Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. IV, junio de 2014, 9–18

SUCESIONES Y RECURRENCIAS

ROBERTO QUEZADA

RESUMEN. Discutimos algunas recurrencias y su relación con sucesiones numéricas bien conocidas.

1. Introducción

En este artículo realizamos una discusión elemental de algunas sucesiones numéricas bien conocidas, así como algunas relaciones entre ellas. Nuestro propósito es ilustrar con ejemplos sencillos, los procesos de descubrimiento y escritura rigurosa de resultados matemáticos. El contenido de este artículo se puede usar en un curso introductorio para estudiantes de matemáticas que, además de motivarlos, muestre la manera en que algunos matemáticos realizamos nuestro trabajo.
Aunque el tema es muy popular y se presenta en muchas referencias que van desde libros, véase por ejemplo [1] y [2], hasta presentaciones interactivas en internet, nuestro enfoque tiene cierta originalidad. Además de presentar alguna de estas sucesiones numéricas escribiendo sus primeros términos y de inferir a partir de ellos algunas de sus propiedades, aprovechamos la relación de recurrencia que ella satisface, para definirla de una forma rigurosa y demostrar sus propiedades de manera deductiva.

2. ¿Qué es una recurrencia?

Una relación de recurrencia (o simplemente recurrencia) es una expresión que permite calcular los valores $\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ de una sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ a partir de uno a varios términos iniciales dados. Por ejemplo, la relación de recurrencia

$$a_{n+1} + a_n = 0, \tag{1}$$

determina una sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ cuyos valores son

$$a_2 = -a_1,\ a_3 = -a_2 = a_1,\ a_4 = -a_3 = a_2 = -a_1,\ \cdots .$$

Esta sucesión depende del valor de a_1. Por ejemplo, si $a_1 = 1$ la sucesión es

$$a = (a_n)_{n\geq 1} = ((-1)^{n+1})_{n\geq 1} = \{1, -1, 1, -1 \cdots\}.$$

Pero si $a_1 = 2$, entonces la sucesión a es

$$\{2, -2, 2, -2, \cdots\}.$$

En otras palabras, la relación de recurrencia (1) no determina un sola sucesión, i.e., la solución de (1) no es única. De hecho, existen tantas soluciones diferentes como valores de a_1.

Si queremos determinar una única sucesión que satisfaga la ecuación (1), debemos añadir una **condición inicial** como $a_1 = i$, con i un valor fijo $i \in \mathbb{R}$. Es decir, el problema

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_n &= 0, \\ a_1 &= i, \end{aligned} \tag{2}$$

con $i \in \mathbb{R}$, un valor fijo, tiene una única solución dada por:

$$\{i, -i, i, -i, \cdots\}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00-01.
Palabras clave. Recurrencias, Números poligonales, Sucesión de Fibonacci, Triángulo de Pascal.

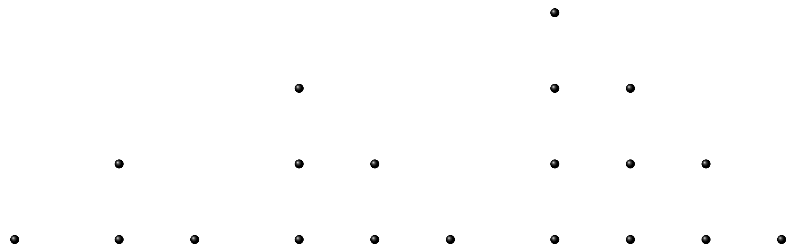

Figura 1. Números triangulares

Nótese que esta sucesión se representa de manera concisa mediante la fórmula $a_n = (-1)^{n+1}i,\ \ n \geq 1$. Es claro que satisface la condición inicial, pues $a_1 = i$. Para demostrar que esta sucesión también satisface la ecuación (1) basta observar que

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+2}i + (-1)^{n+1}i = (-1)^{n+1}\big(-i+i\big) = 0.$$

3. Números poligonales

Si a un punto se le agregan dos puntos más para formar un triángulo equilátero y a su vez a este triángulo se le agregan tres puntos más para obtener un triángulo equilátero con tres puntos en cada lado y continuamos de esta manera agregando cuatro, cinco, etc. puntos. El número de puntos en cada triángulo equilátero así obtenido define la sucesión de números triangulares, figura 1. Es decir, la sucesión de números triangulares es $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots\}$.

