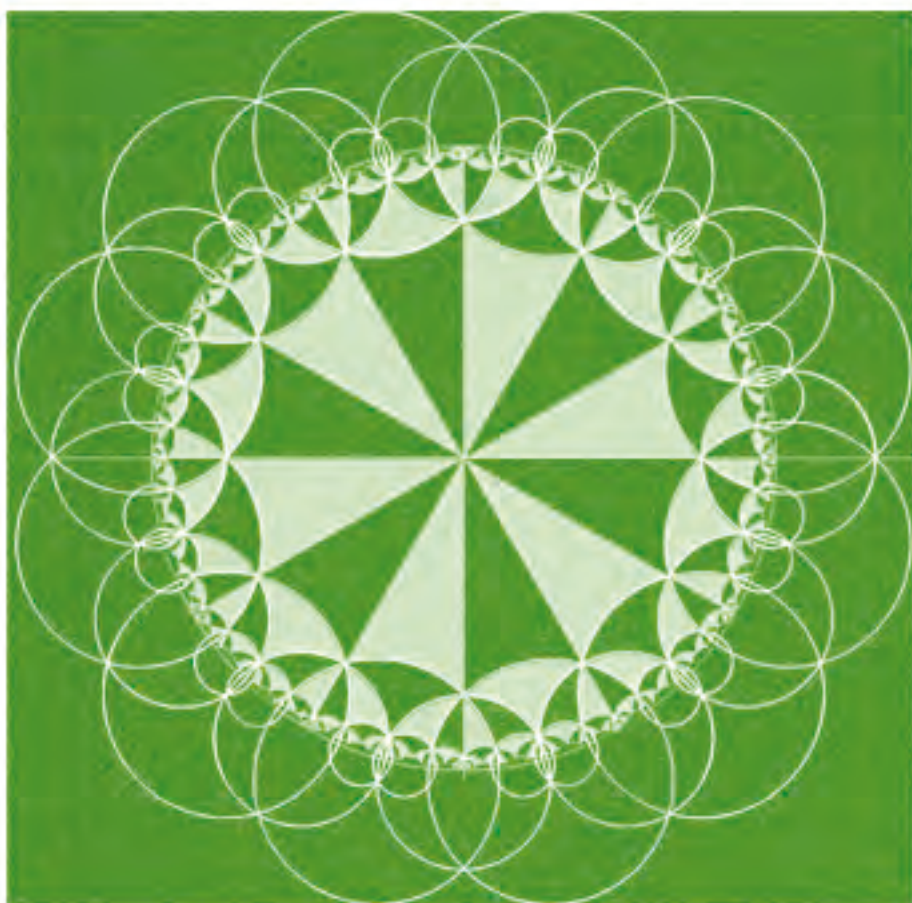


# mixba'al



Revista Metropolitana de Matemáticas

ISSN en trámite



## IN MEMORIAM

Juan José Rivaud Morayta  
1943-2005

VOL III, No. 1, JUNIO 2012



Casa abierta al tiempo



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

**Dr. Enrique Fernández Fassnacht**

*Rector General*

**Dr. Javier Velázquez Moctezuma**

*Rector de la Unidad Iztapalapa*

**Dr. José Antonio de los Reyes Heredia**

*Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
UAM-Iztapalapa*

**Dr. Joaquín Delgado Fernández**

*Jefe del Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa*

**Primera edición 2012**

Los derechos de reproducción de esta obra pertenecen al autor

**Universidad Autónoma Metropolitana**

Prolongación Canal de Miramontes No. 3855

Col. Ex Hacienda San Juan de Dios.

Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México D.F.

**Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa**

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

**ISSN** En trámite.

Se prohíbe la reproducción por cualquier medio, sin el  
consentimiento de los titulares de los derechos de la obra.

**Impreso en México/ Printed in Mexico**

# mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas



## **EL MUNDO DE HIPERBÓLICO** **UNA INTRODUCCIÓN A LA** **GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI**

**IN MEMORIAM**  
**JUAN JOSÉ RIVAUD MORAYTA**  
**1943-2005**



Casa abierta al tiempo





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

**Dr. Enrique Fernández Fassnacht**

*Rector General*

**Dr. Javier Velázquez Moctezuma**

*Rector de la Unidad Iztapalapa*

**Dr. José Antonio de los Reyes Heredia**

*Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
UAM-Iztapalapa*

**Dr. Joaquín Delgado Fernández**

*Jefe del Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa*

**Primera edición 2012**

Los derechos de reproducción de esta obra pertenecen al autor

**Universidad Autónoma Metropolitana**

Prolongación Canal de Miramontes No. 3855

Col. Ex Hacienda San Juan de Dios.

Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México D.F.

**Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa**

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

**ISSN** En trámite.

Se prohíbe la reproducción por cualquier medio, sin el  
consentimiento de los titulares de los derechos de la obra.

**Impreso en México/ Printed in Mexico**

MIXBA'AL. Revista Metropolitana de Matemáticas, Vol. III, No. 1, enero-junio del 2012, es una publicación anual editada por la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, a través de su División de Ciencias Básicas e Ingeniería por su Departamento de Matemáticas. Edificio AT tercer piso, Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Iztapalapa, C.P. 09340, México, D.F. Tel. 58044658, [mixbaal2009@gmail.com](mailto:mixbaal2009@gmail.com) , [mixb@xanum.uam.mx](mailto:mixb@xanum.uam.mx). Editora responsable: Laura Hidalgo Solís. Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2010-072709440100-102, ISSN en trámite. Certificado de Licitud de Título y de Contenido No. 15093, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación.

Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

## A LOS AUTORES

Mixba'al es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Está dirigida a la comunidad matemática latinoamericana, formada tanto por estudiantes como por profesores.

Los artículos de exposición pueden ser artículos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas; por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos, artículos panorámicos sobre un área de investigación, la presentación de una visión distinta de algún tema vinculado con la docencia, notas de cursos avanzados, aplicaciones de las matemáticas, historia y filosofía de las matemáticas y, aspectos lúdicos de la misma, entre otros.

La revista Mixba'al está a cargo de un comité editorial. Los trabajos deben ser presentados en español, en casos excepcionales podrán aceptarse artículos en inglés. Todos los trabajos serán sometidos a arbitraje. El comité editorial decidirá sobre la aceptación de los artículos sometidos. Los artículos de investigación podrán ser panorámicos o se parte de memorias de congresos, simposios, coloquios, talleres u otros.

Cada volumen está a cargo del comité editorial de la revista. Dicho comité tiene la responsabilidad de garantizar su calidad, así como de su presentación de acuerdo con los lineamientos de formato y tipografía de la revista y de la corrección del lenguaje (ortografía, estilo, etcétera).

La versión preliminar de los trabajos sometidos a la revista deberá enviarse en formato pdf. Puesto que la presentación final de los trabajos se hará en  $\text{Latex2}\epsilon$ , aquellos autores, cuyos trabajos sean aceptados, deberán enviarlos con el formato y macros que proporcionará la revista para su publicación final. Las fotografías o gráficas que acompañen al texto deberán ser enviadas, por separado, en formato pdf y deberán tener la calidad y resolución suficientes para una buena reproducción impresa, y deberán contar con los correspondientes derechos de autor. Se recomienda que la extensión de los trabajos no exceda de 20 páginas.

*Laura Hidalgo Solís*  
Coordinadora





## PRESENTACIÓN

Mixba'al, siendo una revista de divulgación en Matemáticas, dedica el presente volumen en honor de nuestro querido amigo y profesor Juan José Rivaud Morayta, mejor conocido por todos como Juanjo.

Me atrevo a decir que Juanjo estuvo vinculado al Departamento de Matemáticas de la UAM-I desde sus inicios. Aquí pasó varios de sus años sabáticos, en éste lugar impartió diversos cursos, seminarios y conferencias, compartiendo con todos nosotros sus conocimientos, su manera de disfrutar las matemáticas y su gusto por conocer, entender, aprender y hacer matemáticas. Juanjo estaba particularmente interesado en la divulgación de la Ciencia, por lo cual impartió una gran cantidad de conferencias a lo largo del país.

En 1999, la Sociedad Matemática lo invitó a dar una conferencia plenaria sobre geometría no euclidiana, cuyo borrador, como él mismo menciona, es el origen del trabajo *El mundo de Hiperbólico: Una introducción a la geometría de Lobachevski*, que en ésta ocasión presentamos, y cuya última presentación se realizó en el año 2001, en el marco de la Semana de las Matemáticas que organiza anualmente nuestra institución.

Juanjo tenía la intención de, algún día, publicar estas notas, desafortunadamente, la vida no le dió tiempo de ello. Queremos ver ésta publicación como una continuación de su obra.

Quiero agradecer a sus hijos, Juan José y Manuel, que por medio de ésta publicación, nos permitieran continuar la labor de difusión de Juanjo y compartirla con todo aquel que aprecia la belleza de las matemáticas. A Gerardo Hernández, Luis Moreno y Amelia Rivaud (Cuca) por su contribución en este documento. También quiero agradecer a su hermana Cuca, y a mi maestra, Ana Irene Ramírez, por formar parte del comité editorial que se hizo cargo de la revisión de éste documento, pero principalmente quiero agradecer a Shirley Bromberg por la titánica labor que ha realizado para ver, por fin, publicada esta obra. Finalmente, quiero agradecer a ustedes, el interés por conocer, aprender y sobre todo, disfrutar las matemáticas.

Por el Comité Editorial  
*Laura Hidalgo Solís*





## LA INTUICIÓN Y LA ESTRUCTURA ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.

LUIS MORENO ARMELLA

### INTRODUCCIÓN

Las culturas matemáticas anteriores a la cultura griega, por ejemplo, las de Mesopotamia y Egipto, tuvieron un marcado rasgo empírico. Desarrollaron conocimientos prácticos aplicados a la medición de tierras, a la arquitectura y a la cosmología. Por ejemplo, sabían que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades, es un triángulo rectángulo. Tal vez *el hecho* en sí era lo que les interesaba y no era necesario ir más lejos en busca de *una razón* que lo explicara.

Al enfrentarse a la complejidad de su mundo, la cultura griega, adoptó una estrategia diferente. Los griegos se plantearon un acercamiento a los fenómenos del mundo mediante la *búsqueda de razones*. Explicar consistía, para ellos, en encontrar razones.

Desde luego, la cultura griega no es un fenómeno aislado en la historia. Como todas, la suya es una cultura que se nutrió del contacto con otras y, de manera significativa, del impacto de la escritura. Pasar de ser un mundo oral a ser un mundo en el cual la escritura encontró una atmósfera propicia para su desarrollo, tuvo consecuencias determinantes sobre el curso que tomaron los acontecimientos entre los griegos. Previamente, los sumerios habían creado hacia el año 3500 a. C., el que tal vez haya sido el primer sistema de escritura, (véase D. Schmandt-Besserat, 1996).

En el desarrollo de la escritura se llegó, eventualmente, a la versión alfabética. Esa fue la que acogieron los griegos adoptando una forma previa desarrollada por los fenicios.

La escritura es el resultado más acabado de los esfuerzos del ser humano para producir soportes externos de la memoria. Las marcas encontradas en huesos de hace 35 mil años, por ejemplo, (Moreno, Hegedus y Kaput, 2008) atestiguan la necesidad de prolongar externamente la memoria. Esto ocurre a medida que las comunidades desarrollan actividades crecientemente complejas y aumenta casi sin control lo que hay que recordar. Así ocurrió originalmente en Sumeria en el terreno de los intercambios comerciales y, de este lado del mundo, en el seno de la cultura Maya.

Entre los griegos, se fue más allá y de hecho reflexionaron profundamente sobre las consecuencias cognitivas que venían de la mano de la escritura. En su obra *Fedro*, Platón dice:

Este descubrimiento tuyo creará el olvido en el espíritu de los estudiosos, pues ya no tendrán que recordar; pondrán toda su fe en los caracteres externos y no recordarán por sí mismos...

Consciente pues del impacto que aquella tecnología estaba produciendo en la sociedad. Esta actitud no es exclusiva de Platón, desde luego. Hoy día podemos leer (resaltamos: *leer*) sobre las preocupaciones en nuestra sociedad por los efectos que Google pueda tener entre nosotros. Por ejemplo, recientemente ha salido a la luz un libro de N. Carr (2011) con el inquietante título: *Superficiales ¿Qué está haciendo internet con nuestras mentes?* y allí se pregunta si no estaremos sacrificando nuestra capacidad para *leer* y pensar con profundidad. ¿Qué habría pensado Platón si supiera que pensar con profundidad está hoy ligado a la escritura?

La escritura trajo una revolución en la comunicación, en la manera de capturar las ideas y, más profundamente todavía, generó una especie de espejo cognitivo donde se puede mirar lo que uno mismo ha escrito y tomar distancia sobre el pensamiento propio.

No podría entenderse la cultura matemática griega sin la escritura que da estabilidad a la reflexión y produce una copia de las ideas que atraviesa el tiempo y el espacio. Esa copia siempre está ante nuestros ojos guardando las ideas que serán activadas mediante la lectura. La idea misma de estudiar difícilmente existe en una cultura oral.

Sin duda, la racionalidad con la que los griegos proyectaron su mirada sobre el mundo tuvo en la escritura una de sus raíces principales. Entre los matemáticos, el resultado fue descomunal. Ante nuestros ojos está la obra de sistematización de Euclides que como un hilo, enhebra los resultados previos, las perlas del collar. Pero es el hilo el que sostiene al collar, no las perlas. La escritura permite descontextualizar las ideas y abstraerlas de las situaciones concretas de donde emergen. Cuando esto se logra, entonces se pueden extraer principios generales que de otro modo permanecerían ocultos. Un poco de experiencia matemática permite reconocer esta cualidad entre los griegos, en particular entre los filósofos y matemáticos. Alrededor del siglo VI a. C., los pensadores pitagóricos ya habían iniciado una labor de refinamiento de sus nociones matemáticas tornándolas gradualmente en herramientas conceptuales mediante las cuales podían construir modelos de interpretación del mundo material. En efecto, los pitagóricos habían tenido la idea de que los números constituían la estructura profunda del mundo. Si uno podía observar cuidadosamente un fenómeno, debía ser capaz de percibir, con el entendimiento, su íntima naturaleza numérica. Las matemáticas pitagóricas constituían entonces una especie de esqueleto, de estructura interna de la realidad material. Esa misma idea la iba a expresar mucho tiempo después Galileo cuando en su obra *El Mensajero Celeste* de 1610, expresa que *el universo está escrito en caracteres matemáticos*. Lo dice en un párrafo que vale la pena citar por lo que revela de su concepción de las matemáticas (Kline, 1985, p. 95):

La [naturaleza] está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos. Me refiero al universo, pero no podemos comprenderlo si no aprendemos el lenguaje y dominamos los símbolos en el que está escrito. El libro está escrito en el lenguaje matemático, y los símbolos son los triángulos, los círculos y otras figuras geométricas sin cuya ayuda es humanamente imposible comprender una sola palabra de lo que dice; sin él vagamos sin rumbo en un oscuro laberinto.

Para Galileo (al igual para Newton y muchos otros que compartieron convicciones e ideología de su cultura matemática) el conocimiento matemático era absoluto y sus búsquedas iban orientadas a entender cómo era que Dios había diseñado el plan matemático del universo. Entre los años 600 y 300 a.C., tuvo lugar lo que los historiadores han llamado el cénit de la cultura griega. En esa etapa tomó cuerpo la convicción de que había un orden interno en la naturaleza, que los acontecimientos no estaban regidos por el azar. Fue ganando terreno la consideración de que unas pocas pero cuidadosas observaciones del mundo material podrían constituir las bases para ir encontrando *mediante el razonamiento*, el orden, la estructura subyacente en la naturaleza.

Bajo esa convicción se desarrolló la geometría que reflejaba la estructura matemática del mundo material. La racionalidad era el instrumento para develar lo que estaba oculto tras la fachada material dando acceso a la verdadera naturaleza, a saber, la naturaleza matemática.

En manos de Euclides (330-275 a.C.) la geometría alcanzaría una organización global mostrando así toda la fuerza del método deductivo. Es admirable cómo a partir de unos pocos *acuerdos* (los llamados postulados) desarrolla todo el cuerpo matemático que se había venido acumulando durante siglos.

Es crucial señalar que la manera de entender lo que es un sistema axiomático hoy en día, es radicalmente distinta a como la entendía Euclides. La investigación de la naturaleza ya desde los tiempos de Pitágoras, estaba encaminada a revelar su esencia que debía ser matemática. Por lo tanto, los postulados tal y como los recoge Euclides no son proposiciones arbitrarias sino proposiciones sobre las que se está de acuerdo puesto que reflejan verdades evidentes sobre el mundo material. De allí que el listado de sus postulados empiece con el *acuerdo*:

Dos puntos determinan una única recta.

Esta es, desde luego, la versión geométrica de una observación sencilla pero básica: tensar una cuerda. A partir de los postulados se deduce racionalmente todo el cuerpo geométrico. Pero siempre está presente, en la mentalidad del matemático griego, que el proceso deductivo es el método para extraer *verdades* de la naturaleza.

Pero había un problema: si se dice que *por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela*, entonces estamos afirmando algo sobre el comportamiento de una recta más allá de donde alcanza nuestra visión, más allá de donde la evidencia perceptiva nos pueda informar (Hilbert no tenía ese problema pues para él, el postulado no comportaba el requerimiento de evidencia sino tan solo el de coherencia lógica. Pero todavía no llegamos a este punto). Euclides lo comprendió muy bien, si seguimos atentamente lo que hizo entonces: eligió la siguiente versión del postulado,

Dadas dos rectas,  $m$  y  $n$ , y una transversal  $t$ , si la suma de los ángulos ( $\alpha$  y  $\beta$ ) del mismo lado de la transversal es menor que dos rectos, entonces al prolongar las rectas  $m$  y  $n$ , se cortarán de ese lado (véase figura 1).

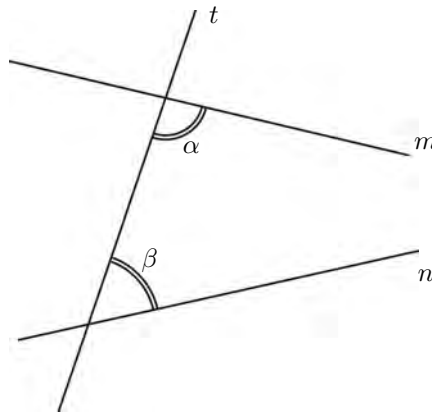


FIGURA 1.

Euclides debió pensar y con razón, que de esta manera se evitaba la alusión a lo que ocurría con las rectas al prolongarlas más allá de donde el control perceptivo podía dar fe del comportamiento de dichas rectas. Recuérdese la expresión: *por más que se prolonguen nunca llegan a cortarse* que se suele emplear para dar una descripción del comportamiento de dos rectas que son paralelas. El postulado afirma que hay *una única* que se comporta de tal manera, bajo ciertas condiciones. Pues bien, esa falta de evidencia es lo que Euclides evitó con su nueva versión del postulado. Sin embargo, esta nueva versión conllevaba otros problemas: el enunciado es muy largo, tiene una hipótesis sobre la suma de ángulos que se forman con una transversal y concluye que, bajo esa condición las rectas ( $m$  y  $n$  en la figura anterior) se cortan.

Los postulados debían ser proposiciones concisas, que expresaran un hecho básico, con una carga de evidencia que los hiciera incontestables. La versión de Euclides, empero, tenía más los rasgos de un teorema que de un postulado. Euclides se encontraba en una encrucijada. ¿Qué hacer entonces? En su mundo cultural no tenía cabida el infinito. La racionalidad griega era la fuente de sus concepciones matemáticas y estaba orientada hacia un ideal de simplicidad. Frente al postulado de las paralelas se levantaba un dilema: optar por lo escueto de un enunciado que hacía explícita la presencia (indeseada) del infinito, o elegir la versión que finalmente eligió Euclides, pagando el costo de un enunciado alejado de la concisión propia de los principios de donde debía partir el proceso deductivo en el plan euclidiano de reorganización del conocimiento.

Los estudiosos del tema están casi todos de acuerdo en que Euclides mismo debió sentir cierta incomodidad, cierta reticencia al empleo de este postulado: no lo utilizó a lo largo de las primeras 28 proposiciones del libro 1 de sus Elementos. No por consideraciones lógicas

principalmente, insistimos, sino por la falta de correspondencia del postulado con un hecho que resultara evidente por sí mismo. Naturalmente el proceso deductivo era lógico, pero no así la elección de los postulados.

En consecuencia, si los postulados provenían de observaciones finas de la naturaleza, el proceso deductivo tendría como frutos, verdades sobre la naturaleza. Esto será crucial a lo largo de la historia que aquí se está tratando de narrar.

Las primeras 26 proposiciones se refieren a la geometría del triángulo. Luego, entre la 27 y la 34 se exploran los teoremas relativos a los ángulos que forman dos rectas cortadas por una transversal. Vale la pena recordar algunas de ellas. Por ejemplo, la proposición 27 dice:

Si una transversal  $t$  corta dos rectas  $m$  y  $n$  de modo tal que los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  sean iguales entonces las rectas  $m$  y  $n$  son paralelas.

La demostración procede por contradicción: si  $m$  y  $n$  se cortaran (véase la figura 2) en un punto  $P$ , entonces en el triángulo que se forma el ángulo exterior  $\beta$  sería igual al ángulo interior no adyacente  $\alpha$ . Esto es una contradicción pues ya ha sido demostrado (proposición 16) que un ángulo externo es mayor que el ángulo interno no adyacente en un triángulo. Pero

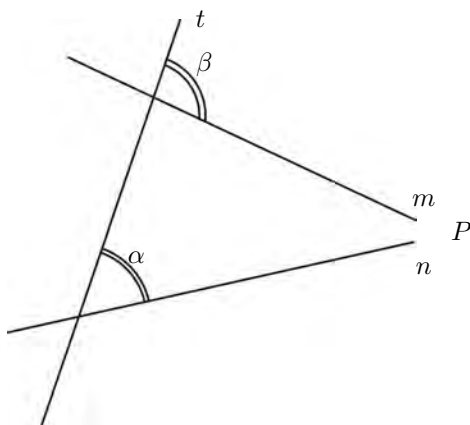


FIGURA 2.

finalmente llega la proposición 29 y entonces Euclides ya no logra evitar el concurso de su *incómodo* postulado de las paralelas. Esta proposición 29 constituye así, en el seno de la obra euclidiana, el punto de inflexión más allá del cual entramos propiamente al mundo euclidiano. Esta proposición crucial dice:

Sea  $t$  una transversal a las rectas paralelas  $m$  y  $n$ . Entonces los ángulos alternos internos  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales.

(véase la figura 3).

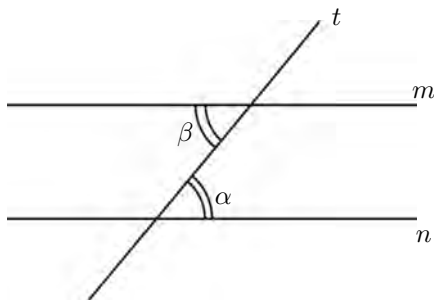


FIGURA 3.

A partir de aquí, ya se podrá demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo equivale a dos rectos (es decir a  $180^\circ$ ). Aún más: este último resultado ¡es equivalente al postulado de las paralelas!

Euclides no solamente heredó a las generaciones que lo sucedieron, una obra maestra. También les heredó lo que devendría una tormenta intelectual, a saber, dilucidar la naturaleza del quinto postulado. ¿Era necesario como postulado? ¿o podría demostrarse como un teorema más?

La búsqueda de respuestas a estos interrogantes constituye una de las aventuras más extraordinarias de la historia de las matemáticas.

## 1. LA INTUICIÓN Y LA LÓGICA I

Los segmentos son abstracciones de cuerdas tensas y por lo tanto la manera como se representan debe trasladar a la representación las propiedades básicas de una cuerda tensa.

Las representaciones euclidianas de segmentos, triángulos, circunferencias y demás objetos geométricos, son esencialmente *representaciones que miran al mundo material*. Por eso mismo, los postulados euclidianos son *verdades evidentes en sí mismas*.

Solamente hay un espacio y el sistema euclidiano lo retrata fielmente. Esta concepción del espacio y más generalmente, la idea de que las matemáticas reflejan la esencia de la naturaleza, puede verse reflejada de mil maneras en la historia de las ciencias. Por ejemplo, Laplace (1749-1827) solía decir que Newton era el científico con mejor suerte ya que solamente había un universo y él, Newton, ya lo había explicado.

El descontento con el postulado de las paralelas provenía esencialmente de su falta de evidencia, en una versión que involucraba al infinito y en la otra, la que finalmente eligió Euclides, en que tenía toda la apariencia de teorema, no de postulado. Pero no había duda alguna que el sistema describía al espacio, tal y como este era. Euclides había logrado el retrato del espacio.

Para solventar el problema los geómetras, inquietos, se lanzaron a encontrar una versión más sencilla que cumpliera los requisitos deseables de sencillez y evidencia intuitiva. Otros, intentaron demostrar el postulado y de este modo pasarlo a la lista de los teoremas. Es fácil decirlo: durante 23 siglos se intentó encontrar una solución por estos caminos pero resultó todo vano.

Wallis (1616-1703) por ejemplo, abordó el problema de la siguiente manera: Como existen circunferencias de distintos radios y siempre son figuras semejantes aceptemos entonces que dado un triángulo siempre puedo construir otro triángulo semejante al primero. Parece una condición bastante fácil de aceptar. A partir de ella y con todo lo que se sabía y que estaba contenido en las primeras 28 proposiciones (recordemos: que no empleaban para nada al postulado de las paralelas) Wallis logró dar una prueba del postulado. Fin de la historia, aparentemente. Y decimos aparentemente porque esa hipótesis adicional que Wallis introdujo no era tan inocente como parecía: la existencia de triángulos semejantes no congruentes es equivalente al postulado de las paralelas... igual que afirmar que existe un triángulo cuya suma de ángulos es de  $180^\circ$ . A lo largo del tiempo, los geómetras interesados en limpiar de una vez por todas al sistema euclidiano de esta *mancha* (como la llamó Saccheri, el ilustre lógico italiano) se estrellaron contra una pared de granito: todos sus intentos resultaban fallidos. Nadie dudaba de la veracidad de la geometría, nadie dudaba que Euclides había logrado una representación fiel del espacio pero este escrúpulo, es decir, esa piedrita en el zapato, no dejaba en paz a los estudiosos. Desde luego, después de tanto tiempo el problema de la fidelidad de la geometría, fue arrojando luz sobre el problema lógico subyacente. La fe estaba intacta pero la lógica parecía ser el camino para despejar las sombras. Tal vez haya sido Saccheri (1667-1733) quien mostró de forma más clara la toma de conciencia sobre el problema lógico subyacente. Añadió a los cuatro primeros postulados euclidianos la negación del quinto en sus dos versiones. Primero, la hipótesis de que no hay paralela alguna por un punto exterior. Y después, la hipótesis de que hay más de una. En ambos casos pretendía llegar a una contradicción y de allí a concluir que la única hipótesis sostenible era la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta. En el camino de su extraordinario ejercicio lógico

fue encontrando resultados que le parecían cada vez más absurdos pero persistió hasta el final, cuando ya no pudo más y él mismo llegó a conclusiones absurdas afirmando que ciertos hechos repugnaban a la naturaleza de la línea recta y por lo tanto la única hipótesis admisible era la que Euclides había postulado. En realidad, al suponer que había más de una paralela, lo que estaba desarrollando era el sistema de geometría hiperbólica sobre el que tendremos que decir mucho un poco más adelante, pero nada que repugnara a la naturaleza de las rectas.

Era, para Saccheri un triunfo, pero también una derrota: se había visto en la necesidad de aceptar que un postulado no necesariamente tenía ese rasgo de claridad meridiana que convenía al ideal de simplicidad de las matemáticas griegas. El que se aceptara que un postulado pudiese ser poco transparente empezaba a minar la manera tradicional de concebirlos entre los griegos y sus herederos. Un postulado así empezaba a ocupar un espacio entre la intuición y su carácter lógico – espacio que crecientemente va a ocupar en el desarrollo posterior de las matemáticas. Ya entrando al siglo XIX, la manera de abordar el problema de las paralelas da muestra de estos cambios: hay una nueva mirada: los géometras levantan la vista del papel y miran al espacio que los rodea y al espacio astronómico en busca de nuevas evidencias sobre la justeza de la descripción euclidiana de ese espacio. Si bien todavía se sostiene la validez de la correspondencia entre el sistema euclidiano y la naturaleza geométrica del espacio físico, esa convicción empieza a ser vista desde una nueva perspectiva. Se trata de ir a medir, por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo para *comprobar* que esa suma es  $180^\circ$ . Pero no de un triángulo cualquiera, de los que pueden dibujarse sobre una hoja de papel: se trataba de triángulos de dimensiones enormes.

