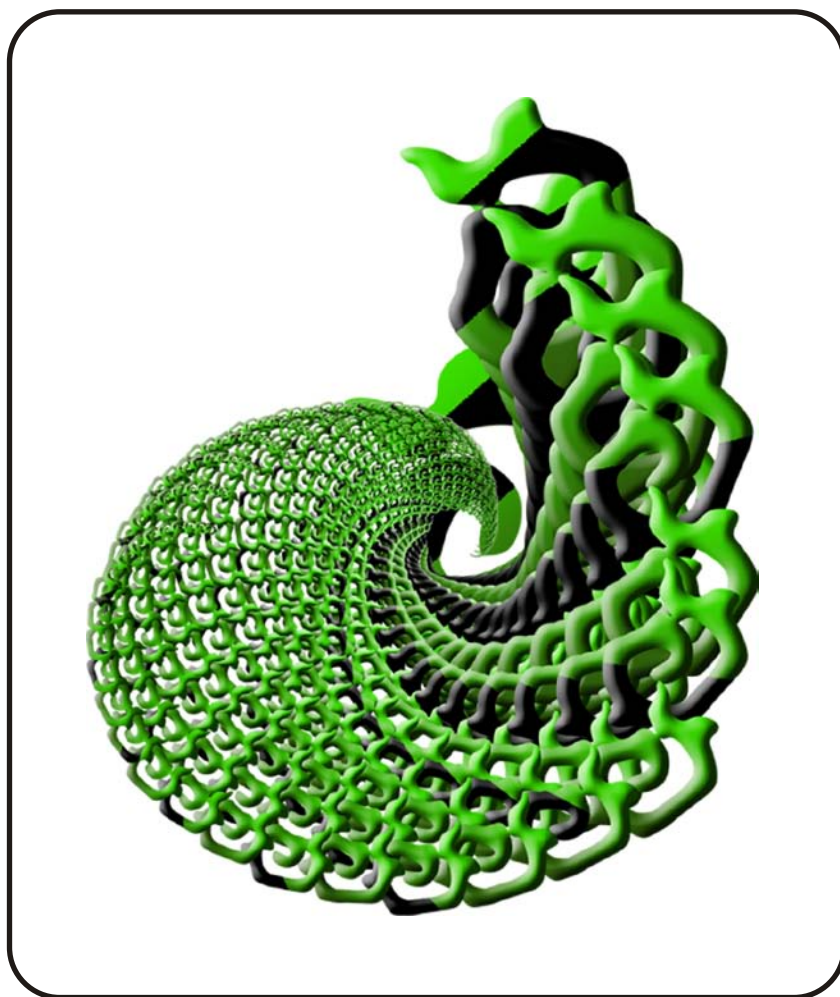


mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas



VOL V, No. 1, JUNIO 2014


Casa abierta al tiempo 
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**
Unidad Iztapalapa

Dr. Salvador Vega y León
Rector General.

Dr. Octavio Nateras Domínguez
Rector de la Unidad Iztapalapa.

Dr. José Gilberto Córdoba Herrera
*Director de la División de Ciencias Básicas
e Ingeniería, UAM-Iztapalapa.*

Dr. Joaquín Delgado Fernández
*Jefe del Departamento de Matemáticas,
UAM-Iztapalapa.*

Revista del Departamento de Matemáticas de la U

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Editora Responsable

Dra. Laura Hidalgo Solís
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Comité Editorial

Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez
Área de Matemáticas Básicas, CIMAT - A. C.

Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Dr. Jorge Alberto León Vázquez
Departamento de Control automático, CINVESTAV.

Dr. Ernesto Pérez Chavela
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Dr. Mario Pineda Ruelas
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Dr. Roberto Quezada Batalla
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Dra. Martha Rzedowski Calderón
Departamento de Control Automático, CINVESTAV.

Dr. Richard Wilson Roberts
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Editor Técnico

Dr. Constancio Hernández García
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Editor Internet

Mat. Daniel Espinosa Pérez
Departamento de Matemáticas, UAM-I.

Diseño Portada

Srita. Michael Rivera Arce.

MIXBA´AL. Vol. V, No. 1, junio del 2014, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Departamento de Matemáticas.

Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, D. F. y Av. San Rafael Atlixco No. 186, Edificio AT. Tercer piso, Col. Vicentina, Delegación Iztapalapa, C.P. 09340, México, D.F. Tel. 58044658, página electrónica de la revista <http://repos.izt.uam.mx>, y dirección electrónica: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx.