Los números cuadrados se obtienen de manera similar; empezando con un punto se agregan tres puntos más para formar un cuadrado y a éste se agregan cinco puntos más para formar un cuadrado con tres puntos en cada lado, el número total de puntos de cada cuadrado corresponde con los elementos de la sucesión $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \cdots\}$, figura 2.

Los números pentagonales se obtienen empezando con un punto y agregando cuatro, siete, diez, etc. puntos de manera que se obtienen los elementos de la sucesión $\{1, 5, 12, 22, \cdots\}$, figura 3.

Los números hexagonales son los términos de la sucesión $\{1, 6, 15, 28, \cdots\}$, que se obtienen iniciando con un punto agregando cinco, nueve, trece, etc. puntos en cada etapa para formar un hexágono más grande a partir del anterior.

Para reconocer las variables de las cuales dependen los números poligonales, a partir de este momento los denotaremos mediante el símbolo $p_m(n)$, con $m, n \in \mathbb{N}$. El subíndice m se refiere al número de lados del polígono y n corresponde con el lugar que ocupa en la correspondiente sucesión. Por ejemplo, $p_4(4)$ es el cuarto número cuadrado, es decir, $p_4(4) = 16$, mientras que $p_5(3)$ es el tercer número pentagonal, i.e., $p_5(3) = 12$. En el cuadro 1, se muestran los primeros números poligonales y la relación de recurrencia que satisfacen.

Con esta notación y observando el cuadro 1, podemos inferir que para cada $m \in \mathbb{N}$, los números poligonales con m lados ("m-gonales"), con $m \geq 3$, satisfacen la ecuación en diferencias[1]

$$p_m(n+1) - p_m(n) = 1 + (m-2)n, \quad n \geq 1 \tag{3}$$

con la condición inicial $p_m(1) = 1$.

Usaremos los resultados de nuestras observaciones e inferencias para dar una definición de los números poligonales. Es decir, tomaremos a la ecuación en diferencias (3) como definición de los números poligonales, aprovechando que, de acuerdo con

[1] En este artículo usaremos el nombre de ecuación en diferencias para referirnos a una clase particular de relaciones de recurrencia, pero frecuentemente se usa para referirse a cualquier relación de recurrencia.

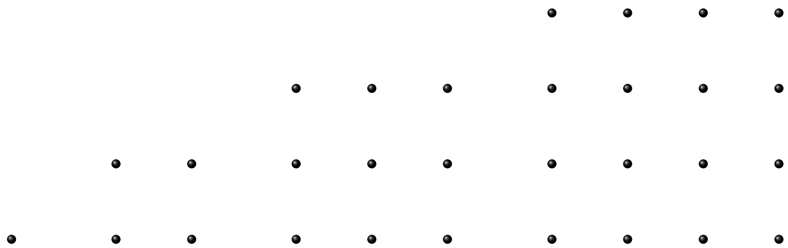

FIGURA 2. Números cuadrados

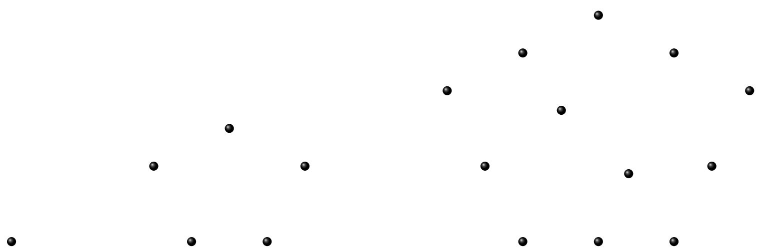

FIGURA 3. Números pentagonales

Número poligonal	Primero	Segundo	Tercero	Recurrencia
Triangular	1	3	6	$p_3(n+1) - p_3(n) = 1 + n$
Cuadrado	1	4	9	$p_4(n+1) - p_4(n) = 1 + 2n$
Pentagonal	1	5	12	$p_5(n+1) - p_5(n) = 1 + 3n$
Hexagonal	1	6	15	$p_6(n+1) - p_6(n) = 1 + 4n$