La experiencia adquirida hasta entonces se circunscribía a sectores del espacio mas bien limitados y por eso, cuando se hablaba del comportamiento global de las paralelas se hablaba de un hecho geométrico que no tenía contraparte en la experiencia adquirida del espacio hasta ese momento: eso es lo que está en el núcleo de los intentos de medir la suma de los ángulos de triángulos muy grandes, para ver si su comportamiento es como el de los triángulos pequeños. No olvidemos que la suma igual a  $180^\circ$  es equivalente al postulado de las paralelas y por ello fue elegido para esta experiencia empírica sobre la geometría.

## 2. LA INTUICIÓN Y LA LÓGICA II

Desde muy joven, Gauss (1777-1855) se interesó por el postulado de las paralelas. Pero a diferencia de su trabajo sobre la teoría de números, por ejemplo, en geometría su trabajo es muy fragmentario y cubierto con un manto de sigilo según él mismo lo dice, para “evitar las voces escandalosas de los beocios”. Gauss usa esta expresión referida a una clase de personas rústicas que eran objeto de menosprecio en la época de oro de Atenas (Gray, 2007).

Casi toda su reflexión sobre la geometría de las paralelas, Gauss la dejó escrita en cartas a sus amigos, en forma de comentarios y rectificaciones a los intentos de demostración que ellos producían sobre el ya milenar postulado. Siempre demandaba un cauteloso silencio advirtiendo sobre la confianza que depositaba en ellos. En una carta de 1817 dirigida a Olbers (Gray, 2007, p. 91) Gauss expresa que,

Cada día me convengo más de que la necesidad de nuestra geometría no se puede demostrar, por lo menos no mediante la razón humana. Es posible que en otra vida seremos capaces de conseguir una intuición mas profunda sobre la naturaleza del espacio, que hoy es imposible.

Para ese entonces las meditaciones de Gauss llevaban ya un buen rato cocinándose a fuego lento en las cartas con sus amigos. Cuando dice que *la necesidad de nuestra geometría no puede demostrarse* se refiere a las dificultades de probar que el sistema euclidiano es una representación fiel, icónica, del espacio físico. Aquí hay una primera grieta en la fe que hasta entonces parecía acompañar al sistema euclidiano como modelo exacto del espacio físico. La naturaleza del problema de las paralelas empezaba a dejar de ser una especie de rompecabezas para ser ahora cuestionado desde una perspectiva mucho más profunda. Ahora se ponía en tela de juicio la verdad de la geometría; se ponía en tela de juicio la convicción profunda de la doctrina pitagórica sobre la estructura matemática de la naturaleza. Si las matemáticas no



estaban incrustadas en la naturaleza, ¿cómo explicar entonces que resultaran tan eficaces en sus aplicaciones?

### Una pequeña y necesaria digresión filosófica

Durante el ciclo vital de Gauss, en los círculos universitarios europeos se sentía fuertemente la presencia de la filosofía de Kant (1724-1804). Esta filosofía había logrado una síntesis entre las corrientes empiristas, sobre todo de los ingleses, y el racionalismo cartesiano. Los empiristas herederos de Aristóteles solían afirmar que nada había en el intelecto que no hubiese estado antes en los sentidos. Según John Locke (1632-1704) lo expresa en su obra *Sobre el Entendimiento Humano*, el intelecto es como una tabula rasa en la que originalmente no hay nada escrito. Los sentidos constituyen entonces una especie de mediador cognitivo entre el mundo que nos rodea y el conocimiento que alcanzamos sobre este mundo. Pero Leibniz (1646-1716) racionalista a ultranza, le respondía diciendo que sí, que lo que había en el intelecto había pasado antes por los sentidos *excepto el intelecto mismo*. Y añadía, en sus *Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano*, en respuesta a Locke, que *todas las verdades contenidas en la aritmética son accesibles considerando solamente lo que ya tenemos en el intelecto...sin tener que recurrir a lo que pueda aprenderse mediante la experiencia*.

Estas posiciones tensaban la filosofía europea y habían llegado a un callejón sin salida. Fue entonces que Kant, bajo la enorme influencia de los *Principia Mathematica* (1687) de Newton, articuló una respuesta a este enredo filosófico. La respuesta está contenida en su *Crítica de la Razón Pura* de 1781 – cuando Gauss tenía 4 años de edad. Debe entenderse *crítica* como la posición opuesta al dogmatismo.

Kant se pregunta que *cómo es posible que la conciencia adquiera ideas generales si toda su experiencia es particular*, y afirma por otra parte que ha tomado el único camino que quedaba disponible para evitar los errores que se producen cuando la razón actúa sin basarse en la experiencia. Pero no deja dudas que ese camino no es el empirismo de Locke pues añade desde la primera línea de su introducción que:

No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer...como no fuera por medio de objetos que hieren nuestros sentidos y...ponen en movimiento nuestra capacidad intelectual para compararlos, enlazarlos, o separarlos y *elaborar así, con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos llamado experiencia?*

(énfasis añadido)

El conocimiento pues, no puede separarse de la experiencia pero eso no significa que allí resida. La experiencia vista como experiencia sensorial es, siguiendo a Kant, la *materia prima* con la cual la maquinaria intelectual (la maquinaria cognitiva) construye la verdadera experiencia.

Es como si el intelecto del que disponemos *a priori*, recibiera las impresiones sensoriales, como un líquido, y les diera forma de ese recipiente llamado intelecto humano. De esa forma quedan fusionados el empirismo y el racionalismo: redefiniendo la experiencia como el resultado de aplicar la maquinaria cognitiva a las impresiones sensibles. En la mirada kantiana ambos, empirismo y racionalismo, son insuficientes pero cada uno tiene una parte de razón. Era cuestión de articularlos adecuadamente. Solo así, argumenta Kant, puede entenderse que a partir de la experiencia sensible del espacio que nos rodea, pueda llegarse a una proposición general como el teorema de Pitágoras. El intelecto impone a la experiencia sensible del espacio un molde euclidiano y de allí resulta que solamente podemos ver al espacio a través de esos ojos euclidianos. No es que el espacio sea intrínsecamente euclidiano, sino que nuestro intelecto le impone ese rasgo a la experiencia de los sentidos. Kant nos propone abandonar la idea de que somos observadores pasivos de lo que nos rodea (sin duda, esta es una contribución primordial a la teoría del conocimiento) a la espera que la naturaleza imprima sobre nuestro entendimiento sus regularidades. Por lo tanto, la naturaleza lleva la marca de nuestro intelecto, pero de un intelecto previamente determinado hasta sus estructuras más íntimas. El sujeto parece autónomo pero en realidad obedece a esas estructuras cognitivas ya definidas con las que viene *equipado de fábrica*. Así como al mirar a nuestro alrededor vemos las cosas de

colores sin que lo podamos evitar, vemos el espacio organizado como euclidiano. Eso nos cuenta Kant.

### Fin de la pequeña y necesaria digresión filosófica

Regresemos ahora a Gauss. Ya para la segunda década del siglo XIX, había empezado a manifestar sus dudas sobre la correspondencia exacta entre el espacio físico y el sistema euclidiano. Tal vez el escrito donde Gauss expresa más elocuentemente sus hallazgos y nuevas concepciones es la carta de 1824, que envía a su amigo Taurinus. Este había iniciado sus estudios de geometría convencido de poder demostrar el postulado de las paralelas a partir de los restantes de Euclides. Ni la más ligera duda concebía sobre la falta de correspondencia entre el sistema euclidiano y el espacio físico. En una carta que escribió a Gauss (y cuya respuesta se va a comentar ampliamente en unos momentos) propone una demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ , y Gauss entonces, en su respuesta, le explica que la demostración no es rigurosa (en realidad queriendo decir que es errónea). Taurinus intenta la demostración por contradicción: primero supone que la suma es mayor que  $180^\circ$  y llega a una contradicción. El resultado no es muy complicado puesto que la hipótesis de que la suma es mayor que  $180^\circ$ , impone al “plano” una geometría como la de la esfera; la contradicción proviene del hecho que la recta euclidiana tiene longitud arbitrariamente grande lo cual no sucederá si la suma es mayor que  $180^\circ$  (esencialmente como en la superficie esférica). El problema crucial ocurre cuando se supone que la suma es inferior a  $180^\circ$ . Hasta ese momento *no se conocía una superficie en donde esto pudiera ocurrir*. Esto es muy importante y vale la pena tenerlo en mente al leer la respuesta de Gauss (que puede consultarse en extenso en el libro de M. Greenberg, 1974, pp. 145-146). Es toda una confesión matemática. Vale la pena detenerse en ese magistral texto:

[... pero la situación se torna más compleja cuando se supone que la suma es menor que  $180^\circ$ ]. Este es el punto crítico; el arrecife donde tienen lugar todos los naufragios...he meditado sobre este caso durante treinta años... aunque nada he publicado sobre él.

La hipótesis que la suma es menor que  $180^\circ$  conduce a una geometría extraña, muy diferente de la nuestra (la euclidiana) pero totalmente consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción y puedo resolver en ella todo problema excepto la determinación de una constante que no puede ser designada a priori. Cuanto mayor es esa constante (nota añadida: más adelante sabremos que esa constante es el recíproco de la curvatura de la superficie aún desconocida, portadora de la geometría no euclidiana) más nos aproximamos a la geometría euclidiana (nota añadida: la superficie *desconocida* se aproximará al plano euclidiano) y si la constante es infinita las dos geometrías coinciden. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y para el lego en la materia, absurdos. Pero, calma. Una reflexión sostenida revela que no contiene nada imposible. Por ejemplo, los ángulos de un triángulo se tornan tan pequeños como se desee si se toman los lados suficientemente grandes y aun así, el área nunca excede una cantidad fija. Todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia en esta geometría, han sido vanos... pero me parece, a pesar de la vacía sabiduría de los metafísicos, que casi nada sabemos acerca de la verdadera naturaleza del espacio como para pensar que lo que nos parece antinatural sea imposible.

Uno de los resultados aparentemente absurdos se refiere a la fórmula mediante la cual calculamos el área de un triángulo. Suponer que por un punto externo a una recta pasa más de una paralela implica que, dado un triángulo cuyos ángulos miden (en grados)  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$ , su área es:

$$\text{área} = k(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma))$$

donde  $k$  es una constante positiva que no se puede determinar a priori. Es claro de esta fórmula, que a diferencia de lo que ocurre con la geometría euclidiana, el área de los triángulos depende de la longitud de los lados así: a medida que aumenta la longitud de los lados, disminuyen los ángulos, y por lo tanto aumenta el área, pero *permanece siempre*

*acotada*. Gauss tenía razón en pedirnos calma, pues este resultado es asombroso. Desde luego, esta situación no puede presentarse en la geometría euclidiana donde la medida angular es independiente de la medida de longitud. Recordemos que Wallis intentó demostrar el postulado de las paralelas tomando como hipótesis adicional que en la geometría podían existir triángulos de área arbitrariamente grande (triángulos semejantes cuando uno de ellos era arbitrariamente grande). La fórmula del área hiperbólica hallada por Gauss muestra con mucha claridad en donde estaba la petición de principio, como dicen los lógicos, cometida por Wallis. *Explica* la ilegitimidad de su hipótesis.

Es ostensible la profundidad del pensamiento de Gauss. Entre los tesoros matemáticos que revela hay aquí escondida una joya cuyo valor no podemos exagerar:

*Lo que es lógico, consistente, no necesariamente es aceptable para la intuición. Es decir,*

*Intuición*  $\neq$  *lógica*

La diferenciación del mundo de la intuición y del mundo lógico no significa que estén contrapuestos ni tampoco que sean irreconciliables. A pesar de que la “sabiduría vacía de los metafísicos” aludida por Gauss era la de Kant, aquél ofrece una conclusión muy de acuerdo con el filósofo de Königsberg, a saber, que la naturaleza de los problemas **no** nos es impuesta por los sentidos. Pero aquí mismo terminan las coincidencias. El ser humano, en sus actos cognitivos revela una cierta autonomía; en el caso de Kant, esa autonomía queda fuertemente limitada por el hecho que obedece, ineluctablemente, a las estructuras cognitivas a priori, que poseemos. Esas estructuras determinan la interpretación que formulemos del espacio y del tiempo, por ejemplo. Es como si desde nuestro intelecto arrojáramos la estructura euclidiana sobre el espacio de nuestras experiencias, de manera tan instantánea que lo que acabamos percibiendo es un mundo euclidiano desde el principio. No nos damos cuenta que nuestro aparato cognitivo nos puso ante nuestros ojos una especie de velo para estructurar nuestra percepción sensible. Ante eso, el ser humano no puede sino concluir que ya de antemano, el espacio era euclidiano. Para Gauss ese modo de interpretar el espacio y su naturaleza resultaba inaceptable. Para él, el espacio tenía una estructura geométrica que no estaba predeterminada. Hacía falta investigar empíricamente, pero dejando que la intuición sensible fuese guiada por los conceptos geométricos al tiempo que los conceptos quedasen modulados por la intuición en una danza dialéctica, en nuestro afán de revelar la naturaleza geométrica del espacio.

¿Podría responderse la pregunta sobre la *verdadera* naturaleza del espacio?

### 3. EL CONOCIMIENTO HUMANO: EL EXTRAVÍO DE LA VERDAD

La segunda década del siglo XIX vio nacer la consolidación de una nueva forma de concebir el problema de las paralelas. Hasta aquí había dos componentes del problema. Por un lado, una convicción inamovible en la veracidad del espacio como euclidiano; por el otro lado, el sistema euclidiano como una expresión organizada de las observaciones sobre el espacio. Ese sistema era como un retrato que capturaba por completo la naturaleza del espacio. A los objetos materiales correspondían los objetos matemáticos que los representaban fielmente. De nueva cuenta, vale la pena recordar a Galileo quien defendía la convicción de que el libro de la naturaleza estaba escrito en lenguaje matemático. Es decir, que la esencia del mundo natural era matemática, de modo que conocerlo, equivalía a conocerlo según las matemáticas. Para Galileo y muchos otros antes que él, los principios geométricos estaban encarnados en la naturaleza: Lo que valía en el espacio era igualmente válido en la representación. Por lo tanto lo que se deducía en la representación (es decir, en el sistema matemático) era veraz. También tenía una dimensión de validez lógica, pero lo importante era la consideración de que lo que se deducía *era verdad*. Cuando Saccheri intentó demostrar que un sistema no euclidiano de geometría era contradictorio, su meta última era probar que los resultados que contenían eran falsos. Por eso concluyó diciendo que *repugnaban* a la razón. Se trataba de mostrar que algo era *falso* mediante la estrategia de probar que era *inconsistente*.

En 1822, Fourier (Bottazzini, 1986, pp. 79-80) se encargaría de recordárnoslo con estas palabras:

El estudio de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos...  
por ello, el análisis matemático es tan extenso como la misma naturaleza...  
Nuestra teoría [del calor] reduce las investigaciones físicas al cálculo integral.

Y añade que: “las técnicas están *legitimadas* por la naturaleza física de los problemas a resolver”.

Los instrumentos de la razón que había creado, es decir, las series de Fourier, le suministraban un medio que amplificaba su capacidad de observación del mundo material. Esas series eran para Fourier como un instrumento simbólico que permitía “meter la mano” en la realidad material para explorarla y extraer lo que a simple vista no se percibía. Newton desde antes, también se había adherido a esa tradición. Lo dice con estas palabras en el prefacio de sus *Principia*:

... ofrezco este tratado como los principios matemáticos de la filosofía, ya que la tarea de la filosofía natural parece consistir en esto: a partir de los fenómenos del movimiento, investigar las fuerzas de la naturaleza, y a partir de estas fuerzas, investigar los demás fenómenos... entonces, de estas fuerzas y mediante otras proposiciones *que también son matemáticas*, deduzco los movimientos de los planetas, de los cometas, de la luna...

(énfasis añadido)

Así era, a grandes rasgos, la concepción de las matemáticas a la entrada al siglo XIX cuando las cosas empezaron a tornarse diferentes. Empieza entonces, muy lentamente, una toma de conciencia sobre la idea de *estructura formal* que la va a separar de los referentes materiales que, hasta entonces, habían servido para caracterizar a los objetos de la geometría. Hay una distinción explícita entre lo apriorístico y lo que se conoce sensorialmente. Esta distinción marca la línea divisoria entre Gauss y Kant en cuanto al origen del conocimiento y de los objetos de conocimiento. Eso lo expresa Gauss cuando, en una carta de 1830 a Bessel, le confiesa :

De acuerdo con mis más íntimas convicciones [...] nuestro conocimiento del espacio carece por completo de esa certeza absoluta [...] que es característica de la teoría de las magnitudes. Debemos aceptar humildemente que *si bien el número es justamente producto de nuestro intelecto, el espacio tiene una realidad fuera de nuestro intelecto cuyas leyes no pueden prescribirse a priori*.

(énfasis añadido.)

Gauss hubiese podido ser una figura aún más destacada en la historia de la geometría no-euclidianas (Gauss fue el primero que usó este nombre). La penetración que logró en la naturaleza del problema así lo sugiere. Tenía todo para ello. Sin embargo, era consciente de que estaba investido de un prestigio excepcional que no quiso poner en juego asumiendo la vanguardia frente a un tema tan revolucionario. Eso parece desprenderse del sigilo que pedía a sus amigos en sus intercambios epistolares. Por ejemplo en la extraordinaria carta (citada previamente) que escribió a Taurinus, se leen estas palabras hacia el final:

No temo que cualquier persona que haya demostrado tener una genuina mente matemática vaya a malinterpretar lo que se ha dicho antes, pero en cualquier caso considere esta una comunicación privada de la que no debe hacerse uso público o cualquier otro que le añada publicidad. Tal vez, en el futuro si llego a tener el tiempo suficiente para dedicárselo, haré yo mismo públicas mis investigaciones.

Pero no parece que haya tenido, o querido tener, ese tiempo. Para sorpresa de muchos, no se encontró entre sus papeles mucho más que lo que quedó en esas famosas cartas. En otros temas sí quedó constancia para la posteridad que el Príncipe de las Matemáticas, había dejado una gran herencia. Y si alguna vez pensó realmente en sentarse a escribir sus meditaciones a fondo, esa decisión desoyó el consejo que Farkas Bolyai dio a su hijo János Bolyai cuando entendió el carácter revolucionario del trabajo de su vástago (Greenberg, 1974, p. 143):

Me parece aconsejable que por dos razones aceleres la publicación: primero, porque las ideas pasan de uno a otro fácilmente y alguien más puede publicarlas como tuyas; en segundo lugar, porque parece cierto que las cosas tienen una época en la que son descubiertas simultáneamente en distintos sitios, de la manera en que las violetas aparecen por doquier en la primavera.

En realidad, ese párrafo es visionario. Cuando Gauss respondió a Farkas Bolyai su antiguo compañero en la universidad, en marzo de 1832, sobre el trabajo de su hijo János, dijo algo que nunca le fue perdonado (Greenberg, p. 144):

Si comienzo diciendo que no puedo elogiar el trabajo de tu hijo, estarás de seguro sorprendido: pero no puedo hacerlo porque eso sería como elogiarme a mí mismo. El contenido completo, el camino que ha seguido, los resultados a los que ha arribado, coinciden casi exactamente con las meditaciones que han ocupado mi mente durante los últimos 35 años...

A estas alturas, la solución completa del enigma de las paralelas, ya se encontraba en la zona de desarrollo proximal de la geometría, o como se suele decir con frecuencia, estaba “en el aire”.

La geometría hizo vivir a Gauss en medio de la tensión intelectual y emocional. Eso se puede apreciar en sus cartas donde siempre está presente aparte de la preocupación social por su figura. Gauss se rodeó de una comunidad de interlocutores para pensar con ellos y a través de ellos. Tal vez Kant haya sido la figura que tenía presente y a quien cuestionaba secreta e intensamente. En determinado momento, Gauss comprendió que el problema de las paralelas daba lugar a dos acercamientos diferentes. Por un lado, estaba la geometría como un sistema de *verdades* sobre el espacio físico (esa era la convicción generalizada) y por el otro, el sistema lógico subyacente que había estado emergiendo lentamente y podía examinarse por sí mismo, al que se podía dar un estatus independiente del referente material. Ese es un momento crucial en el desarrollo de las matemáticas. Gauss se acerca a la geometría primero, desde su condición de científico, usando los conceptos matemáticos con el significado que le otorga su origen intuitivo. Esa es su posición cuando se involucra en 1817, y durante largo tiempo, en el proyecto geodésico en la región de Hanover (Breitenberger, 1984). De aquí surge la historia sobre la medición de los ángulos de un triángulo enorme: como parte de esa empresa, Gauss se vio en la necesidad de medir un triángulo identificado como HIB por las iniciales de los nombres de los tres picos (Hohenhagen, Inselsberg y Brocken) que sirvieron de vértices. El lado mayor del triángulo es de 105 kms. La medición de la suma de los ángulos del triángulo difirió de  $180^\circ$  en una cantidad inferior al error experimental aceptable en las mediciones del trabajo geodésico. De modo que o bien la geometría euclidiana representaba fielmente al espacio físico (era verdadera) o bien dicho triángulo era muy pequeño para apreciar su desviación con respecto a los  $180^\circ$ . Si el experimento fue hecho con estos propósitos, no arrojó la evidencia buscada. Lo que quedó mostrado fue que la geometría euclidiana era una excelente herramienta para dicho trabajo. Ese era Gauss como científico.

#### 4. LAS VIOLETAS EN PRIMAVERA

Farkas Bolyai temía por la aparición de las violetas en primavera. Su desaliento hubiese sido mayor si se hubiera enterado de que, en efecto, florecían también en suelo ruso. La imagen que transporta esta metáfora sugiere que las ideas circulan a través de las infraestructuras de comunicación de las culturas; las ideas resuenan y eventualmente quedan cristalizadas en algún medio de representación entre las diversas opciones que ofrece una cultura. János Bolyai escribió a su padre en 1823, que de la nada había creado un extraño y nuevo universo. Tal vez las cosas no ocurrieron así. La capacidad de resonancia de una cultura tiene tonalidades que el oído normal no discierne, que el ojo normal no percibe. Las ideas viajan por otros caminos; no nos pertenecen a los individuos. Hay un proceso permanente de revisión y refinamiento de las ideas que genera la ilusión de que resultan de una búsqueda individual. Cada creador, más que una isla, se torna un vórtice dentro de una cultura, un punto de convergencia temporal de fuerzas en la conciencia personal de ese creador. Johann Bartels (1769 -1836), el

maestro de Lobachevsky, en su natal Kazán, había sido maestro juvenil de Gauss en Alemania; Farkas Bolyai, el padre de János, amigo cercano de Gauss en sus años universitarios. Tal vez algún comentario aparentemente aislado del tema de la geometría pudo hacer entrar en resonancia un tren de pensamiento poderoso, establecer una conexión entre ideas aparentemente inconexas, u orientar el proceso de conceptualización del problema por la dirección que finalmente ofrecería la solución.

Gauss dejó muy poco escrito sobre los aspectos más técnicos de la geometría no-euclidiana. Sin embargo, las reflexiones que dejó en sus cartas escritas en el seno de esa comunidad que conformó con sus correspondientes fueron goteando perlas en formas de hechos geométricos (que luego se han demostrado plenamente) que en su momento contribuyeron decididamente a crear las condiciones para acceder a una nueva concepción del espacio. Por ejemplo, el área de un triángulo es proporcional al *defecto* (la diferencia entre  $180^\circ$  y la suma de los ángulos que se sabía debía ser inferior a  $180^\circ$  si se tomaba como postulado que había más de una paralela). Esos son hechos que chocan a la intuición euclidiana. El triángulo geodésico que midió Gauss dejó constancia que aun considerando longitudes de un ciento de kilómetros, no alcanzamos a percibir que el espacio deje de comportarse como euclidiano. En su momento, esto debió parecer un argumento contundente a favor de modo que sostener que la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a  $180^\circ$ , *contra toda evidencia empírica*, debió exigir un esfuerzo psicológico considerable. Por otra parte, la exploración del sistema formal no euclidiano, no daba muestras ciertas de arrojar una contradicción desde *el punto de vista lógico*. Resaltamos esto. Tal vez por ello, la contribución más señera de Gauss y de sus correspondientes haya sido ayudar a abrir la mirada de la cultura matemática de su tiempo a una nueva manera de concebir las matemáticas. Sobre esto volveremos un poco más adelante.

La forma de Lobachevsky, de abordar conceptualmente el problema, es similar a la empleada por Gauss (y sus correspondientes). En su obra *Los Nuevos Principios de la Geometría* (1825) escribe (Bonola, 1955, p. 92):

Los sucesivos intentos fallidos por más de dos mil años, desde los tiempos de Euclides, hicieron que se despertase en mí la sospecha de que *la verdad que se deseaba probar no estaba contenida en los datos* [mismos del problema], y que para establecerla sería necesario recurrir a experimentos, por ejemplo, observaciones astronómicas, como es el caso para otras leyes de la naturaleza.

(énfasis añadido).

Uno no puede ignorar la resonancia de estas palabras con las de Gauss cuando, en la carta a Taurinus (ya citada), le revela: Todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia en esta geometría, han sido vanos... casi nada sabemos acerca de la verdadera naturaleza del espacio como para pensar que lo que nos parece antinatural sea imposible... Gauss escribe estas líneas en 1824, un año antes de la fecha del libro de Lobachevsky. Años antes, en 1817 había escrito a su amigo, el astrónomo Olbers: es posible que en otra vida seamos capaces de conseguir *una intuición mas profunda sobre la naturaleza del espacio*.

Lobachevsky llega a la conclusión de que no es posible demostrar el postulado de las paralelas a partir de los restantes del sistema euclidiano. Esta convicción lo impulsa a explorar lógicamente el sistema que incluye el postulado (que no es evidente por sí mismo) que de aquí en adelante llamaremos *hiperbólico*: a través de un punto exterior a una recta hay por lo menos dos rectas paralelas a la primera. (Desde luego, en el plano determinado por la primera recta y el punto exterior a ella.) Lobachevsky desarrolló las consecuencias lógicas del sistema hiperbólico sin hallar aparentemente contradicción alguna pero sabiendo, pues su actitud era la de un explorador, que una contradicción podría estarlo esperando a la vuelta de la esquina. Por ello, ideó otras maneras de penetrar en las entrañas del sistema hiperbólico. En su *Geometría Imaginaria* de 1835, (Efimov, 1980, pp 34-35) Lobachevsky escribió:

Basándome en observaciones astronómicas...verifiqué que en un triángulo cuyos lados son casi tan largos como la distancia de la Tierra al Sol, la suma de los ángulos difiere de dos rectos en menos de 0.0003 segundos. En consecuencia, puede afirmarse que las proposiciones de la geometría práctica han sido rigurosamente establecidas.

En realidad, Lobachevsky *no* demostró con este experimento que la geometría del espacio fuese euclidiana, sino que era un buen modelo para describir esa parte del espacio físico. Piénsese que este tipo de experimento involucra mediciones que están sujetas a error. Además estamos tomando como rectas euclidianas las trayectorias que siguen los rayos de luz. Por ello hablamos de que el sistema euclidiano (o cualquier otro para otros problemas) es un modelo *adecuado*. Las rectas euclidianas son una buena representación simbólica de los rayos de luz que son las “rectas” físicas. Ahora bien, si Lobachevsky hubiera probado que la suma de los ángulos del triángulo era, digamos  $175^\circ$ , entonces la conclusión sería que para esa porción gigantesca del espacio físico, el modelo euclidiano no era un buen modelo. En ese caso sería una mala representación, un mapa poco preciso. Pero hay que enfatizar que la idea de que un sistema matemático era tan solo un modelo y no un mapa exactamente del tamaño de lo que se quería representar, todavía no estaba madura. Justamente esa idea va a desarrollarse, en gran medida, a partir del trabajo con la geometría hiperbólica.

Lobachevsky no se detuvo aquí. Desarrolló la trigonometría hiperbólica para trasladar sus teoremas del sistema sintético hiperbólico a un sistema analítico y encontró que las fórmulas correspondientes eran totalmente coherentes. Era lo más lejos que, en ese momento, podía irse en la exploración de la coherencia del sistema. Es decir, Lobachevsky tomó la trigonometría hiperbólica como un *modelo* de la geometría hiperbólica con el afán de que aquella reflejara la estructura lógica de esta. Se podía entonces afirmar (con buena dosis de evidencia) que tanto el sistema euclidiano como el hiperbólico eran coherentes.

Desde los tiempos de Euclides y hasta entonces, el sistema euclidiano no era solo una representación sino una *encarnación del espacio físico*. Por eso los teoremas eran verdades. Esa correspondencia empezaba a agrietarse y la luz que entraba por la grieta anunciaba una nueva epistemología para las matemáticas. Es decir, una nueva forma de concebir los objetos matemáticos y una nueva manera de concebir el conocimiento matemático mismo, qué significa, cuándo lo podemos considerar válido. Sin embargo, la idea profundamente enraizada en la cognición humana de que un segmento de recta es una cuerda tensa, no iba a ceder tan fácilmente. Sobre un papel uno podía dibujar un segmento euclidiano, era cosa de trasladar la imagen que reside en la memoria al papel... pero ¿cómo dibujar un segmento hiperbólico? En otras palabras, ¿cuál era la imagen visual de un tal segmento? No había una respuesta todavía – aunque las violetas seguían floreciendo.

