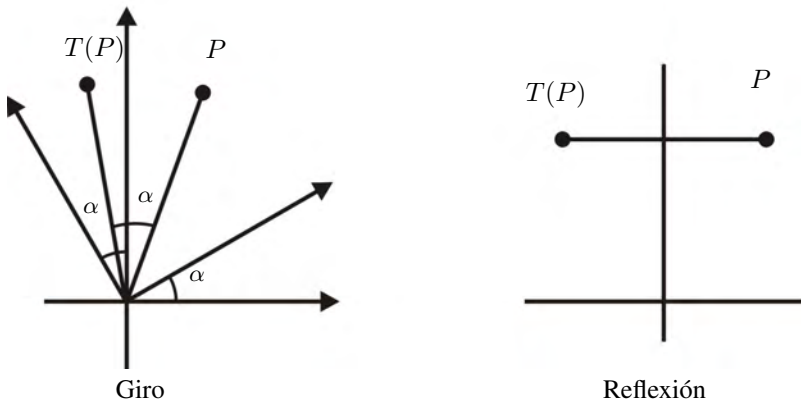


FIGURA 20.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uno a uno y sobre. Decimos que T es una transformación rígida si T preserva la distancia euclidiana, es decir si para toda pareja P y Q de puntos del plano, se satisface que

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$$

donde d es la función distancia.

Son transformaciones rígidas las traslaciones, los giros en torno a un punto y las reflexiones respecto a una recta fija (véase figura 20).

Claramente, tanto la inversa de una transformación rígida como la composición de dos transformaciones rígidas son también transformaciones rígidas.

Las transformaciones rígidas preservan triángulos, y como consecuencia también preservan ángulos.

A continuación enunciamos dos resultados elementales sobre transformaciones rígidas que son fundamentales para lo que sigue.

- i) Una transformación rígida queda determinada por la imagen de tres puntos no alineados.
- ii) Una transformación rígida siempre se puede expresar como la composición de, a lo más, tres reflexiones.

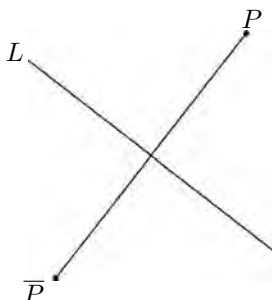


FIGURA 21.

Demostrar estas afirmaciones queda como un ejercicio para el lector.

Claramente, lo dicho hasta aquí también tiene sentido en el h-plano: la definición de transformación rígida, el que la inversa y la composición de transformaciones rígidas sea también una transformación rígida. Al igual tiene sentido lo que es una rotación. Pero, cuando no tenemos unicidad en las paralelas no es claro qué se entiende por una traslación, (usualmente definimos traslación mediante la suma de vectores), y tampoco es claro qué es una reflexión.

Aunque no es difícil hacerlo no aclararemos qué es una traslación para Hiperbólico, pero sí es imprescindible aclarar y estudiar las reflexiones en su mundo.

En el caso euclidiano, dada una recta ℓ y un punto P , decimos que \bar{P} es el reflejado de P con respecto a ℓ si \bar{P} se encuentra sobre la perpendicular a ℓ que pasa por P , a la misma distancia de ℓ que P , pero en el lado opuesto (véase figura 21).

Por la reflexión con respecto a ℓ entendemos la transformación $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que manda cada punto en su reflejado, es decir $R(P) = \bar{P}$.

Es inmediato que una reflexión preserva distancias.

En el h-mundo las reflexiones se definen exactamente de la misma manera, pero usando las h-distancias y las h-rectas.

Para algunas rectas del h-mundo es directo visualizar el efecto de una h-reflexión, por ejemplo para el semieje y (véase figura 22). En este caso la reflexión euclidiana y la de Hiperbólico coinciden, aunque la distancia hiperbólica se mide sobre los arcos marcados con \parallel .

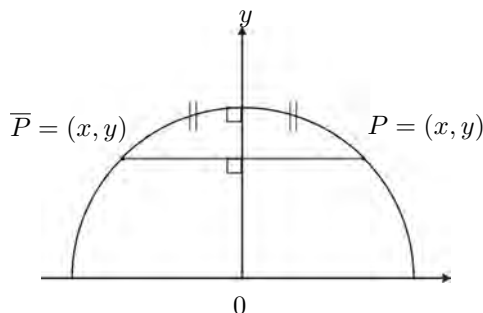


FIGURA 22.

Veamos qué pasa con un punto del eje y al reflejarlo sobre la h-recta dada por la semicircunferencia de radio uno con centro en O (véase figura 23).

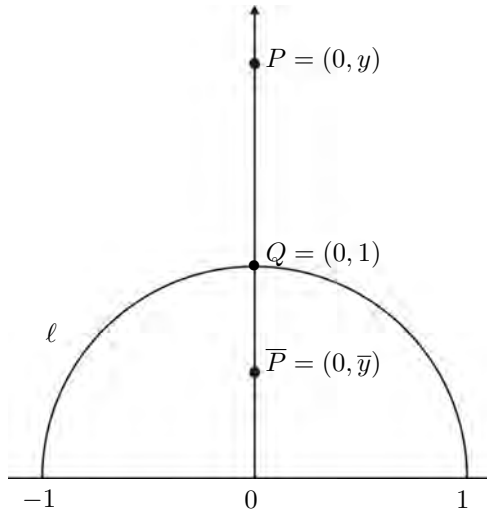


FIGURA 23.

Si P_2 es el reflejado de P_1 en ℓ , entonces

$$d_h(P_1, Q) = d_h(Q, P_2)$$

o sea:

$$\ln \frac{y_1}{1} = \ln \frac{1}{y_2},$$

lo que implica $y_1 = \frac{1}{y_2}$ o, lo que es igual, $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

Lo anterior nos hace conjeturar que la transformación geométrica definida arriba, es decir, la h-reflexión con respecto a una h-recta que no es vertical, corresponde a la inversión euclidiana con respecto a una circunferencia con centro O sobre el eje x , al restringirla al semiplano superior (véase figura 24). (Recuerde el lector que ya discutimos la reflexión en el sentido euclidiano y, en el de Hiperbólico, respecto a una semirrecta vertical).

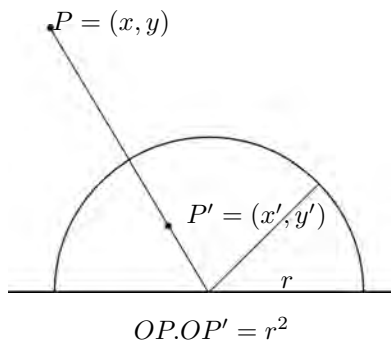


FIGURA 24.

Nótese que al aplicar dos veces una h-reflexión obtenemos la identidad, o dicho de otra manera, una h-reflexión es su propia inversa.

Si tomamos el centro O como el origen de coordenadas, entonces, en términos de éstas, la inversión I toma la forma:

$$I(x, y) = (\bar{x}, \bar{y});$$

donde el valor de \bar{x} y de \bar{y} en términos de (x, y) es:

$$\bar{x}(x, y) = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}; \quad \bar{y}(x, y) = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}$$

Para nuestro problema sólo nos interesa el semiplano superior, por lo que, aunque no lo digamos explícitamente, siempre supondremos que $y > 0$.

A continuación veremos que la inversión I , en términos de la h-geometría, satisface las propiedades de una reflexión euclidiana. Para ello echaremos mano de los rudimentos del cálculo de varias variables.

Primero calcularemos las diferenciales de $\bar{x}(x, y)$ e $\bar{y}(x, y)$, así como la matriz jacobiana de I y su determinante, que son los elementos necesarios para lo que sigue:

$$d\bar{x}(x, y) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} dy = \frac{r^2}{(x^2 + y^2)^2} (-(x^2 - y^2) dx - 2xy dy)$$

y

$$d\bar{y}(x, y) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} dy = \frac{r^2}{(x^2 + y^2)^2} (-2xy dx + (x^2 - y^2) dy).$$

Además, si denotamos por $J(I)$ a la matriz jacobiana de I , ésta tiene la forma:

$$J(I)(x, y) = \frac{r^2}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -(x^2 - y^2) & -2xy \\ -2xy & (x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

y

$$\det J(I)(x, y) = \frac{-r^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

El primer resultado que se sigue de estos cálculos es que I no preserva la orientación pues $\det J(I)(x, y) < 0$ para todo (x, y) con $y > 0$. (Notése que esta idea de orientación coincide con la que se usa en geometría elemental utilizando la orientación de los ángulos).

El segundo resultado es que preserva la magnitud de los ángulos. Esto es consecuencia de que, infinitesimalmente, alrededor de un punto P es el jacobiano en P el que nos dice cómo se comportan los ángulos entre curvas que pasan por P . En nuestro caso, la forma que tiene el jacobiano es:

$$J(I)(x, y) = k^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

O sea, es la composición de una rotación, una reflexión y una homotecia. Tanto la rotación como la homotecia preservan ángulos, mientras que la reflexión preserva su magnitud, pero cambia su orientación; por lo tanto $J(I)(x, y)$ preserva la magnitud de los ángulos.

Como segundo resultado mostraremos que $I(x, y)$ preserva las h-longitudes de las curvas. Para ello consideremos una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ cuyas coordenadas son $x(t)$ e $y(t)$. La h-longitud de γ está dada por:

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Si llamamos $\tilde{\gamma}$ a la imagen de γ bajo I ($\tilde{\gamma} = I \circ \gamma$), tenemos que

$$\tilde{\gamma}(t) = (\bar{x}(x(t), y(t)), \bar{y}(x(t), y(t))),$$

donde $\bar{x}(x, y)$ e $\bar{y}(x, y)$ son las componentes de la función I , definida antes.

Esta curva tiene h-longitud:

$$S_h(\tilde{\gamma})(a, b) = \int_a^b \frac{1}{\bar{y}(t)} \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \frac{\frac{r^2}{(x^2+y^2)^2}}{\frac{r^2 y(t)}{(x^2+y^2)}} \sqrt{\left((y^2 - x^2) \frac{dx}{dt} - 2xy \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(-2xy \frac{dx}{dt} + (x^2 - y^2) \frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\
 &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = S_h(\gamma)(a, b),
 \end{aligned}$$

probando así que las inversiones euclidianas respecto a semicircunferencias que tienen su centro en el eje x preservan la h -longitud de las curvas.

Como consecuencia, las inversiones euclidianas mandan segmentos de h -rectas en segmentos de h -rectas con la misma longitud. Esto se debe a que si tenemos un h -segmento con extremos a y b , y bajo una de tales inversiones se transforma en una curva γ con extremos a' , b' que no sea un h -segmento, el h -segmento que une a' con b' tendrá longitud menor y su imagen bajo I será una curva uniendo a con b con h -longitud menor que el segmento que los une; lo que es imposible.

El que las inversiones euclidianas que hemos estado estudiando preserven las magnitudes de los ángulos y manden h -segmentos en h -segmentos con la misma longitud, implica que, en la h -geometría, son reflexiones respecto a las h -rectas definidas por las semicircunferencias con centro en el eje x . Para visualizarlo consideremos un punto P , su imagen $I(P)$ y el segmento de h -recta que los une (véase figura 25).

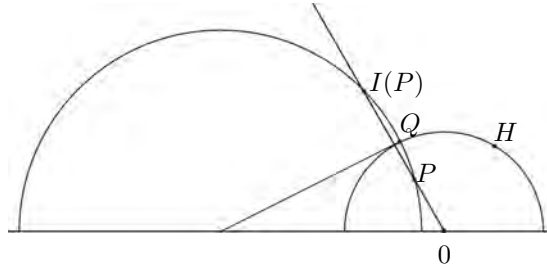


FIGURA 25.

A este segmento, cuyos extremos son P e $I(P)$, la inversión euclidiana le cambia la orientación, pero lo transforma en sí mismo:

$$P \rightarrow I(P) \quad \text{e} \quad I(P) \rightarrow I \circ I(P) = P$$

Tomemos ahora el punto Q en el que este segmento corta la circunferencia de inversión. Claramente $I(Q) = Q$, lo mismo que $I(H) = H$. Es directo que los h -segmentos \overline{PQ} y $\overline{QI(P)}$ tienen la misma h -longitud, pues I transforma uno en el otro. Por último, los ángulos $\angle PQH$, $\angle I(P)QH$ tienen la misma magnitud (aunque orientaciones opuestas) y entre ellos suman 180° (que es lo que mide $\angle PQI(P)$), por lo tanto ambos miden 90° y las h -rectas $\overline{PI(P)}$ y \overline{QH} son perpendiculares, terminando así nuestro argumento.