CUADRO 1. Números triángulares

nuestra discusión en la sección anterior, la solución de una ecuación en diferencias como (3) con la condición inicial $p_m(1) = 1$ es única.

La existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones en diferencias es un hecho que a lo largo de este artículo aceptaremos sin demostración, el lector interesado puede consultar una demostración en la referencia [3].

Definición 1. El n-ésimo número poligonal con m lados es el n-ésimo término, $p_m(n)$, $m \geq 3$, $n \geq 1$, de la única sucesión que resuelve la ecuación en diferencias (3) con condición inicial $p_m(1) = 1$.

Usando esta definición demostraremos algunas propiedades y relaciones entre estos números. El siguiente resultado se le atribuye a Teón de Esmirna, siglo II d.C.

PROPOSICIÓN 2. *Cualquier número cuadrado es suma de dos triangulares sucesivos, más precisamente, para cada $n \geq 1$ se tiene que*

$$p_4(n) = p_3(n) + p_3(n-1). \tag{4}$$

Demostración. De acuerdo con la definición, bastará demostrar que el lado derecho de (4) satisface la ecuación en diferencias que determina de manera única a la sucesión $p_4(n)$, es decir, la ecuación

$$p_4(n+1) - p_4(n) = 1 + 2n, \tag{5}$$

con la condición inicial $p_4(1) = 1$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} & p_3(n+1)+p_3(n)-\big(p_3(n)+p_3(n-1)\big) \\ & = \big(p_3(n+1)-p_3(n)\big)+\big(p_3(n)-p_3(n-1)\big) \\ & = (1+n)+\big(1+(n-1)\big)=1+2n. \end{aligned} \tag{6}$$

Hemos usado que la sucesión de números triangulares $p_3(n)$ satisface la ecuación en diferencias $p_3(n+1)-p_3(n)=1+n$. Ahora, usando que $p_3(1)=1$, tenemos que $p_3(1)+p_3(0)=1+0$, pues $p_3(0)=0$ por ubicuidad. Esto demuestra que el lado derecho de (4) satisface la ecuación (5) junto con la condición inicial, entonces por la unicidad, podemos concluir que la identidad (4) se cumple para cada $n\geq 1$. □

Proposición 3. ***(Nicómaco de Geresa, alrededor de 100 d.C.)*** *El n-ésimo número m-gonal, $p_m(n)$, es igual a la suma del n-ésimo $(m-1)$-gonal, $p_{m-1}(n)$, más el $(n-1)$-ésimo triangular, es decir,*

$$p_m(n)=p_{m-1}(n)+p_3(n-1),\ \ \forall\ \ n\geq 1. \tag{7}$$

Demostración. Bastará demostrar que el lado derecho de (7) satisface la misma ecuación en diferencias que $p_m(n)$ y la correspondiente condición inicial.

Para la condición inicial tenemos que $p_{m-1}(1)+p_3(0)=1$. Y, por otra parte, para cada $n\geq 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} & p_{m-1}(n)+p_3(n-1)-\big(p_{m-1}(n-1)-p_3(n-2)\big) \\ & = \big(p_{m-1}(n)-p_{m-1}(n-1)\big)+\big(p_3(n-1)-p_3(n-2) \\ & = \big(1+(m-3)(n-1)\big)+1+(n-2)=1+(m-2)(n-1). \end{aligned} \tag{8}$$

Lo cual demuestra (7). □

El siguiente resultado es una generalización del teorema de Teón de Esmirna, proposición 2, que se atribuye a Bachet de Méziriac, siglo XVII. Como su demostración es esencialmente la misma que para las dos proposiciones anteriores, dejaremos que el lector complete los detalles.