Editora Responsable: Laura Hidalgo Solís. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2010-072017382600-203, ISSN 2007 7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas, Mat. Daniel Espinosa Pérez. Fecha de última modificación: 3 de junio de 2014. Tamaño de archivo: 27.4 MB. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

Contacto .

Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa
Tel: (01) 55 5804 4600 Ext. 3322.
Fax: (01) 55 5804 4660.
e-mail: mixbaal2009@gmail.com.
e-mail: mixb@xanum.uam.mx.
Web Revista: <http://repos.izt.uam.mx/>

Emblema de la UAM .

El emblema institucional fue desarrollado por el destacado arquitecto mexicano Pedro Ramírez Vázquez, quien fuera inclusive el primer Rector General de la UAM, en 1974. El arquitecto Ramírez Vázquez diseñó y reglamentó el emblema que, junto con el lema "Casa abierta al tiempo", realizado por el doctor Miguel León-Portilla, conforma el logotipo de la Universidad Autónoma Metropolitana; símbolo de identidad y orgullo de la comunidad universitaria. La representación gráfica del emblema institucional retoma la figura que identifica a una pirámide, por ser ésta la construcción tradicional y de identidad de las culturas autóctonas.



Una Universidad asentada en la tradición



Abierta



Interdisciplinaria y Autónoma



Flexible



Casa abierta al tiempo

mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas



40



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA

A LOS AUTORES

Mixba'al es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Está dirigida a la comunidad matemática.

Los artículos pueden ser artículos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas; por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos, artículos panorámicos sobre un área de investigación, la presentación de una visión distinta de algún tema vinculado con la docencia, notas de cursos avanzados, aplicaciones de las matemáticas, historia y filosofía de las matemáticas y aspectos lúdicos de las mismas, entre otros.

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español, aunque en casos excepcionales podrán aceptarse artículos en inglés. El comité editorial tiene la responsabilidad de cuidar la calidad de la revista, tanto en su contenido como de su presentación, de acuerdo a los lineamientos, tipografía y corrección de lenguaje (ortografía, estilo, etcétera). Asimismo, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista, y en caso de que así sea, lo enviara a arbitraje, sin excepción.

La versión preliminar de los trabajos sometidos a la revista deberá enviarse en formato pdf. Puesto que la presentación final de los trabajos se hará en $\text{Latex}2\epsilon$, aquellos autores, cuyos trabajos sean aceptados, deberán enviarlos con el formato y macros que la revista proporciona en el portal <http://repos.izt.uam.mx> para su publicación final. Las fotografías o gráficas que acompañen al texto deberán ser enviadas, por separado, en formato pdf y deberán tener la calidad y resolución suficientes para una buena reproducción impresa, además deberán contar con los correspondientes derechos de autor. Se recomienda que la extensión de los trabajos no exceda de 20 páginas.

Laura Hidalgo Solís
Coordinadora

PRESENTACIÓN

Mixba'al es una revista de divulgación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana. Entre los artículos de este número, encontrarán tanto trabajos de investigación original como exposición de resultados importantes conocidos en varias ramas de la matemática básica y aplicada.

En el artículo del profesor Roberto Quezada, "*Sucesiones y recurrencias*", se discute en forma amena el proceso de descubrimiento en matemáticas a través de algunas sucesiones numéricas elementales. En este trabajo se muestra con ejemplos sencillos cómo los matemáticos realizan su trabajo. Posteriormente tenemos el trabajo del profesor Mario Huicochea, "*Conjetura de Catalan*" el autor tiene dos propósitos, el primero es ver algunas de las muchas herramientas utilizadas y desarrolladas en la búsqueda de la demostración de la Conjetura de Catalan, mientras que el segundo es dar una muy breve idea de los principales pasos en la demostración de dicha conjetura realizada por P. Mihăilescu. Finalmente, en el artículo del profesor Héctor Juárez, "*Del álgebra lineal y las ecuaciones diferenciales ordinarias al análisis funcional y las ecuaciones diferenciales parciales*", el autor presenta la analogía entre dos modelos, uno discreto y otro continuo. El modelo discreto describe el comportamiento de un sistema de masas-resortes, y el modelo continuo describe el comportamiento de una barra elástica, ambos bajo la acción de la gravedad. En los dos casos se estudia el problema de equilibrio y el problema dinámico, este último obtenido al perturbar el equilibrio. La analogía entre ambos problemas va desde la construcción de los modelos, los aspectos físicos como equilibrio, trabajo y energía, hasta los aspectos matemáticos involucrados. Estas analogías sirven como pretexto para ilustrar la generalización del producto interior en \mathbb{R}^n a los espacios de funciones en dimensión infinita, los conceptos de ortogonalidad y completitud, el análogo de las matrices con los operadores diferenciales, el análogo de las matrices traspuestas con los operadores adjuntos, ecuaciones matriciales y ecuaciones funcionales, el cálculo multivariado y el cálculo variacional. En consecuencia, ambos modelos (discreto y continuo) se pueden concebir con un mismo enfoque, desde el punto de vista matemático.