Veamos otra propiedad de las inversiones euclidianas que resulta importante en el marco de la h -geometría. Una reflexión euclidiana cambia la orientación y preserva las áreas (con más precisión, su valor absoluto). En el inciso siguiente veremos que, en forma similar, una h -reflexión también cambia la orientación y preserva el valor absoluto de las h -áreas. Para ello recordemos la fórmula para el cambio de variable en una integral múltiple, que aprendimos en nuestros cursos de cálculo avanzado, para el caso de dimensión 2.

7. TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

Sea $F(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ una transformación con derivada continua (i.e. con derivadas parciales de primer orden continuas) e inyectiva de una región cerrada Ω del plano xy , en una región $\bar{\Omega}$ del plano $\bar{x}\bar{y}$. Si el determinante de la matriz jacobiana de F es positivo, para todo punto de Ω , entonces, para cualquier función continua $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\iint_{\bar{\Omega}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y} = \iint_{\Omega} f(\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)) \det JF(x, y) dx dy$$

Si el determinante de la matriz jacobiana es negativo, entonces las integrales anteriores difieren únicamente en el signo.

Luego, en nuestro caso, el teorema nos da:

$$\iint_{I(\Omega)} \frac{d\bar{x}d\bar{y}}{\bar{y}^2} = \iint_{\Omega} \frac{-r^4}{\left(\frac{r^2 y}{x^2+y^2}\right)^2 (x^2+y^2)^2} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2}$$

8. EL COMPORTAMIENTO DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS BAJO INVERSIONES EUCLIDIANAS

Para los propósitos de este trabajo nos falta una última propiedad de las inversiones: estudiar las imágenes bajo ellas de las circunferencias y de las rectas euclidianas.

Una inversión manda circunferencias en circunferencias o rectas. Asimismo, manda rectas en rectas o circunferencias.

- Una circunferencia que no pasa por el centro de inversión va a pasar a otra circunferencia que no pasa por el centro de inversión. Además los centros de ambas circunferencias están alineados con el centro de inversión.
- Una circunferencia que pasa por el centro de inversión tiene como imagen una recta que no pasa por el centro de inversión.
- Una recta que no pasa por el centro de inversión tiene como imagen una circunferencia que pasa por el centro de inversión, las rectas que pasan por el centro de inversión se transforman en sí mismas.

La figura 26 ilustra algunos de los casos.

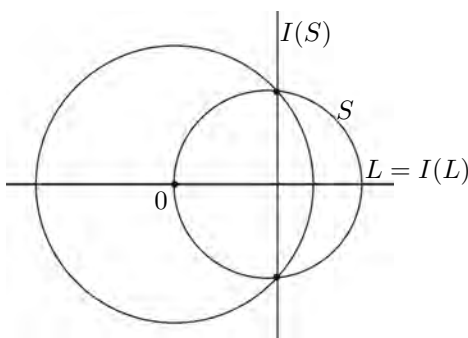


FIGURA 26.

Como veremos a continuación estas afirmaciones se demuestran directamente, sustituyendo en las ecuaciones de las circunferencias y las rectas, en el lugar de las variables, las expresiones de sus transformados.

Si llamamos S a la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, al sustituir en ella las expresiones de las variables en función de sus imágenes:

$$x = \frac{r^2 \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \quad y = \frac{r^2 \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

obtenemos

$$\frac{r^4 \bar{x}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} + \frac{r^4 \bar{y}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} + \frac{ar^2 \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \frac{br^2 \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + c = 0$$

o sea,

$$\frac{r^4}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \frac{ar^2 \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \frac{br^2 \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + c = 0$$

y multiplicando por $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$, obtenemos

$$r^4 + ar^2 \bar{x} + br^2 \bar{y} + c(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = 0$$

que muestra que, si S no pasa por el origen, es decir si $c \neq 0$, se transforma en otra circunferencia, que no pasa por el origen, es decir $r^4/c \neq 0$.

Si S pasa por el origen ($c = 0$), entonces su imagen es la recta $r^4 + ar^2 \bar{x} + br^2 \bar{y} = 0$, la cual tampoco pasa por el origen. El análisis de cómo se transforma una recta se lo dejamos al lector.

Dejemos aquí el estudio de las inversiones y pasemos a ver las transformaciones rígidas en la h-geometría.

9. LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL MUNDO DE HIPERBÓLICO (CONTINUACIÓN)

Como recordará el lector, ya antes discutimos las transformaciones rígidas para el caso de la geometría euclidiana, y dejamos al lector la prueba de dos resultados básicos; éstos son:

- Una transformación rígida queda determinada por la imagen de tres puntos no alineados.
- Una transformación rígida siempre se puede expresar como el producto de a lo más tres reflexiones.

Ahora nuestro conocimiento de las reflexiones en la h-geometría nos permite probar ambos resultados para el caso de Hiperbólico. Como antes, le dejamos al lector la prueba de ellos, pero para el segundo, le proporcionamos una sugerencia.

Consideremos en \mathbb{R}_+^2 tres puntos A, B y C que, según Hiperbólico, no estén alineados; sean A', B', C' otros tres puntos en \mathbb{R}_+^2 , tales que

$$d_h(A, B) = d_h(A', B'), \quad d_h(B, C) = d_h(B', C') \quad \text{y} \quad d_h(C, A) = d_h(C', A')$$

Entonces, a través de la aplicación sucesiva de cuando mucho tres h-reflexiones, podemos mandar A en A', B en B' y C en C' (y por el primer resultado, habremos terminado con esto la prueba del segundo).

Como primer paso demuestre que hay una h-reflexión que manda $|x|$ la h-recta determinada por A y B en la h-recta determinada por A' y B' y que es tal que la imagen del segmento AB y el segmento $A'B'$ tienen sentidos opuestos (véase figura 27).

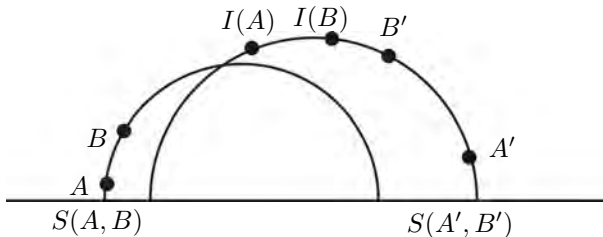


FIGURA 27.

Como segundo paso, mande, a través de una inversión que envíe $S(A', B')$ en sí misma, $I(A)$ en A' e $I(B)$ en B' .

Como tercer y último paso, vea de qué lado de $S(A', B')$ están C' y la imagen de C . Si están del mismo lado tienen que coincidir, si no están del mismo lado invierta respecto a $S(A', B')$.

Los resultados anteriores nos dicen que, en el h-mundo, los movimientos rígidos preservan las longitudes de las curvas, las áreas de las regiones y los ángulos. Ello nos permite situar los objetos geométricos de ese mundo en la forma que nos resulte más fácil su estudio. A continuación veremos algunos resultados cuyas demostraciones ejemplifican lo dicho.

10. EL ÁNGULO DE PARALELISMO Y LA FUNCIÓN π DE LOBACHEVSKI

Como vimos antes, dados una h-recta ℓ y un punto P exterior a ℓ en el h-plano, existen una infinidad de h-rectas que pasan por P y no intersectan a ℓ . Esta familia de rectas está limitada por dos rectas que pasan por P y que tampoco intersectan a ℓ . Cada una de estas rectas forma un ángulo menor de 90° con la perpendicular a ℓ que pasa por P ; como veremos ambos ángulos son iguales y están en función de la distancia de P a ℓ . Cada uno de ellos es llamado ángulo de paralelismo en P relativo a ℓ . Llamemos d a la h-distancia de P a ℓ , definimos la función π de Lobachevski por $\pi(d) = \alpha$ donde α es el ángulo de paralelismo. El lo que sigue daremos una fórmula explícita para $\pi(d)$. Para ello tomaremos como recta ℓ el semicírculo euclidiano de radio 1 y centro el origen, y P un punto en el eje y (véase figura 28). Los resultados vistos previamente nos dicen que restringirnos a este caso no nos hace perder generalidad.

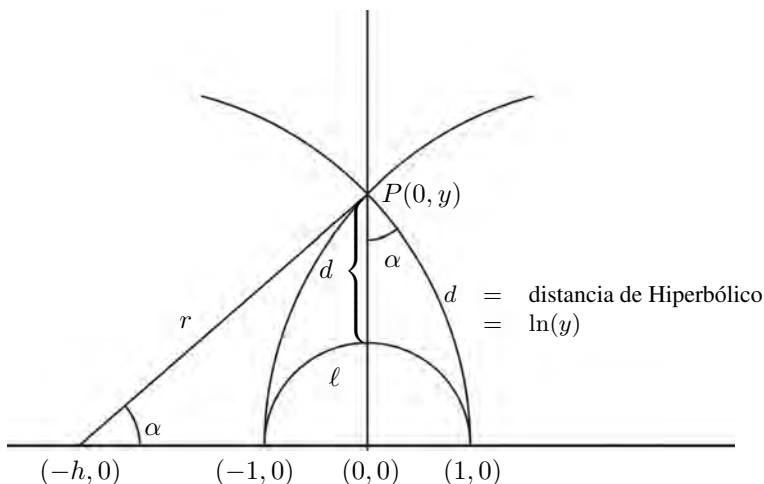


FIGURA 28.

Ahora se ve claramente la igualdad entre los ángulos mencionados arriba. A continuación observemos que si llamamos y a la ordenada de P , de la fórmula para la h-distancia, tenemos que

$$\ln\left(\frac{y}{1}\right) = d$$

o, lo que es lo mismo, $y = e^d$. Si denotamos por $(-h, 0)$ al centro del semicírculo que pasa por P y $(1, 0)$, entonces el radio r de dicho semicírculo satisface euclidianamente,

$$h^2 + e^{2d} = r^2 \quad \text{y} \quad h + 1 = r$$

de donde

$$(r - 1)^2 + e^{2d} = r^2,$$

lo que implica

$$r = \frac{e^{2d} + 1}{2} \quad \text{y} \quad h = \frac{e^{2d} - 1}{2}$$

De la figura, tenemos

$$\cos \alpha = \frac{e^{2d} - 1}{e^{2d} + 1} = \frac{e^d - e^{-d}}{e^d + e^{-d}} = \tanh(d)$$

luego

$$\pi(d) = \alpha = \cos^{-1}(\tanh(d)).$$

La relación entre el ángulo α y d también se puede expresar como:

$$d = -\log \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

El lector no tendrá dificultad en verificarlo usando la figura 28 y la fórmula para $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Analizando $\pi(d)$ vemos que es una función decreciente que tiende a 0, cuando d tiende a infinito y que tiende a $\frac{\pi}{2}$, cuando d tiende a cero. (Cosa que también podemos ver en la figura con nuestros ojos).

Lo anterior nos dice, en un lenguaje coloquial, que si el punto P está situado a mucha distancia de la recta ℓ , entonces habrá muchas más paralelas y que en ∞ todas las h-rectas serán paralelas.

Por el contrario, si P es muy cercano a ℓ , la región de las h-rectas paralelas a ℓ estará limitada por un ángulo muy pequeño y entonces habrá “menos” paralelas a ℓ a través de P .

11. EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO DE HIPERBÓLICO

Una fórmula que sin duda podemos calificar de bella es la que nos da el área de un triángulo con ángulos α, β, γ (medidos en radianes) en el h-mundo. Ésta es: $A_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. A continuación damos su justificación. Para hacernos la vida un poco más sencilla, basados en la propiedades de las transformaciones rígidas, podemos considerar que uno de los lados del triángulo es un segmento del eje y (véase Figura 29).

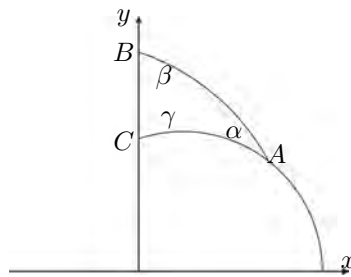


FIGURA 29.

Para demostrar nuestra fórmula consideraremos dos semirrectas verticales arbitrarias y una semicircunferencia que corte ambas semirrectas y, tomaremos como origen de coordenadas el centro de dicha semicircunferencia, como lo ilustra la Figura 30.