Proposición 4. *El n-ésimo número m-gonal, $p_m(n)$, con $m\geq 3$ y $n\geq 1$, es igual a la suma del n-ésimo triangular más $(m-3)$ veces el $(n-1)$-ésimo triangular, i.e.,*

$$p_m(n)=p_3(n)+(m-3)p_3(n-1),\ \ \forall\ \ m\geq 3,\ \ n\geq 1. \tag{9}$$

4. Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Leonardo de Pisa (Fibonacci), 1170-1250, cuyos primeros términos son $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,\cdots$, fue descrita por él mismo en relación con un problema de cría de conejos: *¿Cuántos pares de conejos se producirán en un año si se inicia con una sola pareja que es productiva después de un mes, produciendo una segunda pareja, que a su vez es productiva después de un mes?* El cuadro 2 muestra el proceso de producción de parejas de conejos de acuerdo con la regla enunciada.

Observando la tabla se ve que si $f(n)$, es el n-ésimo término, con $1\leq n\leq 7$, de la sucesión de Fibonacci, entonces se satisface la relación de recurrencia

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2),\ \ 2\leq n\leq 7.$$

Usando esta relación vemos que

$$\begin{aligned} & f(2)=f(1)+f(0), \\ & f(3)=f(2)+f(1)=2f(1)+f(0), \\ & f(4)=f(3)+f(2)=3f(1)+2f(0), \\ & f(5)=f(4)+f(3)=5f(1)+3f(0), \\ & f(6)=f(5)+f(4)=8f(1)+5f(0),\dots \end{aligned} \tag{10}$$

Mes	Producción	Parejas
1 (inicio)	Pareja inicial (no productiva)	1
1 (final)	Pareja inicial productiva. Se cruza	1
2 (final)	Segunda pareja. Se cruza la pareja inicial	2
3 (final)	Tercer pareja. Se cruzan dos parejas	3
4 (final)	Dos parejas nuevas. Se cruzan tres parejas	5
5 (final)	Tres nuevas. Se cruzan cinco	8
6 (final)	Cinco nuevas. Se cruzan ocho	13

Cuadro 2. El problema de Fibonacci

Estos términos de la sucesión dependen de los valores de $f(0)$ y $f(1)$. Sabemos que $f(1) = 1$ y para reproducir los primeros siete términos de la sucesión de Fibonacci debemos tomar $f(0) = 0$.

Usaremos este resultado de nuestro razonamiento inductivo y el hecho de que una relación de recurrencia con condiciones iniciales tienen una y sólo una solución, para dar una definición de la sucesión (completa) de Fibonacci y deducir algunas de sus propiedades.

Definición 5. La sucesión de Fibonacci es la única solución de la ecuación en diferencias

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \quad n \geq 2 \tag{11}$$

con sus dos condiciones iniciales.

$$f(1) = 1, \quad f(0) = 0.$$

El siguiente resultado sobre la sucesión de Fibonacci se puede encontrar en la literatura. Lo demostraremos usando nuestra definición y el método que empleamos en la sección anterior.

Teorema 6. *La sucesión de Fibonacci se puede escribir en la forma*

$$f(n) = \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}}, \quad \forall \ n \geq 0, \tag{12}$$

donde $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *y* $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *son las raíces de la ecuación* $x^2 - x - 1 = 0$.

