



## DEL ÁLGEBRA LINEAL Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS AL ANÁLISIS FUNCIONAL Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

L. HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA

RESUMEN. En el presente trabajo se pretende ilustrar la analogía entre dos modelos, uno discreto y otro continuo. El modelo discreto describe el comportamiento de un sistema de masas-resortes, y el modelo continuo describe el comportamiento de una barra elástica, ambos bajo la acción de la gravedad. En los dos casos se estudia el problema de equilibrio y el problema dinámico, éste último obtenido al perturbar el equilibrio. La analogía entre ambos problemas va desde la construcción de los modelos, los aspectos físicos como equilibrio, trabajo y energía, hasta los aspectos matemáticos involucrados. Estas analogías sirven como pretexto para ilustrar la generalización del producto interior en  $\mathbb{R}^n$  a los espacios de funciones en dimensión infinita, los conceptos de ortogonalidad y completez, el análogo de las matrices con los operadores diferenciales, el análogo de las matrices traspuestas con los operadores adjuntos, ecuaciones matriciales y ecuaciones funcionales, el cálculo multivariado y el cálculo variacional. En consecuencia, ambos modelos (discreto y continuo) se pueden concebir con un mismo enfoque, desde el punto de vista matemático.

### 1. INTRODUCCIÓN

En algunos cursos de modelos matemáticos para estudiantes de licenciatura en la UAM-Iztapalapa, el presente autor ha utilizado parte del material del excelente libro de Strang, *Introduction to Applied Mathematics* [14]. Específicamente se han tomado dos modelos: uno discreto, el cuál consiste de un sistema de masas y resortes; y otro continuo, que describe el comportamiento de una barra elástica. En ambos casos se estudian los problemas de equilibrio bajo la acción de la gravedad, así como la dinámica cuando se perturba el equilibrio. Estos problemas sirven como pretexto para introducir al estudiante a la modelación matemática y también para integrar conocimientos adquiridos en los cursos de cálculo, álgebra lineal y análisis. El recurso didáctico de la analogía, así como la generalización, son explotados para ilustrar los conceptos de producto interior, ortogonalidad, operador, completez, y motivar otros más avanzados del análisis funcional y el cálculo variacional, sin pretender ser formal y riguroso.

El álgebra lineal, el cálculo, el análisis funcional y el cálculo de variaciones juegan un papel central en muchos campos de la matemática aplicada como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, así como el análisis numérico, la optimización, el control y los problemas inversos, por mencionar algunos. En ocasiones, es posible auxiliarse de resultados conocidos del álgebra lineal y del cálculo, los cuales se utilizan más frecuentemente en modelos que se pueden trabajar en dimensión finita, para desarrollar un poco de intuición en problemas que requieren del uso de herramientas matemáticas más sofisticadas. Aunque en el libro de texto mencionado arriba se presentan algunas ideas, en el presente trabajo se profundiza en los conceptos matemáticos. Además, se establece la relación entre los dos modelos y sus propiedades en forma detallada y minuciosa. El presente artículo es una adaptación de las notas

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 34B07, 35A15, 46N20, 49K20.

*Palabras clave.* Ecuación diferencial ordinaria y ecuación diferencial parcial, función cuadrática y funcional cuadrático, producto interior, ortogonalidad, operador elíptico, cálculo de variaciones.

del curso ofrecido en el VI Coloquio del Departamento de Matemáticas en el Centro Vacacional de Metepec, Puebla, en enero de 2014.

## 2. MODELO DE EQUILIBRIO DISCRETO. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Considérese un sistema de dos masas de magnitud  $m_1, m_2$ , unidas por tres resortes con constantes de rigidez  $k_1, k_2, k_3$ , sujetos en dos extremos opuestos fijos, como se ilustra en la figura 1. El sistema se encuentra suspendido en equilibrio bajo la acción de la gravedad, y se supone que los resortes tienen masa despreciable. La gravedad, de magnitud  $g$ , provoca los desplazamientos  $u_1, u_2$ , moviendo las masas de sus posiciones iniciales  $x_1$  y  $x_2$  a sus nuevas posiciones  $x_1 + u_1$  y  $x_2 + u_2$ , por la deformación de los resortes. El interés es calcular los desplazamientos  $u_1, u_2$  en términos de las fuerzas externas  $f_1 = m_1g, f_2 = m_2g$ .

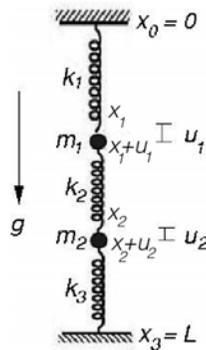


FIGURA 1. Sistema de dos masas y tres resortes en equilibrio bajo la acción de la gravedad

Las variables involucradas son: los desplazamientos de las masas,  $u_1$  y  $u_2$ ; las deformaciones de los resortes,  $e_1, e_2$  y  $e_3$ ; las fuerzas internas (de restitución) de los resortes,  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ ; las fuerzas externas (por acción de la gravedad) sobre las masas,  $f_1$  y  $f_2$ . Para derivar el modelo de equilibrio se realizan los siguientes pasos:

- Se establece la relación entre las deformaciones de los resortes y los desplazamientos de las masas:

$$(1) \quad e_i = u_i - u_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Es decir, para medir cuanto se estira o comprime un resorte, se calcula la diferencia de los desplazamientos de las masas adyacentes. Como el primer resorte está fijo en la parte superior, se define  $u_0 = 0$ . Análogamente, como el tercer resorte está fijo en el extremo inferior, se define  $u_3 = 0$ .

- Se utiliza la ley de Hooke para establecer la relación entre fuerzas de restitución de los resortes y la deformación de los mismos:

$$(2) \quad \sigma_i = k_i e_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Esta ley establece que la fuerza de restitución sobre un resorte es proporcional al tamaño de su deformación. Suponiendo que cada resorte  $i$  está hecho de material uniforme, entonces la relación de proporción es constante e igual a la rigidez  $k_i$ .

- Se obtiene la ecuación de equilibrio, realizando el balance de fuerzas sobre las masas:

$$(3) \quad f_i = \sigma_i - \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2.$$

En el equilibrio, el peso  $f_i$  de la masa  $m_i$  es igual y en sentido opuesto a la fuerza total que los resortes ejercen sobre ella.

Utilizando la notación vectorial

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

las ecuaciones (1), (2) y (3) se pueden expresar en la forma matricial

$$(4) \quad \mathbf{e} = D \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = K \mathbf{e}, \quad \mathbf{f} = D^T \boldsymbol{\sigma},$$

respectivamente, en donde

$$(5) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix},$$

y  $D^T$  denota a la matriz traspuesta a la matriz  $D$ . De (4) se obtiene la ecuación de equilibrio  $\mathbf{f} = D^T K D \mathbf{u}$ . Para simplificar la notación, se denotará por  $A$  a la matriz  $D^T K D$ . Entonces, los desplazamientos de las masas se pueden calcular resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$(6) \quad A \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = g \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}.$$

La solución de esta ecuación es única, pues la matriz  $A$  es simétrica y definida positiva. De ahora en adelante se utilizará la notación  $A^T$  para indicar la matriz traspuesta de  $A$ , y  $A > 0$  para indicar que  $A$  es definida positiva.