La intención es continuar con este formato y la revista invita a someter contribuciones de esta índole en el idioma español, aunque ocasionalmente pueden aceptarse contribuciones en inglés. Inicialmente se publicará al menos un número al año.

Toda comunicación debe ser dirigida al comité editorial, al correo electrónico: mixbaal2009@gmail.com



CUADRAGÉSIMO ANIVERSARIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

“La Universidad Autónoma Metropolitana inicia sus actividades con la plena participación de profesores, alumnos y administradores integrados en una comunidad que busca, por convicción, el intercambio libre y efectivo de ideas.

Las innovaciones que, de todo orden y en varias áreas se han planteado hasta ahora, señalan claramente el reto al que todos nos enfrentamos: alcanzar una formación cada vez mejor y definir el papel que cada uno de nosotros debe desempeñar para lograr una sociedad más justa. Todos los aspectos de la vida universitaria: la enseñanza, la investigación, el aprendizaje y la difusión cultural, entre otros, requieren un esfuerzo continuo y constante para alcanzar estos objetivos.

Dentro de este contexto académico, la comunicación, la palabra, es el medio ideal para que todos participemos plenamente y logremos tanto satisfacer nuestras aspiraciones individuales como conservar los valores universales.

*Al iniciar esta tarea, cada miembro de esta comunidad adquiere, por el hecho de pertenecer a ella, un compromiso: de constituirnos en una Universidad dispuesta al cambio, a la comunicación y a la superación: una **Casa Abierta al Tiempo.**”*

Arg. Pedro Ramírez Vázquez
Rector General
30 de septiembre de 1974

Con el compromiso marcado anteriormente por el arquitecto Pedro Ramírez Vázquez, primer Rector General de la UAM, el Departamento de Matemáticas inicia sus labores en octubre de 1974. A continuación recordamos a la mayoría de los profesores y ayudantes de matemáticas que formaron parte de dicho proceso.¹

FUNDADORES DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS QUE AÚN LABORAN EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UAM-IZTAPALAPA:

René Benítez	Alberto Castillo
Luli González	Hugo Martínez
Blanca Rosa Pérez	Roberto Quezada
Patricia Saavedra	Richard Wilson

FUNDADORES DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS QUE YA NO LABORAN EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UAM-IZTAPALAPA:

María Emilia Abad	Jesús Alarcón Bertolucci †
Antonio Antolín	Enrique Antoniano
Pedro Armendáriz†	Diego Barahona
Jorge Bourges	Rodolfo Conde del Aguila
Arturo Fregoso†	Fernando Galaz
Edith García	José Carlos Gómez Larrañaga
María González	Javier Hernández
Ernesto Lacomba†	Jorge Ludlow
Mario Magidín	Hugo Mejía
Felipe de Jesús Peredo	Ricardo Quintero
Víctor Javier Raggi	Araceli Reyes
Lilia del Riego	Teresa Rojano
Jorge Rossental	Alberto Ruiz Moncayo †
Armando Santamaría	Jorge Urrutia

¹Pedimos una disculpa si hemos omitido a alguien, pues no hay registro histórico de nuestros profesores fundadores.



DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS



Nació el 7 de noviembre de 1944 en Liverpool, Inglaterra. Es ciudadano mexicano por naturalización. Tiene el Bachelor of Science, con honores de primera clase, por la Universidad de Liverpool, 1965, y el Doctorado en Filosofía, por la Universidad de Texas, Austin, EUA, 1970. Es profesor fundador de la Universidad Autónoma Metropolitana, que en este año cumple su XL aniversario, actualmente es Profesor Titular “C” y desde el año 2000 es profesor distinguido de la misma. Es Investigador Emérito del S.N.I., miembro de la Sociedad Matemática Mexicana y de la Academia Mexicana de Ciencias. Sus intereses actuales de investigación son topología general, espacios topológicos linealmente ordenados y generalizaciones tales como espacios radiales, y espacios de Whyburn; propiedades determinadas por cubiertas estrella; inmersiones en espacios conexos; propiedades del retículo de topologías en un conjunto; propiedades topológicas determinadas por subconjuntos discretos. Por lo que este año celebramos su 70 aniversario. “Aprovechamos este espacio para enviar un abrazo a Richard con motivo de su 70 aniversario”.