Demostración. De acuerdo con nuestra definición, bastará demostrar que la sucesión (12) satisface la ecuación (11) y las condiciones iniciales. Para las condiciones iniciales tenemos que $f(0) = \frac{x_1^0 - x_2^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$, y $f(1) = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$. Por otra parte, tomando en cuenta que $x_1 + x_2 = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(n-1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 + x_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^{n-1}x_1 + x_1^{n-1}x_2 - x_2^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}x_1x_2(x_1^{n-2} - x_2^{n-2}) \\ &= f(n) + x_1x_2 f(n-2) = f(n) - f(n-2), \end{aligned} \tag{13}$$

pues $x_1x_2 = -1$. Esto completa la demostración. □

El número $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se conoce como número áureo. Otra propiedad del número áureo es la siguiente.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
. & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

Figura 4. Triángulo de Pascal

Proposición 7. *La sucesión* $g(n) = x_1^n, \quad n \geq 0$, *satisface la ecuación en diferencias (11) con las condiciones iniciales* $g(0) = 1$ *y* $g(1) = x_1$.

Demostración. Es claro que las condiciones iniciales se cumplen. Por otra parte, para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} g(n-1) + g(n-2) &= (x_1^{n-1} + x_1^{n-2}) \\ &= x_1^{n-2}(x_1 + 1) = x_1^n \\ &= g(n), \end{aligned} \tag{14}$$

pues x_1 satisface la ecuación $x_1^2 - x_1 - 1 = 0$, es decir $x_1 + 1 = x_1^2$. Esto completa la demostración. □

Puesto que la sucesión de Fibonacci $f(n)$ y la sucesión x_1^n son soluciones de la misma ecuación en diferencias, es de esperarse que exista alguna relación entre ellas. La siguiente proposición establece explícitamente esta relación.

Proposición 8. *Sea* x_1 *el número áureo, entonces se satisface la identidad*

$$x_1^n = f(n)x_1 + f(n-1), \quad n \geq 1, \tag{15}$$

donde $f(n)$ *es la sucesión de Fibonacci.*

Demostración. Bastará demostrar que el lado derecho de (15) satisface la misma ecuación en diferencias que x_1^n y las mismas condiciones iniciales dadas en la proposición anterior. Para las condiciones iniciales tenemos para $n = 1$ que $f(1)x_1 + f(0) = x_1$, para $n = 2$, $f(2)x_1 + f(1) = x_1 + 1 = x_1^2$ y para $n \geq 3$ tenemos que

$$\begin{aligned} & f(n-1)x_1 + f(n-2) + f(n-2)x_1 + f(n-3) \\ &= x_1\big(f(n-1) + f(n-2)\big) + f(n-2) + f(n-3) \\ &= x_1 f(n) + f(n-1), \end{aligned} \tag{16}$$

donde hemos usado (11). Esto demuestra la proposición. □

5. El triángulo de Pascal

Vamos a considerar ahora una sucesión con dos índices, $(a_{mn}), \ m \geq 0, \ 0 \leq n \leq m$, cuyos primeros términos aparecen en el arreglo triangular de la figura 4, llamado triángulo de Pascal.

A partir de este arreglo vemos que $a_{00} = 1$, $a_{10} = 1 = a_{11}$, $a_{20} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1, \cdots$ y observando con más cuidado notamos que todos los términos sobre los lados del triángulo son iguales a 1, es decir,

$$a_{m,0} = 1 \ \text{ y } \ a_{mm} = 1, \ \forall \ m \geq 0. \tag{17}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & \boxed{1} & & & \\
 & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\
. & & . & & \boxed{10} & & . & & . & & .
\end{array}
$$

FIGURA 5. Números triangulares

Además los términos en el interior del triángulo satisfacen la relación de recurrencia

$$a_{mn} = a_{m-1,n-1} + a_{m-1,n}, \quad \forall\ m \geq 2,\ \ 1 \leq n \leq m-1. \tag{18}$$

El coeficiente binomial (o número combinatorio) $\binom{m}{n}$, $\quad m \geq 0, \quad 0 \leq n \leq m$, se define mediante las relaciones

$$\begin{aligned} &\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad \forall\ m \geq 0,\ \ 0 < n \leq m-1, \\ &\binom{m}{0} = 1, \quad \binom{m}{m} = 1, \quad \forall\ m \geq 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Demostremos que el coeficiente binomial resuelve la ecuación en diferencias (18) junto con las condiciones (17).