**Generalización del modelo.** Cuando se consideran  $n$  masas suspendidas y acopladas por medio de  $n + 1$  resortes, las relaciones matriciales (4) se siguen cumpliendo, sólo que ahora las matrices son

$$(7) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = g \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix},$$

con  $D \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$  y  $K \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ . Los desplazamientos  $u_1, u_2, \dots, u_n$  se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones (6), con la matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dada por

$$(8) \quad A = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

la cual también es simétrica y definida positiva, [7], [14].

### 3. TRABAJO Y PRODUCTO INTERIOR. ENERGÍA Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

**Trabajo.** El sistema de masas y resortes en equilibrio satisface un principio fundamental: *el trabajo interno de deformación de los resortes debe ser igual al trabajo externo hecho sobre las masas*. Para verificarlo, calculamos ambos trabajos:

$$\text{Trabajo interno sobre los resortes (por la deformación)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i e_i = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

$$\text{Trabajo externo sobre las masas (por acción de la gravedad)} = \sum_{i=1}^n f_i u_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

El símbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$  denota el producto interno en  $\mathbb{R}^n$ . Utilizando (4) se verifica que ambos trabajos son iguales

$$(9) \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle \boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle D^T \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Hay dos propiedades implícitas importantes que vale la pena destacar:

1. La matriz que conecta la fuerza  $\boldsymbol{\sigma}$  con  $\mathbf{f}$  es la traspuesta de la que conecta  $\mathbf{u}$  con  $\mathbf{e}$ , ver (4).
2. El producto interno es una forma adecuada para definir la traspuesta de una matriz. Si se piensa la matriz  $D$  como una transformación de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , la traspuesta  $D^T$  es otra transformación de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en  $\mathbb{R}^n$  que satisface  $\langle \boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle D^T \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$  para todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  y  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Energía potencial.** Otro principio físico importante del sistema en equilibrio es que *los resortes buscan la posición en la cual la energía potencial total (de masas y resortes) es mínima*. Con el objeto de verificarlo, primero se calcula la energía potencial de las masas

$$(10) \quad -\sum_{i=1}^n m_i g u_i = -\sum_{i=1}^n f_i u_i = -\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

El signo menos indica que se requiere trabajo externo para llevar a las masas a su posición original (es decir, a la posición que tendrían en ausencia de gravedad). Por otro lado, la energía potencial asociada a los resortes es

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} k_i e_i^2 = \frac{1}{2} \langle K\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle K D\mathbf{u}, D\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{1}{2} \langle D^T K D\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

la cual es positiva, debido a que cuando se quitan las masas (en decir, ausencia de gravedad) los resortes ceden trabajo. Por lo tanto, la energía potencial total es la suma de las dos anteriores

$$(12) \quad p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

la cual es una función cuadrática con matriz Hessiana  $A = A^T > 0$ . Por condiciones suficientes de segundo orden, se sabe que tiene un único mínimo global  $\mathbf{u}^*$ , el cuál se encuentra resolviendo el sistema  $\nabla p(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Es decir, el vector de desplazamientos de equilibrio  $\mathbf{u}^*$  minimiza  $p(\mathbf{u})$  si y sólo si resuelve sistema de ecuaciones  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ . Desde el punto de vista práctico este resultado es muy importante debido a que permite encontrar la solución de equilibrio de dos maneras equivalentes:

1. Resolviendo el sistema de ecuaciones  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  (balance de fuerzas).
2. Minimizando la función cuadrática  $p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$  (energía potencial).

Un método muy eficiente para resolver el sistema de ecuaciones es *el método de Choleski*, el cuál es un método directo de factorización [7]. Para encontrar el mínimo de la función cuadrática se recomienda *el método iterativo de gradiente conjugado*. Si además, la matriz  $A$  es tridiagonal, el algoritmo más efectivo para resolver el sistema de ecuaciones es *el método de Thomas* (ver [12]).

#### 4. MODELO DINÁMICO DISCRETO. VALORES Y VECTORES PROPIOS

Si se introduce una perturbación en el sistema, las masas y los resortes buscarán volver al equilibrio. Por ejemplo, si inicialmente se desplazan las masas la cantidad  $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)^T$ , y después se sueltan con velocidad inicial nula, el sistema comenzará a oscilar. Se puede aplicar la segunda ley de Newton para obtener el modelo dinámico; para ello se denota por  $u_i(t)$  el desplazamiento de la masa  $m_i$  en el instante  $t > 0$ , y por  $\dot{u}_i(t)$  y  $\ddot{u}_i(t)$  su primera y segunda derivada, respectivamente.

La fuerza total externa sobre la masa  $m_i$  es  $f_i - (\sigma_i - \sigma_{i+1}) = f_i - (A\mathbf{u})_i$ , así que  $m_i \ddot{u}_i(t) = f_i - (A\mathbf{u})_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Este sistema de ecuaciones diferenciales se complementa dando los desplazamientos iniciales  $u_i(0) = u_i^0$  y las velocidades iniciales nulas  $\dot{u}_i(0) = 0$ . Utilizando notación vectorial, y suponiendo que todas las masas tienen el mismo valor  $m$ , el modelo dinámico es

$$(13) \quad m \ddot{\mathbf{u}}(t) + A \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}, \quad (\text{ecuación diferencial})$$

$$(14) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad (\text{desplazamiento inicial})$$

$$(15) \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}, \quad (\text{velocidad inicial})$$

Este sistema lineal de segundo orden tiene solución única [2] y consta de dos componentes naturales:

$$(16) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^* + \mathbf{v}(t),$$

en donde  $\mathbf{u}^*$  representa la *solución de equilibrio*, y el vector  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*$  representa las *desviaciones del equilibrio*. Sustituyendo  $\mathbf{u}(t)$  en el anterior sistema de ecuaciones, y utilizando que  $A\mathbf{u}^* = \mathbf{f}$ , se obtiene el siguiente sistema para las desviaciones del equilibrio

$$(17) \quad m \ddot{\mathbf{v}}(t) + A \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \quad (\text{ecuación diferencial})$$

$$(18) \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \quad (\text{desviación inicial})$$

$$(19) \quad \dot{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{0}, \quad (\text{velocidad inicial}),$$

con desviaciones iniciales  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*$ . Por lo tanto, para resolver el problema debemos de resolver dos problemas: el problema de equilibrio y el problema para las desviaciones del equilibrio.

**Solución del problema de equilibrio.** Esta solución generalmente se encuentra resolviendo el sistema lineal  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ , por medio de alguno de los métodos mencionados al final de la sección anterior. Sin embargo, aquí se resolverá este problema utilizando los valores y vectores propios de la matriz  $A$ . Aunque no es típico resolver sistemas de ecuaciones lineales de esta manera, pues el cálculo de los valores y vectores propios es considerablemente más laborioso que resolver sistemas de ecuaciones, lo haremos motivados por dos razones: primero, porque los problemas dinámicos generalmente necesitan de los valores y vectores propios; otra razón es que esta técnica (método de Fourier) es común en la solución de ecuaciones diferenciales lineales que modelan problemas en medios continuos.