Una reseña reciente y más extensa se encuentra en el No. 68 de la Carta Informativa de la SMM:

<http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/doc/pdf/carta-informativa-68.pdf>



SUCESIONES Y RECURRENCIAS

ROBERTO QUEZADA

RESUMEN. Discutimos algunas recurrencias y su relación con sucesiones numéricas bien conocidas.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo realizamos una discusión elemental de algunas sucesiones numéricas bien conocidas, así como algunas relaciones entre ellas. Nuestro propósito es ilustrar con ejemplos sencillos, los procesos de descubrimiento y escritura rigurosa de resultados matemáticos. El contenido de este artículo se puede usar en un curso introductorio para estudiantes de matemáticas que, además de motivarlos, muestre la manera en que algunos matemáticos realizamos nuestro trabajo.

Aunque el tema es muy popular y se presenta en muchas referencias que van desde libros, véase por ejemplo [1] y [2], hasta presentaciones interactivas en internet, nuestro enfoque tiene cierta originalidad. Además de presentar alguna de estas sucesiones numéricas escribiendo sus primeros términos y de inferir a partir de ellos algunas de sus propiedades, aprovechamos la relación de recurrencia que ella satisface, para definirla de una forma rigurosa y demostrar sus propiedades de manera deductiva.

2. ¿QUÉ ES UNA RECURRENCIA?

Una relación de recurrencia (o simplemente recurrencia) es una expresión que permite calcular los valores $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ de una sucesión $a = (a_n)_{n \geq 1}$ a partir de uno a varios términos iniciales dados. Por ejemplo, la relación de recurrencia

$$(1) \quad a_{n+1} + a_n = 0,$$

determina una sucesión $a = (a_n)_{n \geq 1}$ cuyos valores son

$$a_2 = -a_1, a_3 = -a_2 = a_1, a_4 = -a_3 = a_2 = -a_1, \dots$$

Esta sucesión depende del valor de a_1 . Por ejemplo, si $a_1 = 1$ la sucesión es

$$a = (a_n)_{n \geq 1} = ((-1)^{n+1})_{n \geq 1} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}.$$

Pero si $a_1 = 2$, entonces la sucesión a es

$$\{2, -2, 2, -2, \dots\}.$$

En otras palabras, la relación de recurrencia (1) no determina un sola sucesión, i.e., la solución de (1) no es única. De hecho, existen tantas soluciones diferentes como valores de a_1 .

Si queremos determinar una única sucesión que satisfaga la ecuación (1), debemos añadir una **condición inicial** como $a_1 = i$, con i un valor fijo $i \in \mathbb{R}$. Es decir, el problema

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{n+1} + a_n &= 0, \\ a_1 &= i, \end{aligned}$$

con $i \in \mathbb{R}$, un valor fijo, tiene una única solución dada por:

$$\{i, -i, i, -i, \dots\}.$$

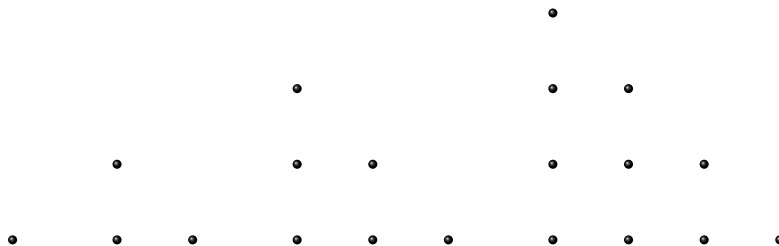


FIGURA 1. Números triangulares

Nótese que esta sucesión se representa de manera concisa mediante la fórmula $a_n = (-1)^{n+1}i$, $n \geq 1$. Es claro que satisface la condición inicial, pues $a_1 = i$. Para demostrar que esta sucesión también satisface la ecuación (1) basta observar que

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+2}i + (-1)^{n+1}i = (-1)^{n+1}(-i + i) = 0.$$

3. NÚMEROS POLIGONALES

Si a un punto se le agregan dos puntos más para formar un triángulo equilátero y a su vez a este triángulo se le agregan tres puntos más para obtener un triángulo equilátero con tres puntos en cada lado y continuamos de esta manera agregando cuatro, cinco, etc. puntos. El número de puntos en cada triángulo equilátero así obtenido define la sucesión de números triangulares, figura 1. Es decir, la sucesión de números triangulares es $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots\}$.