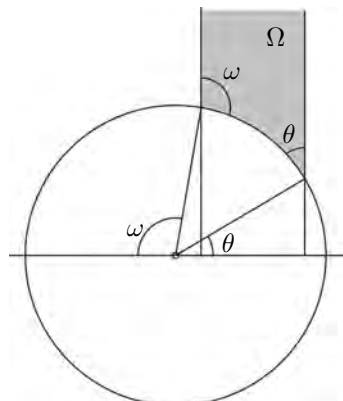


FIGURA 30.

Demostremos que el h-área de la región gris, a la que denotamos por Ω , está dada por $\pi - \omega - \theta$. De aquí, la fórmula del h-área es directa. El h-área de Ω está dada por:

$$A_h(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{r \cos(\pi-\omega)}^{r \cos \theta} dx \int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \int_{r \cos(\pi-\omega)}^{r \cos \theta} \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

integral que, con el cambio de variable $x = r \cos \varphi$, se transforma en

$$\int_{\pi-\omega}^{\theta} \frac{-r \operatorname{sen} \varphi d\varphi}{r \operatorname{sen} \varphi} = \pi - \omega - \theta.$$

Para obtener la fórmula del h-área del triángulo considere la Figura 31.

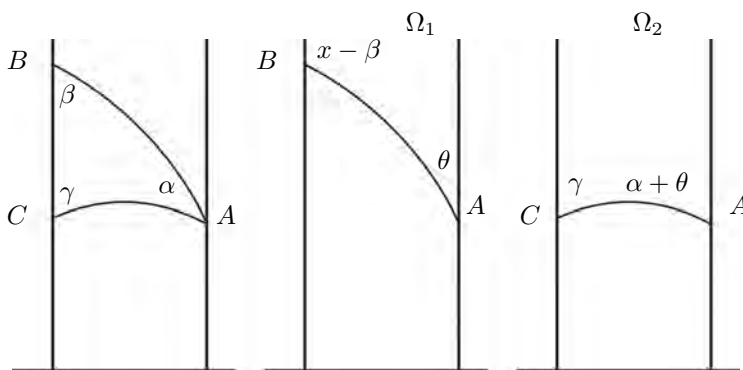


FIGURA 31.

De la figura y el resultado previo, tenemos

$$\begin{aligned} A_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) &= A_h(\Omega_2) - A_h(\Omega_1) \\ &= \pi - (\gamma + \alpha + \theta) - (\pi - (\pi - \beta + \theta)) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

Como consecuencia de esta fórmula tenemos que en la h-geometría:

- i) La suma de los ángulos de un triángulo siempre es menor que π .
- ii) El área de un triángulo es menor que π .
- iii) Si dos triángulos son semejantes, entonces tienen la misma área (y se puede probar que en este caso con congruentes).

Estos hechos son radicalmente distintos de lo que pasa en la geometría euclidiana.

La Figura 32 muestra un triángulo degenerado (tiene sus tres ángulos iguales a cero y sus vértices están en el eje x) que tiene área π . Éste es el caso límite de ii).

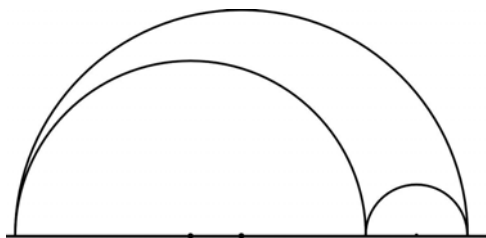


FIGURA 32.

12. LAS CIRCUNFERENCIAS DE HIPERBÓLICO Y HACES DE CIRCUNFERENCIAS

Como ya hemos observado, Hiperbólico puede moverse a lo largo de una curva manteniéndose a la misma h -distancia de un punto dado; nuestro problema es que no sabemos cuál es esa curva desde el punto de vista de nuestra geometría. En esta sección abordamos este problema.

Para ello consideremos los puntos $P(0, y_0)$ y $-P(0, -y_0)$ con $y_0 > 0$ y todas las circunferencias euclidianas que pasan por ellos, cuyo conjunto llamaremos el haz de circunferencias. Es inmediato que el centro de cada una de ellas se encuentra sobre el eje x . La Figura 33 muestra la situación.

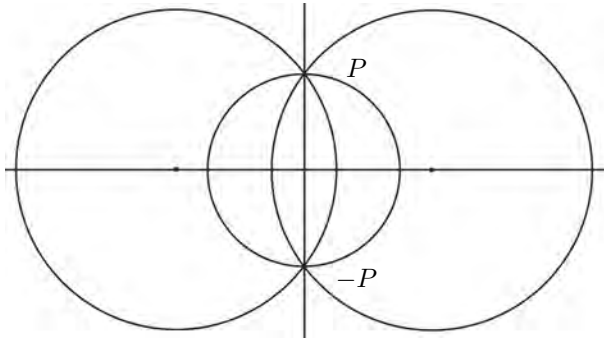


FIGURA 33.

Nótese que la parte de cada una de estas circunferencias que está por encima del eje x es una h -recta.

La ecuación de cada una de ellas es

$$(x - h)^2 + y^2 = h^2 + y_0^2.$$

Remarcamos que el punto $(h, 0)$ es su centro y que $(h^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$ es su radio.

La primera pregunta que queremos contestar es: dada una circunferencia del haz y otra con centro en $(0, k)$ con $k > 0$ y radio r , ¿para qué valor del radio r son estas circunferencias ortogonales?

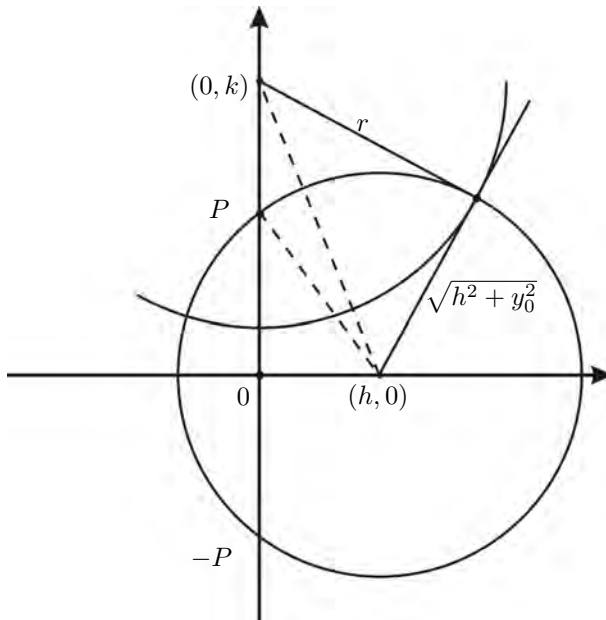


FIGURA 34.

De la figura 34 vemos que:

$$k^2 + h^2 = r^2 + h^2 + y_0^2$$

o sea

$$r^2 = k^2 - y_0^2$$

obteniendo así el valor buscado del radio r , pero de paso hemos obtenido algo más:

¡La circunferencia de centro $(0, k)$ y radio $r = \sqrt{k^2 - y_0^2}$ es ortogonal a todas las circunferencias del haz!

Antes de seguir adelante damos la ecuación de esta circunferencia y hacemos algunos comentarios. Su ecuación es

$$x^2 + (y - k)^2 = r^2 = k^2 - y_0^2.$$

Nótese que, para que tal circunferencia exista, es necesario que

- i) $k > y_0 > 0$. Es decir el centro de la circunferencia está por encima del punto P .
- ii) $r < k$. Es decir tales circunferencias están contenidas íntegramente en el semiplano superior.

Además se tiene que dos de tales circunferencias, si se cortan, coinciden y por lo tanto, si no se cortan, una está en el interior de la otra (a la que le corresponde mayor k es la que *circunda* a la otra), afirmación que no es directa, pero que el lector no tendrá dificultad en probar.

Volviendo a nuestro haz \mathcal{H} de circunferencias euclidianas – o de h-rectas concurrentes – tenemos que la circunferencia euclidiana \mathcal{C} con centro en $(0, k)$ y radio $r = \sqrt{k^2 - y_0^2}$ es ortogonal a todos los elementos de \mathcal{H} . Haciendo una analogía con lo que sucede euclidianamente (una circunferencia euclidiana es ortogonal a todos los elementos de un pincel de rectas euclidianas si el centro coincide con el punto de concurrencia del pincel) podemos intuir que \mathcal{C} es una h-circunferencia con centro en el punto P .

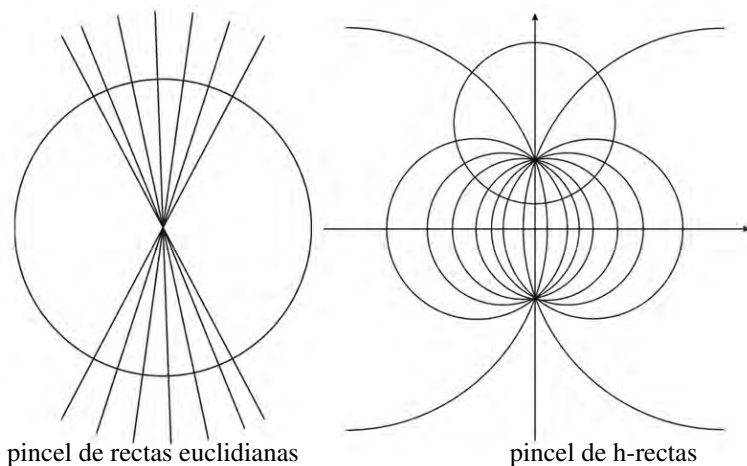


FIGURA 35.

Efectivamente éste es el caso, ¡se trata de una circunferencia de Hiperbólico! y su centro es el punto P . Además, como el lector puede ver, su h-radio es $\rho = \ln \sqrt{\frac{k+r}{k-r}}$ (para ello basta calcular la distancia de cualesquiera de los dos puntos de \mathcal{C} que se encuentran sobre el eje y al punto P). Para demostrarlo debemos ver que todos sus h-radios tienen la misma longitud o, equivalentemente, que dado un h-radio existe una h-reflexión que lo manda en uno de los radios verticales.

En efecto, consideremos un h-radio PQ , la h-reflexión buscada es la inversión euclidiana respecto a la circunferencia que pasa por el punto P y tiene su centro en uno de los “extremos”, por ejemplo R , de la h-recta que contiene al h-segmento PQ (véase Figura 36). Esta h-reflexión envía el haz de h-rectas que pasa por el punto P en sí mismo, en particular manda la h-recta que contiene al h-segmento PQ , en la parte positiva del eje y ; la circunferencia con h-centro en P queda invariante, pues es perpendicular a todas las h-rectas del haz, en particular a la usada para realizar la inversión, de aquí nuestra afirmación es inmediata.

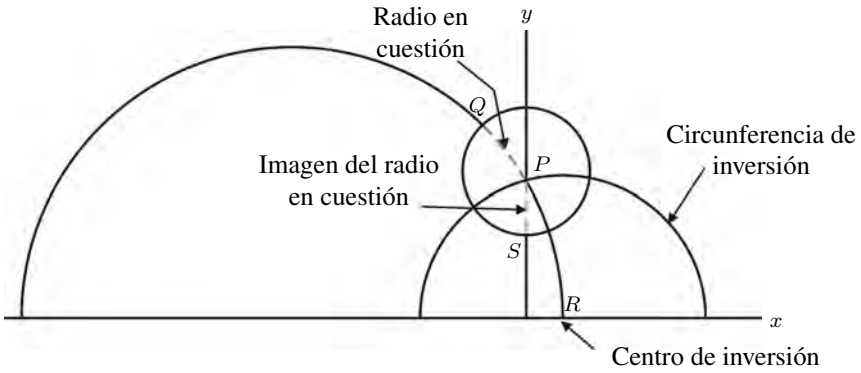


FIGURA 36.

Antes de seguir adelante notemos que el hecho de que la h-longitud del segmento que va del punto P al eje x tenga longitud infinita implica que, con h-centro el punto P podemos trazar h-circunferencias con h-radio tan grande como deseemos y, por supuesto, lo mismo sucede con cualquier otro punto del semiplano superior que tomemos.