Dado que la matriz  $A$  es simétrica, existen  $n$  vectores propios  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , que se suponen unitarios, los cuáles forman un sistema ortogonal completo en  $\mathbb{R}^n$ , es decir son vectores mutuamente ortogonales (por tanto, linealmente independientes) que generan  $\mathbb{R}^n$ . Así que la solución  $\mathbf{u}^*$  se puede expresar en la forma  $\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i$ , en donde los coeficientes  $a_i$  se deben determinar. Sustituyendo  $\mathbf{u}^*$  en el sistema  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ , y recordando que  $A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ , se obtiene

$$\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{f}.$$

Multiplicando ambos lados de esta igualdad por cada vector propio  $\mathbf{u}_j$ , y utilizando la ortogonalidad, se obtienen los coeficientes:

$$a_j = \frac{f_j}{\lambda_j}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

en donde  $f_j = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$  es la  $j$ -ésima coordenada de  $\mathbf{f}$  en la base ortonormal. Los valores propios  $\lambda_j$  son positivos debido a que  $A > 0$ . Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones está dada por la siguiente expresión muy simple

$$(20) \quad \mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i.$$

**Solución del problema para las desviaciones del equilibrio.** Para resolver este problema lo típico es hacer uso de las coordenadas naturales (los vectores propios). En cada instante  $t > 0$ ,  $\mathbf{v}(t)$  es un vector en  $\mathbb{R}^n$ , por lo que

$$(21) \quad \mathbf{v}(t) = a_1(t) \mathbf{u}_1 + a_2(t) \mathbf{u}_2 + \cdots + a_n(t) \mathbf{u}_n,$$

en donde los coeficientes  $a_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se deben determinar. Para calcularlos se sustituye (21) en (17)–(19) y recordando que  $A \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [m \ddot{a}_i(t) + \lambda_i a_i(t)] \mathbf{u}_i &= \mathbf{0}, \\ \sum_{i=1}^n a_i(0) \mathbf{u}_i &= \mathbf{v}^0, \\ \sum_{i=1}^n \dot{a}_i(0) \mathbf{u}_i &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Utilizando la ortonormalidad de los vectores propios, se obtienen las ecuaciones diferenciales escalares

$$(22) \quad m \ddot{a}_i(t) + \lambda_i a_i(t) = 0,$$

$$(23) \quad a_i(0) = v_i^0, \quad \text{con } v_i^0 = \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{u}_i \rangle,$$

$$(24) \quad \dot{a}_i(0) = 0,$$

para  $0 \leq i \leq n$ . Las soluciones son

$$(25) \quad a_i(t) = v_i^0 \cos \omega_i t, \quad \text{con } \omega_i^2 = \frac{\lambda_i}{m}.$$

Por lo tanto, las desviaciones del equilibrio están dadas por

$$(26) \quad \mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^n v_i^0 \cos \omega_i t \mathbf{u}_i,$$

y sumando la solución de equilibrio se obtiene la solución del problema (13)–(15)

$$(27) \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f_i}{\lambda_i} + v_i^0 \cos \omega_i t \right] \mathbf{u}_i, \quad \text{con } f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle, \quad v_i^0 = \langle \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}_i \rangle, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}}.$$

Es claro que la primera parte de la suma corresponde al equilibrio y la segunda a las desviaciones del equilibrio. Además, las desviaciones del equilibrio siguen una dinámica oscilatoria producto de la superposición de  $n$  **modos normales**  $v_i^0 \cos \omega_i t \mathbf{u}_i$ , con las siguiente características:

- Sus *amplitudes*  $v_i^0$  dependen de los vectores propios  $\mathbf{u}_i$ .
- Sus *frecuencias*  $\omega_i$  dependen de los valores propios  $\lambda_i$ .

En conclusión, para resolver el problema de equilibrio es necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales algebraicas, mientras que para resolver el problema dinámico es necesario resolver un problema de valores propios. Los dos problemas son fundamentalmente diferentes y, desde el punto de vista computacional, es considerablemente más difícil resolver un problema de valores propios  $A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  que un sistema de ecuaciones lineales  $A \mathbf{u} = \mathbf{f}$ .

## 5. MODELO DE EQUILIBRIO CONTINUO. OPERADORES DIFERENCIALES. ESPACIOS DE FUNCIONES

Se considera una barra delgada hecha de material elástico homogéneo, que cuelga en forma vertical bajo la acción de la gravedad. La barra está sujeta de ambos extremos en una posición fija, como se ilustra en la figura 2, y se puede pensar como un caso límite de una infinidad de masas puntuales unidas por resortes infinitesimales. El interés es conocer la magnitud de la deformación de la misma.

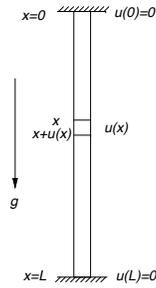


FIGURA 2. Barra elástica bajo la acción de la gravedad

Para obtener un modelo que describa la deformación se parte de un principio básico: *la magnitud de la deformación en cada porción (elemento) de la barra dependerá del desplazamiento de la barra en dicha porción por unidad de longitud*. Más específicamente,

- Sea  $u(x)$  la magnitud del ‘desplazamiento’ en la posición  $x \in (0, L)$ . Esta magnitud indica cuanto se desplaza un punto  $x \in (0, L)$  sobre la barra cuando ésta se somete a la acción de la gravedad. Por supuesto que este desplazamiento depende de las propiedades físicas de la barra y de la fuerza externa aplicada (‘carga’).
- La deformación de la barra (elongación) en el punto  $x$  se medirá mediante la variación del desplazamiento por unidad de longitud en dicho punto, es decir

$$(28) \quad \epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}.$$

A mayor variación del desplazamiento, mayor será la elongación de la barra.

- Hay dos fuerzas actuando sobre cada porción infinitesimal  $\Delta x$  de la barra ubicada en una posición  $x$ :
  1. El esfuerzo interno ó tracción,  $\sigma(x)$ , dado por la Ley de Hooke

$$(29) \quad \sigma(x) = k(x) \epsilon(x).$$

La barra internamente trata de regresar a su estado original cuando es deformada. La función  $k(x)$  se denomina el módulo de elasticidad y describe las propiedades elásticas de la barra, de manera análoga a la constante de elasticidad en los resortes.

2. La fuerza externa por unidad de longitud  $f(x)$ , debido a la acción de la gravedad, dada por

$$(30) \quad f(x) = \rho(x) g,$$

en donde  $\rho(x)$  es la densidad lineal en  $x$ , y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Cuando la barra cuelga en equilibrio, las dos fuerzas (la interior y la exterior) tienen la misma magnitud, y sentido opuesto. Por lo tanto, la ecuación de equilibrio se puede obtener para cada pequeño elemento de la barra  $[x, x + \Delta x]$  por medio de la siguiente igualdad

$$(31) \quad \sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) + f(x) \Delta x = 0.$$

Dividiendo sobre  $\Delta x$  y tomando el límite, cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se obtiene  $-\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x)$ .

Utilizando (28) y (29)), se obtiene

$$(32) \quad -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

Esta ecuación se complementa con las condiciones de frontera

$$(33) \quad u(0) = u(L) = 0,$$

debido a que la barra está sujeta en posición fija en esos puntos.

**Trabajo.** Para calcular el trabajo que las fuerzas del sistema realizan, se procede por analogía con el caso discreto:

- El trabajo interno de los resortes en el modelo discreto es  $\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i e_i = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$ .

