



GENERALIZACIÓN DE ALGUNOS CRITERIOS PARA POLINOMIOS SEMI-ESTABLES

CARLOS ARTURO LOREDO VILLALOBOS EDGAR CRISTIAN DÍAZ GONZÁLEZ
BALTAZAR AGUIRRE HERNÁNDEZ

RESUMEN. La estabilidad de un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ se verifica por medio de su polinomio característico asociado $p_A(t)$. Si el polinomio es semi-estable se puede asegurar la estabilidad del sistema y si es estable se puede asegurar la estabilidad asintótica del sistema. En este trabajo presentamos algunas condiciones necesarias para verificar si un polinomio real es semi-estable, además de algunas generalizaciones del criterio de Hermite-Biehler aplicables a polinomios no necesariamente estables.

1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de la distribución de las raíces de un polinomio sobre el plano complejo, uno de los primeros problemas fue el de determinar el número de raíces reales de una ecuación; esto es, dada una ecuación de coeficientes reales, determinar (por algún criterio, que dependerá de sus coeficientes, y sin resolver la ecuación) si tiene raíces reales, en caso afirmativo, cuántas; o cuántas raíces positivas y cuántas negativas tiene. Decimos que un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ es estable si todas sus raíces se encuentran en \mathbb{C}^- , donde \mathbb{C}^- es el conjunto de números complejos que tienen parte real negativa. Se conocen los criterios clásicos de Routh-Hurwitz (tal vez, el más conocido), el criterio de Routh y Hermite-Biehler que dan condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio sea estable. Se pueden consultar otros criterios para saber si un polinomio es polinomio Hurwitz en [3] o [10], recientemente han aparecido resultados relativos a polinomios semi-estables [5]. Decimos que un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ es semi-estable si sus raíces están en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$. Esto implica que los polinomios estables son un subconjunto de los polinomios semi-estables. En las siguientes secciones mostraremos algunas condiciones para que un polinomio sea semi-estable, además de algunos criterios acerca de la distribución de sus raíces en el plano complejo.

2. EL ENFOQUE DE ROUTH-HURWITZ PARA POLINOMIOS SEMI-ESTABLES

Consideremos el polinomio real $p \in \mathbb{R}[x]$:

$$(1) \quad p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

con $a_0 \neq 0$, denotamos por $H(p)$ a la matriz de Hurwitz asociada a p , la cual queda definida como

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Denotemos por Δ_i , $1 \leq i \leq n$, los menores principales diagonales de $H(p)$, es decir

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \dots, \Delta_n = \det H(p)$$

El criterio de Routh-Hurwitz se puede consultar en [1], [8] y [9].

PROPOSICIÓN 1. *Considérese el polinomio real*

$$(2) \quad p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_n > 0$$

Si $p(x)$ es semi-estable entonces

$$\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0$$

Demostración: Sea $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ un polinomio real semi-estable con $a_n > 0$. Podemos reescribir a $p(x)$ de la siguiente forma $p(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$, entonces se tiene que $\operatorname{Re}(r_i) \leq 0$ para toda $i = 1, \dots, n$. Ahora considérese la sucesión de polinomios

$$p_k(x) = a_0\left(x + \frac{1}{k} - r_1\right)\left(x + \frac{1}{k} - r_2\right) \cdots \left(x + \frac{1}{k} - r_n\right)$$

con $k = 1, 2, \dots$. Nótese que $p_k(x) \rightarrow p(x)$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces $p_k(x)$ es estable para todo k pues $\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{k} + i\right) < 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Denotemos por Δ_i^k , $1 \leq i \leq n$ a los menores diagonales principales de $H(p_k)$. Ya que $p_k(x)$ es estable entonces $\Delta_1^k > 0, \Delta_2^k > 0, \dots, \Delta_n^k > 0$. Tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ se tiene que $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0$. \square

COROLARIO 2. *Si $H(p)$ es la matriz de Hurwitz asociada al polinomio $p(x)$ y si existe al menos un menor principal $\Delta_i < 0$, para algún $i = 1, \dots, n$, entonces $p(x)$ no es semi-estable.*

Ejemplo 1. Considérese el polinomio real $p(t) = t^3 + t^2 + t + 3$. La matriz de Hurwitz asociada es:

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0$ y $\Delta_3 < 0$. Por lo tanto, $p(t)$ no es semi-estable.