13. CÓMO VE HIPERBÓLICO LAS RECTAS Y LAS CIRCUNFERENCIAS EUCLIDIANAS

En lo anterior vimos que las semirrectas perpendiculares al eje x corresponden a h-rectas infinitas en ambas direcciones, y también vimos que una semirrecta inclinada equidista, en el sentido de Hiperbólico, de la h-recta dada por la perpendicular al eje x en el punto donde la semirrecta inclinada intersecta dicho eje, (recuerde la figura 19).

Otra propiedad interesante de las semirrectas inclinadas es que son las únicas curvas invariantes bajo todas las h-reflexiones con eje de reflexión una recta de Hiperbólico asociada a una semicircunferencia con centro el origen de la semirrecta inclinada, (Figura 37).

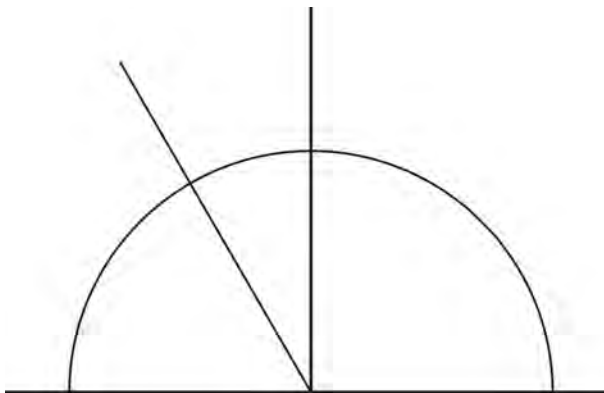


FIGURA 37.

Nos falta analizar: ¿cómo ve Hiperbólico una recta paralela al eje x ?, ¿qué significado geométrico tiene? (figura 38).

Hay dos propiedades que satisfacen tales rectas que es conveniente destacar:

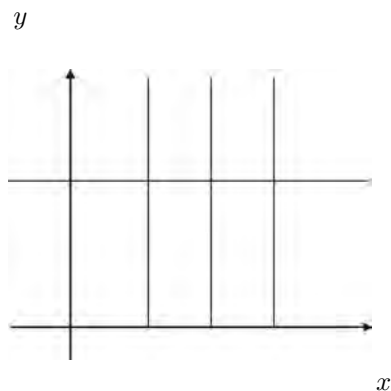


FIGURA 38.

- i) En el sentido de Hiperbólico son las únicas curvas perpendiculares a todas las h-rectas dadas por semirrectas perpendiculares al eje x .
- ii) Son las únicas curvas que permanecen invariantes bajo h-reflexiones con respecto a cualquier h-recta dada por una semirrecta perpendicular al eje x .

En cierto sentido, corresponden a circunferencias de radio infinito, en donde todos los radios están dados por semirrectas perpendiculares al eje x . Estas curvas son parte de una familia más amplia a cuyos elementos llamamos *horociclos*.

Sin duda el lector ya pensó cómo calcular la longitud de un segmento de ellas.

En el caso de las circunferencias se da también una situación interesante: La parte superior de las circunferencias euclidianas que tienen su centro en el eje x corresponden a h-rectas y, como acabamos de ver, las circunferencias euclidianas contenidas en el semiplano superior corresponden a h-circunferencias, (véase figura 39).

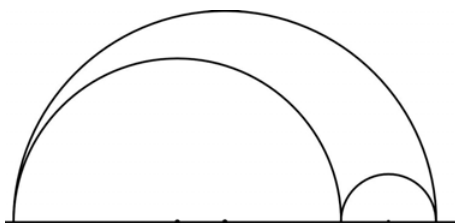


FIGURA 39.

Pero ¿qué pasa cuando una circunferencia euclidiana no tiene su centro sobre el eje x e intersecta dicho eje en dos puntos?, ¿qué pasa cuando es tangente al eje x ? (Véase figura 40)

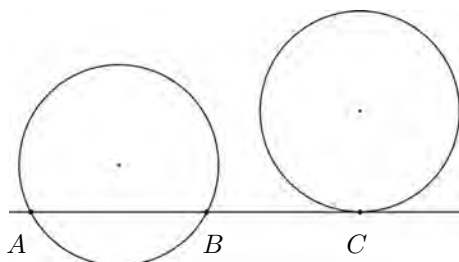


FIGURA 40.

En el primer caso consideremos la h-recta que corresponde a la semicircunferencia, con centro en el eje x y que intersecta al eje x en los mismos puntos que la primera (figura 41).

La parte situada por encima del eje x de la circunferencia en cuestión equidista de la recta asociada. Para darnos cuenta de ello basta reflejar la configuración respecto a una de las dos

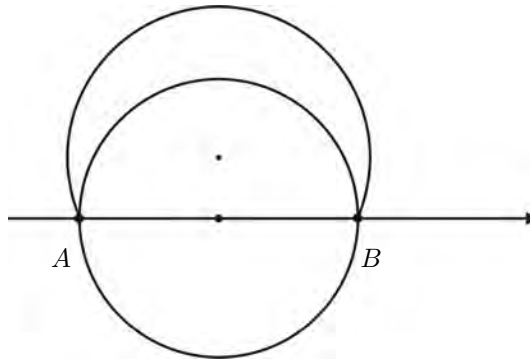


FIGURA 41.

h-rectas que tiene su centro en uno de los extremos de la recta y pasa por el otro (véase figura 42).

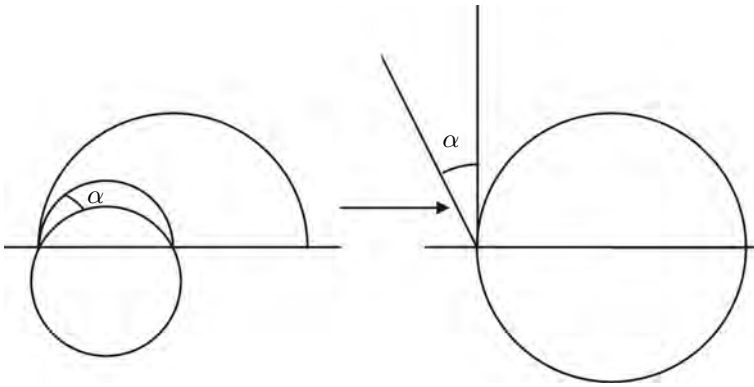


FIGURA 42.

Veamos el segundo caso: para ello consideremos la familia de h-rectas que tienen uno de sus extremos en el punto de tangencia de la circunferencia en cuestión (Figura 43).



FIGURA 43.

Reflejando con respecto a cualquier h-recta que corresponde a una semicircunferencia con centro en el punto de tangencia obtenemos la configuración de la Figura 38, verificando así que se trata de un horociclo.

Nótese que, a diferencia de lo que pasa en el plano euclidiano, en el plano de Hiperbólico, tres puntos no h-alineados determinan una equidistante (a una h-recta), un horociclo o una circunferencia.

Otra diferencia con el plano euclidiano nos la dan los horociclos interpretados como circunferencias de radio infinito. Con más detalle consideremos un punto P_0 en la parte positiva del eje y . Tomemos ahora todas las h -circunferencias que pasan por P_0 y tienen su centro en el eje y , por debajo de P_0 , y asimismo todas las h -circunferencias que pasan por P_0 y tienen su centro en el eje y por encima de P_0 (figura 44).

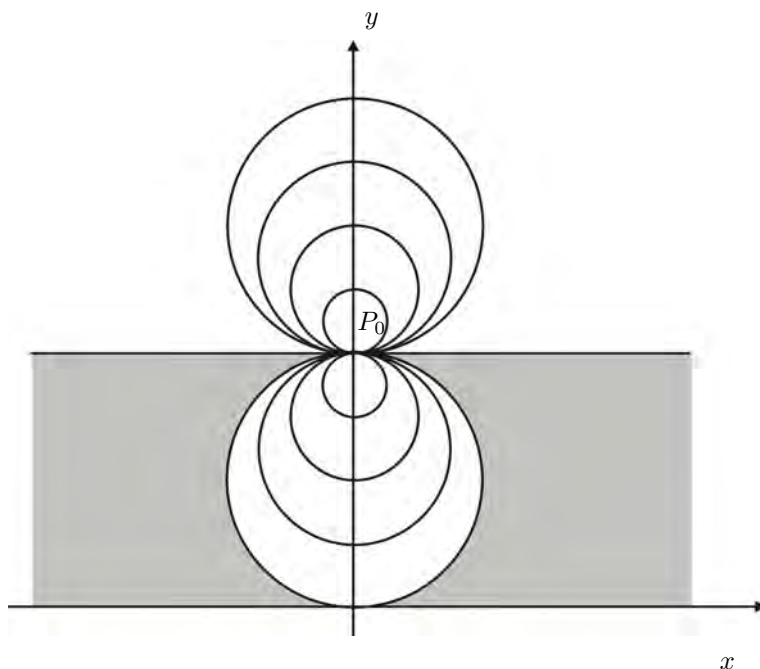


FIGURA 44.

Como se observa en la figura, cada una de estas familias está limitada por un horociclo: la primera, por el dado por la circunferencia que pasa por P_0 , tangente al eje x y con centro en el eje y . Como ya dijimos, este horociclo es perpendicular a todas las h -rectas que parten del punto de tangencia.

La segunda familia está limitada por el horociclo dado por la paralela al eje x que pasa por P_0 . Este horociclo es perpendicular a todas las h -rectas dadas como semirectas euclidianas paralelas al eje y . Notemos que una h -reflexión sobre la h -recta dada por la semicircunferencia con centro en el origen y que pasa por P_0 , envía una familia de circunferencias en la otra, un horociclo en el otro y la familia de perpendiculares a un horociclo, en la familia de perpendiculares al otro.

Por último, nótese que en el caso del plano euclidiano, los dos “horociclos” coinciden y no existe la región que aparece en tono gris en la figura 44.

14. LONGITUD Y ÁREA DE LAS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO DE HIPERBÓLICO

Consideremos una circunferencia euclidiana con centro en $(0, 1)$ y radio $r < 1$. Sabemos que esta circunferencia, considerada como h -circunferencia, tiene su centro en el punto $(0, \sqrt{1 - r^2})$ y h -radio $\rho = \ln \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$.

También es claro que a través de un movimiento h -rígido, cualquier h -circunferencia la podemos llevar a otra del mismo h -radio y que tenga su h -centro en $(0, \sqrt{1 - r^2})$. De estas consideraciones concluimos que el caso general se reduce a conocer cuál es la h -longitud o

el h-área de las circunferencias euclidianas de un radio dado $r < 1$ y centro $(0, 1)$. En lo que sigue haremos uso de esta observación.

Consideremos una circunferencia euclidiana con centro $(0, 1)$, y radio $r < 1$. (Véase figura 45).

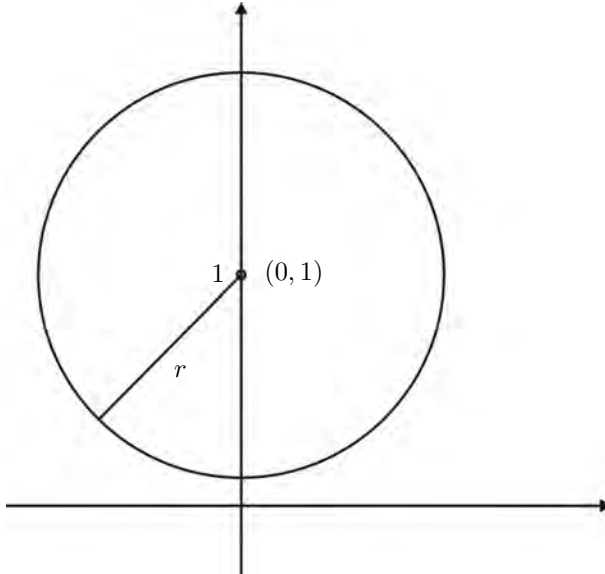


FIGURA 45.

Su ecuación es: $x^2 + (y - 1)^2 = r^2$ ($0 < r < 1$)

De donde, despejando x en función de y , tenemos:

$$x = \pm \sqrt{r^2 - (y - 1)^2}$$

y

$$\frac{dx}{dy} = \mp \frac{y - 1}{\sqrt{r^2 - (y - 1)^2}}$$

Aplicando la fórmula de la h-longitud a esta circunferencia, tenemos²

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 2 \int_{1-r}^{1+r} \frac{1}{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= \frac{2\pi r}{\sqrt{1-r^2}} \end{aligned}$$

Esta longitud está en función del centro euclidiano $(0, 1)$ y del radio euclidiano r .