Se aplica el mismo razonamiento a la barra elástica, en lugar de la fuerza de restitución  $\sigma_i$  tenemos la tracción  $\sigma(x)$  y, en lugar de las elongaciones  $e_i$  tenemos las deformaciones por unidad de longitud  $e(x)$ . Naturalmente, en lugar de sumar productos de cantidades discretas ahora debemos integrar productos de cantidades continuas. Por lo tanto

$$(34) \quad \text{Trabajo interno sobre la barra} = \int_0^L \sigma(x) e(x) dx.$$

- El trabajo externo sobre las masas en el modelo discreto es  $\sum_{i=1}^n f_i u_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ .

Para la barra elástica, en lugar de las fuerzas de gravedad  $f_i$  tenemos la fuerza de gravedad por unidad de longitud  $f(x)$ , y en lugar de los desplazamientos discretos  $u_i$  tenemos los desplazamientos continuos  $u(x)$ . Por lo tanto

$$(35) \quad \text{Trabajo externo sobre la barra} = \int_0^L f(x) u(x) dx$$

En el equilibrio estos dos trabajos deben de ser iguales. Una forma de verificarlo es sustituyendo en (34) las definiciones de  $\sigma(x)$  y  $e(x)$ , obteniendo

$$\int_0^L \sigma(x) e(x) dx = \int_0^L \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx.$$

Haciendo integración por partes en la integral de la derecha se obtiene

$$\int_0^L \sigma(x) e(x) dx = - \int_0^L \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) u(x) dx.$$

El término de frontera en la integración por partes,  $k(L) \frac{du(L)}{dx} u(L) - k(0) \frac{du(0)}{dx} u(0)$ , se anula debido a las condiciones de frontera  $u(0) = u(L) = 0$ . A su vez, la integral de la derecha en la última expresión se puede transformar utilizando (32), obteniendo

$$(36) \quad \int_0^L \sigma(x) e(x) dx = \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Esta igualdad es el análogo continuo de la expresión (9) y expresa que *el trabajo total realizado por la barra para contrarrestar la deformación es igual al trabajo total externo realizado por la gravedad sobre la barra.*

**Producto interior.** Las analogías entre el problema de equilibrio de la barra elástica y el problema estático de masas y resortes se han basado en conceptos físicos como fuerza, trabajo y equilibrio. Tratando de encontrar analogías de tipo matemático, se observa que el trabajo externo sobre  $n$  masas se puede calcular mediante el producto interno  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ , por lo que es natural preguntar si la forma de calcular ese trabajo en el caso continuo también define un producto interior. Si se considera el espacio de las funciones continuas de valores reales definidas sobre el intervalo  $(0, L)$ , denotado por  $\mathcal{C}(0, L)$ , es fácil verificar que efectivamente la expresión (35) define un producto interior sobre este espacio y se escribe

$$\langle f, u \rangle_{\mathcal{C}(0, L)} = \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

La norma inducida por este producto interior se define mediante  $\|f\|_{\mathcal{C}(0, L)}^2 = \langle f, f \rangle_{\mathcal{C}(0, L)}$ , y se puede hablar de distancias entre funciones, ortogonalidad, sucesiones y series de

funciones, convergencia, entre otros. En particular, la famosa desigualdad de Cauchy–Schwartz,  $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$  toma la forma

$$\int_0^L u(x)v(x) dx \leq \left( \int_0^L u(x)^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L v(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Sin embargo, es fácil construir sucesiones de funciones continuas cuyo límite con esta norma no es una función continua [8], [10]. En las aplicaciones es muy importante trabajar con espacios normados completos. Al completar el espacio quedan incluidas todas las funciones medibles sobre el intervalo  $(0, L)$  que son ‘cuadrado integrables’, en el sentido de Lebesgue [8], [9], [13]. Este espacio vectorial se denota por  $L^2(0, L)$  y está definido por

$$(37) \quad L^2(0, L) = \left\{ v : (0, L) \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^L u^2 dx < \infty \right\}.$$

Éste es un espacio de Hilbert (espacio normado completo con producto interior), es uno de los espacios de funciones más importantes del análisis funcional para el estudio de las ecuaciones diferenciales [4].

Con el objeto de extraer más analogías de corte matemático entre el caso discreto y el caso continuo, conviene presentar una comparación de ambos modelos, como se indica en el cuadro 1

CASO DISCRETO	CASO CONTINUO
Sistema masas–resortes	Barra elástica
Desplazamientos de las masas: $\mathbf{u}$	Desplazamiento de la barra: $u(x)$
Elongación: $\mathbf{e} = D \mathbf{u}$	Deformación: $e(x) = \frac{du(x)}{dx}$
Fuerza de restitución: $\boldsymbol{\sigma} = K \mathbf{e}$	Tracción: $\sigma(x) = k(x) e(x)$
Equilibrio: $D^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$	Equilibrio: $-\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x)$
Ecuación matricial: $D^T K D \mathbf{u} = \mathbf{f}$	Ec. diferencial: $-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x)$
Trabajo interno: $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$	Trabajo interno: $\langle \sigma, e \rangle_{L^2(0,L)}$
Trabajo externo: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$	Trabajo externo: $\langle f, u \rangle_{L^2(0,L)}$

CUADRO 1. Comparación entre los modelos discreto y continuo

**El operador adjunto e integración por partes.** En el cuadro 1 se observa que el operador matricial  $D$  actúa sobre el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$ , mientras que el operador diferencial  $\frac{d}{dx}$  actúa sobre las funciones  $u(x)$ . Además, la matriz traspuesta  $D^T$  actúa sobre los vectores  $\boldsymbol{\sigma}$ , mientras que el operador diferencial  $-\frac{d}{dx}$  actúa sobre las tracciones  $\sigma(x)$ . Es decir, los operadores discretos y continuos están relacionados

$$(38) \quad D \sim \frac{d}{dx}, \quad D^T \sim -\frac{d}{dx}.$$

El operador diferencial  $\frac{d}{dx}$  puede pensarse como el límite del operador matricial  $D$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que

$$\frac{du(x_i)}{dx} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i}, \quad \text{mientras que} \quad (D\mathbf{u})_i = u_i - u_{i-1}.$$

Es decir, el operador diferencial es el límite continuo de la matriz  $D$  escalada, en donde los factores de escalamiento son las longitudes  $h_i$ . Estas longitudes se pueden pensar como la separación de las masas  $m_i$  y  $m_{i-1}$ , en el caso discreto. Para explicar

la analogía entre  $D^T$  y  $-\frac{d}{dx}$ , denotamos por  $\mathcal{D}$  al operador diferencial  $\frac{d}{dx}$ . Haciendo integración por partes se obtiene

$$(39) \quad \langle \mathcal{D}u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L \frac{du}{dx} v dx = \int_0^L u \left( -\frac{dv}{dx} \right) dx = \left\langle u, -\frac{dv}{dx} \right\rangle_{L^2(0,L)} = \langle u, \mathcal{D}^*v \rangle_{L^2(0,L)}.$$