PROPOSICIÓN 9. *La sucesión doble* $a_{mn} = \binom{m}{n}$, $\quad m \geq 0, \quad 0 \leq n \leq m$ *satisface la ecuación (18) y las condiciones (17).*

Demostración. En vista de la definición de $\binom{m}{n}$, es claro que esta sucesión doble satisface las condiciones (17). Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} a_{m-1,n-1} + a_{m-1,n} &= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \\ &= \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} + \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} \\ &= \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} \\ &= \frac{m!n}{n!\,m(m-n)!} + \frac{m!(m-n)}{n!\,m(m-n)!} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\left(\frac{n}{m} + \frac{(m-n)}{m}\right) = \binom{m}{n} \\ &= a_{mn}. \end{aligned} \tag{20}$$

Esto demuestra la proposición. □

Es bien conocido que varias de las sucesiones y relaciones discutidas en las secciones anteriores se encuentran en el triángulo de Pascal. Por ejemplo, los números triangulares (encerrados en recuadros) se encuentran en una diagonal del triángulo de Pascal, figura 5.

Una propiedad muy interesante que se observa en el triángulo de Pascal es el llamado **patrón del palo de hockey**: "*la suma de todos los términos en una diagonal que se inicia en un lado del triángulo es igual al término que se encuentra abajo del último*". En la figura 6, ilustramos esta propiedad con varios ejemplos en el triángulo de Pascal, usando recuadros de diferente tipo. Ahora, formulémosla con toda generalidad y demostrémosla.

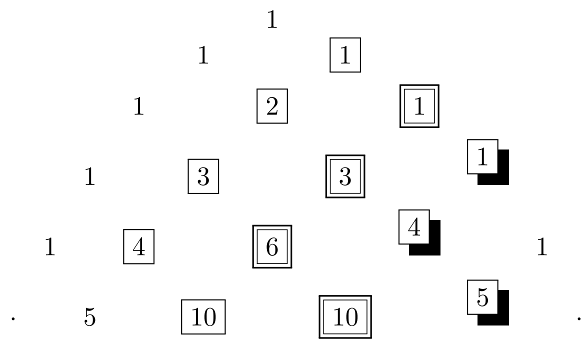

Figura 6. Patrón del palo de hockey

Teorema 10. *Para cada $m \geq 1$ y $1 \leq n \leq m$, se satisface que*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}. \tag{21}$$

Demostración. Usaremos inducción sobre $m \geq 1$. Si $m = 1$, entonces $n = 1$ y tenemos que

$$\binom{1}{1} = 1 = \binom{2}{2}.$$

Ahora supóngase que el resultado vale para $m > 1$ y cada $1 \leq n \leq m$; demostrémoslo para $m+1$ y cada $1 \leq n \leq m+1$. Si $1 \leq n \leq m+1$ tenemos, por la hipótesis de inducción y la proposición 9,

$$\begin{aligned} \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{m}{n} + \binom{m+1}{n} &= \binom{m+1}{n+1} + \binom{m+1}{n} \\ &= \binom{m+2}{n+1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Esto demuestra el teorema. □

Revisemos algunas consecuencias de este resultado. La primera de ellas es un hecho bien conocido.

Corolario 11. *La suma de los primeros m números naturales es igual a $\frac{m(m+1)}{2}$.*

Demostración. Para cada $m \geq 1$, tómese $n = 1$ y aplíquese el teorema anterior para obtener,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + m &= \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{m}{1} = \binom{m+1}{1+1} \\ &= \frac{(m+1)!}{2!(m-1)!} = \frac{m(m+1)}{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