## 5. UNA RE-DESCRIPCIÓN REPRESENTACIONAL

La inexistencia de triángulos semejantes pero no congruentes en el sistema hiperbólico significa que la medición angular no es independiente de la medición de longitudes de segmentos hiperbólicos. La fórmula básica que relaciona la longitud con el ángulo es la siguiente (véase figura 4):

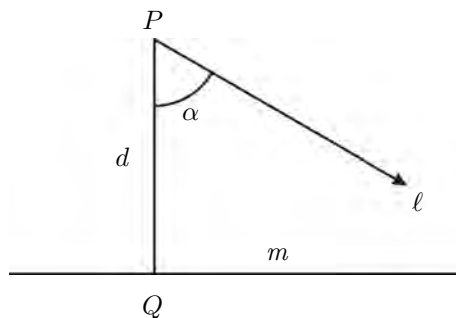


FIGURA 4.

Dada la recta  $m$  y  $P$  un punto exterior, denotamos por  $\ell$  la paralela (a derecha) por el punto  $P$  a la recta  $m$ . El ángulo de paralelismo es  $\alpha$ , que en el sistema euclidiano es recto. En el sistema hiperbólico es estrictamente menor que un ángulo recto. Se tiene entonces la relación:

$$\tan(\alpha/2) = \exp(-d).$$

De manera que al aumentar la distancia  $d$  el ángulo de paralelismo va disminuyendo y si disminuimos la distancia  $d$  entonces el ángulo aumenta de manera que en una región “muy pequeña” alrededor del punto  $Q$ , la geometría se parece mucho a la geometría euclidiana (ángulo de paralelismo =  $90^\circ$ ). Eso explicaría que los experimentos de Gauss y Lobachevsky involucraron triángulos “muy pequeños” y por eso no pudieron detectar la desviación con respecto al sistema euclidiano, del espacio físico. Pero allí hay todavía tela de donde cortar. Una observación debe formularse de inmediato: La figura anterior es tan solo una ayuda para entender una relación hiperbólica central: el dibujo es euclidiano. Tendremos que encontrar (y ello será crucial) una hoja de papel hiperbólico donde podamos dibujar una imagen de un segmento hiperbólico, así como dibujamos en una hoja ordinaria un segmento euclidiano. ¿Existe ese papel *hiperbólico*? La respuesta es afirmativa y lo mostraremos en unos momentos más.

Gauss falleció en 1855. Entonces, cuando se conoció el contenido de su correspondencia eso tuvo un gran impacto benéfico para que la comunidad matemática internacional empezara a tomar la geometría hiperbólica con suficiente seriedad. No fue inmediato, todavía pasaron años antes que la nueva geometría quedara plasmada en el mapa matemático. Sin duda una razón de mucho peso tuvo que ver con el trabajo del matemático italiano E. Beltrami (1835-1899). Beltrami respondió a la pregunta sobre la existencia del papel hiperbólico. Es decir, exhibió una superficie sobre la cual valían los postulados del sistema hiperbólico. Para ello consideró la superficie llamada pseudo-esfera (véase figura 5)

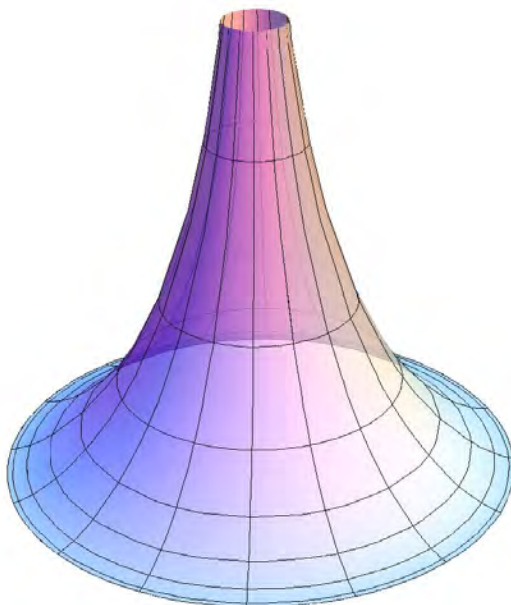


FIGURA 5.

Las líneas geodésicas sobre tal superficie corresponden, de acuerdo al mapa ideado por Beltrami, a las rectas hiperbólicas. Esta superficie tiene curvatura constante negativa (se puede tomar  $-1$  como curvatura). Las líneas geodésicas se ilustran en la figura. Previamente consideramos la fórmula para calcular el área de un triángulo:

$$\text{área} = k(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)).$$

Pues bien, la constante  $k$  es igual a  $1/c^2$  donde  $c$  es la curvatura constante negativa de la pseudo-esfera.

Cualquier otra superficie de curvatura constante negativa sirve como modelo *local* de la geometría hiperbólica. Por ejemplo, véase la figura 6: allí se pueden apreciar un triángulo hiperbólico cuya suma de ángulos es inferior a  $180^\circ$  y dos rectas que tienen una perpendicular



común y por lo tanto son divergentes. No vamos a entrar en detalles pues un estudio detallado de estos modelos demanda un conocimiento de la geometría diferencial. En particular del concepto de curvatura y de geodésicas. Sin embargo, las figuras anteriores permiten mostrar por qué son aceptables como papel hiperbólico, es decir, como modelos de la geometría hiperbólica. Lo que es de interés en este momento es señalar que estos modelos ayudaron a percibir que dentro del sistema hiperbólico no se escondía ninguna contradicción, ningún absurdo, sino una descripción o representación local de la geometría de superficies de curvatura negativa constante.

Beltrami era consciente de una fuerte limitación de estos modelos. Si observamos la pseudo-esfera apreciaremos que la circunferencia que es frontera de la superficie es una especie de *barrera* para las líneas rectas hiperbólicas. Por eso el modelo es local. La superficie se llama *completa* cuando las geodésicas sobre ella no encuentran barreras en su camino. ¿Habrá una superficie de curvatura negativa constante que sea completa? La pregunta fue respondida por Hilbert en 1901: no existe una superficie completa, de curvatura constante negativa contenida en el espacio de tres dimensiones. Esto significaba que nos podíamos asomar al universo hiperbólico, pero solo localmente. Como si en lugar de apreciarlo por una amplia ventana, solamente lo pudiésemos ver a través del ojo de una cerradura. Pero aquello era suficiente para dar contenido concreto al sistema hiperbólico. J. Bolyai y Lobachevsky habían desarrollado considerablemente la estructura formal de la geometría no-euclidiana siempre con la fuerte convicción de que estaba libre de contradicciones ya que el sistema euclidiano *no contenía la verdad completa sobre el espacio físico* y por lo tanto no podría erigirse como un obstáculo para la existencia de la geometría hiperbólica como una descripción posible del espacio físico. A pesar de su profunda convicción, nunca pudieron suministrar una demostración de la coherencia del nuevo sistema. En esencia, eso fue lo que hizo Beltrami al mostrar que el sistema formal vivía una vida auténtica sobre la pseudo-esfera. Es como si el sistema hiperbólico quedase incrustado fiel pero localmente, en la superficie de la pseudo-esfera. Con el modelo de Beltrami, el ojo humano recobró su papel de intérprete: una estructura formal alejada de la intuición euclidiana, alcanzó una representación que *se podía ver* a simple vista... la percepción y la abstracción formal eran las dos caras de la misma moneda.

La existencia simultánea de dos sistemas geométricos formales, el euclidiano y el hiperbólico, dejó ver con claridad meridiana que ninguno de ellos podía atesorar la realidad del espacio físico por completo. Dichos sistemas solamente tienen la capacidad de modelar la realidad física, de representarla simbólicamente – análogamente a la forma en que una novela puede representar un drama humano sin serlo. La realidad de la novela es otra – la realidad matemática es otra distinta a la realidad material. A partir de ese momento, del momento del reconocimiento del sistema hiperbólico como un sistema matemático genuino, las matemáticas dejan de ser entendidas como un espejo sobre el cual se ve la realidad tal cual es. El espejo queda roto. Allí reside el significado de la famosa cita de Einstein cuando escribió que:

En la medida en que las teorías matemáticas se refieran a la realidad, no son ciertas; en la medida que sean ciertas, no se refieren a la realidad.

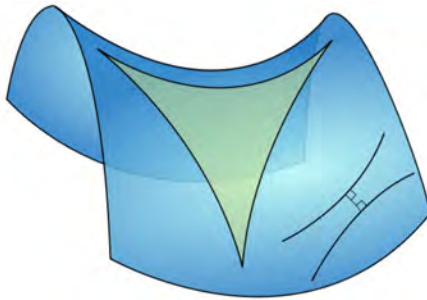


FIGURA 6.

Las matemáticas nos proveen de los mapas del territorio, pero no son el territorio.

Muchos años después, en 1941, en la brillante introducción al libro *¿Qué son las Matemáticas?*, R. Courant escribió unas líneas que se avienen a la intencionalidad del presente texto:

A través de los tiempos los matemáticos consideraron sus objetos—números, puntos etc.—como cosas sustanciales en sí. Pero en vista de que aquellos desafiaban una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron a la convicción de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas sustanciales no tenía sentido dentro de la matemática. Las únicas proposiciones relativas a ellos que importan son las que expresan las relaciones mutuas entre objetos indefinidos: su estructura y relaciones... la percepción de la necesidad de la de-sustanciación de los objetos matemáticos ha sido uno de los resultados más fecundos del desarrollo axiomático moderno.

Pero esa de-sustanciación puede generar nuevas tensiones entre la intuición y lo formal. Afortunadamente la imaginación permite recuperar por nuevos caminos, los vínculos entre las estructuras formales y el desarrollo del significado. Se nos ha explicado que las matemáticas consisten en una serie de grandes intuiciones cuidadosamente refinadas y organizadas con una lógica que nos es consustancial. Cuanto más refinemos nuestros conceptos, más profunda será nuestra intuición.

En otros términos: ¿existen las matemáticas con independencia del hombre, como las montañas y las piedras o son por completo una creación humana? De otro modo: ¿estamos desenterrando diamantes o fabricando una piedra sintética? Las matemáticas no son una sustancia eterna que proviene de un mundo independiente de los seres humanos — como hubiese querido Platón — sino resultado de la acción humana que busca permanentemente significado y coherencia.

#### REFERENCIAS

- [1] Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean geometry*. New York: Dover Publications.
- [2] Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. N. York: Springer-Verlag.
- [3] Breitenberger, E. (1984). Gauss's geodesy and the axiom of parallels. *Archive for the History of Exact Sciences*, 31, 273-289
- [4] Courant, R., Robbins H. (2002). *¿Qué son las Matemáticas?* México: Fondo de Cultura Económica.
- [5] Efimov, N. V. (1980). *Higher geometry*. Moscow: Mir Publishers.
- [6] Euclid. (1956). *The thirteen books of Euclid's elements* (T. L. Heath, Trans. Vol. 2). New York: Dover Publications.
- [7] Gray, J. (2007). *Worlds out of nothing*. London: Springer-Verlag.
- [8] Greenberg, M. (1974). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. S. Francisco: Freeman and Company.
- [9] Kline, M. (1985). *Mathematics and the Search for Knowledge*. N. York: Oxford U. Press.
- [10] Moreno-Armella, L., Hegedus, S., Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 99-111.

*Dirección del autor:*

Luis Moreno Armella

CINVESTAV, IPN

Departamento de Matemática Educativa.

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508,

Col. San Pedro Zacatenco 07360, México, D.F.

e-mail: lmorenoarmella@gmail.com



## MI HERMANO JUANJO

AMELIA RIVAUD MORAYTA

Juanjo fue el mayor de tres hermanos, nació el 18 de junio de 1943 en un hospital en Paseo de la Reforma. Supongo que Juan es en recuerdo del abuelo paterno, sugerido por la abuela María y completado por mi madre con José. La familia formaba parte los de miles de refugiados que acogió Lázaro Cárdenas a raíz de la pérdida de la guerra civil española a fines de 1939. Mis padres, nuestros padres, se conocieron en México. Papá había sido de los pocos militares que se mantuvieron fieles a la República y era ingeniero. Mi madre salió de España a los 17 años, dejando truncada su carrera de Comercio y se dedicó a la casa, como se acostumbraba en aquella época.

Uno de los límites de la ciudad era el Río de la Piedad, que ahora es el viaducto y ellos vivían en lo que entonces se llamaba Paseos de Bucareli, en el mismo edificio que los abuelos maternos, centro de reunión de esa primera hornada de primos, entre quienes él era de los más pequeños. Todos iban al Colegio Madrid, una de las instituciones creadas por los refugiados españoles para educar a sus hijos. Allí, Juanjo fue un buen estudiante, pero sobre todo se distinguió por ser un excelente atleta: entre los 14 a 18 años, corría los 400, 800, que era su especialidad y los 1,500 metros, según me cuenta su amigo Roberto Carmona. Era miembro del Club Venados y entrenaba en el Plan Sexenal, allá por la Calzada México-Tacuba y en Chapultepec. Como atleta ganó decenas de medallas, representando al Colegio Madrid e incluso llegó a participar en competencias internacionales. Cuando entró a la Facultad de Ciencias tuvo que escoger entre la carrera y la carrera: se quedó con las matemáticas.

También incursionó en la fotografía. Mi hermano Emilio recuerda que Juanjo se compró una Leica viejita apoyado por mi padre e ingresó al Club fotográfico de México, fundado por aquellos años. Allí tomó un curso de fotografía, seguramente animado por Ángel Paz Martínez, artillero y excelente fotógrafo; incluso tenía un laboratorio en su casa. Berta, viuda de Ángel, me contó que conocieron a Juanjo y a Emilio en 1950 y muchas veces se los llevaban de excursión. Hay fotos de Juanjo, Berta y Emilio sentados en el monolito de Tláloc, lluvia y trueno, cuando todavía estaba en Texcoco; e iban a las laderas nevadas del Popocatepetl cuando Ángel anunciaba: "Bolas, vamos a la nieve". Estos recorridos pueden haber infundido ese gusto por los viajes, la naturaleza y las artesanías de mis hermanos, que más tarde me llegó a mí.

Juanjo también se las ingeniaba para leer. Recuerdo que leía acostado, recargado en un codo y con el libro en la cama, postura que para mí, en aquel momento, era indescifrable. Leyó a Julio Verne y a Emilio Salgari con fruición y me contaba que iba a una feria del libro que ponían en La Ciudadela, y se compraba lo que le gustaba. Recuerdo que empezó a comprar libros de arte, como regalo para la familia. Así conocí la obra de Picasso y de Salvador Dalí, con sus relojes derretidos. Gracias a él llegaron García Márquez y Cortázar a nuestra familia. ¡Cómo disfrutamos *Cien años de soledad*! Juanjo no prestaba libros: ya de mayor, lo que hacía cuando le gustaba un libro era comprar varios ejemplares y regalárselos a sus amigos, para tenerlos cautivos como interlocutores.

En 2000, Juanjo expresa: "Mi padre, José Rivaud, quien a pesar de que su formación como artillero e ingeniero militar iba en otra dirección, tenía un genuino interés y gusto por la ciencia y la historia, disciplinas de las que era un lector insaciable. Él fue quien me inculcó el interés por estos temas y me heredó no sólo parte de sus libros, sino el vicio de comprarlos. También a él le debo la intolerancia ante la injusticia y la simulación, así como un profundo gusto, que raya en la gula, por la buena comida, sobre todo si se acompaña de una buena charla y se comparte con amigos."<sup>1</sup>

Fiel a la tradición familiar y viviendo plenamente el momento que le tocó, Juanjo participó en acciones de defensa antiimperialista de la Revolución Cubana. Raúl Álvarez Garín, matemático también, recuerda cuando fueron a sabotear una reunión de cubanos anticastristas allá por el año 1961, cuando Castro declaró que Cuba era socialista y los médicos empezaron a abandonar la isla. Juanjo fue el único que logró ingresar al lugar donde se reunían en el local de la CTM en Vallarta, pues pedían identificación para entrar: entonces corrió por la suya hasta Bucareli. Ya dentro, alguien gritó ¡Viva Fidel Castro!, Juanjo lo interpretó como una señal y soltó el amoniacó. Los contrarrevolucionarios se le fueron encima a golpes, pero él se agarró de la panza de uno de ellos y sólo recibió golpes en la espalda. Después, lo detuvo la policía. Mis padres no sabían dónde estaba. Al día siguiente salió su foto en el periódico, pero solamente se le veían los agujeros de la nariz, pues levantó la cabeza y además dio otro nombre. Entonces, Raúl fue a comunicar a la familia dónde estaba Juanjo y no sé cómo, pero lo soltaron.

Ingresó a la UNAM en 1961, a la carrera de Matemáticas, en la Facultad de Ciencias. Yo no sé si en esa decisión tuvo que ver una carta que mi padre le escribió cuando Juanjo tenía 10 años, en julio de 1953: “Sigue estudiando mucho, sobre todo las matemáticas pues si quieres ser ingeniero el día de mañana, es lo que más falta te hará y para cualquier otra cosa que vayas a hacer, te serán siempre de mucha utilidad”. Buscando, me enteré de cómo comenzó a interesarse por las matemáticas cuando cursaba la primaria: “Al principio empecé a tener dificultades y se lo comenté a mi padre quien, lleno de paciencia, me instó a ver que en matemáticas lo importante es entender y que entender quiere decir hacer tuyas las ideas.”<sup>2</sup>

Esta reflexión la encuentro reflejada años más tarde en un libro de divulgación escrito por Ricardo Berlanga, Carlos Bosch y Juanjo: “Sería falso decir que las matemáticas son fáciles; precisamente porque no lo son es por lo que nos interesan y pueden llegar a apasionarnos. Esto mismo sucede con otras disciplinas y actividades. Las matemáticas no son triviales y a unas personas se les dificultan más que a otras, pero lo cierto es que prácticamente todo el mundo puede comprenderlas y disfrutarlas. Sin embargo, para esto hace falta que nos demos cuenta de que lo principal en las matemáticas es entender que no es imposible plantear o resolver un problema cuando no entendemos de qué se trata; cuando nos hemos dado cuenta de esto, entender se puede volver un vicio pues entender es una de las cosas que nos produce más placer, y esto sucede precisamente porque no es fácil y requiere esfuerzo de nuestra parte”.<sup>3</sup>

Muy pronto, puede ser hacia octubre de 1962, pues de esa fecha es su registro en Hacienda, empezó a dar clases en la Normal Superior. Allí, Valentina, la profesora que le enseñó a leer en primaria, se formó como maestra de matemáticas, en un juego paradójico de la vida. Él siempre pensó que los maestros eran sus colegas y que deberían de formarse en la Universidad que da una experiencia más amplia, y no en las Normales. En junio de 1965 ya estaba trabajando en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.

Años más tarde, en los setenta, ya en el Departamento de Matemáticas del Cinvestav, formó parte del equipo que reformuló los libros de texto y la enseñanza de las matemáticas a partir de la teoría de conjuntos. Trabajó intensamente con Manuela Garín, Carlos Ímaz y Eugenio Filloy, entre los que recuerdo. La siguiente tarea sería enseñar a los propios maestros esta teoría.

Además de la investigación matemática, a Juanjo le interesaba la divulgación de la ciencia, como ya se mencionó antes. A ello se dedicó muchos años, dando conferencias por varios estados del país. Estaba convencido de que era más fácil hacer que los científicos escribieran para la gente que los periodistas aprendieran ciencias. En 1999 fue Premio Nacional de Divulgación Científica otorgado por la Sociedad Mexicana de Divulgación de la Ciencia. Me

<sup>1</sup>Discurso pronunciado durante la entrega del Premio Nacional de Divulgación de la Ciencia y la Técnica “Alejandra Jaidar” 2009. Tomado de <http://homepages.mty.itesm.mx/euresti/personal/juanjo.htm>

<sup>2</sup>[www.mat.uson.mx/concurso/biografia.pdf](http://www.mat.uson.mx/concurso/biografia.pdf) [consultado 2 de junio de 2012].

<sup>3</sup>R. Berlanga, C. Bosch, Juan José Rivaud, *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, (la ciencia para todos, 163), SEP, FCE, Conacyt, México, 1999, p. 8.

enteré porque vi un recuadro en el periódico matutino con su nombre. El primer susto me hizo terminar de despertar. Después le llamé para felicitarlo: ni se había enterado.

Luis Estrada relata en *El muégano divulgador* que “Juanjo dio muchas conferencias entre las que destacaron las dedicadas a la geometría de la esfera, para lo cual gustaba mucho de platicar acerca de los viajes trasatlánticos, en especial los de la época del descubrimiento de América”.<sup>4</sup>

A comienzos del siglo XXI, empezó a coordinar un boletín mensual, *Matemáticas para todos*, dirigido a los profesores de todo el país. En él, se incluían problemas para que los maestros pudieran plantearse a los chicos cuya respuesta se daba en el siguiente número. Incluía reseñas de libros y de películas, breves notas de la historia de las matemáticas, entre otras cosas. Esta labor la desarrolló durante seis años. El boletín era editado por el Fondo Mexicano para la Educación y el Desarrollo, A.C. En este proyecto pude colaborar esporádicamente con él en la corrección editorial, labor que me doy cuenta que empezó para mí, cuando corregí algunas erratas en los ejemplares de su tesis de licenciatura, dedicada, simple y llanamente por él: *A mis padres*.

Volvamos atrás a otra de sus pasiones: A mediados de los años sesenta empezó a recorrer el país con Enrique Ramírez de Arellano, Lalo Llerenas y Carlos Perelló para grabar con una Uher los testimonios sonoros de nuestros pueblos. De paso, compraba artesanías, sobre todo textiles y máscaras, amén de los baúles de Olinalá. De esta manera, Juanjo introdujo en la familia un México para mí desconocido. Valoraba los buenos tejidos y sabía regatear en los mercados. A mí me causaba cierta ansiedad, pues pensaba que me quedaría sin el suéter de Chiconcuac que, frente a mí, se estaba jugando. Ahora me doy cuenta que el regateo forma parte de la cultura tradicional y así se veía en ese momento.

Por esa época, empezaron las tradicionales comidas de los sábados hechas por Carlos Ímaz Jahnke, uno de sus eternos amigos, y Juanjo. Se iban al mercado de San Juan y compraban grandes cantidades, para que las dos familias disfrutáramos de sus paellas o de un cocido madrileño dirigido por mi madre. En general, se hacían en el departamento de Bucareli, que era más grande. La casa se llenaba de niños pequeños, de música, de olores de cocina, de discusiones sobre lo que fuera, pero con un acento especial en la realidad que se vivía en el país.

Juanjo era malo para algunas cosas: no se le daba el baile, ni hablar inglés, ni perder. Me acuerdo una vez que jugábamos a la canasta nuestra amiga Mariana Olguín Segovia y yo contra los “matemáticos”. Nos iban ganando, ellos felices y, en la última mano, Mariana se llevó un pozo enorme que definió nuestro triunfo. Como él decía: tenemos muy buen ganar.

También le gustaba el ajedrez: en casa de mis padres había una mesa muy bonita con el tablero incluido. Fue un juego que se desarrolló entre los varones de la familia. Más tarde, incursionó en el Go, un juego de origen chino llevado a la Facultad de Ciencias por Pepe Barberán. En la cafetería se veían varios tableros y a la gente observando el juego. Después, cuando se fue a Chicago a hacer el Doctorado en Northwestern University, su nombre cambió a Juan-go, juego estratégico que compartió con sus hijos y con otros matemáticos, que incluso los llevó a representar a México en los torneos internacionales que se realizan en Japón.

Juanjo fue mi hermano mayor, me llevaba a veces 9 años o a veces 10, según la época del año. Mi madre contaba que él decía: “Cuqui, eres la niña más bonita que he conocido”. Yo creo que de pequeña compartí con él el gusto por los deliciosos chamois, que vendían los “chinos” (en realidad japoneses) en la dulcería de Bucareli. Me doy cuenta que me traía para arriba y para abajo y yo me sentía protegida por él. De mayores, recordábamos las anécdotas sobre familia y amigos que de alguna manera me incorporaron a su círculo, ya fueran matemáticos como Carlos Ímaz o sociólogos, como Manuel Gil Antón. Recuerdo nuestras conversaciones sobre la UAM, donde hizo algunas estancias de sabático, mientras arreglábamos las orquídeas, fotografiábamos los cactus o repartíamos el abono de chivo en

<sup>4</sup> [http://www.dgdc.unam.mx/muegano\\_divulgador/no\\_29/experiencias.pdf](http://www.dgdc.unam.mx/muegano_divulgador/no_29/experiencias.pdf)

el pasto de su casa de campo. Siempre me presentaban como “la hermana de Juanjo” y él aclaraba que yo era “la mayor”.

Fue miembro del Seminario de Cultura Mexicana, fundado en 1942, que reúne a personas de varias áreas de la cultura para analizar y promover en todo el país la cultura mexicana.

Juanjo murió el 9 de agosto de 2005 en Barcelona. En la sede del Seminario se colocó una placa con su rostro realzado el 19 de julio de 2006, junto a los medallones de Frida Khalo, Julián Carrillo y Mariano Azuela. Creo que esta última membresía tiene la virtud de considerar las matemáticas como parte de la cultura para dar un lugar especial a su muerte y al homenaje que el Seminario le hace al poner su rostro entre otras personas ya muertas y, como él, notables. Además, define a Juanjo de pies a cabeza: era un hombre culto, forjado con lo mejor de la tradición española y en un intenso deseo por compartir el conocimiento de su país: México.

*Dirección del autor:*

Amelia Rivaud Morayta

UAM-Xochimilco

Síntesis Creativa

Calzada del Hueso 1100,

Col. Villa Quietud, Delegación Coyoacán, C. P. 04960 Mxico, D. F.

e-mail: qkrivaud@gmail.com



Fotografía tomada por: Amelia Rivaud Morayta



## HIPERBÓLICO Y LOS MUNDOS

GERARDO HERNÁNDEZ

Juanjo, quien en documentos oficiales aparecía como Juan José Rivaud Morayta, tenía un rostro amable, pero la ocasional brusquedad de gestos y movimientos, en un cuerpo de esos que aparentan ser más grandes de lo que en realidad son, acababa por inhibir a los extraños. Juanjo era de sonrisa fácil, de risa contagiosa, inusualmente cálido. Todos saben que amaba comer y beber, y que sus producciones culinarias eran deliciosas, pero yo creo que lo que más gozaba era compartir la comida, en un ambiente de confianza, jolgorio y conversación viva. Compartía también su casa, las fotos de sus cactus, su música, sus libros, las historias familiares y laborales de los colegas de la comunidad matemática que quién sabe cómo obtenía y que nunca olvidaba, y su tiempo, sobre todo su tiempo. Por eso su matemática era una matemática social. Aquella que se platica y que es imposible abordar sin una sonrisa, resultados y métodos transmutados en anécdotas. Como la fuente natural de tales joyas se encuentra en la historia, se zambulló en la historia de la matemática a la manera de los gambusinos, perdida la atención en lo minúsculo que esconde la arena, ávidamente absorbo en lo pequeño, extrañamente ajeno al panorama abierto. Gambusino excéntrico, Juanjo buscaba el oro para compartirlo. Pepita que encontraba le quemaba las manos y no descansaba hasta haber comunicado sus hallazgos. Sin alquimia que mediara, la matemática era oro para Juanjo. Era absolutamente básica para estructurar el pensamiento y depurarlo. Por eso puso tanta atención en su enseñanza, y por eso su compromiso en acercarse a los maestros que la enseñan. Viajó por el país dando cursillos, escribió artículos y libros de divulgación, y trató de comprender la matemática de objetos olvidados, como mapas y embarcaciones premodernas, y todo fue marino por un tiempo, y todo fue marino para siempre, pues sus cenizas se perdieron en el mar.

Y Juanjo descubrió un mundo. Juanjo siempre descubría cosas. Alguna lectura a la que apenas se asomaba, alguna plática, un dibujo, eran objetos de descubrimiento, es decir, objetos para ser vistos e interpretados de forma fresca, nueva para todos o nueva para él, era lo mismo, era nueva y eso era importante. De modo que la sucesión Snell-Fermat-Bernoulli fue irresistible: geodésicas hiperbólicas explicadas por la ley de Snell. Por un tiempo ese argumento fue solamente una joya más de esas que Juanjo encontraba y comentaba hasta la saciedad. Una de esas repeticiones tuvo una presentación diferente: un habitante del plano hiperbólico la daba como solución a un problema. Ese pequeño habitante pronto tuvo nombre: se llamaba Hiperbólico y era matemático. Como buen matemático no se conformó con un resultado aislado, había que encontrar respuesta a más problemas, y el mundo de Hiperbólico empezó a llenarse con geometría propia. Como hiperbólico era el nombre de una geometría, Juanjo pensó en llamar a su habitante de otro modo, se llamaría Hiperbolico, así, sin acento. Lo ensayó muchas veces, pero como la mayoría de sus colegas no entendía bien ese nombre (“¿hiper-borríco?”) y mentalmente acentuaba la palabra, Juanjo fue renunciando a ese apelativo y acabó llamándose como debía. Lo importante era que ya existía un mundo donde refugiar las ideas. El mundo de Hiperbólico se convirtió en proyecto.