Los términos de frontera en la integración por partes son cero ya que  $u(0) = u(L) = 0$ . La igualdad (39) muestra que la ‘*traspuesta*’ del operador diferencial es el mismo operador pero con signo contrario. A dicho operador se le denomina el operador adjunto y se denota por  $\mathcal{D}^*$ . En realidad, los operadores diferenciales, definidos sobre funciones que están definidas sobre regiones acotadas, vienen acompañados de condiciones de frontera. Así que es más adecuado definir los operadores  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}^*$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} & \text{ se define por medio de } \mathcal{D}u = \frac{du}{dx}, \quad u(0) = 0, \\ \mathcal{D}^T & \text{ se define por medio de } \mathcal{D}^*u = -\frac{du}{dx}, \quad u(L) = 0. \end{aligned}$$

Los anteriores operadores diferenciales son claramente lineales, además de que están bien definidos sobre el subconjunto de funciones en  $L^2(0, L)$  cuyas derivadas generalizadas también pertenecen a  $L^2(0, L)$ , [4], [8]. Este subconjunto define un espacio que se denota por  $H^1(0, L)$ , y es también un espacio de Hilbert con el siguiente producto interior y correspondiente norma:

$$(40) \quad \langle u, v \rangle_{H^1(0,L)} = \int_0^L [u(x)v(x) + u'(x)v'(x)] dx, \quad \|u\|_{H^1(0,L)}^2 = \langle u, u \rangle_{H^1(0,L)}.$$

Un subespacio muy útil en el estudio y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es

$$(41) \quad H_0^1(0, L) = \{v \in H^1(0, L) : v(0) = v(L) = 0\}.$$

La *desigualdad de Poincaré-Friedrichs*,  $\int_0^L v(x)^2 dx \leq C \int_0^L \|v'(x)\|^2 dx$  para toda  $v \in H_0^1(0, L)$ , implica que la seminorma

$$(42) \quad |v|_{H_0^1(0,L)}^2 = \int_0^L \|v'(x)\|^2 dx,$$

es una norma en el espacio  $H_0^1(0, L)$ , la cuál es equivalente a la norma en  $H^1(0, L)$ . Por último, vale decir que las posibles soluciones de la ecuación diferencial se buscan en el espacio

$$H^2(0, L) = \{v \in L^2(0, L) : v', v'' \in L^2(0, L)\},$$

el cuál es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$(43) \quad \langle u, v \rangle_{H^2(0,L)} = \int_0^L [u(x)v(x) + u'(x)v'(x) + u''(x)v''(x)] dx.$$

Los espacios de funciones  $L(0, L)$ ,  $H_0^1(0, L)$ ,  $H^1(0, L)$  y  $H^2(0, L)$  son ejemplos de los denominados *espacios de Sobolev*, los cuales son de fundamental importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Para un estudio mucho más detallado de los mismos se pueden consultar las referencias [1], [4] y [8].

## 6. ENERGÍA POTENCIAL. FUNCIONALES CUADRÁTICOS Y CÁLCULO DE VARIACIONES

En el caso de la barra elástica también se satisface un principio del mínimo: *El desplazamiento de equilibrio es aquel en el que la energía total del sistema es mínima*. En esta sección se justificará esta aseveración y se mostrarán las analogías con el caso discreto.

La energía potencial almacenada debido a un desplazamiento  $u(x)$  se debe a dos factores:

- La tracción debida a las fuerzas elásticas internas. Esta parte de la energía potencial se calcula utilizando la expresión análoga al caso discreto (11)

$$\frac{1}{2} \int_0^L k(x) e(x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L k(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx.$$

- La fuerza externa debida a la gravedad. Utilizando la expresión análoga al caso discreto (10), se obtiene

$$- \int_0^L \rho(x) g u(x) dx = - \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Por lo tanto, la **energía potencial total** está dada por la expresión:

$$(44) \quad P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L k(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Haciendo integración por partes en la primera integral obtenemos

$$(45) \quad P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L - \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) u(x) dx - \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Con el objeto de mostrar que esta expresión es análoga a la expresión (12), definimos el operador  $\mathcal{K}$  como  $(\mathcal{K}u)(x) = k(x) u(x)$ , con  $k(x) > 0$  y acotada sobre  $(0, L)$ . Utilizando los operadores diferenciales definidos previamente,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}^*$ , se construye el operador diferencial lineal

$$(46) \quad \mathcal{A} = \mathcal{D}^* \mathcal{K} \mathcal{D}, \text{ definido por } (\mathcal{A}u)(x) = - \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right), \quad u(0) = u(L) = 0.$$

Por lo tanto, la energía potencial se puede expresar en forma operacional por medio del *funcional cuadrático*

$$(47) \quad P(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} - \langle f, u \rangle_{L^2(0,L)}.$$

Las analogías más importantes entre la matriz  $A = D^T K D$  en (12) y el operador  $\mathcal{A} = \mathcal{D}^* \mathcal{K} \mathcal{D}$  en (47) son:

- La matriz  $A$  es simétrica, por lo que  $\langle \mathbf{A}u, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, \mathbf{A}v \rangle_{\mathbb{R}^n}$  para todo  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .

Para verificar que el operador  $\mathcal{A}$  es simétrico ( $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ) se utiliza integración por partes dos veces:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u, v \rangle_{L^2(0,L)} &= \int_0^L - \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^L k(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \\ &= - \int_0^L u(x) \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{dv(x)}{dx} \right) dx = \langle u, \mathcal{A}v \rangle_{L^2(0,L)}. \end{aligned}$$

- La matriz  $A$  es definida positiva, es decir  $\langle \mathbf{A}u, u \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$  si  $u \neq \mathbf{0}$ , y es cero sólo si  $u = \mathbf{0}$ .

Para verificar que el operador  $\mathcal{A}$  es positivo, se utiliza integración por partes una vez:

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L - \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) u(x) dx = \int_0^L k(x) \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx.$$

Esta cantidad es no negativa, pues  $k(x) > 0$ . Además, es cero sólo cuando  $u$  es constante e igual a cero, pues  $u(0) = u(L) = 0$ .

La propiedad de positividad del operador diferencial  $\mathcal{A}$  permite vislumbrar que el funcional cuadrático (47) tiene un único mínimo global. Es posible utilizar técnicas del cálculo de variaciones [5], [6], para ayudar a convencernos de lo anterior.

**Definición 1.** La *primera y segunda variaciones* del funcional  $P$  en  $u$ , en la *dirección*  $v$ , se define por medio de

$$D^{(1)}P(u; v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(u + \epsilon v) - P(u)}{\epsilon} = \left. \frac{\partial P(u + \epsilon v)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0},$$

$$D^{(2)}P(u; v) = \left. \frac{\partial^2 P(u + \epsilon v)}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=0},$$

respectivamente. Se le conoce también como derivada de Gâteaux.