3. EL ENFOQUE DE ROUTH PARA POLINOMIOS SEMI-ESTABLES

En 1875 Edward J. Routh, usando el *Teorema de Sturm* y la teoría de *índices de Cauchy*, elabora un algoritmo para determinar el número k de raíces con parte real positiva de un polinomio real (ver [11]). En el caso particular cuando $k = 0$ este algoritmo provee un criterio de estabilidad. Una demostración de este criterio se desarrolla en [4]. Consideremos el polinomio real

$$f(z) = a_0z^n + b_0z^{n-1} + a_1z^{n-2} + b_1z^{n-3} + \dots \quad (a_0 \neq 0)$$

Entonces

$$f(i\omega) = a_0(i\omega)^n + b_0(i\omega)^{n-1} + a_1(i\omega)^{n-2} + b_1(i\omega)^{n-3} + \dots$$

Tomemos

$$f_1(\omega) = a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + \dots$$

$$f_2(\omega) = b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + \dots$$

y construimos una sucesión generalizada de Sturm

$$f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega), \dots, f_m(\omega)$$

por medio del algoritmo de Euclides. Entonces

$$\begin{aligned} f_3(\omega) &= \frac{a_0}{b_0}\omega f_2(\omega) - f_1(\omega) \\ &= c_0\omega^{n-2} - c_1\omega^{n-4} + c_2\omega^{n-6} - \dots \end{aligned}$$

donde

$$(3) \quad \begin{aligned} c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0}, \\ c_1 &= a_2 - \frac{a_0}{b_0} b_2 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0}, \\ c_2 &= a_3 - \frac{a_0}{b_0} b_3 = \frac{b_0 a_3 - a_0 b_3}{b_0}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Análogamente

$$(4) \quad \begin{aligned} f_4(\omega) &= \frac{b_0}{c_0} \omega f_3(\omega) - f_2(\omega) \\ &= d_0 \omega^{n-3} - d_1 \omega^{n-5} + d_2 \omega^{n-7} - \dots \\ d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0} c_1 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0}, \\ d_1 &= b_2 - \frac{b_0}{c_0} c_2 = \frac{c_0 b_2 - b_0 c_2}{c_0}, \\ d_2 &= b_3 - \frac{b_0}{c_0} c_3 = \frac{c_0 b_3 - b_0 c_3}{c_0}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Los coeficientes de los polinomios restantes $f_5(\omega), f_6(\omega), \dots, f_{n+1}(\omega)$ se determinan de manera similar. Con dichos coeficientes formamos el llamado *esquema de Routh*:

$$(5) \quad \left. \begin{array}{cccc} a_0, & a_1, & a_3, & \dots \\ b_0, & b_1, & b_3, & \dots \\ c_0, & c_1, & c_3, & \dots \\ d_0, & d_1, & d_3, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\}$$

Las fórmulas (3) y (4) muestran cómo obtener cada fila de este esquema.

TEOREMA 3 (Routh). *El número de raíces de un polinomio real $f(z)$ en el semiplano derecho ($\operatorname{Re} z > 0$) es igual al número de variaciones de signo de la primera columna del esquema de Routh.*

COROLARIO 4 (Criterio de Routh). *Todas las raíces del polinomio real $f(z)$ tienen parte real negativa, si y sólo si, al realizar el algoritmo de Routh todos los elementos de la primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo.*

Cuando $f(z)$ tiene raíces sobre el eje imaginario escribimos

$$f(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

donde

$$\begin{aligned} F_1(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \dots \\ F_2(z) &= b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Buscamos el máximo común divisor de $F_1(z)$ y $F_2(z)$, i.e. $d(z) = \operatorname{mcd}(F_1(z), F_2(z))$ y escribimos:

$$f(z) = d(z) f^*(z)$$

Si $f(z)$ tiene una raíz z en el eje imaginario, entonces $-z$ también será raíz. A partir de que $f(z) = f(-z) = 0$ se tiene que $F_1(z) = 0$ y $F_2(z) = 0$, es decir z es raíz de $d(z)$. Por lo tanto, $f^*(z)$ no tiene una raíz z para la cual $-z$ sea también raíz. Así, $d(z)$ tiene s raíces sobre el eje imaginario y $f^*(z)$ no tiene raíces imaginarias. En este caso el número k de raíces positivas es $k = k_1 + k_2$, donde k_1 y k_2 son el número de raíces

positivas de $f^*(z)$ y $d(z)$ respectivamente. Luego, k_1 puede determinarse mediante el algoritmo de Routh y

$$k_2 = \frac{q - s}{2}$$

donde $q = \text{grado}[d(z)]$ y s es el número de raíces reales de $d(i\omega)$.

PROPOSICIÓN 5. *Si $p(x)$ es semi-Hurwitz entonces se satisface sólo una de las siguientes propiedades:*

- (1) *Los elementos de primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo.*
- (2) *Si $d(x) = \text{mcd}(F_1(x), F_2(x)) \neq 1$ entonces $q = s$, donde $q = \text{grado}[d(z)]$ y s es el número de raíces reales de $d(i\omega)$*

Ejemplo 2. Verifiquemos si el polinomio $q(t) = t^5 + t^4 + 2t^3 + t^2 + t + 1$ es Hurwitz. Evaluamos q en $i\omega$

$$q(i\omega) = \omega^4 - \omega^2 + 1 + i(\omega^5 - 2\omega^3 + \omega)$$

Hacemos:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1$$

$$b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1$$

luego

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0} = \frac{1(1) - 1(2)}{1} = -1$$

$$c_1 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0} = \frac{1(1) - 1(1)}{1} = 0$$