Obsesivo, Juanjo se metió en ese mundo de lleno. Días enteros, cuando le llegaba la fiebre, no hablaba de otra cosa. Luego descansaba, atendía otras cosas, pero había nostalgia por ese mundo. Al final, hay que decirlo, lo tenía más bien agotado y harto, pero mucho tiempo fue su solaz y su refugio. Su idea era permitir que Hiperbólico describiera con voz propia ese mundo, el suyo. Por supuesto que la empresa era difícil, pues los conceptos hiperbólicos se contaminaban demasiado de la visión euclidiana. Era inevitable, pero ¿cómo justificarlo? Claramente, si Hiperbólico quería comunicarse con nosotros tendría que usar parte de nuestro

lenguaje, de modo que se entendía que usara nuestros términos. Llegamos a pensar que Hiperbólico había tomado cursos de geometría euclidiana, pero la complicación novelesca no iba muy bien con la mentalidad de Juanjo. Luego vino un obstáculo mayor. Claramente nosotros estudiamos las distintas geometrías con herramientas euclidianas, aproximaciones planas y esas cosas. Entonces Hiperbólico tendría que usar aproximaciones hiperbólicas para la geometría euclidiana, algo que creo no logró cobrar forma a pesar de algunos intentos, quizás porque no estaba tan convencido de que eso era necesario. De modo que Hiperbólico fue perdiendo la voz y fue quedando la del traductor: Juanjo. También fue desapareciendo la cotidianidad del mundo de Hiperbólico y fue quedando solamente la geometría. Y la geometría tiene otras exigencias, de manera que una cierta necesidad de complementariedad fue disolviendo la idea de Hiperbólico y sus inquietudes explicativas. Fue en ese momento cuando Juanjo empezó a trabajar más para concluir la tarea que para recluirse en ese mundo que creó exclusivamente para disfrutarlo

Juanjo vivía para entender las cosas. En algún momento decidió que lo explorado guarda joyas y rincones que vale la pena buscar y contemplar, y dejó lo inexplorado a los demás. La frontera del conocimiento estaba en todas partes, no solamente ahí donde se suele excavar para publicar en *Journals* respetables. Producir en el otro un gesto de admiración, de placer, de perplejidad, una sonrisa, a través de un argumento delicado, se convirtió en su objetivo. Con ideas sutiles, a veces mal expuestas o torpemente expresadas, dificultad muy suya que a veces sin duda lo exasperaba, Juanjo, a la manera de Diógenes con su lámpara (y su cinismo), iluminaba rincones bellos y sutiles. Por eso el mundo de Hiperbólico no es un mundo, sino un collage de imágenes, resultados, cálculos, que sugieren la posibilidad de otras galaxias, tan ignotas como aquella donde seguramente ahora Juanjo habita.

*Dirección del autor:*

Gerardo Hernández

CINVESTAV, IPN

Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia

Av. Instituto Politécnico Nacional 2508,

Col. San Pedro Zacatenco 07360, México, D.F.

e-mail: ghernand@cinvestav.mx





## EL MUNDO DE HIPERBÓLICO UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

JUAN JOSÉ RIVAUD MORAYTA

### ÍNDICE

Presentación	32
1. Introducción	33
2. Las rectas de Hiperbólico	34
3. La longitud de una curva en el mundo de Hiperbólico	37
4. Ángulos en el plano de Hiperbólico	40
5. El mundo de Hiperbólico y las áreas	42
6. Las transformaciones rígidas en el mundo de Hiperbólico	43
7. Teorema del cambio de variable	48
8. El comportamiento de rectas y circunferencias bajo inversiones euclidianas	48
9. Las transformaciones rígidas en el mundo de Hiperbólico (Continuación)	49
10. El ángulo de paralelismo y la función $\pi$ de Lobachevski	50
11. El área de un triángulo de Hiperbólico	51
12. Las circunferencias de Hiperbólico y haces de circunferencias	53
13. Cómo ve Hiperbólico las rectas y las circunferencias euclidianas	55
14. Longitud y Área de las circunferencias en el plano de Hiperbólico	58
15. Área del círculo hiperbólico	60
16. Recubrimiento del Plano de Hiperbólico por polígonos regulares	60
17. El mundo de Hiperbólico tridimensional	64
18. Hiperbólico y las horoesferas	68
19. Un poco de la geometría de la esfera de Hiperbólico: recubrimientos y poliedros regulares	68
20. Para terminar	74
21. Apéndice	74
21.1. Cálculo de la h-longitud de la circunferencia	74
21.2. Cálculo h-área de la circunferencia	75

## PRESENTACIÓN

En 1999, la Sociedad Matemática Mexicana me invitó a dar, en su congreso nacional, una conferencia plenaria sobre geometría no euclidiana, cuyo borrador es el origen del presente trabajo. Posteriormente dicho escrito aumentó su tamaño considerablemente (todavía no sé si para bien o para mal) producto de impartir diversos cursillos sobre el mismo asunto; el último, en el 2001, en la Semana de las Matemáticas, que organiza el Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa.

Pretendemos que el lector tenga la sensación de que la situación geométrica con la que está lidiando es “real”, que lo que se cuenta es algo que está pasando, o pasó, en este mundo, o en uno muy parecido. Por supuesto sin que deje de ser matemáticas, más precisamente geometría.

En nuestro tratamiento no nos limitamos al uso de herramientas geométricas, o de cualquier otra índole, sino que, en cada momento, echamos mano de lo que nos permite seguir el camino más simple y directo; aunque hay que admitir un sesgo hacia la utilización del cálculo diferencial e integral, que, junto con algunos resultados geométricos muy simples, constituyen los únicos prerrequisitos. (Una buena referencia para los resultados de cálculo que se usan son los dos volúmenes de la obra *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático* de R. Courant y F. John, Limusa, 1971, pero también aparecen en cualquier otro texto sobre la materia.)

Los temas tratados fueron elegidos para que el lector que quiere asomarse al asunto, sepa de qué se trata y obtenga, en pocas páginas, una visión de conjunto suficientemente amplia. Siguiendo, por supuesto, los gustos personales del que escribe.

A través de diversas lecturas ocasionales, que empezaron hace mucho tiempo, y que, aunque parezca contradictorio, fueron cuidadosas, pero profundamente desordenadas, fui haciendo mío el material y elaborando mi propio acercamiento al tema, para al final darme cuenta que este punto de vista es compartido con muchos más. Espero que estas páginas hagan que este círculo crezca.

Por último, expreso mi agradecimiento a los colegas y amigos Gerardo Hernández, Laura Hidalgo, Carlos Ímaz, Ana Irene Ramírez y Sonia Ursini quienes, en distintas etapas de la elaboración del trabajo lo leyeron, señalaron errores e hicieron sugerencias y comentarios.

Las lecturas arriba mencionadas corresponden a:

EFIMOV, N.V., *Higher Geometry*. Mir Publishers Moscow.

EFIMOV, N.V., *Geometría Superior*. Editorial Mir, Moscú.

MESCHKOWSKI, H., *Non euclidean Geometry*. Academic Press, New York and London, 1964.

SMOGORZHEVSKI, A.S., *Acerca de la Geometría de Lobachevski*, Editorial MIR, Moscú, 1978.

THURSTON, W., *Three Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton Mathematical Series 35, 1997.

STILLWELL, J., *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, 1992.

1. INTRODUCCIÓN

Pensemos que el plano cartesiano es atravesado, a lo largo del eje  $x$ , por un ducto cuya temperatura es el cero absoluto y que, producto de esta peculiar situación, los seres y objetos que pueblan el semiplano superior ( $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ ) se contraen o dilatan, según cambia su posición, en razón directa a su distancia al eje  $x$ . Así pues, una bicicleta situada a una distancia 1 del eje  $x$ , cuando cambia su posición a una distancia  $y_0$ , nosotros la vemos, desde fuera del semiplano, como una reproducción a escala  $y_0$  de sí misma, sucediendo lo mismo con cualquier otro objeto o con el hombrecillo que la maneja (véase figura 1)

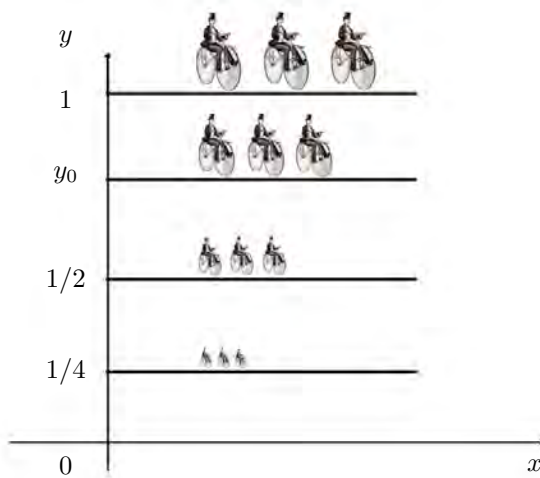


FIGURA 1.

mientras que el hombrecillo, acostumbrado a los cambios de temperatura, no percibe ninguna diferencia. Tampoco deja de sorprendernos verlo trasladarse apuradamente en su bicicleta de un punto a otro a lo largo de una trayectoria que, para nuestros ojos, se aleja bastante de lo que es una recta; sin embargo él jura y vuelve a jurar que se movió en línea recta (véase figura 2).

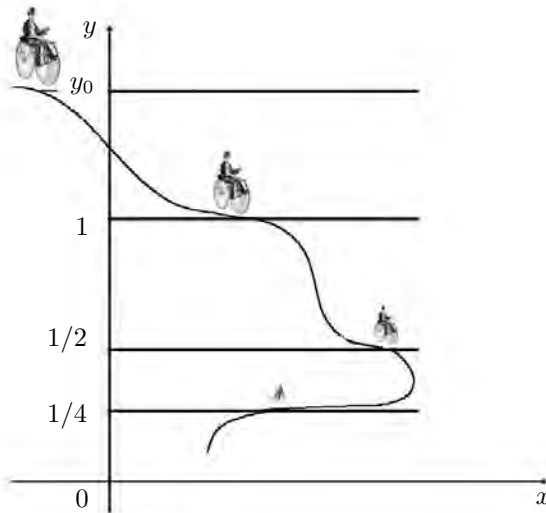


FIGURA 2.

Antes de seguir adelante, permítanme decirles algo acerca de nuestro hombrecillo. Él acostumbra pasar muchas horas enfrente de su mesa llenando hoja tras hoja de números y dibujos y sólo sale en su bicicleta para comprar más papel y lápices. Ello le ha creado fama de flojo entre sus vecinos. Su nombre o apodo es Hiperbólico.

Entender cómo se mueve Hiperbólico y las razones de ello, es decir, la geometría de su mundo, es el propósito de este trabajo. Con más precisión, los seres que habitan el semiplano superior, con estas peculiares condiciones, en forma similar a nosotros, perciben rectas, triángulos, polígonos y toda clase de entes geométricos, pero estos objetos geométricos se comportan en forma muy distinta a como nos tiene acostumbrados la geometría euclidiana; nuestro problema es comprenderlo.

Para ello contamos con nuestro conocimiento de la geometría euclidiana, que aplicamos a los fenómenos de ese mundo tal como los ven nuestros ojos, y con el hecho de que en el mundo de Hiperbólico el tamaño de las cosas varía proporcionalmente a la distancia al eje  $x$ .

## 2. LAS RECTAS DE HIPERBÓLICO

Pensemos en Hiperbólico montado en su bicicleta y pedaleando a ritmo constante, es decir, siempre el mismo número de pedalazos por unidad de tiempo. También imaginemos que pedaleando a este ritmo y manteniéndose a distancia uno del eje  $x$ , en una unidad de tiempo, recorre una longitud que tanto él como nosotros estamos de acuerdo en tomar como unitaria. En este caso, para Hiperbólico y para nosotros la velocidad a la que se mueve la bicicleta también será unitaria, y por lo tanto, la distancia recorrida coincidirá con el tiempo transcurrido; lo cual nos permite medir la distancia recorrida con un reloj.

Pero Hiperbólico puede realizar lo anterior para cualquier trayectoria: sólo necesita mantener su ritmo de pedaleo. Así, para Hiperbólico, la longitud de la trayectoria será igual al tiempo utilizado en recorrerla con ese ritmo de pedaleo (véase la figura 2).

Para nosotros, que lo observamos desde fuera, la situación nos parecerá muy distinta y lo veremos moverse más rápidamente a medida que se aleja del eje  $x$  y más despacio cuando se acerca a él. Pero cuando nos fijamos en el ritmo del pedaleo comprendemos su apreciación.

Dicho de otra manera, cuando Hiperbólico se mueve, a una distancia  $y$  del eje  $x$ , con una velocidad que él percibe como unitaria, para nosotros se estará moviendo a una velocidad  $\bar{v}$ , cuya magnitud  $v$  sólo depende de la distancia al eje  $x$  y en ese caso es igual a  $y$  (esto lo denotaremos como  $v(y) = y$ ). A la magnitud de la velocidad se le llama rapidez, pero algunas veces, abusando del lenguaje, también le llamamos velocidad.

La pregunta, nada trivial, que nos interesa contestar en este momento es: Dados dos puntos  $P$  y  $Q$ , en el semiplano superior, ¿qué trayectoria debemos seguir para, moviéndonos con rapidez  $v(y) = y$ , ir de  $P$  a  $Q$  en el menor tiempo posible? (véase figura 3).

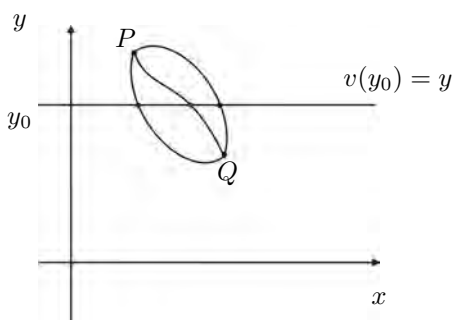


FIGURA 3.

Para Hiperbólico, esta trayectoria será el segmento de la recta de su mundo que une  $P$  y  $Q$  y su longitud estará dada por el tiempo utilizado en recorrerla. Nosotros, en general no veremos un segmento recto, ni el tiempo usado en recorrer la curva coincidirá con su longitud, pero el análisis realizado nos permitirá comprender a nuestro amigo.

El argumento que presentamos a continuación es esencialmente el mismo que dio, en 1696, Johann Bernoulli, para el problema de la Braquistócrona, el cual es una verdadera joya del pensamiento matemático.

Como paso previo recordemos que si tenemos dos medios

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad \text{y} \quad M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$$

en los que podemos desplazarnos con rapidez constante  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente, y  $P_1 \in M_1$  y  $P_2 \in M_2$  son dos puntos dados, entonces la trayectoria para ir de  $P_1$  a  $P_2$  en el menor tiempo posible es la poligonal formada por dos segmentos, que une a  $P_1$  y  $P_2$ , teniendo su vértice en el eje  $x$  y tal que los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , que forman los lados de la poligonal con la vertical en dicho vértice ( véase figura 4), satisfacen la siguiente condición:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_2}$$

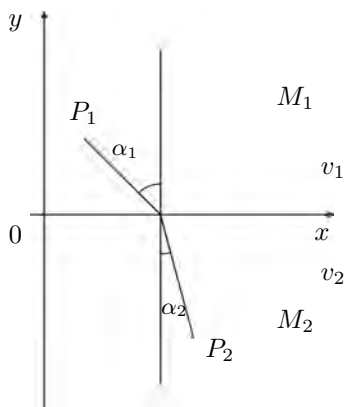


FIGURA 4.

Esta cuestión la planteó y resolvió Fermat para justificar la ley de Snell , tomando como punto de partida el principio que dice que “la luz viaja de un punto a otro en el menor tiempo posible”.

Tradicionalmente éste es uno de los primeros problemas de máximos y mínimos que enfrentamos en un primer curso de cálculo, por lo que omitimos su solución.

De lo que acabamos de analizar se sigue claramente que si, en lugar de dos medios, tenemos  $n$  medios  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ , limitados por rectas paralelas al eje  $x$ , y en ellos nos desplazamos con rapidez constante  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , respectivamente, entonces la trayectoria para ir de  $P \in M_1$  a  $Q \in M_n$ , en el menor tiempo posible, es la poligonal descrita en la figura 5 y que cumple con la condición siguiente sobre sus ángulos de incidencia:

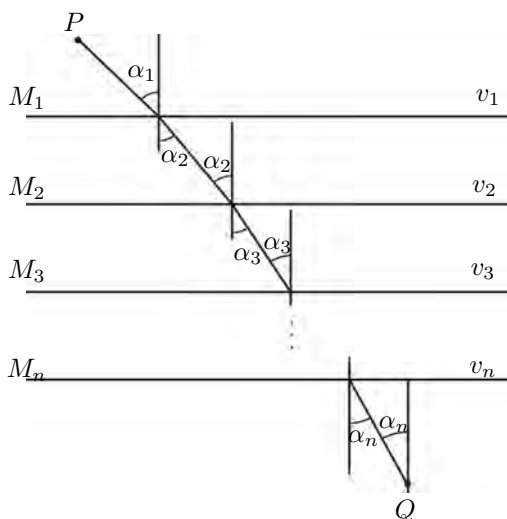


FIGURA 5.

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_2} = \dots = \frac{\text{sen } \alpha_n}{v_n}$$

o, en forma comprimida:

$$\frac{\text{sen } \alpha_i}{v_i} = k, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k \text{ constante}$$

Si ahora pensamos que los medios  $M_i$  tienen un grosor infinitesimal (véase figura 6), la trayectoria deja de ser una curva poligonal, y se transforma en una curva suave, entonces la rapidez es una función de  $y$  que llamamos  $v(y)$  y también lo es el valor de ángulo de incidencia  $\alpha(y)$  que es el que forma la trayectoria con la vertical a la altura  $y$ . O dicho en otra forma,  $\alpha(y)$  es el ángulo que forma la tangente a la trayectoria con la vertical.

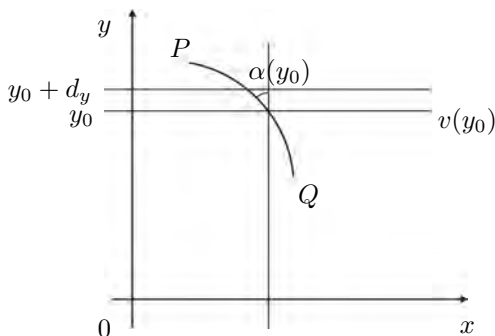


FIGURA 6.

Y la condición correspondiente, para la trayectoria que une  $P$  y  $Q$ , toma la forma

$$\frac{\text{sen } \alpha(y)}{v(y)} = k$$

donde  $k$  es una constante que sólo depende de  $P$  y  $Q$ .

Ésta es la condición general que J. Bernoulli obtuvo con un argumento similar al que acabamos de dar, y que usó para encontrar en forma explícita las trayectorias, en el caso  $v(y) = \sqrt{2gy}$ <sup>1</sup> ( $g$  es la aceleración producida por la gravedad), resolviendo así el problema de la curva de descenso más rápido (Braquistócrona).

Antes de seguir adelante, observemos que el ángulo que forma la normal a la trayectoria con el eje  $x$  es igual a  $\alpha(y)$  (véase figura 7).

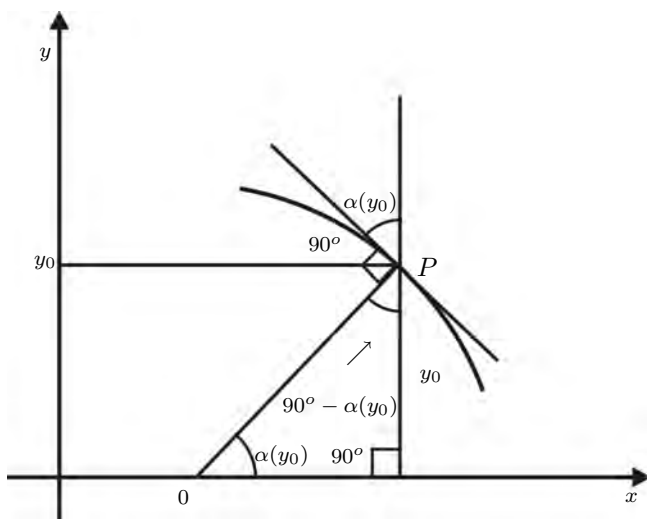


FIGURA 7.

<sup>1</sup>Véase Tippens, P.E. Física, Conceptos y Aplicaciones, Ed. Mc Graw Hill, México, pag.114-116

Partiendo de lo anterior, nuestro caso es directo, pues como el lector recordará  $v(y) = y$  lo cual hace que la condición  $\frac{\text{sen } \alpha(y)}{v(y)} = k$  tome la forma:

$$\text{sen } \alpha(y) = ky,$$

que en el caso  $k \neq 0$ , recordando la definición del seno de un ángulo y sustituyendo, nos da:

$$\text{sen } \alpha(y) = \frac{y}{OP} = ky$$

o sea,

$$k = \frac{1}{OP}.$$

Luego  $0 < \overline{OP} < \infty$  tiene longitud constante a lo largo de la trayectoria. Propiedad que caracteriza a las semicircunferencias con centro en el eje  $x$ .

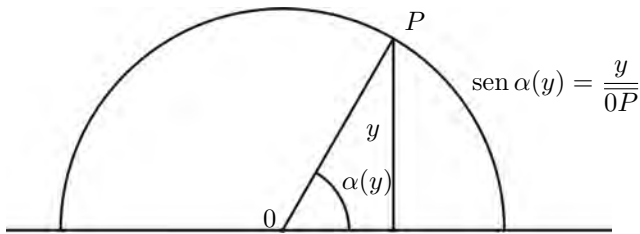


FIGURA 8.

La figura 8 nos muestra que las circunferencias satisfacen que la distancia  $\overline{OP}$  sea constante. Para demostrar que son las únicas trayectorias con esta propiedad falta un pequeño argumento que invitamos al lector a proporcionar.

Si  $k = 0$ , entonces  $\alpha(y) = 0$  y nuestra trayectoria es una semirrecta perpendicular al eje  $x$ .

¡Ya sabemos cuáles son las rectas de Hiperbólico! Desde nuestro punto de vista son semirrectas perpendiculares al eje  $x$  y semicircunferencias con centro en el eje  $x$  (véase figura 9).

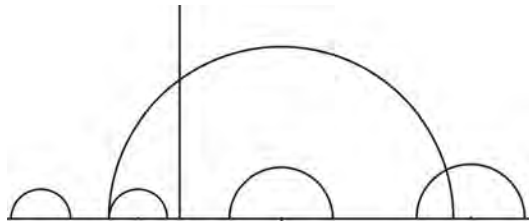


FIGURA 9.

Antes de seguir adelante, permítasenos convenir con el lector que, con objeto de que la presencia de Hiperbólico no nos avasalle, cuando nos refiramos a su mundo, las rectas y circunferencias, o cualquier otro objeto en él, antes pondremos una  $h$ , por ejemplo en lugar de “la recta de Hiperbólico que pasa por  $p$  y  $q$ ” escribiremos “la  $h$ -recta que pasa por  $p$  y  $q$ ”.

### 3. LA LONGITUD DE UNA CURVA EN EL MUNDO DE HIPERBÓLICO

Como es de esperar, las curvas tienen distinta longitud para nosotros y para Hiperbólico, lo cual nos sugiere preguntarnos cómo están relacionadas estas dos longitudes. Para aclarar este punto, empecemos viendo qué sucede en el caso de un segmento *infinitesimal* de curva, que podemos, puesto que es infinitesimal, tomarlo como un segmento infinitesimal de una de nuestras rectas.

Sean  $A$  y  $B$  los extremos de dicho segmento, que denotaremos por  $\overline{AB}$  y llamemos  $dS$  y  $dS_h$  a su longitud euclidiana y h-longitud respectivamente. Si el segmento infinitesimal se encuentra a una altura uno ( $y = 1$ ) entonces  $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  y  $dS_h$  tienen el mismo valor, pues a esta altura nuestro metro y el metro de Hiperbólico miden esencialmente lo mismo. Pero a una altura dada  $y$ , para el hombrecillo su longitud y la de su metro se han alterado, creciendo o disminuyendo, en razón inversamente proporcional a  $y$  (véase figura 10) o sea  $dS = y dS_h$ . De donde  $dS_h = \frac{dS}{y}$ .

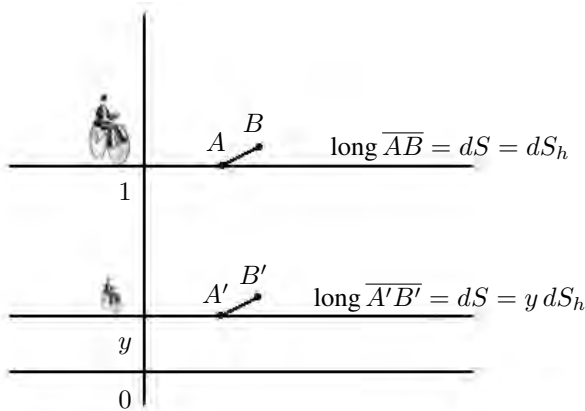


FIGURA 10.

De aquí obtenemos que, para Hiperbólico, la longitud de una curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,  $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ , es:

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{y} \frac{dS}{d\theta} d\theta \quad \text{donde} \quad dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Veamos qué longitud tienen las curvas más simples: los segmentos de *h-rectas*.

Empecemos por considerar el caso en que esta recta es el semieje  $y$  y los extremos del segmento son  $a$  y  $b$  ( $0 < a < b$ ). Para calcular su longitud parametricemos el segmento por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,  $\gamma(y) = (0, y)$ . Su h-longitud está dada por:

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

Notamos que el segmento se puede prolongar indefinidamente tanto en una dirección como en la otra:  $a \rightarrow 0$  o  $b \rightarrow \infty$ . El caso de cualquier otra semirrecta perpendicular al eje  $x$  es exactamente igual, *pudiéndose* ver como una h-recta. Tales rectas tienen longitud  $S_h$  infinita y se pueden prolongar indefinidamente en ambas direcciones.

Pensemos ahora en una circunferencia de radio  $r$  con centro en el origen, que parametrizamos como se indica en la figura 11.

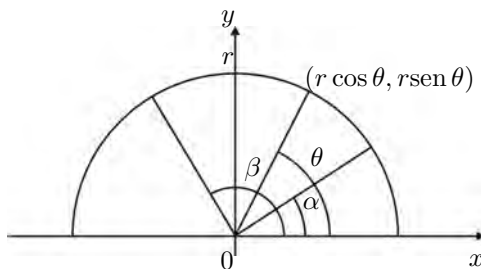


FIGURA 11.



O sea,  $\gamma(\theta)$  es la función

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}_+^2 \\ \theta &\mapsto \gamma(\theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta), \end{aligned}$$

luego

$$S_h \gamma(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y(\theta)} \frac{dS(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{r \sin \theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

Como

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right|,$$

entonces

$$S_h \gamma(\alpha, \beta) = \left| \ln \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right|$$

Notemos que, cuando  $\beta \rightarrow \pi$  o  $\alpha \rightarrow 0$ , la longitud  $S_h \gamma(\alpha, \beta)$  tiende a infinito, es decir, también estas h-rectas tienen longitud infinita, y se pueden prolongar en ambos sentidos.

De lo que acabamos de ver en estos dos últimos incisos acerca de las h-rectas, podemos sacar algunas conclusiones.

- i) Las h-rectas son semirrectas perpendiculares al eje  $x$  o semicircunferencias con centro en el eje  $x$  (véase figura 9).
- ii) Para Hiperbólico las h-rectas tienen longitud infinita y se pueden prolongar indefinidamente en una y otra dirección. Como consecuencia, para él, el eje  $x$  es inalcanzable y, por lo tanto, está fuera de su mundo.
- iii) Dada una h-recta  $L$  y un punto  $P$  exterior a  $L$ , existen una infinidad de h-rectas que pasan por  $P$  y que no cortan a  $L$  (figura 12), son las que pasan por  $P$  y tienen su trazo en la parte gris de la ilustración. A todas estas h-rectas las llamamos paralelas a  $L$  y las dos h-rectas que limitan la parte blanca, reciben el nombre de hiperparalelas a  $L$ .

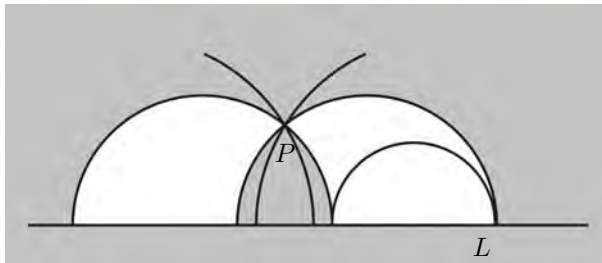


FIGURA 12.