Utilizando la linealidad y simetría de  $\mathcal{A}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} P(u + \epsilon v) &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}(u + \epsilon v), u + \epsilon v \rangle_{L^2(0,L)} - \langle f, u + \epsilon v \rangle_{L^2(0,L)} \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} - \langle f, u \rangle_{L^2(0,L)} + \epsilon \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)} + \frac{\epsilon^2}{2} \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{L^2(0,L)} \\ &= P(u) + \epsilon \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)} + \frac{\epsilon^2}{2} \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{L^2(0,L)}. \end{aligned}$$

Obsérvese que esta expresión se puede considerar como la expansión de Taylor de  $P$  alrededor de  $u$ . Aplicando las definiciones de la primera y segunda variación, se obtiene

$$(48) \quad D^{(1)}P(u; v) = \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)}, \quad D^{(2)}P(u; v) = \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{L^2(0,L)}, \quad \forall v \in H_0^1(0, L).$$

Debido a que el operador  $\mathcal{A}$  es positivo, entonces  $\langle \mathcal{A}v, v \rangle > 0$ , para toda función  $v$  no nula, y el mínimo  $u^*$  de  $P(u)$  sería aquel que resuelve la ecuación variacional

$$(49) \quad \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)} = 0, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(0, L).$$

Es un asunto delicado demostrar la existencia y unicidad de la solución de este problema variacional. Baste decir que  $u^* \in H_0^1(0, L)$  y es posible utilizar el *teorema de Lax-Milgram* para demostrarlo, [3], [4]. Además, si se pide que  $u^* \in H^2(0, L)$ , entonces la solución de (49) es aquella que resuelve el problema de equilibrio (32)–(33).

Por lo tanto para encontrar el desplazamiento de equilibrio en la barra elástica, se tienen dos opciones:

1. Resolver el modelo de equilibrio, dado por la ecuación diferencial (32)–(33).
2. Minimizar la energía potencial, dada por el funcional cuadrático (44) o (47).

Para resolver la ecuación diferencial se pueden utilizar los métodos de Fourier, basados en expansiones con funciones ortogonales, mientras que para minimizar el funcional es posible utilizar métodos iterativos de descenso.

Existe una tercera opción para resolver el problema, *el método de Ritz-Galerkin*. Este método consiste en resolver el problema variacional (49) de manera aproximada, convirtiendo el operador diferencial en un operador matricial mediante la aproximación de las funciones en subespacios de dimensión finita. Uno de los métodos más utilizado de este tipo, es el método de elemento finito [3].

Para finalizar la sección se muestra un resumen de las analogías entre el problema discreto y el problema continuo, como se indica en el cuadro 2, el cual complementa al cuadro 1.

## 7. MÉTODO DE FOURIER. VALORES Y FUNCIONES PROPIAS DEL OPERADOR DIFERENCIAL

Se considera el caso especial en que la barra está hecha de un material con elasticidad uniforme, es decir  $k(x) = k$  con  $k > 0$  en  $\mathbb{R}$ . En este caso, el modelo de equilibrio es

$$(50) \quad -k \frac{d^2}{dx^2} u(x) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

$$(51) \quad u(0) = u(L) = 0.$$

	CASO DISCRETO	CASO CONTINUO
	<b>Sistema masas-resortes</b>	<b>Barra elástica</b>
Operador	Matricial $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $A = D^T K D$	Diferencial $\mathcal{A} : H^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$ $\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} \left( k \frac{d}{dx} \right)$
P. interno	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$	$\langle u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L u(x) v(x) dx$
Simetría	$A = A^T$ , es decir $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ , es decir $\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \langle u, \mathcal{A}v \rangle_{L^2(0,L)}$
Positividad	$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$	$\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} > 0$ si $u$ es no nula
Energía	$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i e_i^2 - \sum_{i=0}^n f_i u_i$	$P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L k(x) e(x)^2 dx - \int_0^L f(x) u(x) dx$
Potencial	$= \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ en donde $\mathbf{e} = D\mathbf{u}$	$= \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} - \langle \mathbf{f}, u \rangle_{L^2(0,L)}$ en donde $e = \frac{du}{dx}$
Derivada	$\nabla p(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} - \mathbf{f}$	$D^{(1)}P(u; v) = \langle \mathcal{A}u - \mathbf{f}, v \rangle_{L^2(0,L)}$
Cond. para el mínimo	$A\mathbf{u}^* = \mathbf{f} : D^T K D \mathbf{u}^* = \mathbf{f}$ $u_0 = u_{n+1} = 0$	$\mathcal{A}u^* = f : -\frac{d}{dx} \left( k \frac{du^*}{dx} \right) = f$ $u(0) = u(L) = 0$

CUADRO 2. Comparación de los modelos discreto y continuo (continuación)

La idea fundamental del método de Fourier para resolver este problema con valores a la frontera, es encontrar los valores propios y las funciones propias del operador diferencial

$$(52) \quad \mathcal{A} = -k \frac{d^2}{dx^2}.$$

al cual se le asocian condiciones de frontera Dirichlet nulas en  $x = 0$  y  $x = L$ .

**Funciones propias y valores propios.** Una función propia  $u$  de  $\mathcal{A}$  satisface  $\mathcal{A}u = \lambda u$  (con valor propio  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) además de  $u(0) = u(L) = 0$ . Así que, buscamos funciones que se anulen en los extremos y cuya su segunda derivada es igual a un múltiplo negativo de la misma. Se puede intentar la combinación

$$u(x) = a \text{ sen } \Omega x + b \text{ cos } \Omega x,$$

en donde,  $a$ ,  $b$  y  $\Omega$  se deben determinar. Para que  $u(0) = 0$  se debe escoger  $b = 0$ . Para que  $u(L) = 0$  se debe cumplir que  $a \text{ sen } \omega L = 0$ , es decir  $\Omega = \frac{m\pi}{L}$ , con  $m \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, las funciones propias son de la forma

$$u_m(x) = \text{sen } \Omega_m x, \quad \text{con frecuencias } \Omega_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Estas funciones satisfacen

- $\langle u_m, u_n \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L \text{sen } \frac{m\pi x}{L} \text{ sen } \frac{n\pi x}{L} dx = 0$  si  $n \neq m$ .
- $\langle u_m, u_m \rangle_{L^2(0,L)} = \|u_m\|_{L^2(0,L)}^2 = \int_0^L \left( \text{sen } \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{L}{2}$ .

Para obtener los valores propios se utiliza la ecuación  $\mathcal{A}u_m = \lambda_m u_m$ , obteniendo  $\lambda_m = k \Omega_m^2$ . En resumen, el operador diferencial  $\mathcal{A} = -k \frac{d^2}{dx^2}$  tiene las *funciones propias normalizadas* y valores propios siguientes:

$$(53) \quad \hat{u}_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{ sen } \Omega_m x, \quad \lambda_m = k \Omega_m^2, \quad \text{con } \Omega_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots$$

**Construcción de la solución.** El espacio generado por las funciones propias es denso sobre  $L^2(0, L)$  y se pueden utilizar para encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal (50)–(51). Para construir la solución, se expresa el dato  $f$  como combinación lineal de las funciones propias:

$$(54) \quad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \hat{u}_m(x),$$

en donde los coeficientes  $f_m \in \mathbb{R}$  se denominan los coeficientes de Fourier de  $f(x)$ . Para calcular estos coeficientes se utiliza la ortonormalidad de las funciones propias:

$$\langle f, \hat{u}_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \langle \hat{u}_m, \hat{u}_n \rangle = f_n.$$

Para que el dato  $f$  se encuentre en  $L^2(0, L)$  estas constantes deben satisfacer

$$\|f\|_{L^2(0, L)}^2 = \int_0^L f(x)^2 dx = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2 < \infty.$$

Asimismo, se busca una solución de la forma

$$(55) \quad u^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \hat{u}_m(x),$$

en donde hay que determinar los coeficientes  $a_m \in \mathbb{R}$ . Para calcular estos coeficientes se sustituyen las series para  $f$  y  $u^*$  en la ecuación  $\mathcal{A}u^* = f$ . Recordando que  $\mathcal{A}u_m = \lambda_m u_m$ , se obtiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m \hat{u}_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \hat{u}_m(x).$$

Finalmente, utilizando la ortogonalidad de las funciones propias se encuentra que  $\lambda_m a_m = f_m$  para toda  $m \in \mathbb{N}$ . Se concluye que la solución de la ecuación diferencial es:

$$(56) \quad u^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m} \hat{u}_m(x).$$

La solución satisface las condiciones de frontera ya que esta serie converge a  $u^*$  en  $H^2(0, L)$  y, en consecuencia, la convergencia de la serie es uniforme sobre el intervalo  $(0, L)$ .