$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0} = \frac{-1(2) - 1(0)}{-1} = 2$$

$$d_1 = \frac{c_0 b_2 - b_0 c_2}{c_0} = \frac{-1(1) - 1(0)}{-1} = 1$$

$$e_0 = \frac{d_0 c_1 - c_0 d_1}{d_0} = \frac{(2)(0) - (-1)(1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f_0 = \frac{e_0 d_1 - d_0 e_1}{e_0} = \frac{\frac{1}{2}(1) - 2(0)}{\frac{1}{2}} = 1$$

a_0	a_1	a_3	1	2	0
b_0	b_1	b_3	1	2	0
c_0	c_1		-1	0	
d_0	d_1		2	1	
e_0			$\frac{1}{2}$		
f_0			1		

Obsérvese que los elementos de la primera columna del esquema de Routh no son del mismo signo. Por lo tanto, $q(t)$ no es Hurwitz.

Ahora verifiquemos si es semi-Hurwitz. Construimos

$$F_1(t) = t^5 + 2t^3 + t \quad F_2(t) = t^4 + 2t^2 + 1$$

Luego, puede verificarse que $d(t) = \text{mcd}(F_1, F_2) = t^4 + 2t^2 + 1$, por lo que $q(t)$ es semi-Hurwitz.

4. CRITERIO DE HERMITE-BIEHLER PARA POLINOMIOS SEMI-ESTABLES

En esta sección daremos generalizaciones del criterio de Hermite-Biehler primero para polinomios semi-estables y después para polinomios sin ninguna restricción en la localización en sus raíces. Estas últimas generalizaciones son dadas en términos de una expresión analítica para la diferencia entre el número de raíces del polinomio en el semiplano abierto izquierdo y el semiplano abierto derecho.

4.1. Criterio de Hermite-Biehler. Para enunciar el Criterio de Hermite-Biehler utilizaremos las siguientes definiciones.

Considérese el polinomio real

$$p^*(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n$$

Podemos escribir a p^* de la siguiente forma

$$(6) \quad p^*(z) = (p_0 + p_2z^2 + p_4z^4 + \cdots) + z(p_1 + p_3z^2 + p_5z^4 + \cdots)$$

Evalutando en $i\omega$:

$$p^*(i\omega) = (p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \cdots) + i\omega(p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \cdots)$$

Definimos

$$(7) \quad p_e(z^2) = p_0 + p_2z^2 + p_4z^4 + \cdots$$

$$(8) \quad z \cdot p_o(z^2) = p_1z + p_3z^3 + p_5z^5 + \cdots$$

$$(9) \quad p_e(-\omega^2) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \cdots$$

$$(10) \quad p_o(-\omega^2) = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \cdots$$

Los polinomios (9) y (10) son polinomios reales o se convierten en polinomios reales después de cancelar i .

Definición 6 (Alternancia). Un polinomio real $p^*(z)$ satisface la propiedad de la alternancia si

- a):** los coeficientes principales de $p_e(z^2)$ y $zp_o(z^2)$ tienen el mismo signo y
- b):** todas las raíces de $p_e(-\omega^2)$ y $p_o(-\omega^2)$ son reales, distintas y además las m raíces positivas de $p_e(-\omega^2)$ y las $m - 1$ raíces positivas de $p_o(-\omega^2)$ se van alternando, es decir:

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \cdots$$

Para más detalles ver [2] y [4].

TEOREMA 7 (Hermite-Biehler). *Un polinomio real $p^*(z)$ es Hurwitz, si y sólo si, satisface la propiedad de la alternancia.*

Una versión en condiciones necesarias del criterio de Hermite-Biehler para polinomios semi-estables se da en la siguiente afirmación.

PROPOSICIÓN 8. *Si un polinomio real $p^*(z)$ es semi-estable entonces*

- a) los coeficientes principales de $p_e(z^2)$ y $zp_o(z^2)$ tienen el mismo signo;*
- b) todas las raíces de $p_e(-\omega^2)$ y $p_o(-\omega^2)$ son reales y las raíces positivas de $p_e(-\omega^2)$ y $p_o(-\omega^2)$ cumplen que*

$$0 \leq \omega_{e,1} \leq \omega_{o,1} \leq \omega_{e,2} \leq \omega_{o,2} \leq \dots$$

COROLARIO 9. *Sea $p^*(z)$ un polinomio real, si los coeficientes de $p_e(z^2)$ y $zp_o(z^2)$ no tienen el mismo signo o si ocurriera que para algún $i = 1, \dots, n$ las raíces positivas de $p_e(-\omega^2)$ y $p_o(-\omega^2)$ no se alternaran entonces $p(x)$ no es semi-estable.*