- iv) Al igual que en el caso euclidiano las h-rectas dividen el plano en dos partes, cada una de ellas llamada *lado de la recta* (figura 13).
- v) Existe una colección infinita de h-rectas  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n, \dots$ , dos a dos paralelas y situadas de tal forma que no importa cual sea la h-recta que se elija, todas las demás están del mismo lado de ella (figura 14). Situación muy distinta a la euclidiana; el lector puede imaginar otras situaciones que también difieran drásticamente de la euclidiana.

Sin duda, el lector tiene varias observaciones más del mismo estilo. Nosotros preferimos seguir adelante discutiendo la idea de ángulo y área que tiene nuestro buen amigo.

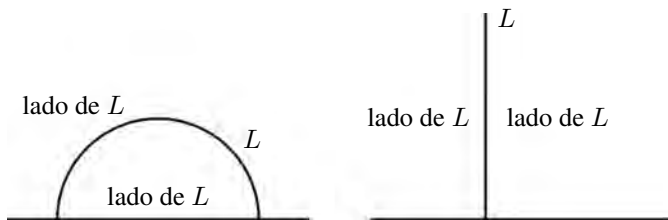


FIGURA 13.

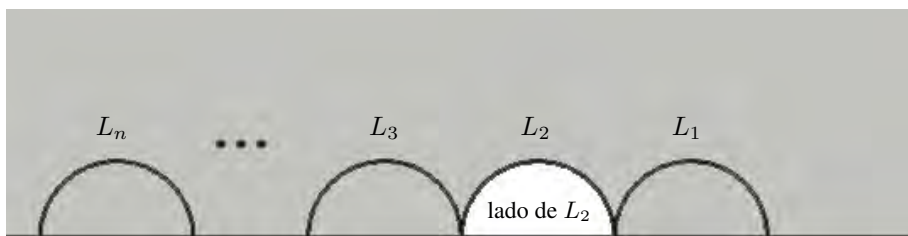


FIGURA 14.

#### 4. ÁNGULOS EN EL PLANO DE HIPERBÓLICO

La idea más elemental de ángulo es la de la porción de plano limitada por dos semirrectas con extremo común. Un concepto de ángulo más elaborado es el de giro en una dirección de una semirrecta en torno a su extremo. Ambas ideas también son válidas en la h-geometría, pero el hecho de que sus rectas y las nuestras no coincidan (véase figura 15) nos plantea algunas dudas que tenemos que resolver.

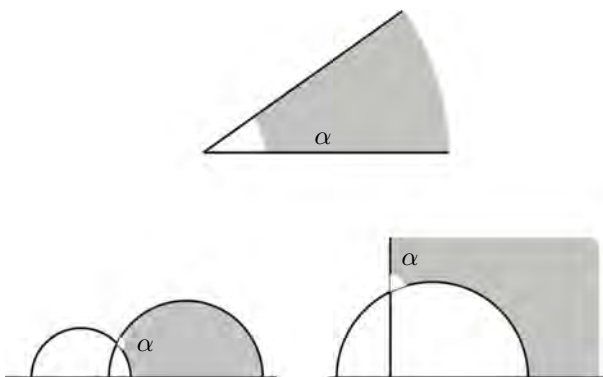


FIGURA 15.

La unidad angular *natural* es el ángulo correspondiente a un giro (en el sentido opuesto a las manecillas del reloj) de una vuelta. Si pensamos en que este giro lo llevamos a cabo, tanto nosotros como Hiperbólico, sujetos a uno de los extremos de un cordel, que mantenemos tenso, y cuyo otro extremo está fijo en el centro de giro y que además la trayectoria del giro la recorreremos con rapidez constante (véase figura 16), entonces podemos comparar o hablar de igualdad entre ángulos, así como dividirlos en partes iguales, comparando los tiempos usados en llevar a cabo los giros en cuestión.

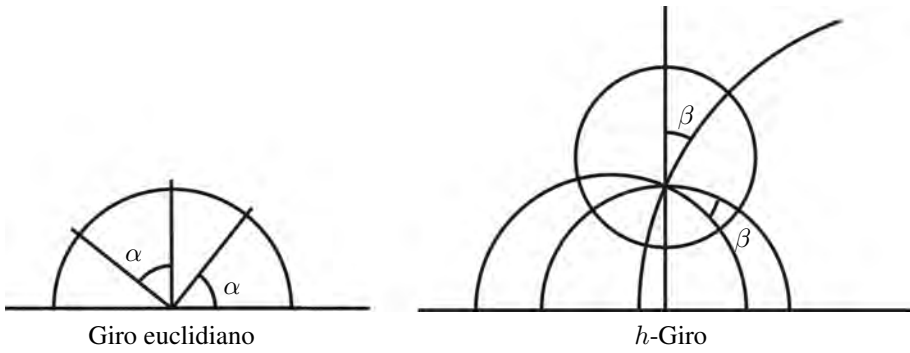


FIGURA 16.

Una pregunta que tiene sentido que nos hagamos es si, en el h-mundo, la relación que guardan dos ángulos no depende del radio tomado para realizar el giro. Efectivamente, esta relación es independiente de la longitud del cordel y es debido a que al mantener tenso éste, todos los puntos del cordel giran, para Hiperbólico, con la misma velocidad angular.

Por diversas razones, para *medir* ángulos, además de la *vuelta*, nosotros usamos otras unidades, principalmente grados y radianes. La manera de pasar de una unidad a otra es usando que una vuelta corresponde a  $360^\circ$  grados o  $2\pi$  radianes. Hiperbólico puede usar estas mismas relaciones y definir sus grados o sus radianes.

Los ángulos en el h-mundo guardan una relación muy estrecha con los ángulos euclidianos. Ésta es:

La medida del ángulo formado por dos semirrectas en el h-mundo es el mismo que el del ángulo euclidiano que forman las tangentes a sus lados en el vértice del ángulo. (véase figura 17)

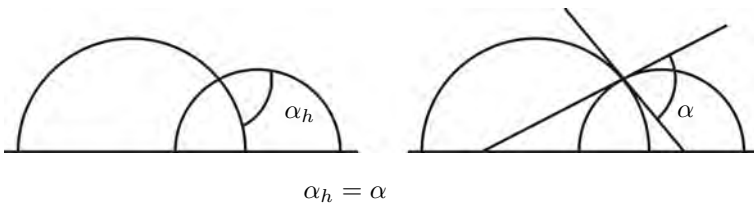


FIGURA 17.

Para convencernos de ello pensemos que el cordel al cual estamos sujetos para efectuar nuestros giros tiene una longitud infinitesimal y entonces no hay diferencia entre los segmentos de h-rectas y sus tangentes euclidianas ni tampoco hay diferencia entre su circunferencia y la nuestra, como lo sugieren el pequeño círculo y las h-rectas, dentro de éste, que aparecen en la figura 18.

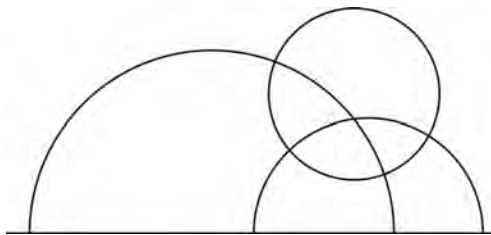


FIGURA 18.

Después de esta discusión ya sabemos cómo apreciar un ángulo de  $30^\circ$  o de cualquier otro valor en el h-mundo, así como “ver” la perpendicularidad entre rectas o curvas.

Al respecto analicemos la figura 19.

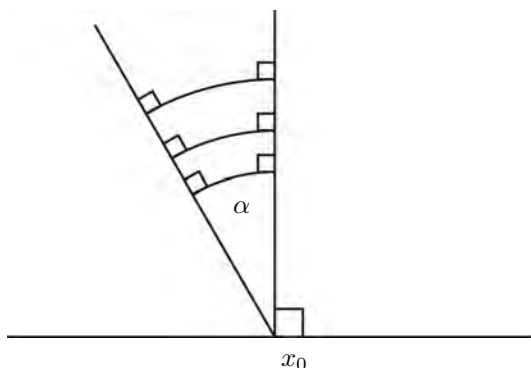


FIGURA 19.

En dicha figura aparecen dos semirrectas euclidianas concurrentes en un punto sobre el eje  $x$ , una de ellas perpendicular a él y la otra formando un ángulo  $\alpha$  con ésta. Como sabemos, la semirrecta perpendicular es una h-recta, al igual que para Hiperbólico son segmentos de h-recta los arcos de circunferencia con centro en el eje  $x$  que abarcan el ángulo  $\alpha$  y que aparecen en la figura. Estos arcos son perpendiculares a las dos semirrectas euclidianas, tanto para nosotros, como para él.

Usando ahora la fórmula para la longitud de dichos arcos o h-rectas (sección longitud de una curva en el mundo de Hiperbólico), vemos que todas las h-longitudes son iguales a:

$$\left| \ln \tan \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2} \right|$$

Y por lo tanto la semirrecta no perpendicular (que para Hiperbólico **no** es una recta) equidista de la h-recta (semirrecta perpendicular). En resumen: *la equidistante de una h-recta no es otra h-recta*. ¡Gran diferencia con lo que sucede en geometría euclidiana!

## 5. EL MUNDO DE HIPERBÓLICO Y LAS ÁREAS

Ya antes vimos cómo se relaciona la diferencial de longitud que nosotros percibimos con la que percibe Hiperbólico:

$$dS_h = \frac{dS}{y}$$

Nosotros pensamos la diferencial de área como el área de un “rectángulo” que tiene lados  $dx$  y  $dy$ , respectivamente; o sea:

$$dA = dx dy$$

Para Hiperbólico los lados del rectángulo, de acuerdo con la observación hecha arriba, serán  $dx/y$  y  $dy/y$ , respectivamente, y por lo tanto su diferencial de área es:

$$dA_h = \frac{dx dy}{y^2}$$

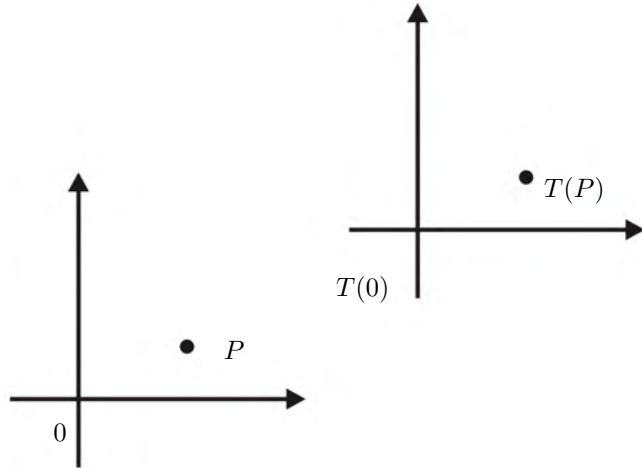
Lo que implica que el h-área  $A_h(\Omega)$ , de una región  $\Omega$  contenida en el semiplano superior, viene dada por:

$$A_h(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2}$$

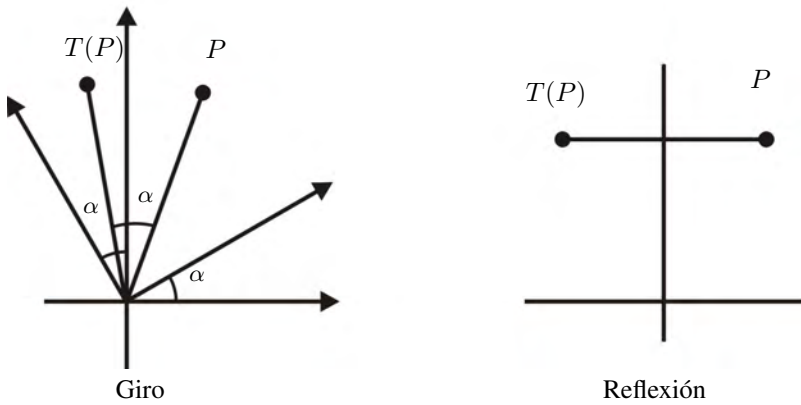
Usaremos esta fórmula más adelante para calcular las h-áreas de algunas regiones.

6. LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL MUNDO DE HIPERBÓLICO

Una idea central en la geometría euclidiana es la de transformación rígida. El propósito de este inciso es discutir cómo son y cómo se comportan tales transformaciones en el plano euclidiano, para después ver qué pasa en el h-mundo.



Traslación



Giro

Reflexión

FIGURA 20.

Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uno a uno y sobre. Decimos que  $T$  es una transformación rígida si  $T$  preserva la distancia euclidiana, es decir si para toda pareja  $P$  y  $Q$  de puntos del plano, se satisface que

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$$

donde  $d$  es la función distancia.

Son transformaciones rígidas las traslaciones, los giros en torno a un punto y las reflexiones respecto a una recta fija (véase figura 20).

Claramente, tanto la inversa de una transformación rígida como la composición de dos transformaciones rígidas son también transformaciones rígidas.

Las transformaciones rígidas preservan triángulos, y como consecuencia también preservan ángulos.

A continuación enunciamos dos resultados elementales sobre transformaciones rígidas que son fundamentales para lo que sigue.

- i) Una transformación rígida queda determinada por la imagen de tres puntos no alineados.
- ii) Una transformación rígida siempre se puede expresar como la composición de, a lo más, tres reflexiones.

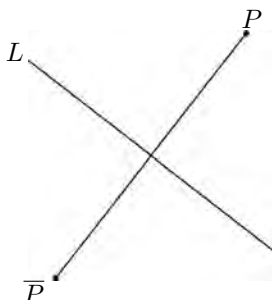


FIGURA 21.

Demostrar estas afirmaciones queda como un ejercicio para el lector.

Claramente, lo dicho hasta aquí también tiene sentido en el h-plano: la definición de transformación rígida, el que la inversa y la composición de transformaciones rígidas sea también una transformación rígida. Al igual tiene sentido lo que es una rotación. Pero, cuando no tenemos unicidad en las paralelas no es claro qué se entiende por una traslación, (usualmente definimos traslación mediante la suma de vectores), y tampoco es claro qué es una reflexión.

Aunque no es difícil hacerlo no aclararemos qué es una traslación para Hiperbólico, pero sí es imprescindible aclarar y estudiar las reflexiones en su mundo.

En el caso euclidiano, dada una recta  $\ell$  y un punto  $P$ , decimos que  $\bar{P}$  es el reflejado de  $P$  con respecto a  $\ell$  si  $\bar{P}$  se encuentra sobre la perpendicular a  $\ell$  que pasa por  $P$ , a la misma distancia de  $\ell$  que  $P$ , pero en el lado opuesto (véase figura 21).

Por la reflexión con respecto a  $\ell$  entendemos la transformación  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que manda cada punto en su reflejado, es decir  $R(P) = \bar{P}$ .

Es inmediato que una reflexión preserva distancias.

En el h-mundo las reflexiones se definen exactamente de la misma manera, pero usando las h-distancias y las h-rectas.

Para algunas rectas del h-mundo es directo visualizar el efecto de una h-reflexión, por ejemplo para el semieje  $y$  (véase figura 22). En este caso la reflexión euclidiana y la de Hiperbólico coinciden, aunque la distancia hiperbólica se mide sobre los arcos marcados con  $\parallel$ .

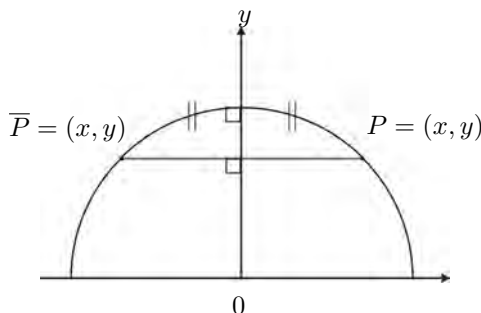


FIGURA 22.

Veamos qué pasa con un punto del eje  $y$  al reflejarlo sobre la h-recta dada por la semicircunferencia de radio uno con centro en  $O$  (véase figura 23).

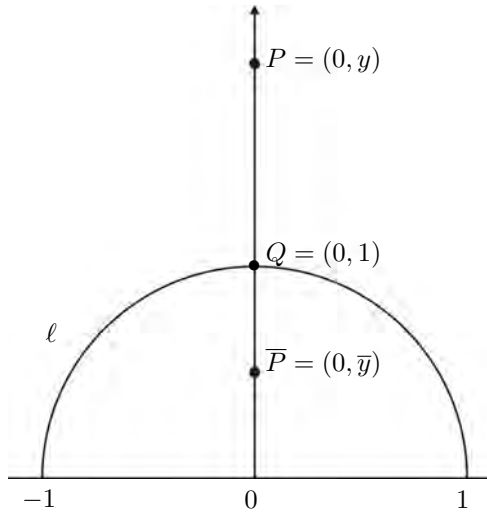


FIGURA 23.

Si  $P_2$  es el reflejado de  $P_1$  en  $\ell$ , entonces

$$d_h(P_1, Q) = d_h(Q, P_2)$$

o sea:

$$\ln \frac{y_1}{1} = \ln \frac{1}{y_2},$$

lo que implica  $y_1 = \frac{1}{y_2}$  o, lo que es igual,  $y_2 = \frac{1}{y_1}$ .

Lo anterior nos hace conjeturar que la transformación geométrica definida arriba, es decir, la h-reflexión con respecto a una h-recta que no es vertical, corresponde a la inversión euclidiana con respecto a una circunferencia con centro  $O$  sobre el eje  $x$ , al restringirla al semiplano superior (véase figura 24). (Recuerde el lector que ya discutimos la reflexión en el sentido euclidiano y, en el de Hiperbólico, respecto a una semirrecta vertical).

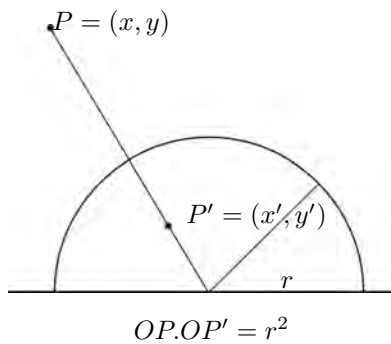


FIGURA 24.

Nótese que al aplicar dos veces una h-reflexión obtenemos la identidad, o dicho de otra manera, una h-reflexión es su propia inversa.

Si tomamos el centro  $O$  como el origen de coordenadas, entonces, en términos de éstas, la inversión  $I$  toma la forma:

$$I(x, y) = (\bar{x}, \bar{y});$$

donde el valor de  $\bar{x}$  y de  $\bar{y}$  en términos de  $(x, y)$  es:

$$\bar{x}(x, y) = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}; \quad \bar{y}(x, y) = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}$$

Para nuestro problema sólo nos interesa el semiplano superior, por lo que, aunque no lo digamos explícitamente, siempre supondremos que  $y > 0$ .

A continuación veremos que la inversión  $I$ , en términos de la h-geometría, satisface las propiedades de una reflexión euclidiana. Para ello echaremos mano de los rudimentos del cálculo de varias variables.

Primero calcularemos las diferenciales de  $\bar{x}(x, y)$  e  $\bar{y}(x, y)$ , así como la matriz jacobiana de  $I$  y su determinante, que son los elementos necesarios para lo que sigue:

$$d\bar{x}(x, y) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} dy = \frac{r^2}{(x^2 + y^2)^2} (-(x^2 - y^2) dx - 2xy dy)$$

y

$$d\bar{y}(x, y) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} dy = \frac{r^2}{(x^2 + y^2)^2} (-2xy dx + (x^2 - y^2) dy).$$

Además, si denotamos por  $J(I)$  a la matriz jacobiana de  $I$ , ésta tiene la forma:

$$J(I)(x, y) = \frac{r^2}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -(x^2 - y^2) & -2xy \\ -2xy & (x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

y

$$\det J(I)(x, y) = \frac{-r^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

El primer resultado que se sigue de estos cálculos es que  $I$  no preserva la orientación pues  $\det J(I)(x, y) < 0$  para todo  $(x, y)$  con  $y > 0$ . (Notése que esta idea de orientación coincide con la que se usa en geometría elemental utilizando la orientación de los ángulos).

El segundo resultado es que preserva la magnitud de los ángulos. Esto es consecuencia de que, infinitesimalmente, alrededor de un punto  $P$  es el jacobiano en  $P$  el que nos dice cómo se comportan los ángulos entre curvas que pasan por  $P$ . En nuestro caso, la forma que tiene el jacobiano es:

$$J(I)(x, y) = k^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

O sea, es la composición de una rotación, una reflexión y una homotecia. Tanto la rotación como la homotecia preservan ángulos, mientras que la reflexión preserva su magnitud, pero cambia su orientación; por lo tanto  $J(I)(x, y)$  preserva la magnitud de los ángulos.

Como segundo resultado mostraremos que  $I(x, y)$  preserva las h-longitudes de las curvas. Para ello consideremos una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  cuyas coordenadas son  $x(t)$  e  $y(t)$ . La h-longitud de  $\gamma$  está dada por:

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Si llamamos  $\tilde{\gamma}$  a la imagen de  $\gamma$  bajo  $I$  ( $\tilde{\gamma} = I \circ \gamma$ ), tenemos que

$$\tilde{\gamma}(t) = (\bar{x}(x(t), y(t)), \bar{y}(x(t), y(t))),$$

donde  $\bar{x}(x, y)$  e  $\bar{y}(x, y)$  son las componentes de la función  $I$ , definida antes.

Esta curva tiene h-longitud:

$$S_h(\tilde{\gamma})(a, b) = \int_a^b \frac{1}{\bar{y}(t)} \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2} dt =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \frac{\frac{r^2}{(x^2+y^2)^2}}{\frac{r^2 y(t)}{(x^2+y^2)}} \sqrt{\left( (y^2 - x^2) \frac{dx}{dt} - 2xy \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( -2xy \frac{dx}{dt} + (x^2 - y^2) \frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\
 &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt = S_h(\gamma)(a, b),
 \end{aligned}$$

probando así que las inversiones euclidianas respecto a semicircunferencias que tienen su centro en el eje  $x$  preservan la  $h$ -longitud de las curvas.

Como consecuencia, las inversiones euclidianas mandan segmentos de  $h$ -rectas en segmentos de  $h$ -rectas con la misma longitud. Esto se debe a que si tenemos un  $h$ -segmento con extremos  $a$  y  $b$ , y bajo una de tales inversiones se transforma en una curva  $\gamma$  con extremos  $a'$ ,  $b'$  que no sea un  $h$ -segmento, el  $h$ -segmento que une  $a'$  con  $b'$  tendrá longitud menor y su imagen bajo  $I$  será una curva uniendo  $a$  con  $b$  con  $h$ -longitud menor que el segmento que los une; lo que es imposible.

El que las inversiones euclidianas que hemos estado estudiando preserven las magnitudes de los ángulos y manden  $h$ -segmentos en  $h$ -segmentos con la misma longitud, implica que, en la  $h$ -geometría, son reflexiones respecto a las  $h$ -rectas definidas por las semicircunferencias con centro en el eje  $x$ . Para visualizarlo consideremos un punto  $P$ , su imagen  $I(P)$  y el segmento de  $h$ -recta que los une (véase figura 25).

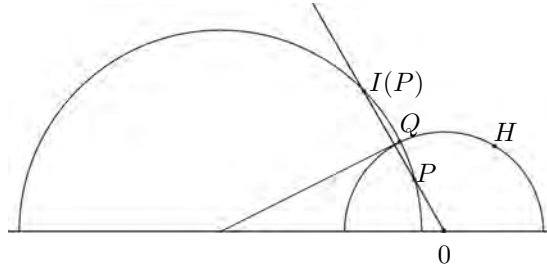


FIGURA 25.

A este segmento, cuyos extremos son  $P$  e  $I(P)$ , la inversión euclidiana le cambia la orientación, pero lo transforma en sí mismo:

$$P \rightarrow I(P) \quad \text{e} \quad I(P) \rightarrow I \circ I(P) = P$$

Tomemos ahora el punto  $Q$  en el que este segmento corta la circunferencia de inversión. Claramente  $I(Q) = Q$ , lo mismo que  $I(H) = H$ . Es directo que los  $h$ -segmentos  $\overline{PQ}$  y  $\overline{QI(P)}$  tienen la misma  $h$ -longitud, pues  $I$  transforma uno en el otro. Por último, los ángulos  $\angle PQH$ ,  $\angle I(P)QH$  tienen la misma magnitud (aunque orientaciones opuestas) y entre ellos suman  $180^\circ$  (que es lo que mide  $\angle PQI(P)$ ), por lo tanto ambos miden  $90^\circ$  y las  $h$ -rectas  $PI(P)$  y  $QH$  son perpendiculares, terminando así nuestro argumento.

Veamos otra propiedad de las inversiones euclidianas que resulta importante en el marco de la  $h$ -geometría. Una reflexión euclidiana cambia la orientación y preserva las áreas (con más precisión, su valor absoluto). En el inciso siguiente veremos que, en forma similar, una  $h$ -reflexión también cambia la orientación y preserva el valor absoluto de las  $h$ -áreas. Para ello recordemos la fórmula para el cambio de variable en una integral múltiple, que aprendimos en nuestros cursos de cálculo avanzado, para el caso de dimensión 2.

## 7. TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

Sea  $F(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$  una transformación con derivada continua (i.e. con derivadas parciales de primer orden continuas) e inyectiva de una región cerrada  $\Omega$  del plano  $xy$ , en una región  $\bar{\Omega}$  del plano  $\bar{x}\bar{y}$ . Si el determinante de la matriz jacobiana de  $F$  es positivo, para todo punto de  $\Omega$ , entonces, para cualquier función continua  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\iint_{\bar{\Omega}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y} = \iint_{\Omega} f(\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)) \det JF(x, y) dx dy$$

Si el determinante de la matriz jacobiana es negativo, entonces las integrales anteriores difieren únicamente en el signo.

Luego, en nuestro caso, el teorema nos da:

$$\iint_{I(\Omega)} \frac{d\bar{x}d\bar{y}}{\bar{y}^2} = \iint_{\Omega} \frac{-r^4}{\left(\frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\right)^2 (x^2 + y^2)^2} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2}$$

## 8. EL COMPORTAMIENTO DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS BAJO INVERSIONES EUCLIDIANAS

Para los propósitos de este trabajo nos falta una última propiedad de las inversiones: estudiar las imágenes bajo ellas de las circunferencias y de las rectas euclidianas.

Una inversión manda circunferencias en circunferencias o rectas. Asimismo, manda rectas en rectas o circunferencias.

- Una circunferencia que no pasa por el centro de inversión va a pasar a otra circunferencia que no pasa por el centro de inversión. Además los centros de ambas circunferencias están alineados con el centro de inversión.
- Una circunferencia que pasa por el centro de inversión tiene como imagen una recta que no pasa por el centro de inversión.
- Una recta que no pasa por el centro de inversión tiene como imagen una circunferencia que pasa por el centro de inversión, las rectas que pasan por el centro de inversión se transforman en sí mismas.

La figura 26 ilustra algunos de los casos.

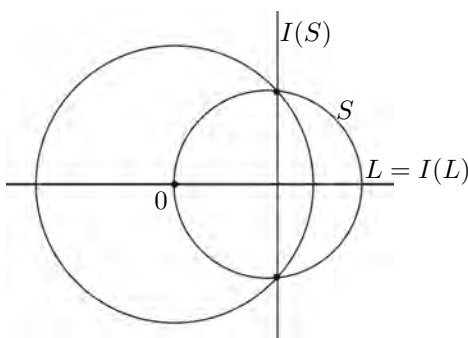


FIGURA 26.

Como veremos a continuación estas afirmaciones se demuestran directamente, sustituyendo en las ecuaciones de las circunferencias y las rectas, en el lugar de las variables, las expresiones de sus transformados.

Si llamamos  $S$  a la circunferencia cuya ecuación es  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , al sustituir en ella las expresiones de las variables en función de sus imágenes:

$$x = \frac{r^2 \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \quad y \quad y = \frac{r^2 \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

obtenemos

$$\frac{r^4 \bar{x}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} + \frac{r^4 \bar{y}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} + \frac{ar^2 \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \frac{br^2 \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + c = 0$$

o sea,

$$\frac{r^4}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \frac{ar^2 \bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + \frac{br^2 \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} + c = 0$$

y multiplicando por  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ , obtenemos

$$r^4 + ar^2 \bar{x} + br^2 \bar{y} + c(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = 0$$

que muestra que, si  $S$  no pasa por el origen, es decir si  $c \neq 0$ , se transforma en otra circunferencia, que no pasa por el origen, es decir  $r^4/c \neq 0$ .

Si  $S$  pasa por el origen ( $c = 0$ ), entonces su imagen es la recta  $r^4 + ar^2 \bar{x} + br^2 \bar{y} = 0$ , la cual tampoco pasa por el origen. El análisis de cómo se transforma una recta se lo dejamos al lector.

Dejemos aquí el estudio de las inversiones y pasemos a ver las transformaciones rígidas en la h-geometría.

### 9. LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL MUNDO DE HIPERBÓLICO (CONTINUACIÓN)

Como recordará el lector, ya antes discutimos las transformaciones rígidas para el caso de la geometría euclidiana, y dejamos al lector la prueba de dos resultados básicos; éstos son:

- Una transformación rígida queda determinada por la imagen de tres puntos no alineados.
- Una transformación rígida siempre se puede expresar como el producto de a lo más tres reflexiones.