El procedimiento utilizado para calcular la solución de equilibrio en ambos casos, discreto y continuo, fue enteramente análogo. La clave en ambos casos fue la utilización de las ‘*coordenadas naturales*’ del problema determinadas por los vectores propios del sistema. En ambos casos la ortogonalidad de las bases fue una propiedad central para encontrar las soluciones en forma muy sencilla. En particular, se puede observar la analogía entre las soluciones (20) y (56).

## 8. MODELO DINÁMICO CONTINUO

El problema dinámico de la barra elástica consiste en desplazar la barra fuera del equilibrio y soltarla desde el reposo. Al intentar volver a la posición de equilibrio la barra desarrollará un movimiento oscilatorio. Nuestro propósito es describir este movimiento calculando los desplazamientos de la barra en cada instante.

Los desplazamientos ahora dependerán tanto de la posición como del tiempo, por lo que al balance de fuerzas que se obtuvo en el equilibrio se le agrega la fuerza introducida por la aceleración. Esta fuerza por unidad de longitud es  $\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , en donde  $\rho(x)$  indica la densidad lineal de la barra elástica. Por lo tanto, el modelo que describe la dinámica oscilatoria de la barra se obtiene agregando al sistema (32)–(33) este término, así como las condiciones iniciales:

$$(57) \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = f(x), \quad 0 < x < L, 0 < t \leq T,$$

$$(58) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (\text{Condiciones de frontera})$$

$$(59) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{Desplazamiento inicial})$$

$$(60) \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{Velocidad inicial})$$

en donde la primera ecuación representa el balance de fuerzas. Suponiendo que se puede calcular el estado del sistema en cada instante  $t > 0$ , su evolución se puede describir por el sistema dinámico

$$(61) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u = f,$$

$$(62) \quad u(0) = u^0,$$

$$(63) \quad \frac{\partial u(0)}{\partial t} = 0,$$

en donde se utiliza la notación  $u(t) \rightarrow u(x, t)$ ,  $x \in (0, L)$ . Las condiciones de frontera están incluidas implícitamente en el operador diferencial  $\mathcal{A} : H^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$ , definido por

$$(64) \quad (\mathcal{A}u)(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial x} \right) \quad \text{con} \quad u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = 0.$$

El sistema obtenido es el análogo continuo del sistema discreto (13)–(15).

**Cálculo de la solución.** Descomponiendo la solución como la suma de la solución del equilibrio más las desviación del equilibrio,  $u(x, t) = u^*(x) + v(x, t)$ , y sustituyendo en (61)–(63), se obtienen las ecuaciones para la desviación del equilibrio

$$(65) \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathcal{A}v = 0,$$

$$(66) \quad v(0) = v^0,$$

$$(67) \quad \frac{\partial v(0)}{\partial t} = 0,$$

en donde la desviación inicial está dada por  $v^0 = u^0 - u^*$ . Se considera el caso especial en que la densidad  $\rho$  y la elasticidad  $k$  de la barra son constantes. El estado del sistema en cada instante  $t$  se expresa como combinación lineal de las funciones propias (serie de Fourier)

$$(68) \quad v(x, t) = a_1(t) \hat{u}_1(x) + a_2(t) \hat{u}_2(x) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_m(t) \hat{u}_m(x).$$

El objetivo es calcular los coeficientes  $a_m(t)$ , y para ello sustituye la serie de Fourier en (65)–(67). Recordando que  $\mathcal{A} \hat{u}_m = \lambda_m \hat{u}_m$ , se obtiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\rho \ddot{a}_m(t) + \lambda_m a_m(t)] \hat{u}_m(x) = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_m(0) \hat{u}_m(x) = v^0, \quad x \in (0, L),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_m(0) \hat{u}_m(x) = 0, \quad x \in (0, L).$$

Haciendo uso de la ortogonalidad de las funciones propias, se obtiene para cada  $m \in \mathbb{N}$

$$(69) \quad \rho \ddot{a}_m(t) + \lambda_m a_m(t) = 0,$$

$$(70) \quad a_m(0) = v_m^0 \quad \text{con} \quad v_m^0 = \langle v^0, \hat{u}_m \rangle,$$

$$(71) \quad \dot{a}_m(0) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$(72) \quad a_m(t) = v_m^0 \cos \omega_m t, \quad \text{con} \quad \omega_m^2 = \frac{\lambda_m}{\rho}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, la desviación del equilibrio es

$$(73) \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_m^0 \cos \omega_m t \hat{u}_m(x), \quad \text{con} \quad v_m^0 = \langle v^0, \hat{u}_m \rangle, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}.$$

Sumando coordenada a coordenada la solución de equilibrio con la desviación del equilibrio, se obtiene el desplazamiento

$$(74) \quad u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{f_m}{\lambda_m} + v_m^0 \cos \omega_m t \right] \hat{u}_m(x), \quad \text{con} \quad f_m = \langle f, \hat{u}_m \rangle, \quad v_m^0 = \langle v^0, \hat{u}_m \rangle, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}.$$

Esta solución es análoga a la solución para el sistema discreto de masas y resortes (27). Al igual que en ese caso, la primera parte de la suma corresponde al equilibrio y la segunda a las desviaciones del equilibrio. La desviación del equilibrio  $v(x, t)$  sigue una dinámica oscilatoria producto de la superposición de un número infinito de **modos normales**  $v_m^0 \cos \omega_m t \hat{u}_m(x)$ , con las siguientes características:

- Sus amplitudes  $v_m^0$  dependen de las **funciones propias**, pues son las proyecciones de  $v^0$  sobre  $\hat{u}_m$ .
- Sus frecuencias  $\omega_m$  dependen de los **valores propios**  $\lambda_m$  escalados por el inverso de la densidad  $\rho$ .

En el cuadro 3 se presenta un resumen comparativo de las soluciones a los casos discreto y continuo.

