Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. IV, junio de 2013, 7–11

UNA NOTA SOBRE LA CONJETURA DE SUMNER

NAHID YELENE JAVIER NOL   JOAQUÍN TEY CARRERA

Resumen. En 1971 Sumner conjeturó que todo árbol dirigido de orden n es $(2n-2)$-inevitable. Desde entonces, a pesar de los esfuerzos realizados, esta conjetura sólo ha sido demostrada parcialmente. En este trabajo generalizamos la familia de árboles dirigidos $(2n-2)$-inevitables de orden n propuesta por El Sahili en 2004.

1. Introducción

Los torneos son estructuras combinatorias muy ricas que han sido extensamente estudiadas en teoría de gráficas. Se han hecho muchas preguntas acerca de sus subdigráficas y en particular cuándo estas son árboles (ver [1], [2], [3], [4] y [5]). En este sentido, en 1971 Sumner conjeturó que todo árbol dirigido de orden $n \geq 2$ es $(2n-2)$-inevitable.

En 2004 El Sahili [4] demostró que todo árbol enraizado de orden n cuyas componentes hacia atrás son trayectorias es $(2n-2)$-encajable. El propósito de esta nota es mostrar que este resultado puede ser generalizado, siguiendo las ideas desarrolladas en [4].

Hemos omitido las definiciones básicas que pueden encontrarse en cualquier texto de teoría de gráficas (ver [6] por ejemplo).

Sean $A = (V', E')$ y $D = (V, E)$ digráficas.

- Un *encaje* de A en D es una inyección $f : V' \to V$ tal que $(f(v_i), f(v_j)) \in E$ para todo $(v_i, v_j) \in E'$.
- A es *m-inevitable* si existe un encaje de A en T para todo torneo T de orden m.
- Un *orden promedio* de D es un orden lineal $(v_1, v_2, ..., v_n)$ de V que maximiza $|\{(v_i, v_j) \in E : i < j\}|$.
- Sea $M = (v_1, v_2, ..., v_n)$ un orden promedio de D. Un *M-encaje* de A en D es un encaje f de A en D tal que para toda *sección final* $I = [v_{i+1}, v_n]$ de M se tiene que
$$|f(A) \cap I| < \frac{|I|}{2} + 1.$$
- A es *m-encajable* si A tiene un M-encaje en T para todo torneo T de orden m y todo orden promedio M de T.
- Un vértice de una digráfica es una *hoja* si la suma de su ingrado y exgrado es uno.
- Un *árbol enraizado* es un árbol dirigido con un vértice distinguido al que se le denomina *raíz.*
- Una *inarborescencia (exarborescencia)* es un árbol enraizado donde todo vértice tiene exgrado (ingrado) uno, excepto la raíz que tiene exgrado (ingrado) cero.
- Una *garra* es una inarborescencia donde sólo la raíz puede tener ingrado mayor que 1. El *grado de una garra* es el ingrado de su raíz.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C20, 05C05.
Palabras clave. árbol, árbol encajable, árbol inevitable, orden promedio, torneo.

Claramente, todo árbol dirigido m-encajable es m-inevitable pero el recíproco no es cierto. Para ver esto, en la Sección 3 mostramos un ejemplo de un árbol de orden 4 que es 6-inevitable pero no 6-encajable.

2. Una familia de árboles $(2n-2)$-encajables

Para construir la familia de árboles $(2n-2)$-encajables, necesitamos dos resultados demostrados en [4].

Proposición 1. *Sea T un torneo de orden $n \geq 3$ y $M = (v_1, v_2, ..., v_n)$ un orden promedio de T. Definamos $T' = T[\{v_1, v_2, ..., v_{n-2}\}]$ y $M' = (v_1, v_2, ..., v_{n-2})$. Sea D una digráfica y x una hoja de exgrado cero en D. Supongamos que $D' = D - x$ tiene un M'-encaje f' en T'. Entonces D tiene un M-encaje f en T que extiende a f'.*

Corolario 2. *Toda exarborescencia de orden $n \geq 2$ es $(2n-2)$-encajable.*

Sea A un árbol enraizado, si la raíz tiene ingrado cero diremos que es una *fuente* y que A es un árbol *bien enraizado*. El *nivel* de un vértice v de A es la distancia de v a la raíz de A, sin tener en cuenta las orientaciones de las flechas en A. Una flecha (x, y) es una *flecha hacia adelante* si el nivel de y es mayor que el de x, en caso contrario diremos que es una *flecha hacia atrás.* A una componente conexa de la subdigráfica inducida por las flechas hacia atrás de A la llamaremos *componente hacia atrás de* A.