Ahora nuestro conocimiento de las reflexiones en la h-geometría nos permite probar ambos resultados para el caso de Hiperbólico. Como antes, le dejamos al lector la prueba de ellos, pero para el segundo, le proporcionamos una sugerencia.

Consideremos en  $\mathbb{R}_+^2$  tres puntos  $A, B$  y  $C$  que, según Hiperbólico, no estén alineados; sean  $A', B', C'$  otros tres puntos en  $\mathbb{R}_+^2$ , tales que

$$d_h(A, B) = d_h(A', B'), \quad d_h(B, C) = d_h(B', C') \quad \text{y} \quad d_h(C, A) = d_h(C', A')$$

Entonces, a través de la aplicación sucesiva de cuando mucho tres h-reflexiones, podemos mandar  $A$  en  $A', B$  en  $B'$  y  $C$  en  $C'$  (y por el primer resultado, habremos terminado con esto la prueba del segundo).

Como primer paso demuestre que hay una h-reflexión que manda  $|x|$  la h-recta determinada por  $A$  y  $B$  en la h-recta determinada por  $A'$  y  $B'$  y que es tal que la imagen del segmento  $AB$  y el segmento  $A'B'$  tienen sentidos opuestos (véase figura 27).

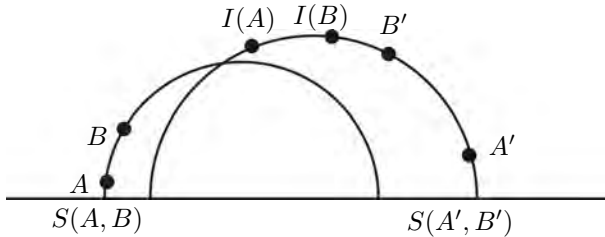


FIGURA 27.

Como segundo paso, mande, a través de una inversión que envíe  $S(A', B')$  en sí misma,  $I(A)$  en  $A'$  e  $I(B)$  en  $B'$ .

Como tercer y último paso, vea de qué lado de  $S(A', B')$  están  $C'$  y la imagen de  $C$ . Si están del mismo lado tienen que coincidir, si no están del mismo lado invierta respecto a  $S(A', B')$ .

Los resultados anteriores nos dicen que, en el h-mundo, los movimientos rígidos preservan las longitudes de las curvas, las áreas de las regiones y los ángulos. Ello nos permite situar los objetos geométricos de ese mundo en la forma que nos resulte más fácil su estudio. A continuación veremos algunos resultados cuyas demostraciones ejemplifican lo dicho.

10. EL ÁNGULO DE PARALELISMO Y LA FUNCIÓN  $\pi$  DE LOBACHEVSKI

Como vimos antes, dados una h-recta  $\ell$  y un punto  $P$  exterior a  $\ell$  en el h-plano, existen una infinidad de h-rectas que pasan por  $P$  y no intersectan a  $\ell$ . Esta familia de rectas está limitada por dos rectas que pasan por  $P$  y que tampoco intersectan a  $\ell$ . Cada una de estas rectas forma un ángulo menor de  $90^\circ$  con la perpendicular a  $\ell$  que pasa por  $P$ ; como veremos ambos ángulos son iguales y están en función de la distancia de  $P$  a  $\ell$ . Cada uno de ellos es llamado ángulo de paralelismo en  $P$  relativo a  $\ell$ . Llamemos  $d$  a la h-distancia de  $P$  a  $\ell$ , definimos la función  $\pi$  de Lobachevski por  $\pi(d) = \alpha$  donde  $\alpha$  es el ángulo de paralelismo. El lo que sigue daremos una fórmula explícita para  $\pi(d)$ . Para ello tomaremos como recta  $\ell$  el semicírculo euclidiano de radio 1 y centro el origen, y  $P$  un punto en el eje  $y$  (véase figura 28). Los resultados vistos previamente nos dicen que restringirnos a este caso no nos hace perder generalidad.

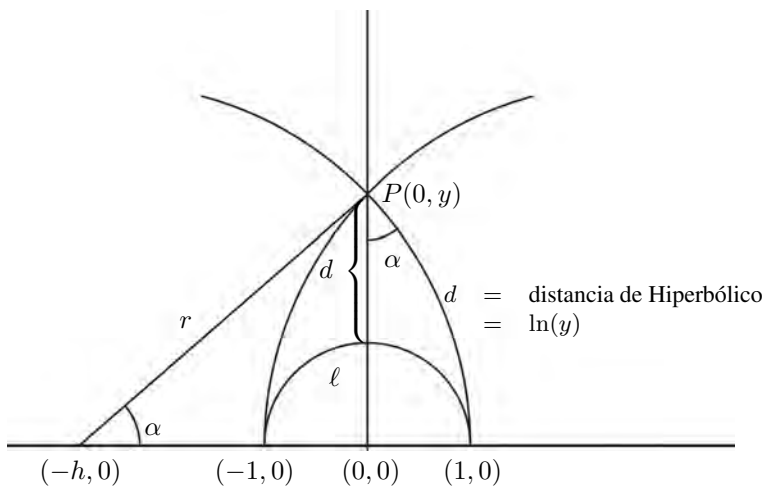


FIGURA 28.

Ahora se ve claramente la igualdad entre los ángulos mencionados arriba. A continuación observemos que si llamamos  $y$  a la ordenada de  $P$ , de la fórmula para la h-distancia, tenemos que

$$\ln\left(\frac{y}{1}\right) = d$$

o, lo que es lo mismo,  $y = e^d$ . Si denotamos por  $(-h, 0)$  al centro del semicírculo que pasa por  $P$  y  $(1, 0)$ , entonces el radio  $r$  de dicho semicírculo satisface euclidianamente,

$$h^2 + e^{2d} = r^2 \quad \text{y} \quad h + 1 = r$$

de donde

$$(r - 1)^2 + e^{2d} = r^2,$$

lo que implica

$$r = \frac{e^{2d} + 1}{2} \quad \text{y} \quad h = \frac{e^{2d} - 1}{2}$$

De la figura, tenemos

$$\cos \alpha = \frac{e^{2d} - 1}{e^{2d} + 1} = \frac{e^d - e^{-d}}{e^d + e^{-d}} = \tanh(d)$$

luego

$$\pi(d) = \alpha = \cos^{-1}(\tanh(d)).$$

La relación entre el ángulo  $\alpha$  y  $d$  también se puede expresar como:

$$d = -\log \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

El lector no tendrá dificultad en verificarlo usando la figura 28 y la fórmula para  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

Analizando  $\pi(d)$  vemos que es una función decreciente que tiende a 0, cuando  $d$  tiende a infinito y que tiende a  $\frac{\pi}{2}$ , cuando  $d$  tiende a cero. (Cosa que también podemos ver en la figura con nuestros ojos).

Lo anterior nos dice, en un lenguaje coloquial, que si el punto  $P$  está situado a mucha distancia de la recta  $\ell$ , entonces habrá muchas más paralelas y que en  $\infty$  todas las h-rectas serán paralelas.

Por el contrario, si  $P$  es muy cercano a  $\ell$ , la región de las h-rectas paralelas a  $\ell$  estará limitada por un ángulo muy pequeño y entonces habrá “menos” paralelas a  $\ell$  a través de  $P$ .

### 11. EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO DE HIPERBÓLICO

Una fórmula que sin duda podemos calificar de bella es la que nos da el área de un triángulo con ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  (medidos en radianes) en el h-mundo. Ésta es:  $A_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ . A continuación damos su justificación. Para hacernos la vida un poco más sencilla, basados en la propiedades de las transformaciones rígidas, podemos considerar que uno de los lados del triángulo es un segmento del eje  $y$  (véase Figura 29).

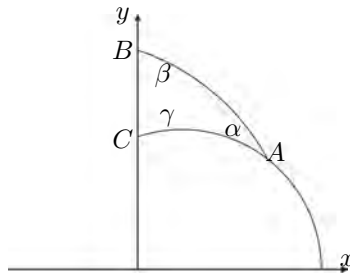


FIGURA 29.

Para demostrar nuestra fórmula consideraremos dos semirrectas verticales arbitrarias y una semicircunferencia que corte ambas semirrectas y, tomaremos como origen de coordenadas el centro de dicha semicircunferencia, como lo ilustra la Figura 30.

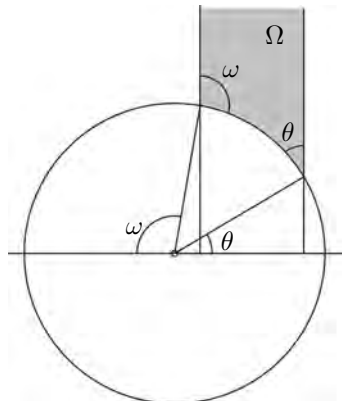


FIGURA 30.

Demostremos que el h-área de la región gris, a la que denotamos por  $\Omega$ , está dada por  $\pi - \omega - \theta$ . De aquí, la fórmula del h-área es directa. El h-área de  $\Omega$  está dada por:

$$A_h(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{r \cos(\pi-\omega)}^{r \cos \theta} dx \int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \int_{r \cos(\pi-\omega)}^{r \cos \theta} \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

integral que, con el cambio de variable  $x = r \cos \varphi$ , se transforma en

$$\int_{\pi-\omega}^{\theta} \frac{-r \operatorname{sen} \varphi d\varphi}{r \operatorname{sen} \varphi} = \pi - \omega - \theta.$$

Para obtener la fórmula del h-área del triángulo considere la Figura 31.

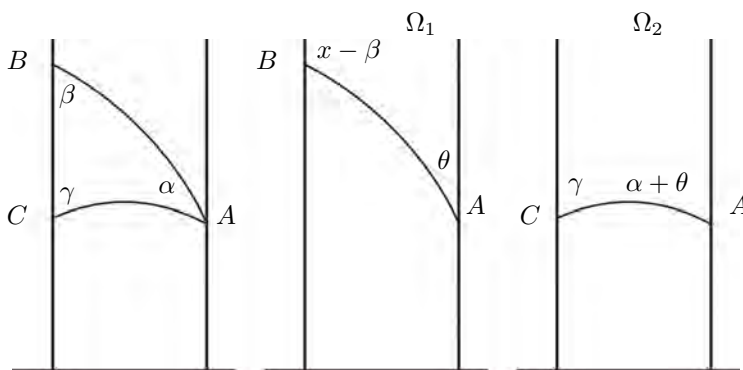


FIGURA 31.

De la figura y el resultado previo, tenemos

$$\begin{aligned} A_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) &= A_h(\Omega_2) - A_h(\Omega_1) \\ &= \pi - (\gamma + \alpha + \theta) - (\pi - (\pi - \beta + \theta)) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

Como consecuencia de esta fórmula tenemos que en la h-geometría:

- i) La suma de los ángulos de un triángulo siempre es menor que  $\pi$ .
- ii) El área de un triángulo es menor que  $\pi$ .
- iii) Si dos triángulos son semejantes, entonces tienen la misma área (y se puede probar que en este caso con congruentes).

Estos hechos son radicalmente distintos de lo que pasa en la geometría euclidiana.

La Figura 32 muestra un triángulo degenerado (tiene sus tres ángulos iguales a cero y sus vértices están en el eje  $x$ ) que tiene área  $\pi$ . Éste es el caso límite de ii).

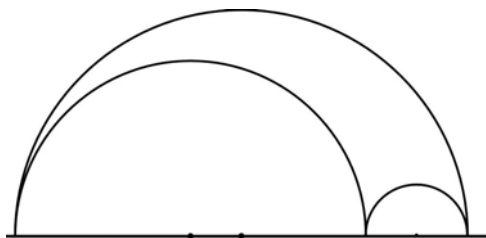


FIGURA 32.

12. LAS CIRCUNFERENCIAS DE HIPERBÓLICO Y HACES DE CIRCUNFERENCIAS

Como ya hemos observado, Hiperbólico puede moverse a lo largo de una curva manteniéndose a la misma  $h$ -distancia de un punto dado; nuestro problema es que no sabemos cuál es esa curva desde el punto de vista de nuestra geometría. En esta sección abordamos este problema.

Para ello consideremos los puntos  $P(0, y_0)$  y  $-P(0, -y_0)$  con  $y_0 > 0$  y todas las circunferencias euclidianas que pasan por ellos, cuyo conjunto llamaremos el haz de circunferencias. Es inmediato que el centro de cada una de ellas se encuentra sobre el eje  $x$ . La Figura 33 muestra la situación.

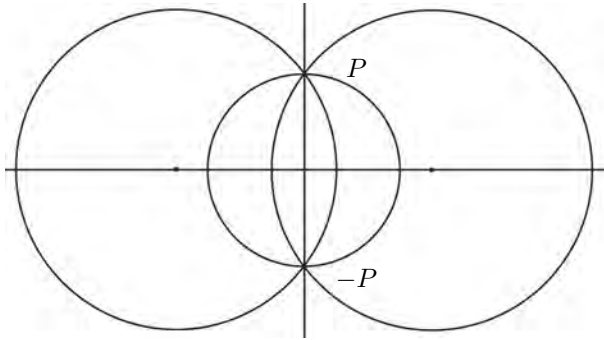


FIGURA 33.

Nótese que la parte de cada una de estas circunferencias que está por encima del eje  $x$  es una  $h$ -recta.

La ecuación de cada una de ellas es

$$(x - h)^2 + y^2 = h^2 + y_0^2.$$

Remarcamos que el punto  $(h, 0)$  es su centro y que  $(h^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$  es su radio.

La primera pregunta que queremos contestar es: dada una circunferencia del haz y otra con centro en  $(0, k)$  con  $k > 0$  y radio  $r$ , ¿para qué valor del radio  $r$  son estas circunferencias ortogonales?

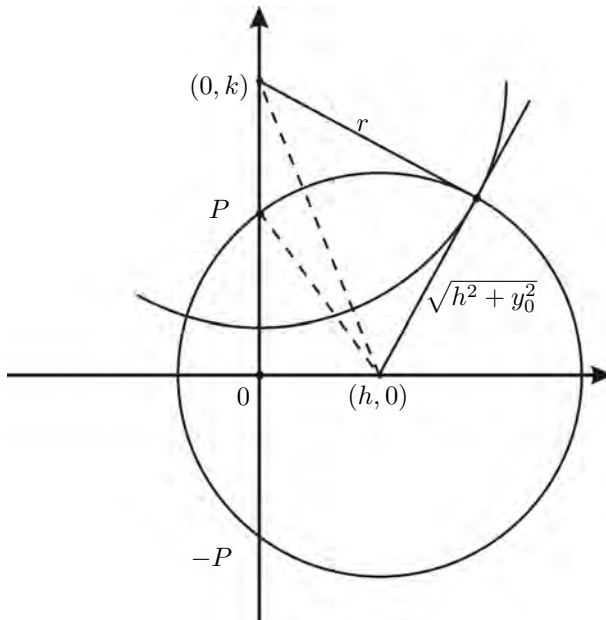


FIGURA 34.

De la figura 34 vemos que:

$$k^2 + h^2 = r^2 + h^2 + y_0^2$$

o sea

$$r^2 = k^2 - y_0^2$$

obteniendo así el valor buscado del radio  $r$ , pero de paso hemos obtenido algo más:

*¡La circunferencia de centro  $(0, k)$  y radio  $r = \sqrt{k^2 - y_0^2}$  es ortogonal a todas las circunferencias del haz!*

Antes de seguir adelante damos la ecuación de esta circunferencia y hacemos algunos comentarios. Su ecuación es

$$x^2 + (y - k)^2 = r^2 = k^2 - y_0^2.$$

Nótese que, para que tal circunferencia exista, es necesario que

- i)  $k > y_0 > 0$ . Es decir el centro de la circunferencia está por encima del punto  $P$ .
- ii)  $r < k$ . Es decir tales circunferencias están contenidas íntegramente en el semiplano superior.

Además se tiene que dos de tales circunferencias, si se cortan, coinciden y por lo tanto, si no se cortan, una está en el interior de la otra (a la que le corresponde mayor  $k$  es la que *circunda* a la otra), afirmación que no es directa, pero que el lector no tendrá dificultad en probar.

Volviendo a nuestro haz  $\mathcal{H}$  de circunferencias euclidianas – o de h-rectas concurrentes – tenemos que la circunferencia euclidiana  $\mathcal{C}$  con centro en  $(0, k)$  y radio  $r = \sqrt{k^2 - y_0^2}$  es ortogonal a todos los elementos de  $\mathcal{H}$ . Haciendo una analogía con lo que sucede euclidianamente (una circunferencia euclidiana es ortogonal a todos los elementos de un pincel de rectas euclidianas si el centro coincide con el punto de concurrencia del pincel) podemos intuir que  $\mathcal{C}$  es una h-circunferencia con centro en el punto  $P$ .

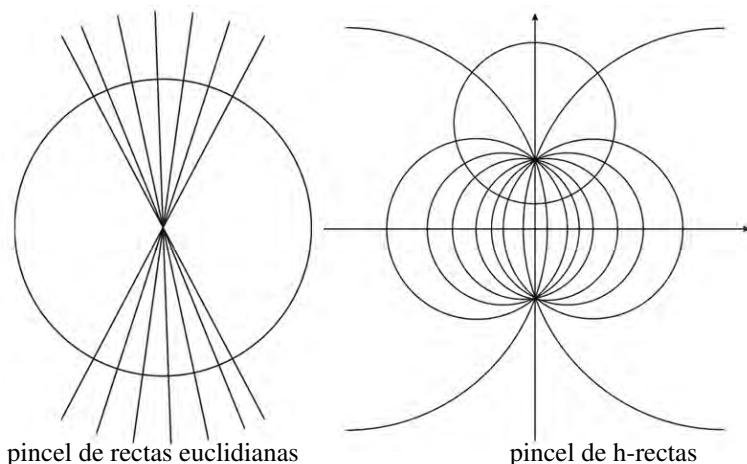


FIGURA 35.

Efectivamente éste es el caso, ¡se trata de una circunferencia de Hiperbólico! y su centro es el punto  $P$ . Además, como el lector puede ver, su h-radio es  $\rho = \ln \sqrt{\frac{k+r}{k-r}}$  (para ello basta calcular la distancia de cualesquiera de los dos puntos de  $\mathcal{C}$  que se encuentran sobre el eje  $y$  al punto  $P$ ). Para demostrarlo debemos ver que todos sus h-radios tienen la misma longitud o, equivalentemente, que dado un h-radio existe una h-reflexión que lo manda en uno de los radios verticales.



En efecto, consideremos un h-radio  $PQ$ , la h-reflexión buscada es la inversión euclidiana respecto a la circunferencia que pasa por el punto  $P$  y tiene su centro en uno de los “extremos”, por ejemplo  $R$ , de la h-recta que contiene al h-segmento  $PQ$  (véase Figura 36). Esta h-reflexión envía el haz de h-rectas que pasa por el punto  $P$  en sí mismo, en particular manda la h-recta que contiene al h-segmento  $PQ$ , en la parte positiva del eje  $y$ ; la circunferencia con h-centro en  $P$  queda invariante, pues es perpendicular a todas las h-rectas del haz, en particular a la usada para realizar la inversión, de aquí nuestra afirmación es inmediata.

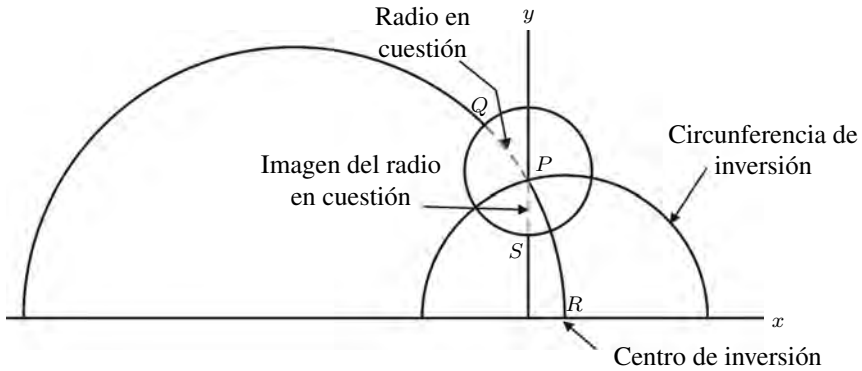


FIGURA 36.

Antes de seguir adelante notemos que el hecho de que la h-longitud del segmento que va del punto  $P$  al eje  $x$  tenga longitud infinita implica que, con h-centro el punto  $P$  podemos trazar h-circunferencias con h-radio tan grande como deseemos y, por supuesto, lo mismo sucede con cualquier otro punto del semiplano superior que tomemos.

13. CÓMO VE HIPERBÓLICO LAS RECTAS Y LAS CIRCUNFERENCIAS EUCLIDIANAS

En lo anterior vimos que las semirrectas perpendiculares al eje  $x$  corresponden a h-rectas infinitas en ambas direcciones, y también vimos que una semirrecta inclinada equidista, en el sentido de Hiperbólico, de la h-recta dada por la perpendicular al eje  $x$  en el punto donde la semirrecta inclinada intersecta dicho eje, (recuerde la figura 19).

Otra propiedad interesante de las semirrectas inclinadas es que son las únicas curvas invariantes bajo todas las h-reflexiones con eje de reflexión una recta de Hiperbólico asociada a una semicircunferencia con centro el origen de la semirrecta inclinada, (Figura 37).

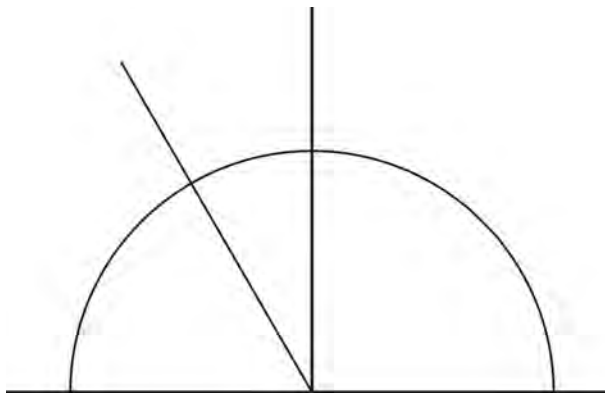


FIGURA 37.

Nos falta analizar: ¿cómo ve Hiperbólico una recta paralela al eje  $x$ ?, ¿qué significado geométrico tiene? (figura 38).

Hay dos propiedades que satisfacen tales rectas que es conveniente destacar:

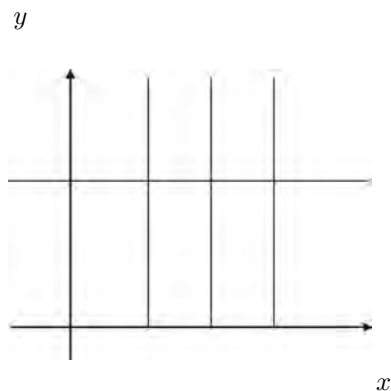


FIGURA 38.

- i) En el sentido de Hiperbólico son las únicas curvas perpendiculares a todas las h-rectas dadas por semirrectas perpendiculares al eje  $x$ .
- ii) Son las únicas curvas que permanecen invariantes bajo h-reflexiones con respecto a cualquier h-recta dada por una semirrecta perpendicular al eje  $x$ .

En cierto sentido, corresponden a circunferencias de radio infinito, en donde todos los radios están dados por semirrectas perpendiculares al eje  $x$ . Estas curvas son parte de una familia más amplia a cuyos elementos llamamos *horociclos*.

Sin duda el lector ya pensó cómo calcular la longitud de un segmento de ellas.

En el caso de las circunferencias se da también una situación interesante: La parte superior de las circunferencias euclidianas que tienen su centro en el eje  $x$  corresponden a h-rectas y, como acabamos de ver, las circunferencias euclidianas contenidas en el semiplano superior corresponden a h-circunferencias, (véase figura 39).

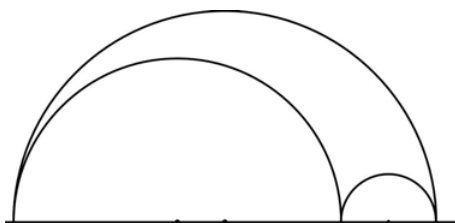


FIGURA 39.

Pero ¿qué pasa cuando una circunferencia euclidiana no tiene su centro sobre el eje  $x$  e intersecta dicho eje en dos puntos?, ¿qué pasa cuando es tangente al eje  $x$ ? (Véase figura 40)

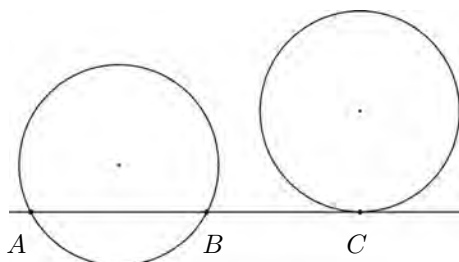


FIGURA 40.

En el primer caso consideremos la h-recta que corresponde a la semicircunferencia, con centro en el eje  $x$  y que intersecta al eje  $x$  en los mismos puntos que la primera (figura 41).

La parte situada por encima del eje  $x$  de la circunferencia en cuestión equidista de la recta asociada. Para darnos cuenta de ello basta reflejar la configuración respecto a una de las dos

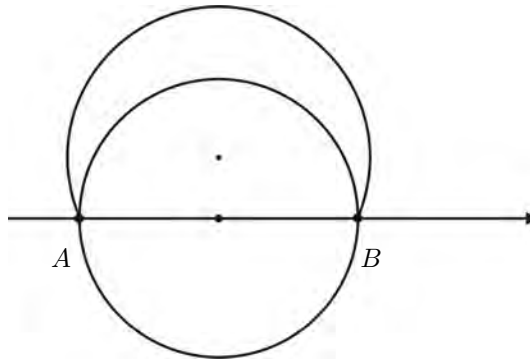


FIGURA 41.

h-rectas que tiene su centro en uno de los extremos de la recta y pasa por el otro (véase figura 42).

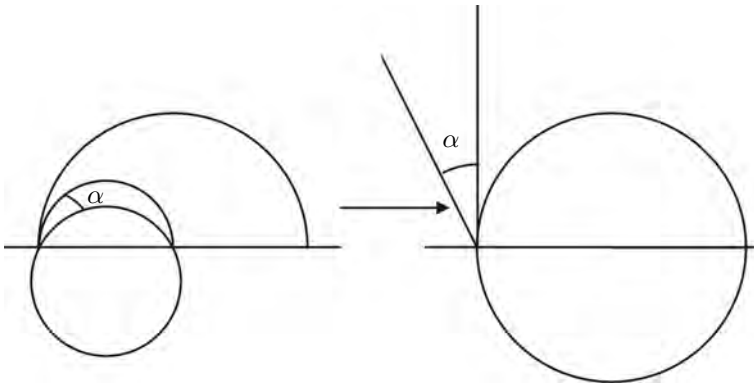


FIGURA 42.

Veamos el segundo caso: para ello consideremos la familia de h-rectas que tienen uno de sus extremos en el punto de tangencia de la circunferencia en cuestión (Figura 43).



FIGURA 43.

Reflejando con respecto a cualquier h-recta que corresponde a una semicircunferencia con centro en el punto de tangencia obtenemos la configuración de la Figura 38, verificando así que se trata de un horociclo.

Nótese que, a diferencia de lo que pasa en el plano euclidiano, en el plano de Hiperbólico, tres puntos no h-alineados determinan una equidistante (a una h-recta), un horociclo o una circunferencia.

Otra diferencia con el plano euclidiano nos la dan los horociclos interpretados como circunferencias de radio infinito. Con más detalle consideremos un punto  $P_0$  en la parte positiva del eje  $y$ . Tomemos ahora todas las  $h$ -circunferencias que pasan por  $P_0$  y tienen su centro en el eje  $y$ , por debajo de  $P_0$ , y asimismo todas las  $h$ -circunferencias que pasan por  $P_0$  y tienen su centro en el eje  $y$  por encima de  $P_0$  (figura 44).

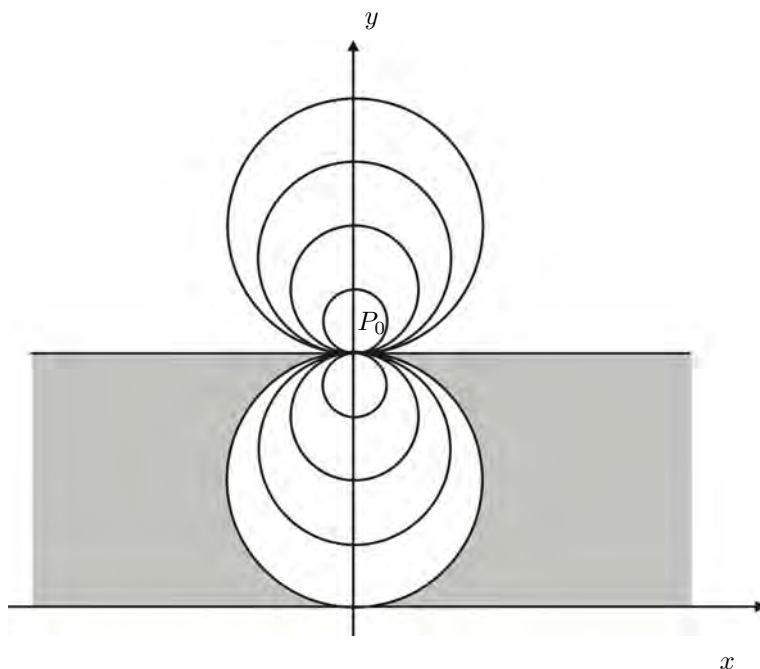


FIGURA 44.