	CASO DISCRETO: Masas-resortes	CASO CONTINUO: Barra elástica
Modelo de equilibrio	$A \mathbf{u} = \mathbf{f}$ , con $A = k D^T D$ $u_0 = u_{n+1} = 0$	$\mathcal{A} u = f$ , con $\mathcal{A} = -k \frac{d^2}{dx^2}$ $u(0) = u(L) = 0$
Solución de equilibrio	$\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i$ $f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbf{u}^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m} \hat{u}_m(x)$ $f_m = \langle f, \hat{u}_m \rangle_{L^2(0,L)}$
Modelo dinámico	$m \dot{\mathbf{u}}(t) + A \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}$ $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0$ $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$	$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A} u = f \quad \left( \mathcal{A} = -k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$ $u(0) = u^0$ $\frac{\partial u(0)}{\partial t} = 0$
Solución del mod. dinámico	$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f_i}{\lambda_i} + v_i^0 \cos \omega_i t \right] \mathbf{u}_i$ $v_i^0 = \langle \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}}$	$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{f_m}{\lambda_m} + v_m^0 \cos \omega_m t \right] \hat{u}_m(x)$ $v_m^0 = \langle u^0 - u^*, \hat{u}_m \rangle_{L^2(0,L)}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}$

CUADRO 3. Comparación de los modelos discreto y continuo. (continuación)

## 9. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

En el presente trabajo se han presentado, analizado y resuelto dos modelos de equilibrio. El primero describe un sistema discreto de masas-resortes, y el segundo describe una barra elástica, ambos bajo la acción de la gravedad. Se estudia también la dinámica cuando se perturba el equilibrio.

La construcción, análisis y solución del modelo discreto ofrece la oportunidad de integrar conocimientos de física, cálculo y álgebra lineal. Para construir el modelo de

equilibrio del sistema masas–resortes se utiliza la ley de Hooke (ecuación constitutiva) y un balance de fuerzas (principio de conservación). El resultado es un sistema de ecuaciones con matriz  $A$  simétrica y definida positiva. Se demuestra que la solución de equilibrio minimiza la energía potencial que se describe mediante una función cuadrática. Por lo tanto hay dos formas de resolver el problema de equilibrio: resolviendo el sistema de ecuaciones (6) (método directo) o minimizando la función cuadrática (12) (método iterativo).

Por otro lado, el estudio del modelo continuo para la barra elástica permite introducir, por analogía, conceptos del análisis funcional y el cálculo de variaciones. Concretamente, permite ilustrar la generalización del producto interior, ortogonalidad y completez a los espacios de funciones. El análogo de las matrices son los operadores diferenciales y el análogo de traspuesta de una matriz es el adjunto de un operador. La solución de equilibrio resuelve la ecuación diferencial de segundo orden (32)–(33) en lugar de un sistema de ecuaciones. El operador diferencial  $\mathcal{A}$ , definido en (46), es autoadjunto (simétrico) y elíptico (positivo definido). La solución de equilibrio minimiza la energía potencial, que ahora se describe mediante un funcional cuadrático (47).

El estudio de la dinámica, después de perturbar el equilibrio, requiere de la introducción de los valores y vectores propios de la matriz  $A$  en el caso discreto y de los valores y funciones propias del operador diferencial  $\mathcal{A}$  en el caso continuo. Los valores y vectores propios en el caso continuo han sido fáciles de calcular para el caso especial en que  $k$  y  $\rho$  son constantes. Sin embargo, los valores y vectores propios del análogo discreto no se calcularon para el caso general con  $n$  masas. Su cálculo requiere de mayor esfuerzo que en el caso continuo, especialmente el cálculo de los valores propios (ver [11]).

La generalización del modelo continuo a  $d$  dimensiones es directa. Por ejemplo, el caso  $d = 2$  describe una membrana elástica. En estos casos el desplazamiento se describe mediante la función  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , y el operador diferencial  $\mathcal{A}$  se sustituye por

$$(75) \quad \mathcal{A}(u)(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot (K(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \quad \text{para } \mathbf{x} \text{ en } \Omega,$$

$$(76) \quad u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

en donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es la región que comprende la membrana y  $\partial\Omega$  es su frontera. En este modelo  $K$  puede ser una función matricial de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}^d$  (caso anisotrópico), una función de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}$  (caso isotrópico no homogéneo) o bien una constante (caso isotrópico homogéneo). El modelo resultante sigue siendo lineal, pero será más difícil de analizar y resolver, especialmente cuando  $K$  no es una constante y cuando la región  $\Omega$  no es simple. En estos casos es muy frecuente que, para encontrar soluciones de equilibrio y de la dinámica de las oscilaciones, se utilicen métodos de aproximación como diferencias finitas, elemento finito ó alguna otra técnica.

Por último, agregamos los siguientes comentarios:

1. La ecuación diferencial que modela la dinámica de una cuerda vibrante con extremos fijos (ecuación de onda), es la misma que la que se utiliza para modelar la dinámica de la barra. La única diferencia es que la incógnita  $u(x)$  en este caso denota la desviación de la cuerda de la horizontal. En este caso la posición de equilibrio es precisamente la horizontal  $u^*(x) \equiv 0$ , cuando se desprecia la gravedad.
2. La solución del problema dinámico de la barra elástica generalmente se calcula por medio del *método de separación de variables* en los textos de ecuaciones diferenciales parciales. Es fácil verificar que ese método es equivalente al método que se utilizó en estas notas.
3. Los métodos utilizados en este trabajo también se puede aplicar a otro tipo de ecuaciones diferenciales parciales lineales. Basta con que sea posible calcular las funciones propias y valores propios del operador diferencial correspondiente.

Por ejemplo, se puede aplicar a la ecuación de difusión de calor, la cual es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de la física-matemática. También es posible considerar otro tipo de condiciones de frontera, sin perder de vista que las funciones propias asociadas al operador diferencial deberán satisfacer las condiciones de frontera.

#### REFERENCIAS

- [1] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Braun, M., Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics (Texts in Applied Mathematics), Springer; 4th edition 1993.
- [3] Brenner, S. and Scott, R. L., The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 2nd edition, Springer, 2005.
- [4] Brezis, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, Universitext series, 2011.
- [5] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics. Vol. I (First English ed.), Interscience Publishers, 1953.
- [6] Gelfand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of Variations, Dover Publications, 2000.
- [7] Golub, G. H. and Van Loan, C. F., Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, Third Edition, 1996. Colection: Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Fourth edition (2013): ver <http://www.cs.cornell.edu/cv/GVL4/golubandvanloan.htm>
- [8] Izquierdo, G., Introducción a los espacios de Sobolev, notas para el curso del mismo nombre, ofrecido en el VI Coloquio del Departamento de Matemáticas (UAM-I) en Metepec, Puebla del 2 al 6 de enero de 2014.
- [9] Kolmogorov, A. N., and Fomin, S. V., Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Dover, 1999.
- [10] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley 1989.
- [11] Kulkarni, D., Schmidt, D. and Tsui, S. K., *Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices*, Linear Algebra and its Applications, 297:63, 1999.
- [12] Morton, K. W. and Mayers, D. F., Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction, Cambridge University Press, 2nd. edition, 2005.
- [13] Riesz, F. and Nagy, B. S., Functional Analysis, Balkie & Sons, 1956.
- [14] Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press, 1986.

*Dirección del autor:*

L. Héctor Juárez Valencia  
 Universidad Autónoma Metropolitana,  
 Unidad Iztapalapa,  
 División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
 Departamento de Matemáticas.  
 Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina  
 Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.  
 e-mail: [hect@xanum.uam.mx](mailto:hect@xanum.uam.mx)