Denotaremos por $\mathcal{F}$ al conjunto de inarborescencias m-inevitables de orden $m \geq 2$. Por ejemplo, una garra de grado no mayor que $\frac{3}{8}m$ pertenece a $\mathcal{F}$ (ver [5]). Observe que una trayectoria puede interpretarse como una garra de grado uno.

Ahora veremos cómo generalizar los argumentos utilizados en [4] para obtener una familia más amplia de árboles $(2n-2)$-encajables.

Proposición 3. *Todo árbol bien enraizado de orden $n \geq 2$ cuyas componentes hacia atrás están en $\mathcal{F}$ es $(2n-2)$-encajable.*

Demostración. Por inducción sobre $c(A)$, el número de componentes hacia atrás del árbol A. Si $c(A) = 0$, entonces A es una exarborescencia y por el Corolario 2 es $(2n-2)$-encajable. Sea A un árbol bien enraizado de orden $n \geq 2$ con raíz r, $c(A) \geq 1$, T un torneo de orden $2n-2$ sobre el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, ..., v_{2n-2}\}$ y $M = (v_1, v_2, ..., v_{2n-2})$ un orden promedio de T. Veamos que A tiene un M-encaje en T. Consideraremos dos casos.

Caso 1. Toda hoja de A tiene exgrado uno.

Sea B' una componente hacia atrás de A, con al menos una hoja de A. Denotemos a la raíz de B' por y. Como r es fuente de A se tiene que $y \neq r$. Supongamos que B' tiene m vértices, entonces $A' = A - B'$ es un árbol bien enraizado (con raíz r) de orden $n-m$ y con $c(A') = c(A) - 1$ componentes hacia atrás. Sean $T' = T\left[\{v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)-2}\}\right]$ y $M' = \left(v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)-2}\right)$, note que M' es un orden promedio de T'. Por hipótesis de inducción, A' tiene un M'-encaje f' en T'.

Sea $x \notin B$ tal que (x, y) es una flecha de A, claramente la flecha (x, y) es hacia adelante. Sea S un conjunto de m nuevos vértices y denotemos por A'' el árbol que se obtiene de A' adhiriendo los vértices de S al vértice x con flechas que inician en x. Aplicando la Proposición 1 m veces, A'' tiene un M-encaje f'' en T que extiende a f'. Por otra parte, $B' \in \mathcal{F}$ es decir B' está contenida en todo torneo de orden m. Luego, el subtorneo de T inducido por $f''(S)$ tiene una copia B'' de la inarborescencia B'.

Sea $g : V(B') \to V(B'')$ un isomorfismo de B' en B'' y $f : A \to T$ definida como

$$f(v) = \begin{cases} f'(v) & \text{si} \quad v \in V(A') \\ g(v) & \text{si} \quad v \in V(B') \end{cases}$$

Sin lugar a dudas, f es un encaje de A en T pero necesitamos probar que es también un M-encaje. Sea $I = [v_{i+1}, v_{2n-2}]$ una sección final de M.

Caso 1.1. $i + 1 \leq 2(n-m) - 2$.

Sea $I = I_1 \cup I_2$ donde

$$I_1 = \left[v_{i+1}, ..., v_{2(n-m)-2}\right]$$

e

$$I_2 = \left[v_{2(n-m)-2+1}, ..., v_{2n-2}\right].$$

Entonces

$$|f(A) \cap I| \quad = \quad |f'(A') \cap I_1| + |g(B') \cap I_2|.$$

Como f' es un M'-encaje de A' en T', tenemos que $|f'(A') \cap I_1| < \dfrac{|I_1|}{2} + 1$. Además $|g(B') \cap I_2| = |g(B')| = m = \dfrac{|I_2|}{2}$. Luego

$$|f(A) \cap I| < \frac{|I_1|}{2} + 1 + \frac{|I_2|}{2} = \frac{|I|}{2} + 1.$$

Caso 1.2. $i + 1 > 2(n-m) - 2$.

Considerando que

$$f(A) \cap I = g(B') \cap I \quad \text{y} \quad g(B') \subseteq f''(S),$$

se tiene que

$$f(A) \cap I \subseteq f''(S) \cap I.$$

Como f'' es un M-encaje de A'' en T, se concluye que $|f(A) \cap I| < \dfrac{|I|}{2} + 1$. Por lo tanto f es un M-encaje de A en T.

Caso 2. A tiene al menos una hoja de exgrado cero.