Nos gustaría ponerla en términos de sus elementos hiperbólicos; para ello notemos que, como sabemos, el radio hiperbólico ρ de la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio euclidiano r está dado por

$$\rho = \ln \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$$

Por lo tanto

$$r = \frac{e^{2\rho} - 1}{e^{2\rho} + 1}$$

²Nota de las Editoras: para no interrumpir el hilo de la argumentación, la deducción de la fórmula se posponen hasta el Apéndice:

y de aquí $\sqrt{1-r^2} = \frac{2e^\rho}{1+e^{2\rho}}$ que sustituido en la fórmula anterior (fórmula para la longitud), nos da

$$L_h(c, \rho) = 2\pi \operatorname{senh} \rho,$$

fórmula que, como era de esperar, no depende de la posición del h-centro de la circunferencia.

15. ÁREA DEL CÍRCULO HIPERBÓLICO

Aplicando la fórmula para el h-área al círculo asociado a la circunferencia euclidiana de la figura 43, obtenemos³

$$\begin{aligned} A_h(c) &= \int_{-r}^r \left[\int_{\frac{1-\sqrt{r^2-x^2}}{1+\sqrt{r^2-x^2}}}^{\frac{1+\sqrt{r^2-x^2}}{1-\sqrt{r^2-x^2}}} \frac{dy}{y^2} \right] dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

área que está dada en función de los elementos euclidianos del círculo. Para obtenerla en función de los elementos de Hiperbólico, usamos, como antes, la expresión de ρ en términos de r , es decir

$$\frac{\rho}{2} = \ln \sqrt[4]{\frac{1+r}{1-r}}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{senh} \frac{\rho}{2} \right)^2 &= \frac{1}{4} \left(\exp \left(\ln \sqrt[4]{\frac{1+r}{1-r}} \right) - \exp \left(\ln \sqrt[4]{\frac{1-r}{1+r}} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} - 2 + \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

luego, sustituyendo esta expresión en la fórmula anterior para el área, tenemos

$$A_h(c) = 4\pi \left(\operatorname{senh} \frac{\rho}{2} \right)^2.$$

Notemos que, al igual que en el caso euclidiano, la derivada del área del círculo es la longitud de la circunferencia

$$\frac{d A_h(c)}{d\rho} = 4\pi \operatorname{senh} \frac{\rho}{2} \cosh \frac{\rho}{2} = 2\pi \operatorname{senh} \rho = L_h(c).$$

Pasemos ahora a un tema distinto en donde veremos otras diferencias entre nuestro mundo y el de Hiperbólico.

16. RECUBRIMIENTO DEL PLANO DE HIPERBÓLICO POR POLÍGONOS REGULARES

Hoy Hiperbólico se levantó con la obsesión de recubrir el piso de su mundo con polígonos regulares de n lados y tales que, en cada vértice, se encuentren m de ellos.

Para ello pensó de la siguiente manera: si trazo una h-circunferencia de cualquier radio y la divido en n partes iguales, tendré los vértices de un polígono de n lados inscrito en dicha circunferencia. Los lados del polígono son los segmentos de h-recta que unen dos vértices contiguos; el ángulo interior α es el que forman dos lados que coinciden en un vértice. Y el ángulo central que abarca un lado es el que forman los radios de la circunferencia que pasan por sus extremos y mide precisamente $\frac{2\pi}{n}$ (figura 46).

³Nota de las Editoras: para no interrumpir el hilo de la argumentación, la deducción de la fórmula se posponen hasta el Apéndice:

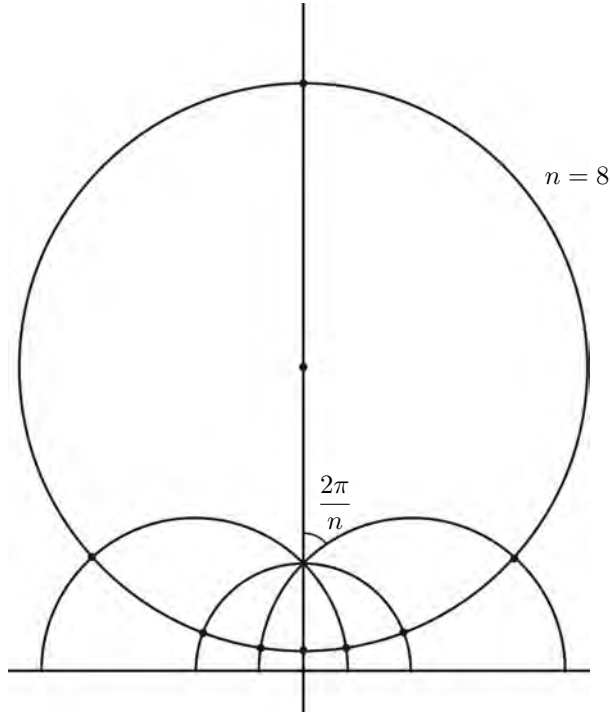


FIGURA 46.

Los ángulos del triángulo determinado por los extremos de un lado y el centro de la circunferencia suman precisamente $\frac{2\pi}{n} + \alpha$ y esta suma es menor que π radianes (véase figura 47).

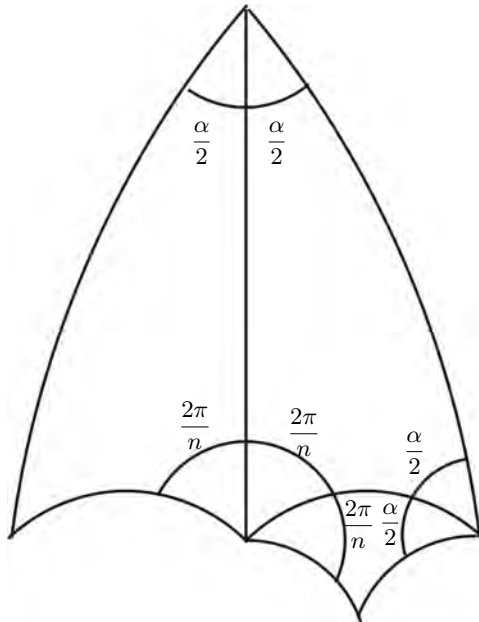


FIGURA 47.

Por otro lado, si en cada vértice del recubrimiento se encuentran m de estos polígonos, entonces el ángulo α estará dado por $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ (figura 48). De aquí y de la observación anterior

tenemos que

$$\pi > \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m}$$

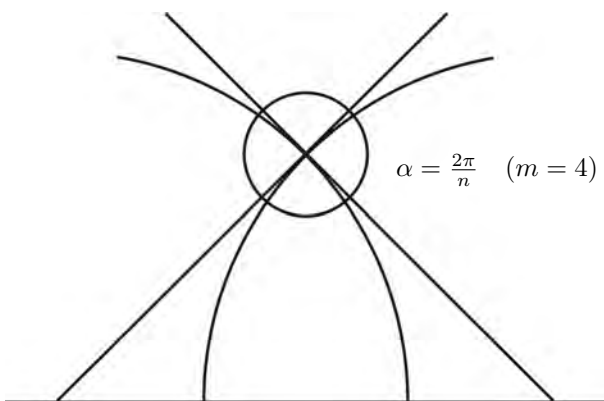


FIGURA 48.

(si la suma de los ángulos interiores fuese π , entonces tendríamos $\pi = \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m}$. y si fuese mayor que π , sería $\pi < \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m}$).

Dividiendo la expresión anterior entre 2π obtenemos la desigualdad

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

que es la única condición que limita a los valores de n y m asociados con nuestro recubrimiento (y que por cierto es simétrica en n y m).

Para analizar esta condición consideremos el plano cartesiano x, y y veamos la ubicación de los puntos de la forma

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$$

con respecto a la recta $x + y = \frac{1}{2}$ (figura 49)

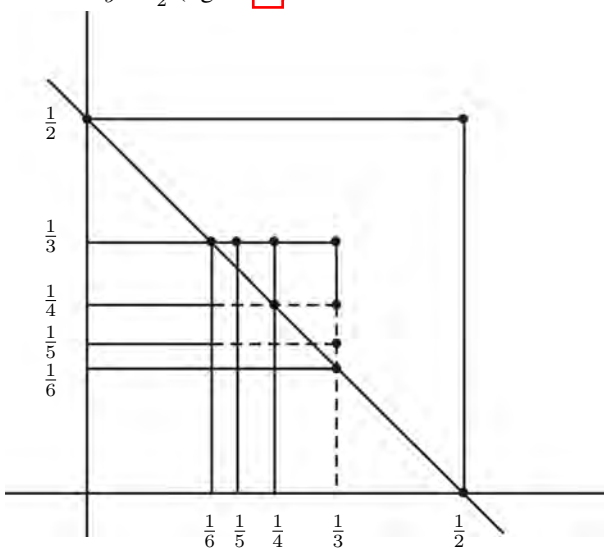


FIGURA 49.

Todos estos puntos están situados por debajo de la recta, excepto los puntos

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right),$$

que están sobre ella y los puntos

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

que se ubican por encima. Como dijimos antes, los puntos que están por debajo de la recta corresponden a recubrimientos del plano de Hiperbólico.

FIGURA 50. Ejemplo de teselación del semiplano de Hiperbólico

Pero Hiperbólico no se detuvo aquí. Como veremos en la última sección, Hiperbólico descubrió y comenzó a estudiar un mundo “raro”, en el que se daban extraños fenómenos, en particular, en ese mundo la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre π radianes y por lo tanto se puede recubrir con triángulos equiláteros (inciden seis en cada vértice), cuadrados (inciden cuatro en cada vértice) y hexágonos regulares (inciden tres en cada vértice) (véase figura 51).

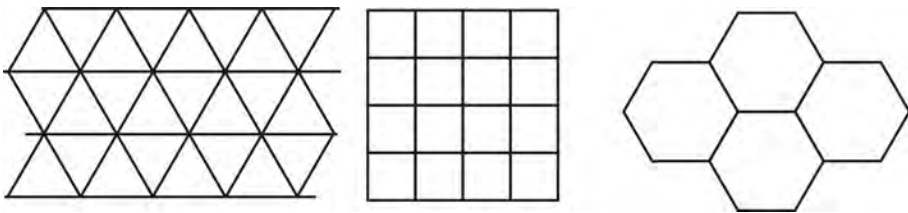


FIGURA 51.

También pudo imaginar un mundo en el que los ángulos interiores de un triángulo suman más de π radianes. Nosotros sabemos que ese mundo es la esfera que se puede recubrir con triángulos equiláteros (tres, cuatro o cinco en cada vértice) con cuadrados (tres en cada vértice) y con pentágonos regulares (tres en cada vértice). Los vértices de estos recubrimientos determinan los poliedros regulares. Su solución es esencialmente la misma que la nuestra, pero su apariencia no deja de desconcertarnos.

Nosotros también podemos pensar en recubrimientos del plano de Hiperbólico con polígonos degenerados de n lados cuyos vértices están en infinito y en cada uno de esos vértices concurren una infinidad de lados (véase figura 52).