Los números cuadrados se obtienen de manera similar; empezando con un punto se agregan tres puntos más para formar un cuadrado y a éste se agregan cinco puntos más para formar un cuadrado con tres puntos en cada lado, el número total de puntos de cada cuadrado corresponde con los elementos de la sucesión $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$, figura 2.

Los números pentagonales se obtienen empezando con un punto y agregando cuatro, siete, diez, etc. puntos de manera que se obtienen los elementos de la sucesión $\{1, 5, 12, 22, \dots\}$, figura 3.

Los números hexagonales son los términos de la sucesión $\{1, 6, 15, 28, \dots\}$, que se obtienen iniciando con un punto agregando cinco, nueve, trece, etc. puntos en cada etapa para formar un hexágono más grande a partir del anterior.

Para reconocer las variables de las cuales dependen los números poligonales, a partir de este momento los denotaremos mediante el símbolo $p_m(n)$, con $m, n \in \mathbb{N}$. El subíndice m se refiere al número de lados del polígono y n corresponde con el lugar que ocupa en la correspondiente sucesión. Por ejemplo, $p_4(4)$ es el cuarto número cuadrado, es decir, $p_4(4) = 16$, mientras que $p_5(3)$ es el tercer número pentagonal, i.e., $p_5(3) = 12$. En el cuadro 1, se muestran los primeros números poligonales y la relación de recurrencia que satisfacen.

Con esta notación y observando el cuadro 1, podemos inferir que para cada $m \in \mathbb{N}$, los números poligonales con m lados (“ m -gonales”), con $m \geq 3$, satisfacen la ecuación en diferencias¹

$$(3) \quad p_m(n + 1) - p_m(n) = 1 + (m - 2)n, \quad n \geq 1$$

con la condición inicial $p_m(1) = 1$.

Usaremos los resultados de nuestras observaciones e inferencias para dar una definición de los números poligonales. Es decir, tomaremos a la ecuación en diferencias (3) como definición de los números poligonales, aprovechando que, de acuerdo con

¹En este artículo usaremos el nombre de ecuación en diferencias para referirnos a una clase particular de relaciones de recurrencia, pero frecuentemente se usa para referirse a cualquier relación de recurrencia.

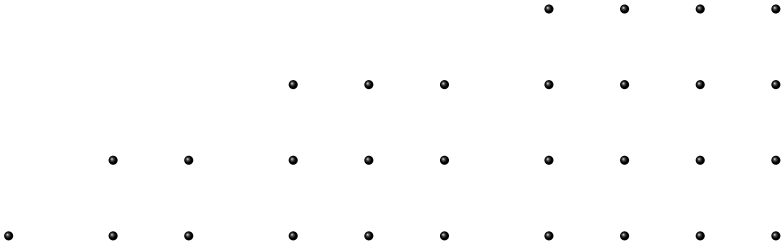


FIGURA 2. Números cuadrados

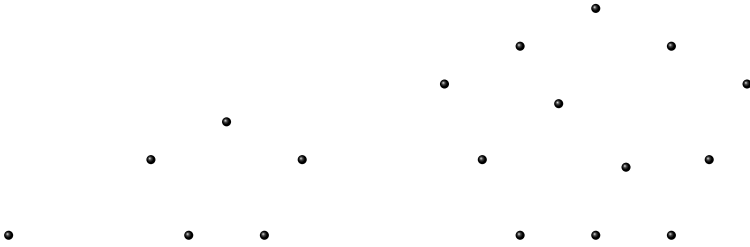


FIGURA 3. Números pentagonales

Número poligonal	Primero	Segundo	Tercero	Recurrencia
Triangular	1	3	6	$p_3(n + 1) - p_3(n) = 1 + n$
Cuadrado	1	4	9	$p_4(n + 1) - p_4(n) = 1 + 2n$
Pentagonal	1	5	12	$p_5(n + 1) - p_5(n) = 1 + 3n$
Hexagonal	1	6	15	$p_6(n + 1) - p_6(n) = 1 + 4n$

CUADRO 1. Números triangulares

nuestra discusión en la sección anterior, la solución de una ecuación en diferencias como (3) con la condición inicial $p_m(1) = 1$ es única.

La existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones en diferencias es un hecho que a lo largo de este artículo aceptaremos sin demostración, el lector interesado puede consultar una demostración en la referencia [3].

Definición 1. El n -ésimo número poligonal con m lados es el n -ésimo término, $p_m(n)$, $m \geq 3$, $n \geq 1$, de la única sucesión que resuelve la ecuación en diferencias (3) con condición inicial $p_m(1) = 1$.