Ejemplo 3. Considérese el polinomio real $p^*(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 7t + 2$. Tenemos que

$$p_e(t^2) = 2 + 3t^2 + t^4, \quad tp_o(t^2) = 7t + 2t^3$$

Por otra parte

$$p^*(i\omega) = 2 - 3\omega^2 + \omega^4 + i\omega(7 - 2\omega^2)$$

$$p_e(-\omega^2) = 2 - 3\omega^2 + \omega^4, \quad p_o(-\omega^2) = 7 - 2\omega^2$$

Luego

$$p_e(-\omega^2) = 0 \Leftrightarrow \omega = \pm 1 \text{ ó } \omega = \pm\sqrt{2}$$

$$p_o(-\omega^2) = 0 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{7/2}$$

Hacemos $\omega_{e,1} = 1$, $\omega_{e,2} = \sqrt{2}$, $\omega_{o,1} = \sqrt{7/2}$. Ahora $\omega_{e,1} < \omega_{o,1}$, pero $\omega_{o,1} > \omega_{e,2}$. Por lo tanto no se cumple el inciso b) de la propiedad de la alternancia. Luego $p^*(t)$ no es semi-estable.

Un polinomio $p^* \in \mathbb{R}[x]$, no idénticamente cero, se dice que es estándar cuando su coeficiente principal es positivo. El siguiente resultado se obtiene como consecuencia del Teorema de Hermite-Biehler por un argumento de límite.

TEOREMA 10 ([14]). *Sea $p^*(x) = f(x^2) + xg(x^2) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio estándar. Entonces $p^*(x)$ es semi-estable, si y sólo si, tanto f como g son polinomios estándar, tienen sólo raíces reales no positivas y las raíces de f se alternan con las de g .*

4.2. Relación entre polinomios estables y semi-estables. El siguiente resultado, publicado en [5], establece la manera en que están relacionados los polinomios estables y semi-estables.

TEOREMA 11. *Sea $p^*(x) = f(x^2) + xg(x^2) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio estándar. Entonces $p^*(x)$ es estable, si y sólo si, $p^*(x)$ es semi-estable, $f(0) \neq 0$ y $\text{mcd}(f, g) = 1$.*

4.3. Generalizaciones del Criterio de Hermite-Biehler. Es esta subsección se dan otras generalizaciones del Teorema de Hermite-Biehler para polinomios no necesariamente Hurwitz en términos de una expresión que indica la diferencia entre las raíces que se encuentran en el semiplano complejo izquierdo y las raíces que se encuentran en el semiplano derecho. A continuación presentamos nuevamente el criterio de Hermite-Biehler.

TEOREMA 12. (Hermite-Biehler). *Sea $p^*(z) = p_0 + p_1z + \dots + p_nz^n$, un polinomio real de grado n . Escribimos, $p^*(z) = p_e(z^2) + zp_o(z^2)$, donde $p_e(z^2)$ y $zp_o(z^2)$ son las componentes de $p^*(z)$, formadas con las potencias pares e impares de z , respectivamente. Sean $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_e(-\omega^2)$ y sean $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_o(-\omega^2)$, ordenados en magnitud ascendente. Entonces $p^*(z)$ es Hurwitz estable, si y sólo si, todos los ceros de $p_e(-\omega^2)$, $p_o(-\omega^2)$, son reales y distintos, p_n y p_{n-1} son del mismo signo y los ceros reales positivos, satisfacen la siguiente propiedad de la alternancia:*

$$(11) \quad 0 < \omega_{e_1} < \omega_{o_1} < \omega_{e_2} < \omega_{o_2} < \dots$$

Ver [1], [2] y [9] para una demostración.

Ahora proporcionamos algunas caracterizaciones alternativas e interpretaciones del teorema. Para esto, introducimos primero la función $\text{sgn}[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, definida por:

$$\text{sgn}[x] = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

LEMA 13. *Sea $p^*(z) = p_0 + p_1z + \dots + p_nz^n$, un polinomio real de grado n . Escribimos $p^*(z) = p_e(z^2) + zp_o(z^2)$, donde $p_e(z^2)$ y $zp_o(z^2)$ son las componentes de $p^*(z)$ formadas con las potencias pares e impares de z , respectivamente. Para cada $\omega \in \mathbb{R}$, denotamos $p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, donde $p(\omega) = p_e(-\omega^2)$, $q(\omega) = \omega p_o(-\omega^2)$. Sean $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_e(-\omega^2)$ y sean $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_o(-\omega^2)$, ordenados en magnitud ascendente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i): $p^*(z)$ es Hurwitz estable.
- (ii): p_n y p_{n-1} son del mismo signo y

$$n = \begin{cases} \text{sgn}[p_0] \cdot \{\text{sgn}[p(0)] - 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \quad \times 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot \text{sgn}[p(\infty)]\} & \text{para } n = 2m, \\ \text{sgn}[p_0] \cdot \{\text{sgn}[p(0)] - 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \quad \times 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_m})]\} & \text{para } n = 2m + 1. \end{cases}$$

(12)

(iii): p_n y p_{n-1} son del mismo signo y

$$n = \begin{cases} \text{sgn}[p_0] \cdot \{2 \text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_{m-1}})] + (-1)^{m-1} \cdot 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_m})]\} & \text{para } n = 2m, \\ \text{sgn}[p_0] \cdot \{2 \text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_m})] + (-1)^m \cdot \text{sgn}[q(\infty)]\} & \text{para } n = 2m + 1. \end{cases}$$

(13)

Ver [2] para una prueba.