□

Corolario 12. *El n-ésimo número triangular puede escribirse en la forma $p_3(n) = \binom{n+1}{2}$, que son los términos en la tercera diagonal del triángulo de Pascal, y además*

$$p_3(1) + p_3(2) + \cdots + p_3(n) = \binom{n+2}{3}. \tag{24}$$

Demostración. Para demostrar la primera afirmación bastará demostrar que $\binom{n+1}{2}$ satisface la ecuación en diferencias (3) con $m = 3$ y la condición inicial $p_3(1) = 1$. En efecto, claramente tenemos que $\binom{1+1}{2} = 1$, entonces la condición inicial se cumple. Además, usando el resultado de la proposición 9 se obtiene que,

$$\binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{n!} = 1 + n.$$

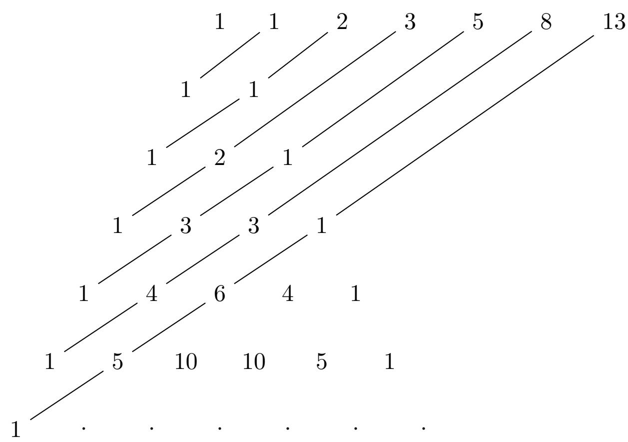

Figura 7. La sucesión de Fibonacci

Entonces podemos concluir que $p_3(n) = \binom{n+1}{2}$.
Por otra parte, para cada $m \geq 1$ y $n = 2$ el resultado del teorema anterior implica que

$$(25)\quad p_3(1) + p_3(2) + \cdots + p_3(n) = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

Con lo cual queda demostrado el corolario. $\square$

Finalmente, obsérvese que sumando los términos en las diagonales señaladas en la figura 7, se obtiene la sucesión de Fibonacci.

En el siguiente teorema formulamos rigurosamente y demostramos esta propiedad del triángulo de Pascal.

Teorema 13. *Sea $\{f(n)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de Fibonacci. Entonces $f(0) = 0$ y para $n \geq 1$ se tiene que*

(i) *si n es par, digamos $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$(26)\qquad f(2k) = \binom{2k-1}{0} + \binom{2k-2}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1};$$

(ii) *si n es impar, digamos $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces*

$$(27)\qquad f(2k+1) = \binom{2k}{0} + \binom{2k-1}{1} + \cdots + \binom{k}{k}.$$

Demostración. Bastará demostrar que la sucesión definida por los términos en los lados derechos de (26) y (27) satisfacen la ecuación en recurrencias de Fibonacci (11) y las condiciones iniciales.

Para las condiciones iniciales tenemos que, por definición, $f(0) = 0$ y si $n = 1$, i.e., $k = 0$ en (27) obtenemos que $\binom{0}{0} = 1$. Entonces las condiciones iniciales se satisfacen. Ahora, usando la recurrencia de Pascal (18) en los términos con signo positivo de la siguiente expresión, tenemos para $n = 2k$ con $k \geq 1$,

$$\binom{2k-1}{0} + \binom{2k-2}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1} - \binom{2k-2}{0} - \binom{2k-3}{1} - \cdots - \binom{k-1}{k-1}$$
$$= \binom{2k-3}{0} + \binom{2k-4}{1} + \cdots + \binom{k-1}{k-2}.$$

Esto demuestra que la ecuación en diferencias (11) también se satisface. El caso $n = 2k+1$, $k \geq 1$ se demuestra de manera similar. $\square$

Hemos discutido sólo algunas de las propiedades de los números naturales que se encuentran en el triángulo de Pascal. Invitamos al lector a continuar descubriendo y demostrando otras.

Referencias

[1] Deza E. and Deza M.M., *Figurate Numbers*, World Scientific, 2012.

[2] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[3] Goldberg, S., *Introduction to difference equations: with illustrative examples from economics, psychology and sociology*, Dover Publications Inc., USA, 2010.

Dirección del autor:
Roberto Quezada
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: roqb@xanum.uam.mx