Usando esta definición demostraremos algunas propiedades y relaciones entre estos números. El siguiente resultado se le atribuye a Teón de Esmirna, siglo II d.C.

PROPOSICIÓN 2. *Cualquier número cuadrado es suma de dos triangulares sucesivos, más precisamente, para cada $n \geq 1$ se tiene que*

$$(4) \quad p_4(n) = p_3(n) + p_3(n - 1).$$

Demostración. De acuerdo con la definición, bastará demostrar que el lado derecho de (4) satisface la ecuación en diferencias que determina de manera única a la sucesión $p_4(n)$, es decir, la ecuación

$$(5) \quad p_4(n + 1) - p_4(n) = 1 + 2n,$$

con la condición inicial $p_4(1) = 1$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & p_3(n+1) + p_3(n) - (p_3(n) + p_3(n-1)) \\
 &= (p_3(n+1) - p_3(n)) + (p_3(n) - p_3(n-1)) \\
 &= (1+n) + (1+(n-1)) = 1+2n.
 \end{aligned}$$

Hemos usado que la sucesión de números triangulares $p_3(n)$ satisface la ecuación en diferencias $p_3(n+1) - p_3(n) = 1+n$. Ahora, usando que $p_3(1) = 1$, tenemos que $p_3(1) + p_3(0) = 1+0$, pues $p_3(0) = 0$ por ubicuidad. Esto demuestra que el lado derecho de (4) satisface la ecuación (5) junto con la condición inicial, entonces por la unicuidad, podemos concluir que la identidad (4) se cumple para cada $n \geq 1$. \square

PROPOSICIÓN 3. (*Nicómaco de Geresa, alrededor de 100 d.C.*) *El n -ésimo número m -gonal, $p_m(n)$, es igual a la suma del n -ésimo $(m-1)$ -gonal, $p_{m-1}(n)$, más el $(n-1)$ -ésimo triangular, es decir,*

$$(7) \quad p_m(n) = p_{m-1}(n) + p_3(n-1), \quad \forall n \geq 1.$$

Demostración. Bastará demostrar que el lado derecho de (7) satisface la misma ecuación en diferencias que $p_m(n)$ y la correspondiente condición inicial.

Para la condición inicial tenemos que $p_{m-1}(1) + p_3(0) = 1$. Y, por otra parte, para cada $n \geq 2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & p_{m-1}(n) + p_3(n-1) - (p_{m-1}(n-1) + p_3(n-2)) \\
 &= (p_{m-1}(n) - p_{m-1}(n-1)) + (p_3(n-1) - p_3(n-2)) \\
 &= (1+(m-3)(n-1)) + 1+(n-2) = 1+(m-2)(n-1).
 \end{aligned}$$

Lo cual demuestra (7). \square

El siguiente resultado es una generalización del teorema de Teón de Esmirna, proposición 2, que se atribuye a Bachet de Méziriac, siglo XVII. Como su demostración es esencialmente la misma que para las dos proposiciones anteriores, dejaremos que el lector complete los detalles.

PROPOSICIÓN 4. *El n -ésimo número m -gonal, $p_m(n)$, con $m \geq 3$ y $n \geq 1$, es igual a la suma del n -ésimo triangular más $(m-3)$ veces el $(n-1)$ -ésimo triangular, i.e.,*

$$(9) \quad p_m(n) = p_3(n) + (m-3)p_3(n-1), \quad \forall m \geq 3, n \geq 1.$$

4. SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sucesión de Leonardo de Pisa (Fibonacci), 1170-1250, cuyos primeros términos son 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots , fue descrita por él mismo en relación con un problema de cría de conejos: *¿Cuántos pares de conejos se producirán en un año si se inicia con una sola pareja que es productiva después de un mes, produciendo una segunda pareja, que a su vez es productiva después de un mes?* El cuadro 2 muestra el proceso de producción de parejas de conejos de acuerdo con la regla enunciada.

Observando la tabla se ve que si $f(n)$, es el n -ésimo término, con $1 \leq n \leq 7$, de la sucesión de Fibonacci, entonces se satisface la relación de recurrencia

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \quad 2 \leq n \leq 7.$$

Usando esta relación vemos que

$$\begin{aligned}
 (10) \quad & f(2) = f(1) + f(0), \\
 & f(3) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(0), \\
 & f(4) = f(3) + f(2) = 3f(1) + 2f(0), \\
 & f(5) = f(4) + f(3) = 5f(1) + 3f(0), \\
 & f(6) = f(5) + f(4) = 8f(1) + 5f(0), \dots
 \end{aligned}$$