Observación 1. La propiedad de la alternancia en el Teorema 12 da una interpretación gráfica del criterio de Hermite-Biehler, mientras que el Lema 13 da una caracterización analítica.

Notemos del lema 13 que si $p^*(z)$ es Hurwitz estable entonces todos los ceros de $p(\omega)$ y $q(\omega)$ son reales y distintos, de lo contrario (12) y (13) fallarán.

Ahora presentamos un ejemplo para ilustrar la aplicación del Criterio 12 y del Lema 13, para verificar la propiedad de la alternancia en un polinomio estable.

Ejemplo 4. Consideremos el polinomio real $p^*(z)$, donde

$$p^*(z) = z^7 + 5z^6 + 14z^5 + 25z^4 + 31z^3 + 26z^2 + 14z + 4.$$

Entonces

$$p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

donde

$$p(\omega) = -5\omega^6 + 25\omega^4 - 26\omega^2 + 4, \quad q(\omega) = \omega(-\omega^6 + 14\omega^4 - 31\omega^2 + 14).$$

Las gráficas de $p(\omega)$ y $q(\omega)$ son mostradas en la Figura 1. Por lo tanto, el polinomio $p^*(z)$, satisface la propiedad de la alternancia. Además

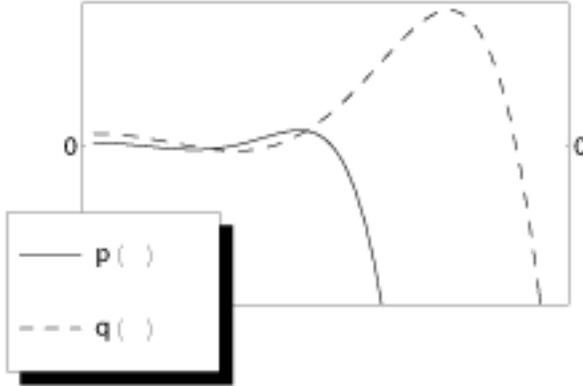


FIGURA 1. Propiedad de la alternancia para un polinomio Hurwitz.

$$\begin{aligned} \omega_{e_1} &= 0.43106, \quad \omega_{e_2} = 1.08950, \quad \omega_{e_3} = 1.90452 \\ \omega_{o_1} &= 0.78411, \quad \omega_{o_2} = 1.41421, \quad \omega_{o_3} = 3.37419. \end{aligned}$$

$\text{sgn}[p(0)] = 1, \text{sgn}[p(\omega_{o_1})] = -1, \text{sgn}[p(\omega_{o_2})] = 1, \text{sgn}[p(\omega_{o_3})] = -1.$
 Ahora, $p^*(z)$ es de grado $n = 7$, el cual es impar y $\text{sgn}[p_0] \cdot [\text{sgn}[p(0)] - 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_2})] - 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_3})]] = 7$; lo cual muestra que (12) se tiene.

También tenemos que

$$\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] = 1, \text{sgn}[q(\omega_{e_2})] = -1, \text{sgn}[q(\omega_{e_3})] = 1, \text{sgn}[q(\infty)] = -1.$$

Así que: $\operatorname{sgn}[p_0] \cdot [2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_3})] - \operatorname{sgn}[q(\infty)]] = 7$, con lo cual se tiene (13).

Para verificar que $p^*(z)$ es un polinomio Hurwitz, igualamos $p^*(z)$ a cero y encontramos sus raíces:

$$-0.5 \pm 1.3229j \quad -0.5 \pm 0.8660j \quad -1 \pm j \quad -1.$$

Todas las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo, así $p^*(z)$ es Hurwitz.

4.4. Signatura y fase acumulada neta. En esta subsección desarrollaremos, como paso preliminar para la generalización del criterio de Hermite-Biehler, una relación entre la fase acumulada neta de un polinomio real y la diferencia entre el número de raíces de un polinomio real en el semiplano abierto izquierdo y el semiplano abierto derecho. Sea \mathbb{C} el plano complejo, \mathbb{C}^- el semiplano abierto izquierdo y \mathbb{C}^+ el semiplano abierto derecho.

En principio nos enfocaremos en polinomios sin ceros en el eje imaginario. Consideremos un polinomio real $p^*(z)$ de grado n

$$p^*(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad p_n \neq 0,$$

tal que, $p^*(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in (-\infty, +\infty)$.