En tal caso, eliminaremos una a una las hojas de exgrado cero (inclusive las nuevas hojas que aparezcan durante este proceso) hasta que el árbol que resulte A' deje de tenerlas. Supongamos que en este proceso fueron eliminados k vértices. Sean $T' = T\left[\left\{v_1, v_2, ..., v_{2(n-k)-2}\right\}\right]$ y $M' = \left(v_1, v_2, ..., v_{2(n-k)-2}\right)$. Observe que A' satisface la condición del Caso 1, luego es posible encontrar un M'-encaje f' de A' en T'. Finalmente, aplicando k veces la Proposición 1, se puede construir un M-encaje de A en T que extiende a f'. □

Corolario 4 (El Sahili, [4]). *Todo árbol enraizado de orden $n \geq 2$ cuyas componentes hacia atrás son trayectorias es $(2n-2)$-encajable.*

Demostración. Sea A un árbol enraizado de orden $n \geq 2$ cuyas componentes hacia atrás son trayectorias. No es difícil comprobar que si la raíz de A no es fuente, es posible sustituirla por otro vértice de tal manera que el árbol que resulta A' es bien enraizado y donde todas sus componentes hacia atrás siguen siendo trayectorias. Como toda trayectoria está en $\mathcal{F}$, por la Proposición 3 A' es $(2n-2)$-encajable. □

3. Un árbol 6-inevitable que no es 6-encajable

En esta sección hacemos notar el hecho esperado de que m-inevitabilidad no implica m-encajabilidad. Daremos un ejemplo de un árbol de orden 4 que es 6-inevitable pero no 6-encajable.

Considere el árbol A de orden 4 en la Figura 1. Como todo torneo de orden 6 tiene un vértice de ingrado al menos tres, se tiene que A es 6-inevitable.

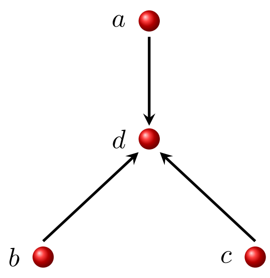

Figura 1. árbol A

Considere el torneo T_0 de orden 6 en la Figura 2. Se puede comprobar que $M_0 = (1, 2, 4, 3, 5, 6)$ es un orden promedio de T_0 (ver Figura 3).

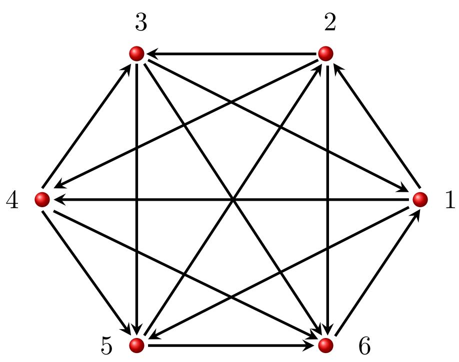

Figura 2. Torneo T_0

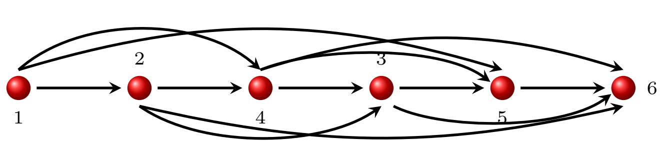

Figura 3. Orden promedio M_0

Recuerde que A es 6-encajable si A tiene un M-encaje en T, para todo torneo T de orden 6 y para todo orden promedio M de T. Para nuestro propósito, basta considerar los cinco encajes siguientes de A en T_0.

A	$f_1(A)$	$f_2(A)$	$f_3(A)$	$f_4(A)$	$f_5(A)$
a	1	2	2	2	3
b	3	3	3	4	4
c	4	4	5	5	5
d	5	6	6	6	6

Claramente para cada f_i y la sección final $I = [4, 6]$, la desigualdad

$$|f_i\,(A) \cap I| < \frac{|I|}{2} + 1$$

no se cumple por lo tanto A no es M_0-encajable en T_0.

Referencias

[1] B. Grünbaum, *Antidirected Hamiltonian Paths in Tournaments*, J. Combinatorial Theory Ser. B 11 (1971) 249-257.

[2] F. Havet y S. Thomassé, *Median orders of tournaments: a tool for the second neighborhood problem and Sumner's conjecture*, J. Graph Theory 35 (2000) 244-256.

[3] F. Havet, *Trees in tournament*, Discrete Math. 243 (1-3) (2002) 121-134.

[4] A. El Sahili, *Trees in tournaments*, J. Combinatorial Theory Ser. B 92 (2004) 183-187.

[5] X. Lu, *Claws contained in all n-tournaments*, Discrete Math. 119 (1993) 107-111.

[6] D. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall (1996).

Dirección de los autores:

Nahid Yelene Javier Nol
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `nahid@xanum.uam.mx`

Joaquín Tey Carrera
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `jtey@xanum.uam.mx`