Mes	Producción	Parejas
1 (inicio)	Pareja inicial (no productiva)	1
1 (final)	Pareja inicial productiva. Se cruza	1
2 (final)	Segunda pareja. Se cruza la pareja inicial	2
3 (final)	Tercer pareja. Se cruzan dos parejas	3
4 (final)	Dos parejas nuevas. Se cruzan tres parejas	5
5 (final)	Tres nuevas. Se cruzan cinco	8
6 (final)	Cinco nuevas. Se cruzan ocho	13

CUADRO 2. El problema de Fibonacci

Estos términos de la sucesión dependen de los valores de $f(0)$ y $f(1)$. Sabemos que $f(1) = 1$ y para reproducir los primeros siete términos de la sucesión de Fibonacci debemos tomar $f(0) = 0$.

Usaremos este resultado de nuestro razonamiento inductivo y el hecho de que una relación de recurrencia con condiciones iniciales tienen una y sólo una solución, para dar una definición de la sucesión (completa) de Fibonacci y deducir algunas de sus propiedades.

Definición 5. La sucesión de Fibonacci es la única solución de la ecuación en diferencias

$$(11) \quad f(n) = f(n - 1) + f(n - 2), \quad n \geq 2$$

con sus dos condiciones iniciales.

$$f(1) = 1, \quad f(0) = 0.$$

El siguiente resultado sobre la sucesión de Fibonacci se puede encontrar en la literatura. Lo demostraremos usando nuestra definición y el método que empleamos en la sección anterior.

TEOREMA 6. *La sucesión de Fibonacci se puede escribir en la forma*

$$(12) \quad f(n) = \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}}, \quad \forall n \geq 0,$$

donde $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

Demostración. De acuerdo con nuestra definición, bastará demostrar que la sucesión (12) satisface la ecuación (11) y las condiciones iniciales. Para las condiciones iniciales tenemos que $f(0) = \frac{x_1^0 - x_2^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$, y $f(1) = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$. Por otra parte, tomando en cuenta que $x_1 + x_2 = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 f(n - 1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 + x_2) \\
 (13) \quad &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^{n-1}x_1 + x_1^{n-1}x_2 - x_2^n) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}x_1x_2(x_1^{n-2} - x_2^{n-2}) \\
 &= f(n) + x_1x_2f(n - 2) = f(n) - f(n - 2),
 \end{aligned}$$

pues $x_1x_2 = -1$. Esto completa la demostración. □

El número $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se conoce como número áureo. Otra propiedad del número áureo es la siguiente.

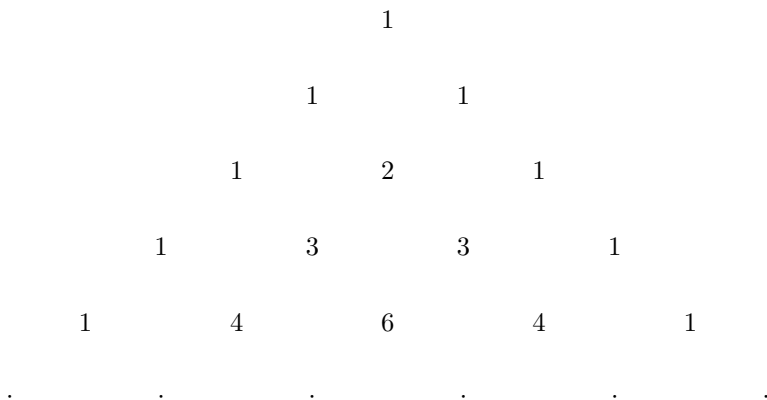


FIGURA 4. Triángulo de Pascal

PROPOSICIÓN 7. La sucesión $g(n) = x_1^n$, $n \geq 0$, satisface la ecuación en diferencias (11) con las condiciones iniciales $g(0) = 1$ y $g(1) = x_1$.

Demostración. Es claro que las condiciones iniciales se cumplen. Por otra parte, para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 (14) \quad g(n-1) + g(n-2) &= (x_1^{n-1} + x_1^{n-2}) \\
 &= x_1^{n-2}(x_1 + 1) = x_1^n \\
 &= g(n),
 \end{aligned}$$

pues x_1 satisface la ecuación $x_1^2 - x_1 - 1 = 0$, es decir $x_1 + 1 = x_1^2$. Esto completa la demostración. \square

Puesto que la sucesión de Fibonacci $f(n)$ y la sucesión x_1^n son soluciones de la misma ecuación en diferencias, es de esperarse que exista alguna relación entre ellas. La siguiente proposición establece explícitamente esta relación.