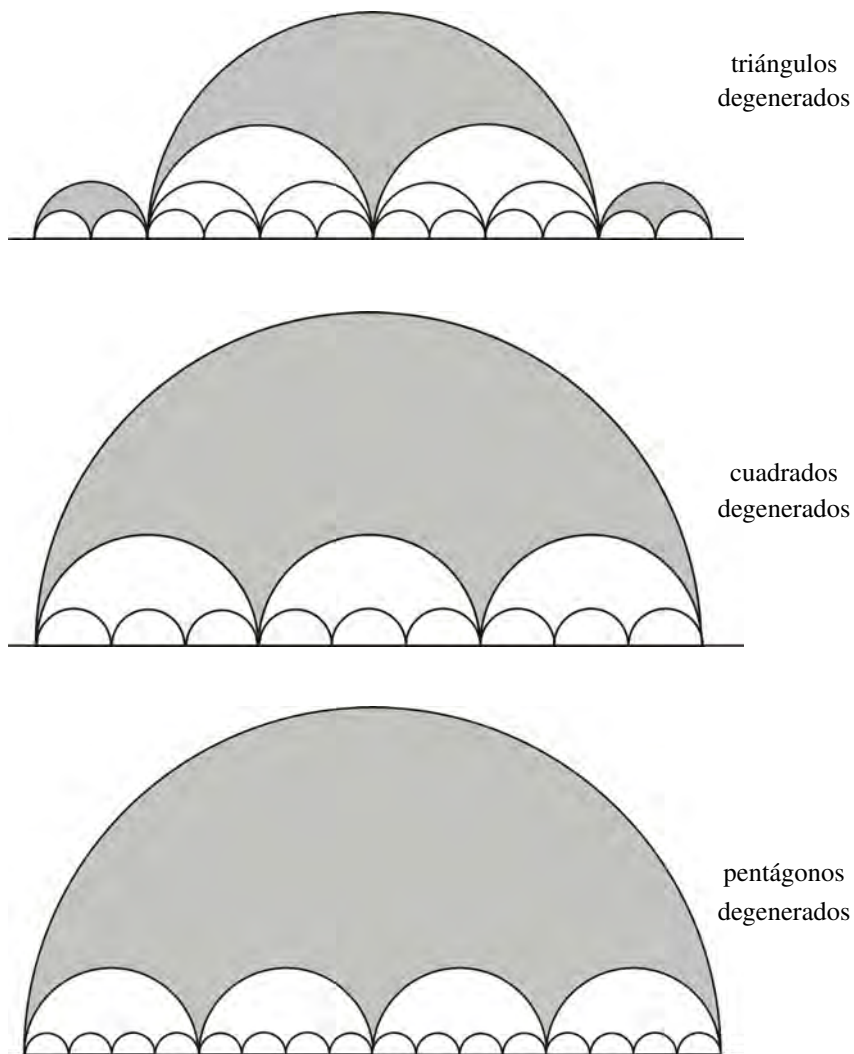


FIGURA 52.

17. EL MUNDO DE HIPERBÓLICO TRIDIMENSIONAL

Nuestra descripción del mundo de Hiperbólico nos muestra los objetos planos y los seres en él. Esto es adecuado para muchas cosas, pero no para todas: la bicicleta que maneja Hiperbólico y él mismo están parados y se apoyan en el h-plano, pero al igual que nosotros tienen altura, y lo mismo sucede con los árboles o los edificios; en otras palabras el mundo de Hiperbólico, al igual que el nuestro, es tridimensional.

La geometría de este mundo tridimensional es algo que a Hiperbólico le interesa conocer y, para ello, sale a comprar gran cantidad de papel y lápices. Ni qué decir que nosotros compartimos su interés. Empecemos por decir dónde vemos que nuestro amigo se mueve y qué le sucede al hacerlo.

Hiperbólico se mueve y vive en el semiespacio situado por encima del plano xy , es decir

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$$

En forma similar a lo que pasa en el h-plano, los puntos del plano xy , cuya ecuación es $z = 0$, tienen por temperatura el cero absoluto y el tamaño de Hiperbólico y de los objetos que lo rodean aumenta o disminuye proporcionalmente a la componente z de sus coordenadas. Nótese que el plano xy desempeña el papel del eje x en el h-plano, así como la coordenada z es el equivalente de la y .

De manera similar a como sucede en el plano de Hiperbólico, la diferencial de longitud en el sentido de Hiperbólico es

$$dS_h = \frac{dS}{z} \quad \text{donde} \quad dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Luego, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ es una curva dada por $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))$, su h-longitud es

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{z} \frac{dS}{d\theta} d\theta = \int_a^b \frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Las transformaciones del h-espacio que preservan la longitud de las curvas, al igual que antes, son llamadas *transformaciones rígidas o isometrías*.

Un ejemplo de transformación rígida del h-espacio es el inducido por una isometría del plano xy . Con más detalle, sea $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dicha isometría y definamos $\tilde{I} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ como

$$\tilde{I}(x, y, z) = (I(x, y), z)$$

Para verificar que \tilde{I} preserva la h-longitud de las curvas en el h-espacio, el lector no tiene más que recordar que I es la composición de una rotación, una translación y posiblemente una reflexión.

Observemos que dado un plano P perpendicular al plano xy , existe una de estas transformaciones, \tilde{I} , que lo envía en el plano yz . Este hecho nos permite suponer que toda curva en el espacio de Hiperbólico tiene sus extremos en el plano yz , que denotaremos por \mathcal{P}_{yz} . Veamos ahora que dada una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ con $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ en el plano yz , su proyección ortogonal en el plano yz , es otra curva con los mismos extremos y longitud menor o igual que γ . Con más detalle, si las coordenadas de γ son $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ (donde sabemos que $x(a) = x(b) = 0$) entonces la proyección ortogonal es la curva $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathcal{P}_{yz}$, dada por $\tilde{\gamma}(\theta) = (0, y(\theta), z(\theta))$, (notemos que $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$ y $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$).

Ahora bien, como la primera coordenada de $\tilde{\gamma}(\theta)$ es cero, su h-longitud es:

$$S_h(\tilde{\gamma})(a, b) = \int_a^b \frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta,$$

la cual es menor o igual que

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

pues los integrandos guardan esta relación.

Como consecuencia de esta observación y de los resultados del inicio de este trabajo, tenemos que las rectas de Hiperbólico en su espacio tridimensional siempre están situadas en un plano paralelo al eje z y que son semirrectas paralelas a dicho eje o semicircunferencias con centro en el plano xy .

En concordancia con lo anterior tenemos que los h-planos del espacio de Hiperbólico son semiplanos paralelos al eje z o semiesferas con centro en el plano xy . El lector no tendrá dificultad en ver que estos h-planos quedan determinados por tres puntos no alineados (Véase figura 53).

Al igual que en nuestro espacio, en el espacio de Hiperbólico hay esferas con cualquier centro y radio, y que a primera vista no se distinguen de las nuestras, pues como conjuntos

de puntos coinciden, pero cuando vemos otros elementos, por ejemplo donde ésta situado su centro, notamos que hay profundas diferencias entre un caso y otro.

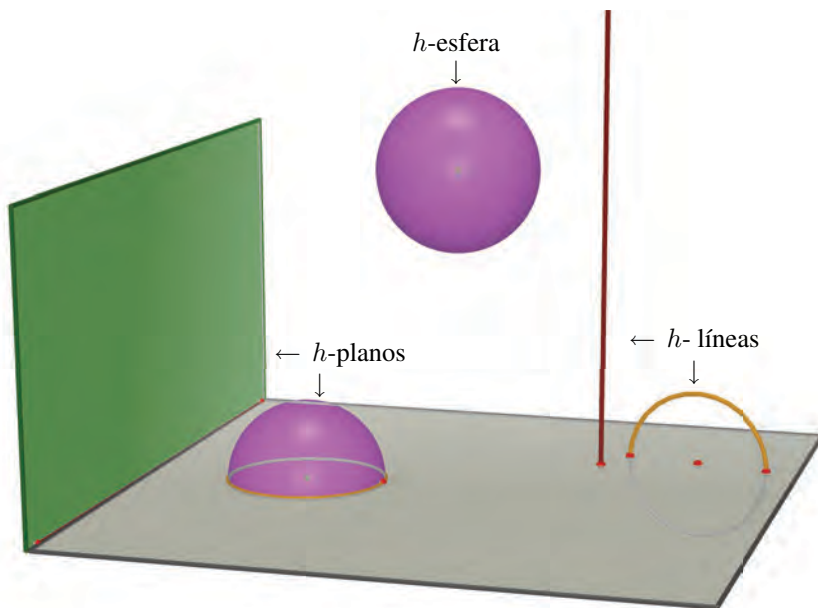


FIGURA 53.

Otra diferencia importante es que si bien, en forma similar a lo que pasa en \mathbb{R}^3 , una h-esfera queda determinada por cuatro puntos no h-coplanares, el recíproco no es cierto; porque cuatro puntos no h-coplanares pueden determinar una esfera situada por encima del plano xy (una h-esfera), pero también podrían determinar una esfera tangente al plano xy (una horoesfera) o una que intersecte dicho plano o un plano euclidiano que no sea paralelo al eje z (véase figura 54).

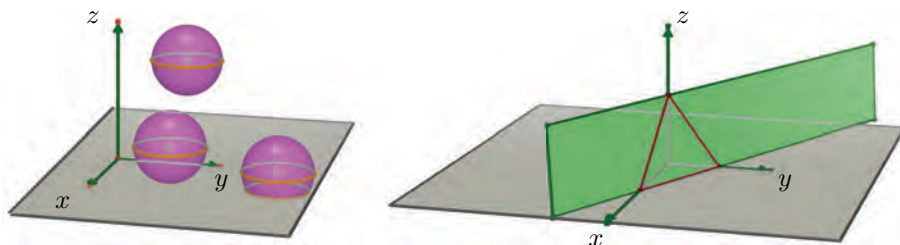


FIGURA 54.

La situación anterior es la generalización de lo que pasa en el h-plano con las circunferencias, que dan lugar a las “equidistantes” y a los “horociclos”, teniendo ahora *superficies equidistantes y horoesferas*.

Las horoesferas están dadas por esferas euclidianas tangentes al plano xy y situadas por encima de éste o por planos paralelos al plano xy ; dadas dos horoesferas existe una transformación rígida que envía una de ellas en la otra.

Las superficies equidistantes están dadas por esferas euclidianas que intersectan el plano xy en una circunferencia o por planos que intersectan al plano xy y que no son perpendiculares a éste. Dada una superficie equidistante, siempre la podemos pensar como uno de tales planos.

Lo anterior se comprende tomando en cuenta el hecho que las inversiones con centro en el plano xy son h-isometrías del h-espacio, lo cual examinamos brevemente a continuación.

Consideremos la esfera S de radio ρ y centro el origen, es decir,

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}.$$

Definamos $\mathbb{I} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ por $\mathbb{I}(x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ donde

$$\bar{x} = \frac{\rho^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \bar{y} = \frac{\rho^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \bar{z} = \frac{\rho^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

De estas expresiones, es inmediato que si $(x, y, z) \in S$ entonces $\mathbb{I}(x, y, z) = (x, y, z)$. Además, también es directo que, salvo pequeños detalles con el origen, \mathbb{I} transforma planos y esferas en planos o esferas. En particular los planos que pasan por el origen se transforman en sí mismos. De aquí también tenemos que \mathbb{I} transforma rectas y circunferencias en rectas o circunferencias, pues una recta la podemos ver como la intersección de dos planos y una circunferencia como la intersección de dos esferas o de una esfera y un plano.

De lo anterior también es claro que \mathbb{I} establece una correspondencia biunívoca entre \mathbb{R}_+^3 y \mathbb{R}_+^3 . Esta correspondencia preserva las h-longitudes de las curvas y en particular las h-distancias.

Luego \mathbb{I} es una h-isometría del h-espacio tridimensional (para verificar que preserva h-longitudes se siguen los mismos pasos del caso de dimensión 2).

Lo afirmado para \mathbb{I} es válido para cualquier otro valor de ρ y cualquier otro centro en el plano xy . Estas isometrías que provienen de inversiones, corresponden a reflexiones respecto al h-plano $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = \rho^2$, contenido en el h-espacio tridimensional, y al igual que en el caso bidimensional, no preservan la orientación.

Análogamente al caso del espacio euclidiano, tenemos que cualquier isometría del h-espacio tridimensional puede expresarse como la composición de a lo más cuatro de estas reflexiones. La justificación de ello queda a cargo del lector.

Por supuesto las isometrías del h-espacio también preservan ángulos, h-áreas y h-volúmenes, y las razones de ello son las mismas del caso bidimensional. Si el lector desea reconstruir los argumentos debe tener en cuenta las relaciones entre las diferenciales del área y el volumen en el caso del espacio euclidiano y del h-espacio. O sea

$$dA_h = \frac{dA}{z^2} \quad \text{y} \quad dV_h = \frac{dV}{z^3}.$$

Conociendo estos resultados podemos calcular, por ejemplo, el volumen de una h-esfera con radio de Hiperbólico ρ . Para ello procedemos como en el caso bidimensional, tomando la esfera con centro en el punto $(0, 0, 1)$ y radio euclidiano r , donde r es tal que $\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{1-r}{1+r}$, y calculando la integral asociada, es decir

$$V_h(S_h(\rho)) = \iiint_D \frac{dx dy dz}{z^3}$$

donde $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq r^2\}$. Después de integrar con respecto a x e y , tenemos que

$$\begin{aligned} V_h(S_h(\rho)) &= \pi \int_{1-r}^{1+r} \frac{r^2 - (z-1)^2}{z^3} dz = \pi \int_{1-1}^{1+r} \left[\frac{r^2 - 1}{z^3} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} \right] dz = \\ &= \pi \left[\frac{1-r^2}{2z^2} - \frac{2}{z} - \ln z \right]_{1-r}^{1+r} = \pi \left[\frac{2r}{1-r^2} + \ln \frac{1-r}{1+r} \right] \end{aligned}$$

y haciendo uso de que $\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{1-r}{1+r}$ y de que $r = \frac{e^{2\rho} - 1}{e^{2\rho} + 1}$, después de un poco de manipulación algebraica, obtenemos

$$V_h(S_h(\rho)) = \pi [\sinh(2\rho) + 2\rho]. \quad \left(= \frac{4}{3}\pi\rho^3 + \dots \right)$$

Si deseamos calcular el área, basta con derivar:

$$A_h(S_h(\rho)) = 2\pi [\cosh(2\rho) - 1]. \quad \left(= 4\pi\rho^2 + \dots \right)$$

Lo que aparece entre paréntesis, después de cada fórmula, es el primer término del desarrollo de Taylor.