Como se observa en la figura, cada una de estas familias está limitada por un horociclo: la primera, por el dado por la circunferencia que pasa por  $P_0$ , tangente al eje  $x$  y con centro en el eje  $y$ . Como ya dijimos, este horociclo es perpendicular a todas las  $h$ -rectas que parten del punto de tangencia.

La segunda familia está limitada por el horociclo dado por la paralela al eje  $x$  que pasa por  $P_0$ . Este horociclo es perpendicular a todas las  $h$ -rectas dadas como semirectas euclidianas paralelas al eje  $y$ . Notemos que una  $h$ -reflexión sobre la  $h$ -recta dada por la semicircunferencia con centro en el origen y que pasa por  $P_0$ , envía una familia de circunferencias en la otra, un horociclo en el otro y la familia de perpendiculares a un horociclo, en la familia de perpendiculares al otro.

Por último, nótese que en el caso del plano euclidiano, los dos “horociclos” coinciden y no existe la región que aparece en tono gris en la figura 44.

#### 14. LONGITUD Y ÁREA DE LAS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO DE HIPERBÓLICO

Consideremos una circunferencia euclidiana con centro en  $(0, 1)$  y radio  $r < 1$ . Sabemos que esta circunferencia, considerada como  $h$ -circunferencia, tiene su centro en el punto  $(0, \sqrt{1 - r^2})$  y  $h$ -radio  $\rho = \ln \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$ .

También es claro que a través de un movimiento  $h$ -rígido, cualquier  $h$ -circunferencia la podemos llevar a otra del mismo  $h$ -radio y que tenga su  $h$ -centro en  $(0, \sqrt{1 - r^2})$ . De estas consideraciones concluimos que el caso general se reduce a conocer cuál es la  $h$ -longitud o

el h-área de las circunferencias euclidianas de un radio dado  $r < 1$  y centro  $(0, 1)$ . En lo que sigue haremos uso de esta observación.

Consideremos una circunferencia euclidiana con centro  $(0, 1)$ , y radio  $r < 1$ . (Véase figura 45).

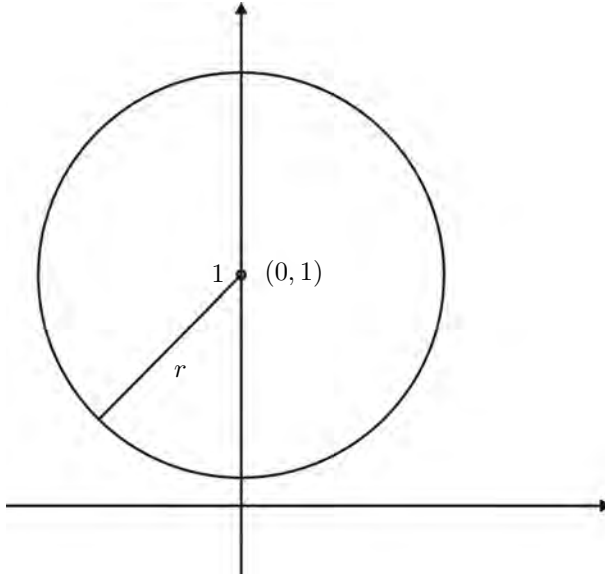


FIGURA 45.

Su ecuación es:  $x^2 + (y - 1)^2 = r^2$  ( $0 < r < 1$ )

De donde, despejando  $x$  en función de  $y$ , tenemos:

$$x = \pm \sqrt{r^2 - (y - 1)^2}$$

y

$$\frac{dx}{dy} = \mp \frac{y - 1}{\sqrt{r^2 - (y - 1)^2}}$$

Aplicando la fórmula de la h-longitud a esta circunferencia, tenemos<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 2 \int_{1-r}^{1+r} \frac{1}{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= \frac{2\pi r}{\sqrt{1-r^2}} \end{aligned}$$

Esta longitud está en función del centro euclidiano  $(0, 1)$  y del radio euclidiano  $r$ .

Nos gustaría ponerla en términos de sus elementos hiperbólicos; para ello notemos que, como sabemos, el radio hiperbólico  $\rho$  de la circunferencia de centro  $(0, 1)$  y radio euclidiano  $r$  está dado por

$$\rho = \ln \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$$

Por lo tanto

$$r = \frac{e^{2\rho} - 1}{e^{2\rho} + 1}$$

<sup>2</sup>Nota de las Editoras: para no interrumpir el hilo de la argumentación, la deducción de la fórmula se posponen hasta el Apéndice:

y de aquí  $\sqrt{1-r^2} = \frac{2e^\rho}{1+e^{2\rho}}$  que sustituido en la fórmula anterior (fórmula para la longitud), nos da

$$L_h(c, \rho) = 2\pi \operatorname{senh} \rho,$$

fórmula que, como era de esperar, no depende de la posición del h-centro de la circunferencia.

### 15. ÁREA DEL CÍRCULO HIPERBÓLICO

Aplicando la fórmula para el h-área al círculo asociado a la circunferencia euclidiana de la figura 43, obtenemos<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} A_h(c) &= \int_{-r}^r \left[ \int_{\frac{1-\sqrt{r^2-x^2}}{1+\sqrt{r^2-x^2}}}^{\frac{1+\sqrt{r^2-x^2}}{1-\sqrt{r^2-x^2}}} \frac{dy}{y^2} \right] dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

área que está dada en función de los elementos euclidianos del círculo. Para obtenerla en función de los elementos de Hiperbólico, usamos, como antes, la expresión de  $\rho$  en términos de  $r$ , es decir

$$\frac{\rho}{2} = \ln \sqrt[4]{\frac{1+r}{1-r}}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{senh} \frac{\rho}{2} \right)^2 &= \frac{1}{4} \left( \exp \left( \ln \sqrt[4]{\frac{1+r}{1-r}} \right) - \exp \left( \ln \sqrt[4]{\frac{1-r}{1+r}} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} - 2 + \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

luego, sustituyendo esta expresión en la fórmula anterior para el área, tenemos

$$A_h(c) = 4\pi \left( \operatorname{senh} \frac{\rho}{2} \right)^2.$$

Notemos que, al igual que en el caso euclidiano, la derivada del área del círculo es la longitud de la circunferencia

$$\frac{d A_h(c)}{d\rho} = 4\pi \operatorname{senh} \frac{\rho}{2} \cosh \frac{\rho}{2} = 2\pi \operatorname{senh} \rho = L_h(c).$$

Pasemos ahora a un tema distinto en donde veremos otras diferencias entre nuestro mundo y el de Hiperbólico.

### 16. RECUBRIMIENTO DEL PLANO DE HIPERBÓLICO POR POLÍGONOS REGULARES

Hoy Hiperbólico se levantó con la obsesión de recubrir el piso de su mundo con polígonos regulares de  $n$  lados y tales que, en cada vértice, se encuentren  $m$  de ellos.

Para ello pensó de la siguiente manera: si trazo una h-circunferencia de cualquier radio y la divido en  $n$  partes iguales, tendré los vértices de un polígono de  $n$  lados inscrito en dicha circunferencia. Los lados del polígono son los segmentos de h-recta que unen dos vértices contiguos; el ángulo interior  $\alpha$  es el que forman dos lados que coinciden en un vértice. Y el ángulo central que abarca un lado es el que forman los radios de la circunferencia que pasan por sus extremos y mide precisamente  $\frac{2\pi}{n}$  (figura 46).

<sup>3</sup>Nota de las Editoras: para no interrumpir el hilo de la argumentación, la deducción de la fórmula se posponen hasta el Apéndice:

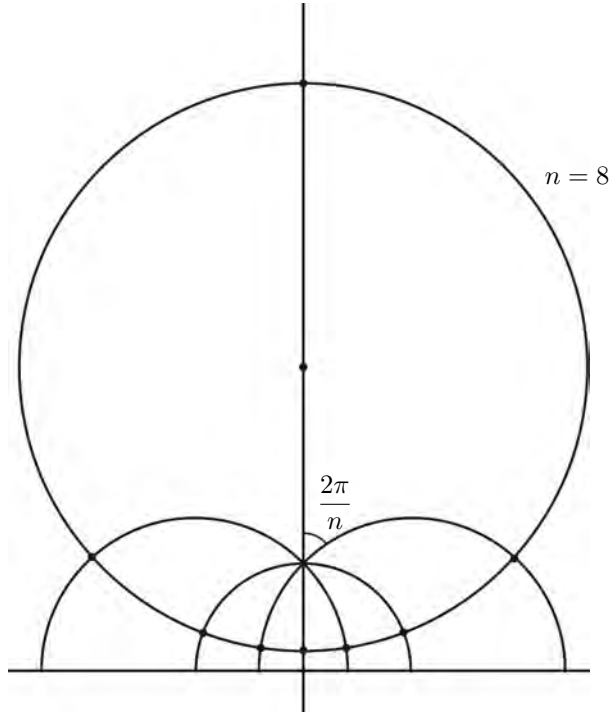


FIGURA 46.

Los ángulos del triángulo determinado por los extremos de un lado y el centro de la circunferencia suman precisamente  $\frac{2\pi}{n} + \alpha$  y esta suma es menor que  $\pi$  radianes (véase figura 47).

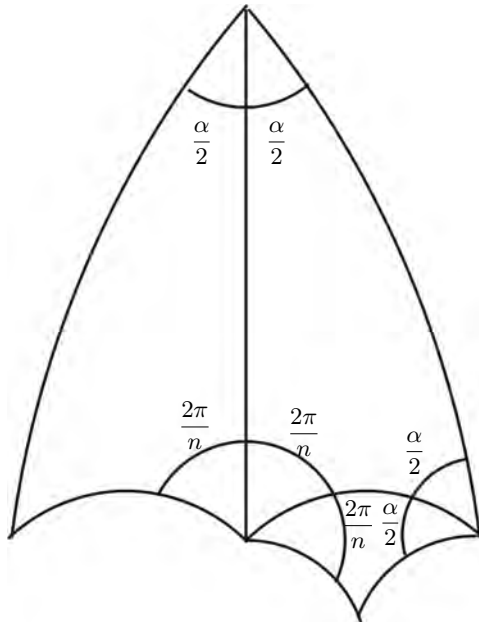


FIGURA 47.

Por otro lado, si en cada vértice del recubrimiento se encuentran  $m$  de estos polígonos, entonces el ángulo  $\alpha$  estará dado por  $\alpha = \frac{2\pi}{m}$  (figura 48). De aquí y de la observación anterior

tenemos que

$$\pi > \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m}$$

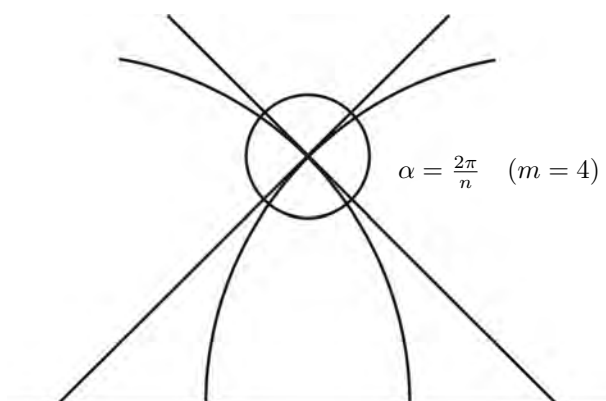


FIGURA 48.

(si la suma de los ángulos interiores fuese  $\pi$ , entonces tendríamos  $\pi = \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m}$ , y si fuese mayor que  $\pi$ , sería  $\pi < \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m}$ ).

Dividiendo la expresión anterior entre  $2\pi$  obtenemos la desigualdad

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

que es la única condición que limita a los valores de  $n$  y  $m$  asociados con nuestro recubrimiento (y que por cierto es simétrica en  $n$  y  $m$ ).

Para analizar esta condición consideremos el plano cartesiano  $x, y$  y veamos la ubicación de los puntos de la forma

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$$

con respecto a la recta  $x + y = \frac{1}{2}$  (figura 49)

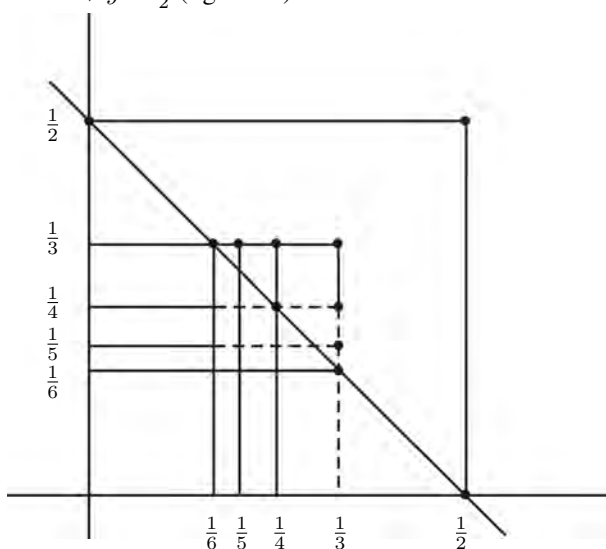


FIGURA 49.



Todos estos puntos están situados por debajo de la recta, excepto los puntos

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right),$$

que están sobre ella y los puntos

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

que se ubican por encima. Como dijimos antes, los puntos que están por debajo de la recta corresponden a recubrimientos del plano de Hiperbólico.

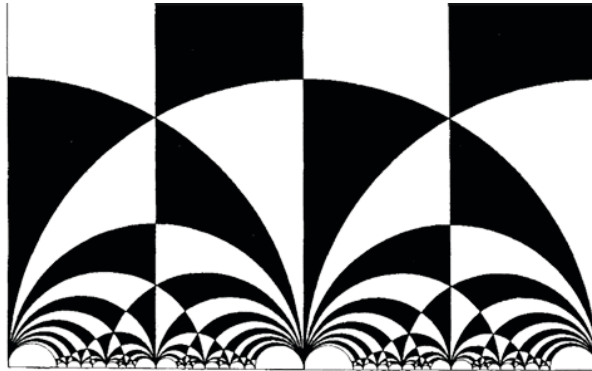


FIGURA 50. Ejemplo de teselación del semiplano de Hiperbólico

Pero Hiperbólico no se detuvo aquí. Como veremos en la última sección, Hiperbólico descubrió y comenzó a estudiar un mundo “raro”, en el que se daban extraños fenómenos, en particular, en ese mundo la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre  $\pi$  radianes y por lo tanto se puede recubrir con triángulos equiláteros (inciden seis en cada vértice), cuadrados (indican cuatro en cada vértice) y hexágonos regulares (inciden tres en cada vértice) (véase figura 51).

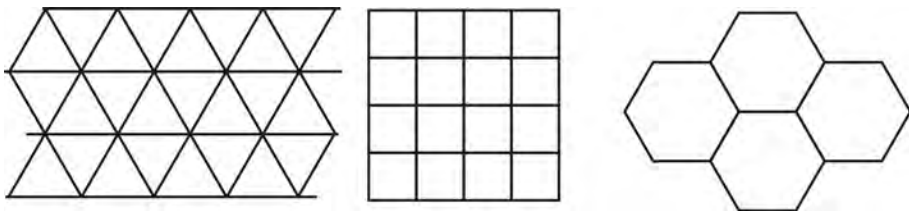


FIGURA 51.

También pudo imaginar un mundo en el que los ángulos interiores de un triángulo suman más de  $\pi$  radianes. Nosotros sabemos que ese mundo es la esfera que se puede recubrir con triángulos equiláteros (tres, cuatro o cinco en cada vértice) con cuadrados (tres en cada vértice) y con pentágonos regulares (tres en cada vértice). Los vértices de estos recubrimientos determinan los poliedros regulares. Su solución es esencialmente la misma que la nuestra, pero su apariencia no deja de desconcertarnos.

Nosotros también podemos pensar en recubrimientos del plano de Hiperbólico con polígonos degenerados de  $n$  lados cuyos vértices están en infinito y en cada uno de esos vértices concurren una infinidad de lados (véase figura 52).

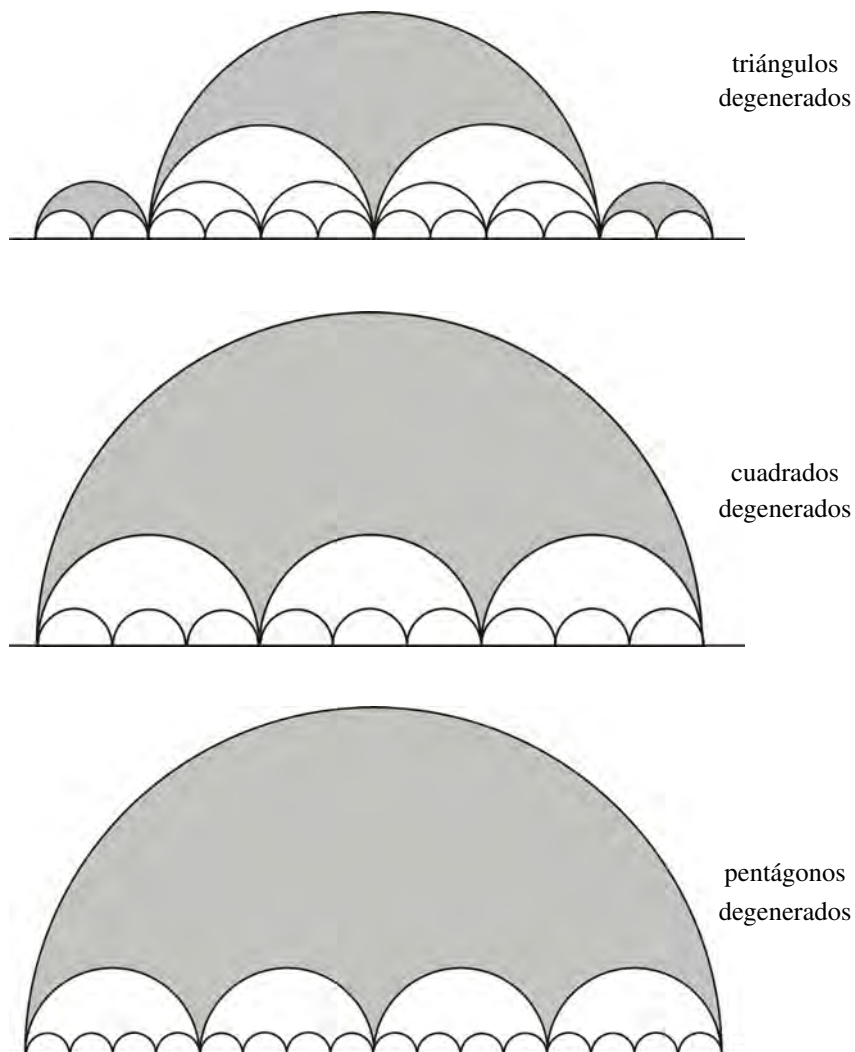


FIGURA 52.

### 17. EL MUNDO DE HIPERBÓLICO TRIDIMENSIONAL

Nuestra descripción del mundo de Hiperbólico nos muestra los objetos planos y los seres en él. Esto es adecuado para muchas cosas, pero no para todas: la bicicleta que maneja Hiperbólico y él mismo están parados y se apoyan en el h-plano, pero al igual que nosotros tienen altura, y lo mismo sucede con los árboles o los edificios; en otras palabras el mundo de Hiperbólico, al igual que el nuestro, es tridimensional.

La geometría de este mundo tridimensional es algo que a Hiperbólico le interesa conocer y, para ello, sale a comprar gran cantidad de papel y lápices. Ni qué decir que nosotros compartimos su interés. Empecemos por decir dónde vemos que nuestro amigo se mueve y qué le sucede al hacerlo.

Hiperbólico se mueve y vive en el semiespacio situado por encima del plano  $xy$ , es decir

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$$

En forma similar a lo que pasa en el h-plano, los puntos del plano  $xy$ , cuya ecuación es  $z = 0$ , tienen por temperatura el cero absoluto y el tamaño de Hiperbólico y de los objetos que lo rodean aumenta o disminuye proporcionalmente a la componente  $z$  de sus coordenadas. Nótese que el plano  $xy$  desempeña el papel del eje  $x$  en el h-plano, así como la coordenada  $z$  es el equivalente de la  $y$ .

De manera similar a como sucede en el plano de Hiperbólico, la diferencial de longitud en el sentido de Hiperbólico es

$$dS_h = \frac{dS}{z} \quad \text{donde} \quad dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Luego, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  es una curva dada por  $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ , su h-longitud es

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{z} \frac{dS}{d\theta} d\theta = \int_a^b \frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Las transformaciones del h-espacio que preservan la longitud de las curvas, al igual que antes, son llamadas *transformaciones rígidas o isometrías*.

Un ejemplo de transformación rígida del h-espacio es el inducido por una isometría del plano  $xy$ . Con más detalle, sea  $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dicha isometría y definamos  $\tilde{I} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  como

$$\tilde{I}(x, y, z) = (I(x, y), z)$$

Para verificar que  $\tilde{I}$  preserva la h-longitud de las curvas en el h-espacio, el lector no tiene más que recordar que  $I$  es la composición de una rotación, una translación y posiblemente una reflexión.

Observemos que dado un plano  $P$  perpendicular al plano  $xy$ , existe una de estas transformaciones,  $\tilde{I}$ , que lo envía en el plano  $yz$ . Este hecho nos permite suponer que toda curva en el espacio de Hiperbólico tiene sus extremos en el plano  $yz$ , que denotaremos por  $\mathcal{P}_{yz}$ . Veamos ahora que dada una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  con  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$  en el plano  $yz$ , su proyección ortogonal en el plano  $yz$ , es otra curva con los mismos extremos y longitud menor o igual que  $\gamma$ . Con más detalle, si las coordenadas de  $\gamma$  son  $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$  (donde sabemos que  $x(a) = x(b) = 0$ ) entonces la proyección ortogonal es la curva  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathcal{P}_{yz}$ , dada por  $\tilde{\gamma}(\theta) = (0, y(\theta), z(\theta))$ , (notemos que  $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$  y  $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$ ).

Ahora bien, como la primera coordenada de  $\tilde{\gamma}(\theta)$  es cero, su h-longitud es:

$$S_h(\tilde{\gamma})(a, b) = \int_a^b \frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta,$$

la cual es menor o igual que

$$S_h(\gamma)(a, b) = \int_a^b \frac{1}{z} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

pues los integrandos guardan esta relación.

Como consecuencia de esta observación y de los resultados del inicio de este trabajo, tenemos que las rectas de Hiperbólico en su espacio tridimensional siempre están situadas en un plano paralelo al eje  $z$  y que son semirrectas paralelas a dicho eje o semicircunferencias con centro en el plano  $xy$ .

En concordancia con lo anterior tenemos que los h-planos del espacio de Hiperbólico son semiplanos paralelos al eje  $z$  o semiesferas con centro en el plano  $xy$ . El lector no tendrá dificultad en ver que estos h-planos quedan determinados por tres puntos no alineados (Véase figura 53).

Al igual que en nuestro espacio, en el espacio de Hiperbólico hay esferas con cualquier centro y radio, y que a primera vista no se distinguen de las nuestras, pues como conjuntos

de puntos coinciden, pero cuando vemos otros elementos, por ejemplo donde ésta situado su centro, notamos que hay profundas diferencias entre un caso y otro.

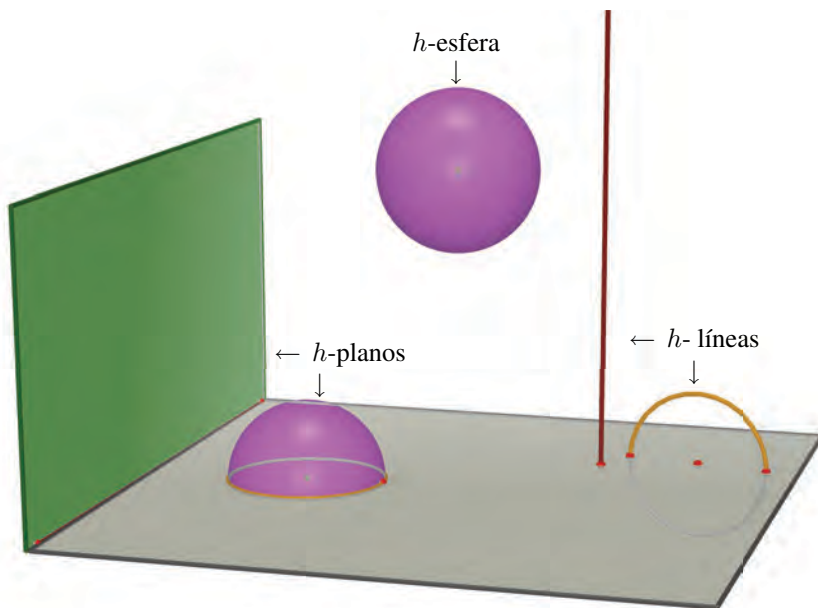


FIGURA 53.

Otra diferencia importante es que si bien, en forma similar a lo que pasa en  $\mathbb{R}^3$ , una h-esfera queda determinada por cuatro puntos no h-coplanares, el recíproco no es cierto; porque cuatro puntos no h-coplanares pueden determinar una esfera situada por encima del plano  $xy$  (una h-esfera), pero también podrían determinar una esfera tangente al plano  $xy$  (una horoesfera) o una que intersece dicho plano o un plano euclidiano que no sea paralelo al eje  $z$  (véase figura 54).

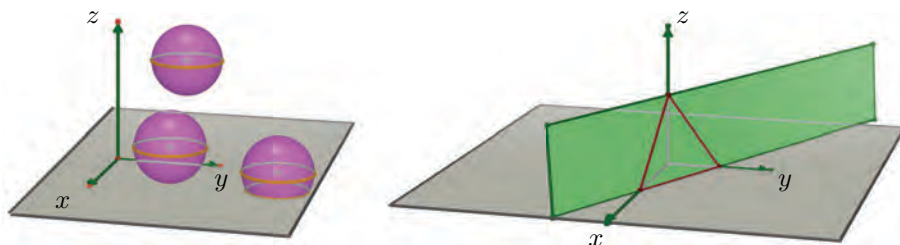


FIGURA 54.

La situación anterior es la generalización de lo que pasa en el h-plano con las circunferencias, que dan lugar a las “equidistantes” y a los “horociclos”, teniendo ahora *superficies equidistantes y horoesferas*.

Las horoesferas están dadas por esferas euclidianas tangentes al plano  $xy$  y situadas por encima de éste o por planos paralelos al plano  $xy$ ; dadas dos horoesferas existe una transformación rígida que envía una de ellas en la otra.

Las superficies equidistantes están dadas por esferas euclidianas que intersectan el plano  $xy$  en una circunferencia o por planos que intersectan al plano  $xy$  y que no son perpendiculares a éste. Dada una superficie equidistante, siempre la podemos pensar como uno de tales planos.

Lo anterior se comprende tomando en cuenta el hecho que las inversiones con centro en el plano  $xy$  son h-isometrías del h-espacio, lo cual examinamos brevemente a continuación.

Consideremos la esfera  $S$  de radio  $\rho$  y centro el origen, es decir,

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\} .$$

Definamos  $\mathbb{I} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  por  $\mathbb{I}(x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  donde

$$\bar{x} = \frac{\rho^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \bar{y} = \frac{\rho^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \bar{z} = \frac{\rho^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

De estas expresiones, es inmediato que si  $(x, y, z) \in S$  entonces  $\mathbb{I}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Además, también es directo que, salvo pequeños detalles con el origen,  $\mathbb{I}$  transforma planos y esferas en planos o esferas. En particular los planos que pasan por el origen se transforman en sí mismos. De aquí también tenemos que  $\mathbb{I}$  transforma rectas y circunferencias en rectas o circunferencias, pues una recta la podemos ver como la intersección de dos planos y una circunferencia como la intersección de dos esferas o de una esfera y un plano.

De lo anterior también es claro que  $\mathbb{I}$  establece una correspondencia biunívoca entre  $\mathbb{R}_+^3$  y  $\mathbb{R}_+^3$ . Esta correspondencia preserva las h-longitudes de las curvas y en particular las h-distancias.

Luego  $\mathbb{I}$  es una h-isometría del h-espacio tridimensional (para verificar que preserva h-longitudes se siguen los mismos pasos del caso de dimensión 2).

Lo afirmado para  $\mathbb{I}$  es válido para cualquier otro valor de  $\rho$  y cualquier otro centro en el plano  $xy$ . Estas isometrías que provienen de inversiones, corresponden a reflexiones respecto al h-plano  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = \rho^2$ , contenido en el h-espacio tridimensional, y al igual que en el caso bidimensional, no preservan la orientación.