Definición 14. Sean l y r , el número de raíces de $p^*(z)$ en \mathbb{C}^- y \mathbb{C}^+ respectivamente. Entonces la *signatura* de $p^*(z)$ denotada por $\sigma(p^*)$ se define como

$$\sigma(p^*) \triangleq l - r.$$

Ya que $n = l + r$, se tiene que $\sigma(p^*)$ y n determinan en forma única l y r , y por lo tanto, la distribución de raíces de $p^*(z)$. Ahora, para cada $\omega \in \mathbb{R}$, $p^*(j\omega)$ es un punto en el plano complejo, sean $p(\omega)$ y $q(\omega)$, dos funciones definidas como $p(\omega) = \operatorname{Re}[p^*(j\omega)]$, $q(\omega) = \operatorname{Im}[p^*(j\omega)]$.

Con esta definición, tenemos

$$p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega), \quad \forall \omega.$$

Además, $\theta(\omega) \triangleq \angle p^*(j\omega) = \arctan[q(\omega)/p(\omega)]$. Sea $\Delta_0^\infty(\theta)$ que denota el cambio neto en el argumento $\theta(\omega)$, cuando ω crece de 0 a ∞ . Entonces podemos afirmar el siguiente lema [4]:

LEMA 15. *Sea $p^*(z)$ un polinomio real sin raíces imaginarias. Entonces*

$$\Delta_0^\infty(\theta) = \frac{\pi}{2} \sigma(p^*).$$

Ver [2] y [4] para una demostración.

4.5. Generalizaciones del Criterio de Hermite-Biehler: Ninguna raíz en el eje imaginario. En esta subsección, nos enfocaremos en polinomios reales sin raíces en el eje imaginario y derivaremos dos generalizaciones del criterio de Hermite-Biehler, desarrollando primero un procedimiento para determinar el cambio de fase acumulada neta de un polinomio. Recordemos primero que para cualquier ω , el ángulo fase de $p^*(j\omega)$, es dado por

$$\theta(\omega) = \arctan \frac{q(\omega)}{p(\omega)}$$

Por lo tanto, la razón de cambio de fase con respecto a la variable dada ω , esta dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} &= \frac{1}{1 + q^2(\omega)/p^2(\omega)} \left[\frac{q'(\omega)p(\omega) - p'(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega)} \right] \\ (14) \quad &= \frac{q'(\omega)p(\omega) - p'(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega) + q^2(\omega)} \end{aligned}$$

Si $p(\omega)$ y $q(\omega)$ son conocidas para toda ω , podemos integrar (14), para obtener la fase acumulada neta. Sin embargo, para calcular la acumulación neta de la fase, para

todo ω , no es necesario conocer en forma precisa la razón de cambio de fase en cada ω . Esto es porque cada vez que la gráfica polar $p^*(j\omega)$ hace una transición del eje real al eje imaginario o viceversa, puede haber a lo más un cambio de fase neto de $\pm \pi/2$ radianes. El signo real del cambio de fase puede ser determinado examinando (14), en el cruce del eje real ó imaginario de la gráfica de $p^*(j\omega)$. Ya que en el cruce del eje real ó imaginario, uno de los dos términos en el numerador de (14) se anula, y el denominador es siempre positivo, la determinación efectiva del signo cambio de fase es aún más simple.

Ahora, para cualquier polinomio $p^*(z)$ de grado mayor ó igual que uno, la parte real ó imaginaria ó ambas de $p^*(j\omega)$, llega a ser infinitamente grande cuando $\omega \rightarrow \pm \infty$. Sin embargo, si deseamos contar la acumulación de fase total en múltiplos enteros del cruzamiento de ejes, es imprescindible que la gráfica se aproxime al eje real o imaginario, cuando $\omega \rightarrow \pm \infty$. Para lograr esto, podemos normalizar la gráfica de $p^*(z)$, escalandola con $1/f(\omega)$, donde $f(\omega) = (1 + \omega^2)^{n/2}$. Ya que $f(\omega)$ no tiene raíces reales, este escalamiento asegurará que la gráfica normalizada $p_f^*(j\omega) = p_f(\omega) + jq_f(\omega)$, realmente intersecta el eje real o imaginario en $\pm \infty$, mientras que al mismo tiempo, deja sin cambios los valores ω finitos en los cuales $p^*(j\omega)$ intersecta el eje real e imaginario.

$$p_f^*(j\omega) = p_f(\omega) + jq_f(\omega) = \frac{p(\omega)}{f(\omega)} + j \frac{q(\omega)}{f(\omega)}.$$

El siguiente desarrollo en esta sección hace uso de la gráfica normalizada, para la determinación del cambio de fase neto acumulado, cuando ω varía de 0 a ∞ .