El lector habrá notado que no hemos tocado el problema del volumen de una pirámide o tetraedro; no es un olvido, sino que se trata una cuestión mucho más delicada de lo que a primera vista se podría pensar.

Por supuesto Hiperbólico conocía estas fórmulas, pero estaba más interesado en otros asuntos, por ejemplo las horoesferas.

18. HIPERBÓLICO Y LAS HOROESFERAS

Por alguna razón que no queda clara, Hiperbólico pensó en cómo sería la vida para un ser bidimensional que viviese atrapado en la superficie de una horoesfera, sin poder salir de ella. Las primeras preguntas que se hizo fueron ¿cuáles serían para él las “rectas”, es decir, las trayectorias más cortas para ir de un punto a otro?, ¿qué propiedades tendrían y cómo serían sus triángulos, polígonos y circunferencias?, ¿cuál sería su idea de ángulo?

Poco a poco fue dando respuesta a sus preguntas. La idea de “recta” que este ser habría construido sería la de una h-geodésica en la horoesfera para Hiperbólico, y su longitud sería la misma para este ser y para Hiperbólico. Lo mismo sucedería con las longitudes de las curvas y las áreas de las figuras. También ambos verían los mismos ángulos. Dos puntos determinaban una recta. Pero no todo era tan simple y natural; con las circunferencias ya pasaban algunas cosas raras: si bien eran las mismas en un mundo y otro, sus centros no coincidían. Además, en ese mundo raro, por tres puntos no alineados, siempre pasaba una y sólo una circunferencia. Pero el asunto no paraba allí ¡en ese mundo, por un punto exterior a una recta pasaba una y sola una paralela!, ¡los ángulos interiores de un triángulo siempre sumaban 180^0 ! además ¡había triángulos con área tan grande como se quisiese!, ¡nada más loco! Bueno ¡ese mundo se podía tapizar con polígonos regulares de muy pocas maneras!, con triángulos (seis por vértice), con cuadrados (cuatro por vértice) y con hexágonos (tres por vértice). Indudablemente, todo esto significó un gran trabajo y esfuerzo por parte de Hiperbólico, pero para nosotros es casi inmediato, pues basta tomar la horoesfera dada por el plano $z = 1$ y percatarnos de que para curvas contenidas en ella, las diferenciales de longitud para Hiperbólico y para Euclides coinciden

$$dS_h(\gamma) = \frac{dS(\gamma)}{z} \quad \text{con } z = 1$$

y lo mismo para la diferencial de área.

$$dA_h(\Omega) = \frac{dA(\Omega)}{z^2} \quad \text{con } z = 1$$

Así pues, tenemos que en esta horoesfera, la geometría asociada es la euclidiana, lo que nos aclara las cosas.

Es interesante saber que Hiperbólico, en su mundo, dispone de un juguete que es nuestro plano euclidiano. Esto es precisamente el significado de lo que acabamos de ver.

19. UN POCO DE LA GEOMETRÍA DE LA ESFERA DE HIPERBÓLICO: RECUBRIMIENTOS Y POLIEDROS REGULARES

Otros de los objetos geométricos del mundo de Hiperbólico que le interesaban eran las esferas. No es claro si primero exploró la geometría de las horoesferas y después la de las esferas o fue al revés, pero lo cierto es que en los dos casos sigue las mismas pautas.

En el caso de las esferas también piensa en un ser bidimensional que vive atrapado en la superficie de una h-esfera y lo primero que se pregunta es- ¿para ir de un punto a otro, qué trayectoria es la que este ser usará?; por supuesto, suponiendo que lo quiere hacer siguiendo la trayectoria más corta. Después de pensar un buen rato llegó a la convicción de que su trayectoria será un segmento de círculo máximo; es decir un h-círculo cuyo centro coincide con el de la h-esfera.

Por sus dibujos, nos parece que, a grandes rasgos, su argumento es el siguiente: sea S la h-esfera en cuestión. Llamemos A y B a los extremos de la trayectoria que este ser recorre y situemos S de tal forma que O , el h-centro de la h-esfera se encuentre en el punto $(0,0,1)$ y el punto A también se encuentre en el eje z pero por encima del centro O (véase figura 55).

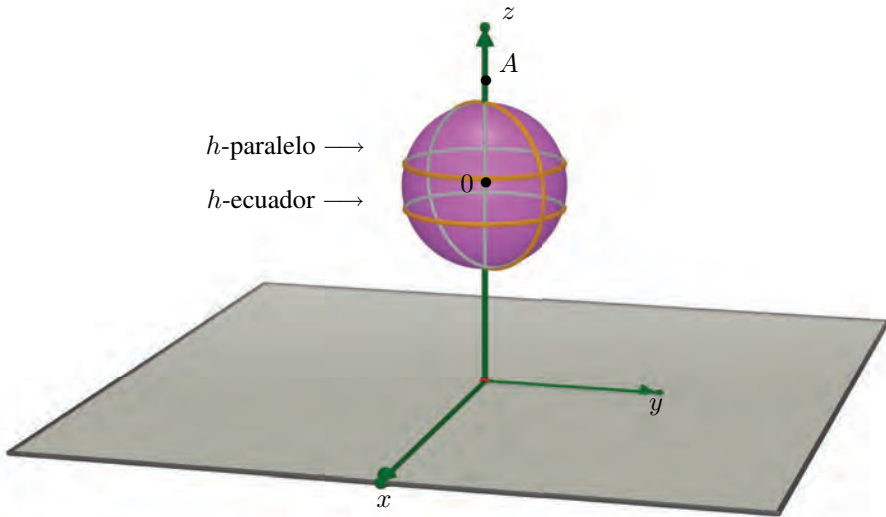


FIGURA 55.

Consideremos el círculo máximo de S que tiene su diámetro sobre el eje z y que pasa por el punto B , y tomemos de los dos segmentos determinados por los puntos A y B , el de menor longitud; mostraremos que cualquier curva que una A y B tiene longitud mayor o igual que la de este segmento (véase figura 56).

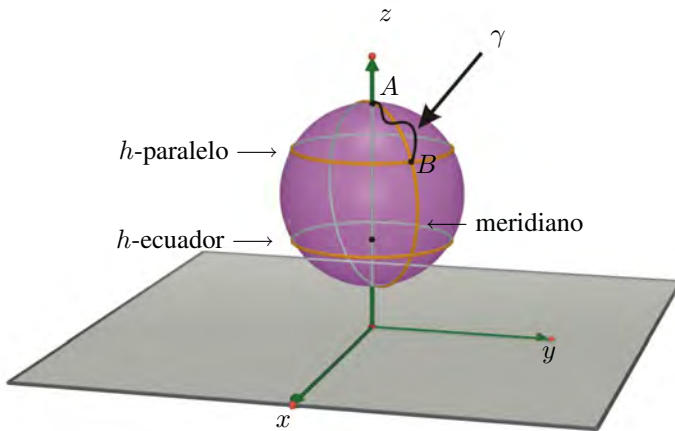


FIGURA 56.

Para conseguir nuestro propósito, pensemos que nuestra trayectoria no es un segmento de “meridiano” y que por lo tanto existe un punto P en el que la dirección de la curva no coincide

con la del “meridiano” que pasa por dicho punto. Tomemos ahora el paralelo que pasa por P y otro que pase por $P + dS$, donde dS es un infinitesimal de longitud con la misma dirección que el meridiano en cuestión (véase figura 57). Asimismo dS' es el infinitesimal de longitud correspondiente a la trayectoria γ entre los dos paralelos.

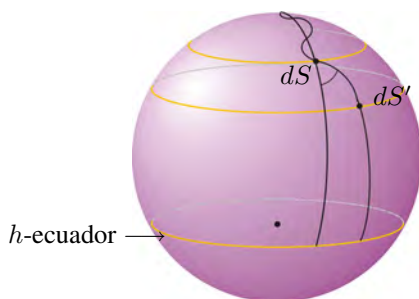


FIGURA 57.

La longitud de dS' es mayor que la de dS y de ello nos damos cuenta tomando las longitudes euclidianas $\frac{dS}{y_0}$ y $\frac{dS'}{y_0}$ y considerando que $\frac{dS'}{y_0}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene como cateto a $\frac{dS}{y_0}$.

De esta observación se sigue directamente el resultado (este argumento, para el caso euclidiano, está explicado con todo detalle en J.J. Rivaud, “Acerca de mapas”, Miscelánea Matemática. Número. 27 (pp. 39-59), México, 1998).

Sabiendo ya quienes son las “rectas” en la geometría del mundo que estaba empezando a explorar, Hiperbólico vio que dos puntos no antipodales determinaban una “recta”, que dos “rectas” coincidían o se intersectaban en dos puntos y que por lo tanto no existían rectas paralelas. También vio que en ese mundo la suma de los ángulos interiores de un triángulo era mayor que 180° , lo que, por alguna extraña corazonada, le hizo recordar los recubrimientos por polígonos regulares del h-plano y del extraño mundo de la horoesfera; pero primero decidió calcular el área de un triángulo en una h-esfera.

Con este propósito tomó una h-esfera de radio ρ , con centro en el eje z y consideró un huso esférico completo con ángulo de abertura α y los polos como vértices (véase figura 58)

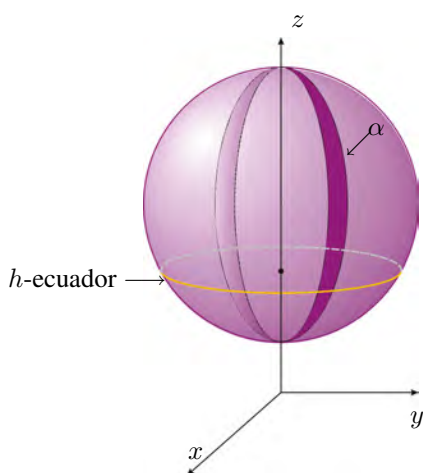


FIGURA 58.

Esta elección a nosotros nos resulta muy favorable, pues nos permite entender la geometría con poco esfuerzo.

Denotando por $A_h(\rho)$ la superficie de la h-esfera de radio ρ , y por $U(\alpha)$ a la del huso en cuestión, una simple regla de tres nos da:

$$U(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} A_h(\rho)$$

Ahora bien, si tenemos un triángulo con ángulos interiores α, β y γ , y consideramos los husos correspondientes a cada vértice (véase figura 59), tenemos que la esfera quedará cubierta por estos husos, con la particularidad de que tanto el triángulo con ángulos α, β y γ , como el diametralmente opuesto están cubiertos por los tres husos, mientras que los otros puntos sólo lo están una vez.

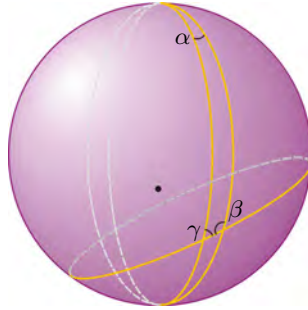


FIGURA 59.

Además del hecho de que la h-reflexión respecto a un punto dado es una h-isometría, es directo que un triángulo en la h-esfera y su diametralmente opuesto, tienen la misma área. Por lo tanto si denotamos por $T(\alpha, \beta, \gamma)$ el área de dicho triángulo, tenemos que:

$$\begin{aligned} A_h(\rho) + 4T(\alpha, \beta, \gamma) &= U(\alpha) + U(\beta) + U(\gamma) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \frac{A_h(\rho)}{\pi}, \end{aligned}$$

de donde:

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \frac{A_h(\rho)}{4\pi}$$

Esta fórmula sorprendió a Hiperbólico por su parecido con la de un triángulo en el h-plano, y a nosotros nos debe sorprender aun más, pues es prácticamente igual a la de un triángulo en una esfera euclidiana ($T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2$), pero no sólo eso, ¡su deducción es en ambos casos la misma!