Análogamente al caso del espacio euclidiano, tenemos que cualquier isometría del h-espacio tridimensional puede expresarse como la composición de a lo más cuatro de estas reflexiones. La justificación de ello queda a cargo del lector.

Por supuesto las isometrías del h-espacio también preservan ángulos, h-áreas y h-volúmenes, y las razones de ello son las mismas del caso bidimensional. Si el lector desea reconstruir los argumentos debe tener en cuenta las relaciones entre las diferenciales del área y el volumen en el caso del espacio euclidiano y del h-espacio. O sea

$$dA_h = \frac{dA}{z^2} \quad \text{y} \quad dV_h = \frac{dV}{z^3} .$$

Conociendo estos resultados podemos calcular, por ejemplo, el volumen de una h-esfera con radio de Hiperbólico  $\rho$ . Para ello procedemos como en el caso bidimensional, tomando la esfera con centro en el punto  $(0, 0, 1)$  y radio euclidiano  $r$ , donde  $r$  es tal que  $\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{1-r}{1+r}$ , y calculando la integral asociada, es decir

$$V_h(S_h(\rho)) = \iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{z^3}$$

donde  $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq r^2\}$ . Después de integrar con respecto a  $x$  e  $y$ , tenemos que

$$\begin{aligned} V_h(S_h(\rho)) &= \pi \int_{1-r}^{1+r} \frac{r^2 - (z-1)^2}{z^3} dz = \pi \int_{1-r}^{1+r} \left[ \frac{r^2 - 1}{z^3} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} \right] dz = \\ &= \pi \left[ \frac{1-r^2}{2z^2} - \frac{2}{z} - \ln z \right]_{1-r}^{1+r} = \pi \left[ \frac{2r}{1-r^2} + \ln \frac{1-r}{1+r} \right] \end{aligned}$$

y haciendo uso de que  $\rho = \frac{1}{2} \ln \frac{1-r}{1+r}$  y de que  $r = \frac{e^{2\rho} - 1}{e^{2\rho} + 1}$ , después de un poco de manipulación algebraica, obtenemos

$$V_h(S_h(\rho)) = \pi [\sinh(2\rho) + 2\rho]. \quad \left( = \frac{4}{3}\pi\rho^3 + \dots \right)$$

Si deseamos calcular el área, basta con derivar:

$$A_h(S_h(\rho)) = 2\pi [\cosh(2\rho) - 1]. \quad \left( = 4\pi\rho^2 + \dots \right)$$

Lo que aparece entre paréntesis, después de cada fórmula, es el primer término del desarrollo de Taylor.

El lector habrá notado que no hemos tocado el problema del volumen de una pirámide o tetraedro; no es un olvido, sino que se trata una cuestión mucho más delicada de lo que a primera vista se podría pensar.

Por supuesto Hiperbólico conocía estas fórmulas, pero estaba más interesado en otros asuntos, por ejemplo las horoesferas.

## 18. HIPERBÓLICO Y LAS HOROESFERAS

Por alguna razón que no queda clara, Hiperbólico pensó en cómo sería la vida para un ser bidimensional que viviese atrapado en la superficie de una horoesfera, sin poder salir de ella. Las primeras preguntas que se hizo fueron ¿cuáles serían para él las “rectas”, es decir, las trayectorias más cortas para ir de un punto a otro?, ¿qué propiedades tendrían y cómo serían sus triángulos, polígonos y circunferencias?, ¿cuál sería su idea de ángulo?

Poco a poco fue dando respuesta a sus preguntas. La idea de “recta” que este ser habría construido sería la de una h-geodésica en la horoesfera para Hiperbólico, y su longitud sería la misma para este ser y para Hiperbólico. Lo mismo sucedería con las longitudes de las curvas y las áreas de las figuras. También ambos verían los mismos ángulos. Dos puntos determinaban una recta. Pero no todo era tan simple y natural; con las circunferencias ya pasaban algunas cosas raras: si bien eran las mismas en un mundo y otro, sus centros no coincidían. Además, en ese mundo raro, por tres puntos no alineados, siempre pasaba una y sólo una circunferencia. Pero el asunto no paraba allí ¡en ese mundo, por un punto exterior a una recta pasaba una y sola una paralela!, ¡los ángulos interiores de un triángulo siempre sumaban  $180^0$ ! además ¡había triángulos con área tan grande como se quisiese!, ¡nada más loco! Bueno ¡ese mundo se podía tapizar con polígonos regulares de muy pocas maneras!, con triángulos (seis por vértice), con cuadrados (cuatro por vértice) y con hexágonos (tres por vértice). Indudablemente, todo esto significó un gran trabajo y esfuerzo por parte de Hiperbólico, pero para nosotros es casi inmediato, pues basta tomar la horoesfera dada por el plano  $z = 1$  y percatarnos de que para curvas contenidas en ella, las diferenciales de longitud para Hiperbólico y para Euclides coinciden

$$dS_h(\gamma) = \frac{dS(\gamma)}{z} \quad \text{con } z = 1$$

y lo mismo para la diferencial de área.

$$dA_h(\Omega) = \frac{dA(\Omega)}{z^2} \quad \text{con } z = 1$$

Así pues, tenemos que en esta horoesfera, la geometría asociada es la euclidiana, lo que nos aclara las cosas.

Es interesante saber que Hiperbólico, en su mundo, dispone de un juguete que es nuestro plano euclidiano. Esto es precisamente el significado de lo que acabamos de ver.

## 19. UN POCO DE LA GEOMETRÍA DE LA ESFERA DE HIPERBÓLICO: RECUBRIMIENTOS Y POLIEDROS REGULARES

Otros de los objetos geométricos del mundo de Hiperbólico que le interesaban eran las esferas. No es claro si primero exploró la geometría de las horoesferas y después la de las esferas o fue al revés, pero lo cierto es que en los dos casos sigue las mismas pautas.

En el caso de las esferas también piensa en un ser bidimensional que vive atrapado en la superficie de una h-esfera y lo primero que se pregunta es- ¿para ir de un punto a otro, qué trayectoria es la que este ser usará?; por supuesto, suponiendo que lo quiere hacer siguiendo la trayectoria más corta. Después de pensar un buen rato llegó a la convicción de que su trayectoria será un segmento de círculo máximo; es decir un h-círculo cuyo centro coincide con el de la h-esfera.

Por sus dibujos, nos parece que, a grandes rasgos, su argumento es el siguiente: sea  $S$  la h-esfera en cuestión. Llamemos  $A$  y  $B$  a los extremos de la trayectoria que este ser recorre y situemos  $S$  de tal forma que  $O$ , el h-centro de la h-esfera se encuentre en el punto  $(0,0,1)$  y el punto  $A$  también se encuentre en el eje  $z$  pero por encima del centro  $O$  (véase figura 55).

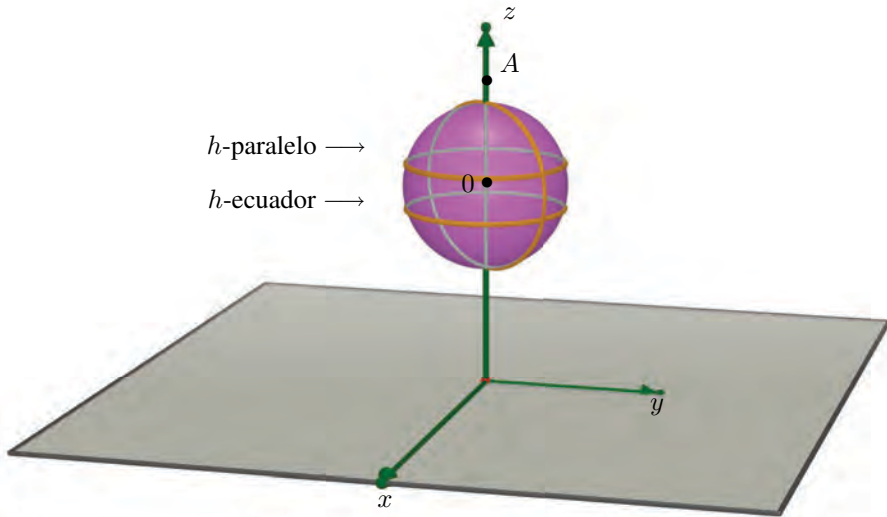


FIGURA 55.

Consideremos el círculo máximo de  $S$  que tiene su diámetro sobre el eje  $z$  y que pasa por el punto  $B$ , y tomemos de los dos segmentos determinados por los puntos  $A$  y  $B$ , el de menor longitud; mostraremos que cualquier curva que una  $A$  y  $B$  tiene longitud mayor o igual que la de este segmento (véase figura 56).

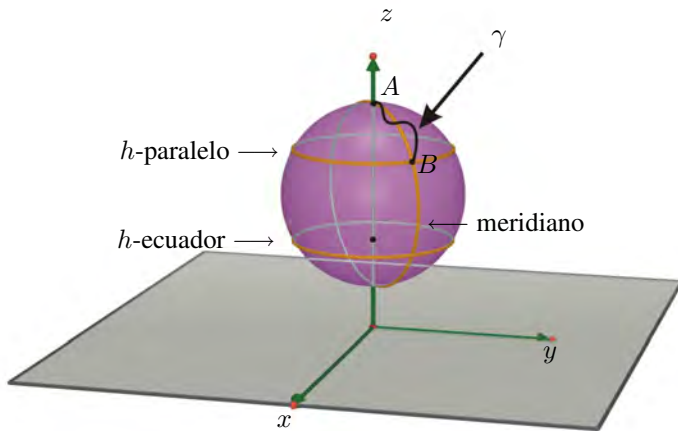


FIGURA 56.

Para conseguir nuestro propósito, pensemos que nuestra trayectoria no es un segmento de “meridiano” y que por lo tanto existe un punto  $P$  en el que la dirección de la curva no coincide

con la del “meridiano” que pasa por dicho punto. Tomemos ahora el paralelo que pasa por  $P$  y otro que pase por  $P + dS$ , donde  $dS$  es un infinitesimal de longitud con la misma dirección que el meridiano en cuestión (véase figura 57). Asimismo  $dS'$  es el infinitesimal de longitud correspondiente a la trayectoria  $\gamma$  entre los dos paralelos.

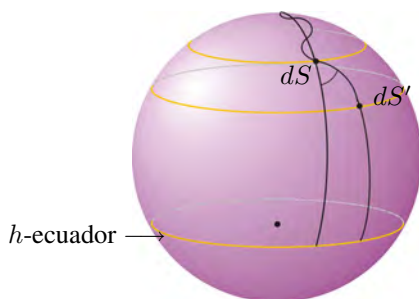


FIGURA 57.

La longitud de  $dS'$  es mayor que la de  $dS$  y de ello nos damos cuenta tomando las longitudes euclidianas  $\frac{dS}{y_0}$  y  $\frac{dS'}{y_0}$  y considerando que  $\frac{dS'}{y_0}$  es la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene como cateto a  $\frac{dS}{y_0}$ .

De esta observación se sigue directamente el resultado (este argumento, para el caso euclidiano, está explicado con todo detalle en J.J. Rivaud, “Acerca de mapas”, Miscelánea Matemática. Número. 27 (pp. 39-59), México, 1998).

Sabiendo ya quienes son las “rectas” en la geometría del mundo que estaba empezando a explorar, Hiperbólico vio que dos puntos no antipodales determinaban una “recta”, que dos “rectas” coincidían o se intersectaban en dos puntos y que por lo tanto no existían rectas paralelas. También vio que en ese mundo la suma de los ángulos interiores de un triángulo era mayor que  $180^\circ$ , lo que, por alguna extraña corazonada, le hizo recordar los recubrimientos por polígonos regulares del h-plano y del extraño mundo de la horoesfera; pero primero decidió calcular el área de un triángulo en una h-esfera.

Con este propósito tomó una h-esfera de radio  $\rho$ , con centro en el eje  $z$  y consideró un huso esférico completo con ángulo de abertura  $\alpha$  y los polos como vértices (véase figura 58)

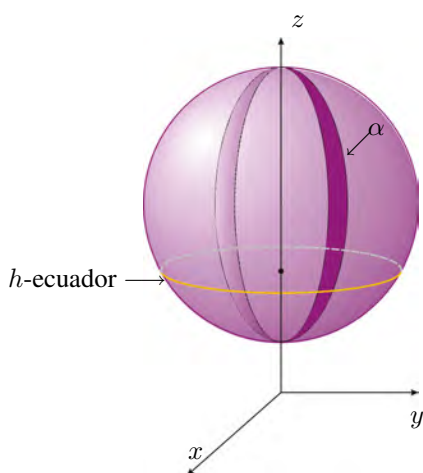


FIGURA 58.

Esta elección a nosotros nos resulta muy favorable, pues nos permite entender la geometría con poco esfuerzo.



Denotando por  $A_h(\rho)$  la superficie de la h-esfera de radio  $\rho$ , y por  $U(\alpha)$  a la del huso en cuestión, una simple regla de tres nos da:

$$U(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} A_h(\rho)$$

Ahora bien, si tenemos un triángulo con ángulos interiores  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , y consideramos los husos correspondientes a cada vértice (véase figura 59), tenemos que la esfera quedará cubierta por estos husos, con la particularidad de que tanto el triángulo con ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , como el diametralmente opuesto están cubiertos por los tres husos, mientras que los otros puntos sólo lo están una vez.

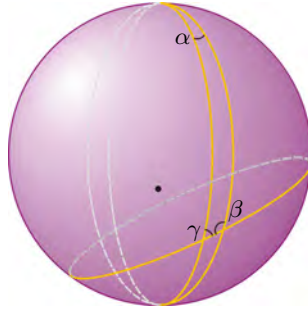


FIGURA 59.

Además del hecho de que la h-reflexión respecto a un punto dado es una h-isometría, es directo que un triángulo en la h-esfera y su diametralmente opuesto, tienen la misma área. Por lo tanto si denotamos por  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  el área de dicho triángulo, tenemos que:

$$\begin{aligned} A_h(\rho) + 4T(\alpha, \beta, \gamma) &= U(\alpha) + U(\beta) + U(\gamma) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \frac{A_h(\rho)}{\pi}, \end{aligned}$$

de donde:

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \frac{A_h(\rho)}{4\pi}$$

Esta fórmula sorprendió a Hiperbólico por su parecido con la de un triángulo en el h-plano, y a nosotros nos debe sorprender aun más, pues es prácticamente igual a la de un triángulo en una esfera euclidiana ( $T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2$ ), pero no sólo eso, ¡su deducción es en ambos casos la misma!

Esta fórmula también le sirvió a Hiperbólico para convencerse fuera de toda duda que, como ya dijimos antes, los ángulos de un triángulo en una h-esfera suman más de  $\pi$  radianes, o lo que es lo mismo, más de  $180^\circ$ .

De este resultado es directa la fórmula para el área de un polígono regular de h-lados y ángulos interiores con magnitud  $\alpha$ , situados en una h-esfera de radio  $\rho$ .

$$P_h(n, \alpha) = (n\alpha - (n - 2)\pi) \frac{A_h(\rho)}{4\pi}$$

Para verificar el resultado, basta analizar la Figura 60 y un poco de álgebra elemental

Después de estos resultados pensó que ya podía enfrentar el problema de los recubrimientos y repitió el argumento que ya antes había dado para el h-plano y la h-esfera, llegando a la conclusión que si queremos recubrir la h-esfera con polígonos regulares de  $n$  lados de tal forma que en cada vértice coincidan  $m$  de ellos, entonces se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \quad (n > 2, m > 2)$$

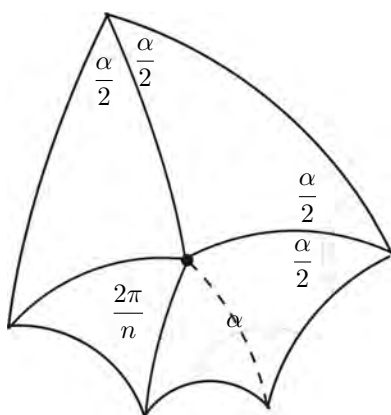


FIGURA 60.

que, como ya vimos, sólo la cumplen las siguientes cinco parejas (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3), es decir tres triángulos en cada vértice, tres cuadrados en cada vértice, etcétera.

Esta información le permitió calcular el área de los polígonos en cuestión para cada recubrimiento y así ver, en cada caso, cuántos son necesarios. Para ello primero hay que calcular la magnitud de los ángulos interiores de los polígonos, la cual es  $\frac{2\pi}{m}$  y teniendo en cuenta el número de lados tenemos que los polígonos de los recubrimientos posibles, de acuerdo con la fórmula, tienen área

$$\begin{aligned} P_h(n, m, \alpha) &= \left( n \frac{2\pi}{m} - (n-2)\pi \right) \frac{A_h(\rho)}{4\pi} \\ &= \frac{2n - nm + 2m}{4m} A_h(\rho). \end{aligned}$$

Como la h-esfera de radio  $\rho$  tiene el área  $A_h(\rho)$ , la fórmula anterior nos dice que para el caso (3, 3) (tres triángulos en cada vértice) hacen falta cuatro de tales polígonos, para la pareja (3, 4) el número requerido es ocho, para la (3, 5) veinte, para la (4, 3) seis y para la pareja (5, 3) doce.

Sabiendo ya cuales son las posibilidades para recubrir la h-esfera con polígonos regulares, cuánto deben medir sus ángulos interiores y cual es el número de ellos que hace falta, Hiperbólico pudo conseguir efectivamente cada uno de los recubrimientos. Nosotros omitimos esta parte del trabajo de Hiperbólico, pero dado que el argumento es idéntico para los recubrimientos de una esfera euclidiana, estamos seguros de que el lector podrá completar el argumento (este tema está desarrollado con todo detalle en J.J. Rivaud, R. Quintero, "Como el área de la esfera es  $4\pi r^2$ , entonces...", *Miscelánea Matemática*. No. 30 (pp. 1-15), México, 2000).

Por supuesto que Hiperbólico estaba feliz de haber obtenido estos resultados y de haber podido ver a qué correspondían esas cinco parejas que le preocupaban desde que pensó en el problema de tapizar el h-plano o la horoesfera, pero siguió con sus sueños y tomó los h-poliedros regulares inscritos en la h-esfera de radio  $\rho$  y que tuviesen por vértices los de algunos de estos recubrimientos y vio que sólo había cinco, tres con caras triangulares (cuatro, ocho o veinte de ellas), uno con seis caras cuadradas y otro más con doce caras pentagonales.

Además eran los únicos h-poliedros regulares posibles, pues si tenemos un h-poliedro regular lo podemos inscribir en una h-esfera y tomar sus vértices como vértices de un recubrimiento de ésta, y ya sabemos que sólo los cinco descritos anteriormente son posibles. Como el lector sin duda ya se habrá percatado, son los "mismos" poliedros regulares que existen en el espacio euclidiano y hay distintas maneras de ver la relación que guardan entre sí o con los poliedros regulares de  $\mathbb{R}^3$ ; pero este punto no lo tocaremos, baste decir que a medida que el tamaño de los poliedros del h-espacio se hace más pequeño, éstos se parecen más a los euclidianos.

Cuando variamos el radio  $\rho$  de la h-esfera en que está inscrito un poliedro regular, el área de las caras de éste también varía y esta variación se lleva a cabo entre  $0$  y  $(n - 2)\pi$  (donde  $n$  es el número de lados de una cara). Lo anterior implica que el ángulo interior  $\alpha$  del polígono que forma la cara varíe entre  $\frac{n-2}{n}\pi$  y  $0$ ; situación muy distinta a la euclidiana que, como veremos en un instante, tiene interesantes repercusiones.

El siguiente problema que Hiperbólico se planteó fue “tapizar” con poliedros regulares el h-espacio. Lo primero que observó es que si tomaba dodecaedros del tamaño adecuado para que los ángulos interiores de sus caras fuesen de  $90^0$  (véase figura 61), entonces podía colocar ocho de ellos alrededor de un punto de tal manera que no dejen espacio vacío ni se superpongan en la vecindad de dicho punto (véase figura 62); de la misma manera que nosotros podemos colocar ocho cubos en  $R^3$ . Luego, ¡con tales dodecaedros es posible recubrir el h-espacio! (véase figura 62).

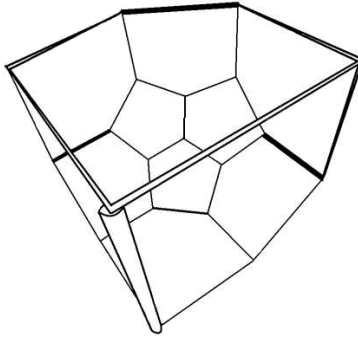


FIGURA 61.

Sus pesquisas fueron más lejos y vio que hay otras tres formas para recubrir su mundo con poliedros regulares, pero sin duda el lector quiere averiguarlo por sí mismo. (Sobre este tema J.J. Rivaud amenaza con someter a *Miscelánea Matemática*, para su publicación, un artículo titulado “*Tapizando el Espacio con Poliedros Regulares*”<sup>4</sup>).

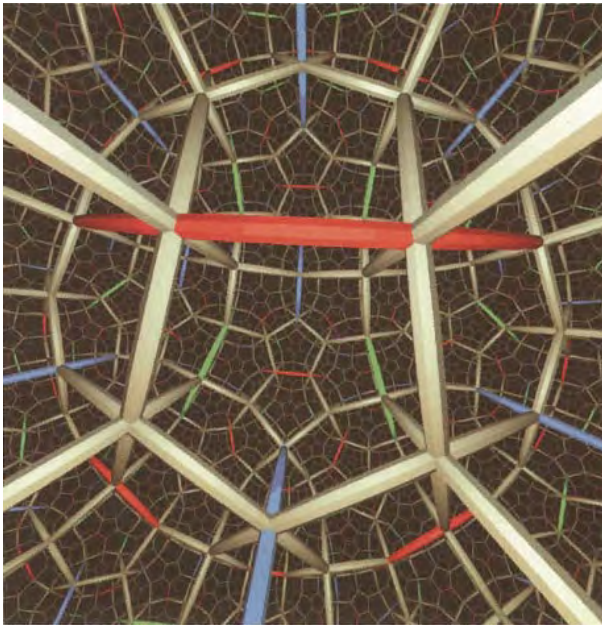


FIGURA 62. <http://reperiendi.wordpress.com/2011/01/31/regular-tilings-of-three-dimensional-spaces/>

<sup>4</sup>Nota de las Editoras: A Juan José Rivaud no le dio el tiempo la oportunidad de terminar el artículo referido.

## 20. PARA TERMINAR

Me gustaría poder decir, como lo hizo Descartes en el último párrafo de *La geometría*, que “Espero que nuestros descendientes sabrán reconocermé no sólo las cuestiones que he explicado, sino también aquéllas que he omitido voluntariamente con el fin de permitirles disfrutar del placer que produce su descubrimiento”. Pero no es éste mi caso, hay muchas otras cosas que me hubiera gustado haber dicho, pero que por no venir a cuento en ese momento o porque nos desviaba del propósito, y porque después no encontré el lugar adecuado, no aparecen en el texto; ejemplo de ello es la existencia, en el h-plano de una unidad “natural” para medir las áreas y cómo, a partir de ella, se puede dar una para la longitud, situación completamente distinta a lo que sucede en el plano euclidiano, donde la unidad de medida es arbitraria. Otro detalle es la noción de radián en términos intrínsecos del h-plano. Por necesitar de más espacio y por gustos personales, he omitido cualquier mención a la trigonometría hiperbólica, tema en el que Hiperbólico es un experto. Tampoco se abordan en este trabajo la historia de la geometría hiperbólica, o las cuestiones de carácter filosófico que la existencia de geometrías no euclidianas plantean.

En fin, hay muchas más cosas que no digo que cosas que sí hago. Ojalá el lector lo tome como una invitación a seguir adelante con el tema. ¡Buena suerte!

## 21. APÉNDICE

Como dijimos anteriormente, a continuación daremos sugerencias para que el lector interesado calcule la h-longitud de una circunferencia y el h-área de un círculo, no sin dejar de advertirle que requerirá armarse de paciencia.

## 21.1. Cálculo de la h-longitud de la circunferencia. Debemos calcular la integral

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 2 \int_{1-r}^{1+r} \frac{1}{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= 2r \int_{1-r}^{1+r} \frac{dy}{y \sqrt{r^2 - (y-1)^2}} = \\ &= 2r \int_{-r}^r \frac{dy}{(y+1) \sqrt{r^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Cuando hacemos la sustitución  $y = r \operatorname{sen} \theta$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{(1 + r \operatorname{sen} \theta) r \cos \theta} d\theta \\ &= 2r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + r \operatorname{sen} \theta}. \end{aligned}$$

Mediante cambio de variable

$$u = \tan \frac{\theta}{2},$$

que tiene la virtud de transformar integrales de funciones racionales en  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  en funciones racionales de  $u$ , obtenemos

$$\begin{aligned} L_h(c, r) &= 4r \int_{-1}^1 \frac{du}{u^2 + 2ru + 1} \\ &= 4r \int_{-1}^1 \frac{du}{(u+r)^2 + (1-r^2)}. \end{aligned}$$

Como, en esta situación  $0 < r < 1$ , se trata de una integral de “tipo” arctan, cuando hacemos

$$v = \frac{u+r}{\sqrt{1-r^2}}$$

la nueva integral que debemos calcular es

$$L_h(c, r) = \frac{4r}{\sqrt{1-r^2}} \int_{v_-}^{v_+} \frac{dv}{v^2 + 1}$$

donde

$$v_+ = \frac{1+r}{\sqrt{1-r^2}} = \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}, \quad y \quad v_- = \frac{-1+r}{\sqrt{1-r^2}} = -\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}.$$

Por lo tanto

$$L_h(c, r) = \frac{4r}{\sqrt{1-r^2}} \left( \arctan \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} + \arctan \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right)$$

Finalmente, recordando que  $\arctan a + \arctan a^{-1} = \pi/2$ ,

$$L_h(c, r) = \frac{2r\pi}{\sqrt{1-r^2}}.$$

**21.2. Cálculo h-área de la circunferencia.** Ahora debemos calcular

$$\begin{aligned} A_h(c) &= \int_{-r}^r \left[ \int_{1-\sqrt{r^2-x^2}}^{1+\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{y^2} \right] dx \\ &= \int_{-r}^r \left[ \frac{1}{1-\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{r^2-x^2}} \right] dx. \end{aligned}$$

Cuando hacemos la sustitución  $x = r \sin \theta$  en estas integrales, obtenemos:

$$A_h(c) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{1-r \cos \theta} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{1+r \cos \theta} d\theta.$$

Como

$$\frac{r \cos \theta}{1-r \cos \theta} = -1 + \frac{1}{1-r \cos \theta}, \quad y \quad \frac{r \cos \theta}{1+r \cos \theta} = 1 - \frac{1}{1+r \cos \theta}.$$

entonces

$$A_h(c) = -2\pi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-r \cos \theta} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+r \cos \theta} d\theta.$$

Estas últimas integrales se calculan al modo de la calculada en la sección anterior.





UAM-Iztapalapa



## Posgrados : Maestría y Doctorado en Matemáticas

[pmat@xanum.uam.mx](mailto:pmat@xanum.uam.mx)

<http://pmat.izt.uam.mx/>

### LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Teoría de anillos y módulos.  
Teoría de conjuntos y lógica.  
Geometría algebraica.  
Geometría diferencial y Riemanniana.  
Teoría de números.  
Teoría de códigos y criptografía.  
Análisis geométrico.  
Física matemática.  
Análisis diferencial.  
Matemáticas discretas, combinatoria y gráficas.  
Dinámica de fluidos computacional.  
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.  
Métodos matemáticos en finanzas y economía.  
Control y sistemas dinámicos.  
Mecánica celeste, sistemas hamiltonianos y aplicaciones a la física.  
Persistencia y bifurcación en sistemas dinámicos.  
Control, estabilidad y robustez de sistemas estocásticos.  
Metodología estadística.  
Estadística asintótica.  
Topología de conjuntos, grupos topológicos y Cp-teoría.  
Métodos geométricos en mecánica. Dinámica de vórtices. Mecánica celeste

matemáticas

## Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales (MACMAI)

[mlss@xanum.uam.mx](mailto:mlss@xanum.uam.mx)

<http://mcm.ai.izt.uam.mx>

### LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Códigos y Criptografía  
Control y Sistemas Dinámicos  
Combinatoria y Optimización  
Estadística  
Métodos Matemáticos en Finanzas  
Modelación y Simulación Computacional



Casa abierta al tiempo

UAM-Iztapalapa

---

# CONTENIDO

**9 LA INTUICIÓN Y LA ESTRUCTURA  
ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA**  
Luis Moreno Armella

**25 MI HERMANO JUANJO**  
Amelia Rivaud Morayta

**29 HIPERBÓLICO Y LOS MUNDOS**  
Gerardo Hernández

**31 EL MUNDO DE HIPERBÓLICO: UNA INTRODUCCIÓN  
A LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI.**  
Juan José Rivaud Morayta