Como en la subsección 4.4, consideremos un polinomio $p^*(j\omega)$ de grado n

$$p^*(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad p_n \neq 0,$$

tal que, $p^*(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in (-\infty, +\infty)$.

Sean $p(\omega), q(\omega), p_f(\omega), q_f(\omega)$, ya definidas y sean

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$$

los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar.¹

También definamos $\omega_m = +\infty$.

Entonces podemos hacer las siguientes observaciones:

(1) Si ω_i, ω_{i+1} son ambos ceros de $q_f(\omega)$ entonces:

$$(15) \quad \Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} [\text{sgn}[p_f(\omega_i)] - \text{sgn}[p_f(\omega_{i+1})]] \cdot \text{sgn}[q_f(\omega_i^+)].$$

(2) Si ω_i es un cero de $q_f(\omega)$, mientras que $\omega_{i+1} = +\infty$ no es un cero de $q_f(\omega)$ y ω_{i+1} es un cero de $p_f(\omega)$, además de que n impar, entonces:

$$(16) \quad \Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} \text{sgn}[p_f(\omega_i)] \cdot \text{sgn}[q_f(\omega_i^+)],$$

(3) Para $i = 0, 1, 2, \dots, m-2$.

$$(17) \quad \text{sgn}[q_f(\omega_{i+1}^+)] = -\text{sgn}[q_f(\omega_i^+)].$$

La ecuación (15) es obvia, mientras que la ecuación (17) simplemente establece que $q_f(\omega)$ cambia de signo cuando este pasa a través de un cero de multiplicidad impar. La ecuación (16), por otro lado, puede ser directamente trazada de la ec. (14).

Usando (17) repetidamente, obtenemos:

$$(18) \quad \text{sgn}[q_f(\omega_i^+)] = (-1)^{m-1-i} \cdot \text{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)], \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Sustituyendo (18) en (15), vemos que si ω_i, ω_{i+1} son ambos ceros de $q_f(\omega)$, entonces

$$(19) \quad \Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} [\text{sgn}[p_f(\omega_i)] - \text{sgn}[p_f(\omega_{i+1})]] \cdot (-1)^{m-1-i} \cdot \text{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)].$$

Las observaciones anteriores nos permiten formular y demostrar el teorema siguiente acerca de $\sigma(p^*)$.

¹La función $q_f(\omega)$, no cambia de signo mientras pasa a través de un cero real de multiplicidad par, ya que tales ceros pueden saltarse mientras se cuenta la fase de acumulación neta.

TEOREMA 16. Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el eje imaginario, i.e., la gráfica normalizada $p_f^*(j\omega)$ no pasa a través del origen. Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$. Entonces

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \text{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \text{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{array} \right. \end{cases}$$

(20)

Ver [2] para una demostración.

Ahora damos el resultado análogo al Teorema 16, usando los valores de las variables donde $p_f^*(j\omega)$ cruza el eje imaginario, sean

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$$

los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $p_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$ y $\omega_0 = 0$.

TEOREMA 17. Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el eje imaginario, i.e., la gráfica normalizada $p_f^*(j\omega)$, no pasa a través del origen. Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $p_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definimos $\omega_m = \infty$. Entonces

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} -\{2 \text{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \text{sgn}[p(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -\{2 \text{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \text{sgn}[q_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \\ \times \text{sgn}[p(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{array} \right. \end{cases}$$

(21)

Ver [2] para una demostración.

Observación 2. Los Teoremas 16 y 17, esencialmente generalizan el Lema 13, partes (ii) y (iii) para polinomios no necesariamente Hurwitz. Es en este sentido que los Teoremas 16 y 17 son generalizaciones del Criterio de Hermite-Biehler.

4.6. El Criterio de Hermite-Biehler generalizado: Ninguna raíz en el origen.

En esta subsección extenderemos los Teoremas 16 y 17, ahora $p^*(z)$ puede tener raíces imaginarias distintas de cero. Los Teoremas 18 y 19 muestran que las expresiones en las afirmaciones de los Teoremas 16 y 17 son todavía válidas para este caso.

TEOREMA 18. Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el origen. Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$. Entonces

$$(22) \quad \sigma(p^*) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \text{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \text{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{array} \right. \end{cases}$$

Ver [2] para una demostración.

A continuación presentamos el resultado análogo al Teorema 18, concerniente a $p_f(\omega)$.

TEOREMA 19. Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el origen. Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $p_f(\omega)$, con multiplicidad impar. También definimos $\omega_m = \infty$. Entonces

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})]\} (-1)^m \\ \times \operatorname{sgn}[p(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \\ -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \\ \times \operatorname{sgn}[p(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

(23)

Ver [2] para una demostración.

4.7. El Criterio de Hermite-Biehler generalizado: Ninguna restricción en la localización de raíces. En esta subsección proporcionamos un refinamiento del Teorema 18, donde la presencia de raíces de $p^*(z)$ en el origen se puede admitir.