Esta fórmula también le sirvió a Hiperbólico para convencerse fuera de toda duda que, como ya dijimos antes, los ángulos de un triángulo en una h-esfera suman más de π radianes, o lo que es lo mismo, más de 180° .

De este resultado es directa la fórmula para el área de un polígono regular de h-lados y ángulos interiores con magnitud α , situados en una h-esfera de radio ρ .

$$P_h(n, \alpha) = (n\alpha - (n - 2)\pi) \frac{A_h(\rho)}{4\pi}$$

Para verificar el resultado, basta analizar la Figura 60 y un poco de álgebra elemental

Después de estos resultados pensó que ya podía enfrentar el problema de los recubrimientos y repitió el argumento que ya antes había dado para el h-plano y la h-esfera, llegando a la conclusión que si queremos recubrir la h-esfera con polígonos regulares de n lados de tal forma que en cada vértice coincidan m de ellos, entonces se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \quad (n > 2, m > 2)$$

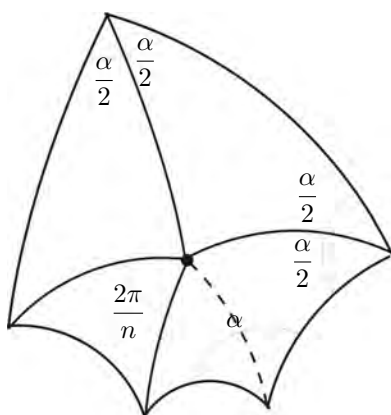


FIGURA 60.

que, como ya vimos, sólo la cumplen las siguientes cinco parejas (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3), es decir tres triángulos en cada vértice, tres cuadrados en cada vértice, etcétera.

Esta información le permitió calcular el área de los polígonos en cuestión para cada recubrimiento y así ver, en cada caso, cuántos son necesarios. Para ello primero hay que calcular la magnitud de los ángulos interiores de los polígonos, la cual es $\frac{2\pi}{m}$ y teniendo en cuenta el número de lados tenemos que los polígonos de los recubrimientos posibles, de acuerdo con la fórmula, tienen área

$$\begin{aligned} P_h(n, m, \alpha) &= \left(n \frac{2\pi}{m} - (n-2)\pi \right) \frac{A_h(\rho)}{4\pi} \\ &= \frac{2n - nm + 2m}{4m} A_h(\rho). \end{aligned}$$

Como la h-esfera de radio ρ tiene el área $A_h(\rho)$, la fórmula anterior nos dice que para el caso (3, 3) (tres triángulos en cada vértice) hacen falta cuatro de tales polígonos, para la pareja (3, 4) el número requerido es ocho, para la (3, 5) veinte, para la (4, 3) seis y para la pareja (5, 3) doce.

Sabiendo ya cuáles son las posibilidades para recubrir la h-esfera con polígonos regulares, cuánto deben medir sus ángulos interiores y cuál es el número de ellos que hace falta, Hiperbólico pudo conseguir efectivamente cada uno de los recubrimientos. Nosotros omitimos esta parte del trabajo de Hiperbólico, pero dado que el argumento es idéntico para los recubrimientos de una esfera euclidiana, estamos seguros de que el lector podrá completar el argumento (este tema está desarrollado con todo detalle en J.J. Rivaud, R. Quintero, "Como el área de la esfera es $4\pi r^2$, entonces...", *Miscelánea Matemática*. No. 30 (pp. 1-15), México, 2000).

Por supuesto que Hiperbólico estaba feliz de haber obtenido estos resultados y de haber podido ver a qué correspondían esas cinco parejas que le preocupaban desde que pensó en el problema de tapizar el h-plano o la horoesfera, pero siguió con sus sueños y tomó los h-poliedros regulares inscritos en la h-esfera de radio ρ y que tuviesen por vértices los de algunos de estos recubrimientos y vio que sólo había cinco, tres con caras triangulares (cuatro, ocho o veinte de ellas), uno con seis caras cuadradas y otro más con doce caras pentagonales.

Además eran los únicos h-poliedros regulares posibles, pues si tenemos un h-poliedro regular lo podemos inscribir en una h-esfera y tomar sus vértices como vértices de un recubrimiento de ésta, y ya sabemos que sólo los cinco descritos anteriormente son posibles. Como el lector sin duda ya se habrá percatado, son los "mismos" poliedros regulares que existen en el espacio euclidiano y hay distintas maneras de ver la relación que guardan entre sí o con los poliedros regulares de \mathbb{R}^3 ; pero este punto no lo tocaremos, baste decir que a medida que el tamaño de los poliedros del h-espacio se hace más pequeño, éstos se parecen más a los euclidianos.

Cuando variamos el radio ρ de la h-esfera en que está inscrito un poliedro regular, el área de las caras de éste también varía y esta variación se lleva a cabo entre 0 y $(n - 2)\pi$ (donde n es el número de lados de una cara). Lo anterior implica que el ángulo interior α del polígono que forma la cara varíe entre $\frac{n-2}{n}\pi$ y 0 ; situación muy distinta a la euclidiana que, como veremos en un instante, tiene interesantes repercusiones.

El siguiente problema que Hiperbólico se planteó fue “tapizar” con poliedros regulares el h-espacio. Lo primero que observó es que si tomaba dodecaedros del tamaño adecuado para que los ángulos interiores de sus caras fuesen de 90^0 (véase figura 61), entonces podía colocar ocho de ellos alrededor de un punto de tal manera que no dejen espacio vacío ni se superpongan en la vecindad de dicho punto (véase figura 62); de la misma manera que nosotros podemos colocar ocho cubos en R^3 . Luego, ¡con tales dodecaedros es posible recubrir el h-espacio! (véase figura 62).

FIGURA 61.

Sus pesquisas fueron más lejos y vio que hay otras tres formas para recubrir su mundo con poliedros regulares, pero sin duda el lector quiere averiguarlo por sí mismo. (Sobre este tema J.J. Rivaud amenaza con someter a *Miscelánea Matemática*, para su publicación, un artículo titulado “*Tapizando el Espacio con Poliedros Regulares*”⁴).

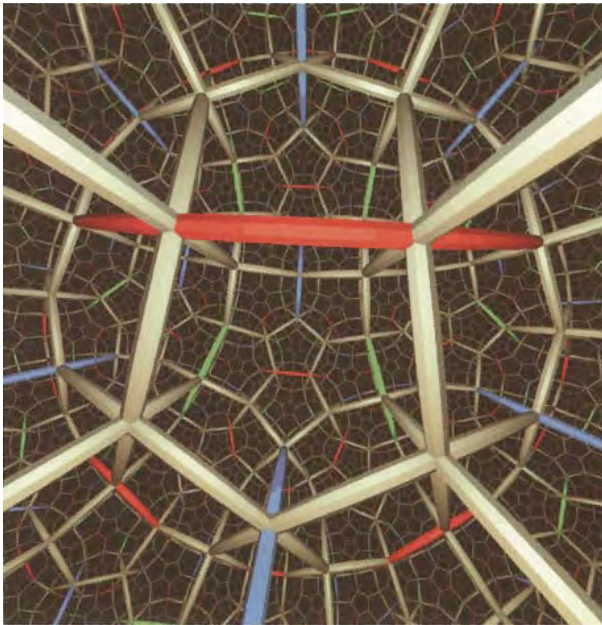


FIGURA 62. <http://reperiendi.wordpress.com/2011/01/31/regular-tilings-of-three-dimensional-spaces/>

⁴Nota de las Editoras: A Juan José Rivaud no le dio el tiempo la oportunidad de terminar el artículo referido.

20. PARA TERMINAR

Me gustaría poder decir, como lo hizo Descartes en el último párrafo de *La geometría*, que “Espero que nuestros descendientes sabrán reconocermé no sólo las cuestiones que he explicado, sino también aquéllas que he omitido voluntariamente con el fin de permitirles disfrutar del placer que produce su descubrimiento”. Pero no es éste mi caso, hay muchas otras cosas que me hubiera gustado haber dicho, pero que por no venir a cuento en ese momento o porque nos desviaba del propósito, y porque después no encontré el lugar adecuado, no aparecen en el texto; ejemplo de ello es la existencia, en el h-plano de una unidad “natural” para medir las áreas y cómo, a partir de ella, se puede dar una para la longitud, situación completamente distinta a lo que sucede en el plano euclidiano, donde la unidad de medida es arbitraria. Otro detalle es la noción de radián en términos intrínsecos del h-plano. Por necesitar de más espacio y por gustos personales, he omitido cualquier mención a la trigonometría hiperbólica, tema en el que Hiperbólico es un experto. Tampoco se abordan en este trabajo la historia de la geometría hiperbólica, o las cuestiones de carácter filosófico que la existencia de geometrías no euclidianas plantean.

En fin, hay muchas más cosas que no digo que cosas que sí hago. Ojalá el lector lo tome como una invitación a seguir adelante con el tema. ¡Buena suerte!

21. APÉNDICE

Como dijimos anteriormente, a continuación daremos sugerencias para que el lector interesado calcule la h-longitud de una circunferencia y el h-área de un círculo, no sin dejar de advertirle que requerirá armarse de paciencia.

21.1. Cálculo de la h-longitud de la circunferencia. Debemos calcular la integral

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 2 \int_{1-r}^{1+r} \frac{1}{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= 2r \int_{1-r}^{1+r} \frac{dy}{y \sqrt{r^2 - (y-1)^2}} = \\ &= 2r \int_{-r}^r \frac{dy}{(y+1) \sqrt{r^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Cuando hacemos la sustitución $y = r \operatorname{sen} \theta$, obtenemos:

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{(1 + r \operatorname{sen} \theta) r \cos \theta} d\theta \\ &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + r \operatorname{sen} \theta}. \end{aligned}$$

Mediante cambio de variable

$$u = \tan \frac{\theta}{2},$$

que tiene la virtud de transformar integrales de funciones racionales en $\sin \theta$ y $\cos \theta$ en funciones racionales de u , obtenemos

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 4r \int_{-1}^1 \frac{du}{u^2 + 2ru + 1} \\ &= 4r \int_{-1}^1 \frac{du}{(u+r)^2 + (1-r^2)}. \end{aligned}$$

Como, en esta situación $0 < r < 1$, se trata de una integral de “tipo” arctan, cuando hacemos

$$v = \frac{u+r}{\sqrt{1-r^2}}$$

la nueva integral que debemos calcular es

$$L_h(c, r) = \frac{4r}{\sqrt{1-r^2}} \int_{v_-}^{v_+} \frac{dv}{v^2 + 1}$$

donde

$$v_+ = \frac{1+r}{\sqrt{1-r^2}} = \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}, \quad y \quad v_- = \frac{-1+r}{\sqrt{1-r^2}} = -\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}.$$

Por lo tanto

$$L_h(c, r) = \frac{4r}{\sqrt{1-r^2}} \left(\arctan \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} + \arctan \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right)$$

Finalmente, recordando que $\arctan a + \arctan a^{-1} = \pi/2$,

$$L_h(c, r) = \frac{2r\pi}{\sqrt{1-r^2}}.$$

21.2. Cálculo h-área de la circunferencia. Ahora debemos calcular

$$\begin{aligned} A_h(c) &= \int_{-r}^r \left[\int_{1-\sqrt{r^2-x^2}}^{1+\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{y^2} \right] dx \\ &= \int_{-r}^r \left[\frac{1}{1-\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{r^2-x^2}} \right] dx. \end{aligned}$$

Cuando hacemos la sustitución $x = r \sin \theta$ en estas integrales, obtenemos:

$$A_h(c) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{1-r \cos \theta} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{1+r \cos \theta} d\theta.$$

Como

$$\frac{r \cos \theta}{1-r \cos \theta} = -1 + \frac{1}{1-r \cos \theta}, \quad y \quad \frac{r \cos \theta}{1+r \cos \theta} = 1 - \frac{1}{1+r \cos \theta}.$$

entonces

$$A_h(c) = -2\pi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-r \cos \theta} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+r \cos \theta} d\theta.$$

Estas últimas integrales se calculan al modo de la calculada en la sección anterior.