TEOREMA 20. Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , con una raíz en el origen de multiplicidad k . Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos, positivos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definimos $\omega_0 = 0$, $\omega_m = \infty$ y denotamos $p^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k}[p(\omega)]|_{\omega=\omega_0}$. Entonces

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} \{ \operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_f(\omega_m)] \} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \operatorname{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \\ \{ \operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] \} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \operatorname{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

(24)

Ver [2] para una demostración.

Utilizaremos el Teorema 20 en el siguiente ejemplo, para obtener información acerca de la distribución de las raíces de un polinomio, en el plano.

Ejemplo 5. Consideremos el polinomio

$$p^*(z) = z^4(z^2 + 4)(z - 1)(z - 2)(z - 3)(z^2 + z + 1).$$

Sustituyendo $z = j\omega$, tenemos que $p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, donde

$$p(\omega) = 5\omega^{10} - 21\omega^8 + 10\omega^6 - 24\omega^4$$

y

$$q(\omega) = -\omega^{11} + 10\omega^9 - 29\omega^7 + 20\omega^5.$$

Los ceros reales, finitos positivos de $q_f(\omega)$, con multiplicidad impar, son $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$ y $\omega_3 = \sqrt{5}$, también definimos $\omega_0 = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{sgn}[p^{(4)}(\omega_0)] = -1$, $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] = -1$, $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] = 0$, $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_3)] = 1$, además, $\operatorname{sgn}[q(\infty)] = -1$. Ya que $p^*(z)$ es de grado impar y con una raíz en el origen de multiplicidad 4, de la fórmula (24), se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= \{ \operatorname{sgn}[p^{(4)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] \\ &\quad - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_3)] \} \cdot (-1)^3 \operatorname{sgn}[q(\infty)] \\ &= \{ (-1) - 2(-1) + 2(0) - 2(1) \} (-1)^3 (-1) = -1. \end{aligned}$$

De la factorización de $p^*(z)$, observamos que el polinomio tiene tres raíces reales y dos raíces con parte real negativa, además, como $\sigma(p^*) = l - r$, el Teorema 20 se cumple.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron generalizaciones de los teoremas clásicos de estabilidad: el Criterio de Routh-Hurwitz, el Enfoque de Routh y el Teorema de Hermite-Biehler. Estos teoremas clásicos son utilizados para saber si un polinomio tiene todas sus raíces con parte real negativa, es decir, se utilizan para decidir si un polinomio es Hurwitz o no. La justificación de estudiar generalizaciones de tales teoremas es que en algunos problemas se requiere decidir si un polinomio tiene una propiedad diferente, que no es la propiedad de ser polinomio Hurwitz. En particular, muchas veces se requiere saber si un polinomio es semi-estable (esta clase de polinomios también son conocidos como semiHurwitz).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bhattacharayya, S.P., Chapellat, H., Keel, L.H. (1995) *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall.
- [2] Díaz, E.C. (2010) *El Teorema de Hermite-Biehler. Tesis de Maestría*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [3] Ferreyra, V.M. (2011) *Métodos matriciales para el estudio de la estabilidad de polinomios*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [4] Gantmacher, F.R. (1959) *The Theory of Matrices*, Vol I & Vol II, Chelsea Publishing Company, New York.
- [5] Garloff, J., Wagner, D. (1996) *Hadamard products of stable polynomials are stable*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 202, 797-809.
- [6] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J. (2005) *Mathematical Systems Theory I*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 48, Mathematical Systems Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [7] Hurwitz, A. (1895) *Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann., vol. 46, 273-284.
- [8] Lancaster, P. & Tismenetsky, M. (1985) *The Theory of Matrices with applications*, Academic Press.
- [9] Loredo, C.A. (2004) *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz. Reporte de los seminarios de investigación I y II*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [10] Rendón, R. (2012) *Métodos de variable compleja en el estudio de polinomios Hurwitz. Reporte de los seminarios de investigación I y II*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [11] Routh, E.J. (1975) *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*, Taylor and Francis, London, Reprint.
- [12] Silva, G.J., Datta, A., Bhattacharayya, S.P. (2005) *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Boston, Birkhäuser.
- [13] Uspensky, J.V. (1990) *Teoría de ecuaciones*, Limusa.
- [14] Wagner, D. (2000) *Zeros of reliability polynomials and f-vectors of matroids*, Combinatorics, probability and computing, vol. 9, 2, 167-190.

Dirección de los autores:

Carlos Arturo Loredo Villalobos
 Universidad Autónoma Metropolitana,
 Unidad Iztapalapa,
 División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
 Departamento de Matemáticas.
 Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
 Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
 e-mail: r2ro.loredo@gmail.com

Edgar Cristian Díaz González
 Universidad Autónoma Metropolitana,
 Unidad Iztapalapa,
 División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
 Departamento de Matemáticas.
 Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
 Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
 e-mail: edgardazgonzalez@yahoo.com.mx

Baltazar Aguirre Hernández
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: bahe@xanum.uam.mx