PROPOSICIÓN 8. Sea x_1 el número áureo, entonces se satisface la identidad

$$(15) \quad x_1^n = f(n)x_1 + f(n-1), \quad n \geq 1,$$

donde $f(n)$ es la sucesión de Fibonacci.

Demostración. Bastará demostrar que el lado derecho de (15) satisface la misma ecuación en diferencias que x_1^n y las mismas condiciones iniciales dadas en la proposición anterior. Para las condiciones iniciales tenemos para $n = 1$ que $f(1)x_1 + f(0) = x_1$, para $n = 2$, $f(2)x_1 + f(1) = x_1 + 1 = x_1^2$ y para $n \geq 3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 (16) \quad &f(n-1)x_1 + f(n-2) + f(n-2)x_1 + f(n-3) \\
 &= x_1(f(n-1) + f(n-2)) + f(n-2) + f(n-3) \\
 &= x_1f(n) + f(n-1),
 \end{aligned}$$

donde hemos usado (11). Esto demuestra la proposición. \square

5. EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Vamos a considerar ahora una sucesión con dos índices, (a_{mn}) , $m \geq 0$, $0 \leq n \leq m$, cuyos primeros términos aparecen en el arreglo triangular de la figura 4, llamado triángulo de Pascal.

A partir de este arreglo vemos que $a_{00} = 1$, $a_{10} = 1 = a_{11}$, $a_{20} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, \dots y observando con más cuidado notamos que todos los términos sobre los lados del triángulo son iguales a 1, es decir,

$$(17) \quad a_{m,0} = 1 \text{ y } a_{mm} = 1, \quad \forall m \geq 0.$$

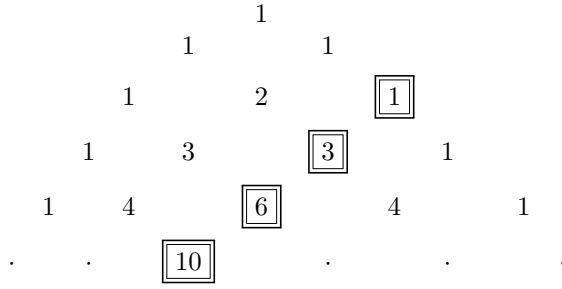


FIGURA 5. Números triangulares

Además los términos en el interior del triángulo satisfacen la relación de recurrencia

$$(18) \quad a_{mn} = a_{m-1,n-1} + a_{m-1,n}, \quad \forall m \geq 2, \quad 1 \leq n \leq m - 1.$$

El coeficiente binomial (o número combinatorio) $\binom{m}{n}$, $m \geq 0$, $0 \leq n \leq m$, se define mediante las relaciones

$$(19) \quad \begin{aligned} \binom{m}{n} &= \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad \forall m \geq 0, \quad 0 < n \leq m - 1, \\ \binom{m}{0} &= 1, \quad \binom{m}{m} = 1, \quad \forall m \geq 0. \end{aligned}$$

Demostremos que el coeficiente binomial resuelve la ecuación en diferencias (18) junto con las condiciones (17).

PROPOSICIÓN 9. *La sucesión doble $a_{mn} = \binom{m}{n}$, $m \geq 0$, $0 \leq n \leq m$ satisface la ecuación (18) y las condiciones (17).*

Demostración. En vista de la definición de $\binom{m}{n}$, es claro que esta sucesión doble satisface las condiciones (17). Por otra parte, tenemos que

$$(20) \quad \begin{aligned} a_{m-1,n-1} + a_{m-1,n} &= \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \\ &= \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} + \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} \\ &= \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} \\ &= \frac{m!n}{n!m(m-n)!} + \frac{m!(m-n)}{n!m(m-n)!} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(\frac{n}{m} + \frac{(m-n)}{m} \right) = \binom{m}{n} \\ &= a_{mn}. \end{aligned}$$

Esto demuestra la proposición. □

Es bien conocido que varias de las sucesiones y relaciones discutidas en las secciones anteriores se encuentran en el triángulo de Pascal. Por ejemplo, los números triangulares (encerrados en recuadros) se encuentran en una diagonal del triángulo de Pascal, figura 5.

Una propiedad muy interesante que se observa en el triángulo de Pascal es el llamado **patrón del palo de hockey**: “la suma de todos los términos en una diagonal que se inicia en un lado del triángulo es igual al término que se encuentra abajo del último”. En la figura 6, ilustramos esta propiedad con varios ejemplos en el triángulo de Pascal, usando recuadros de diferente tipo. Ahora, formulémosla con toda generalidad y demostrémosla.

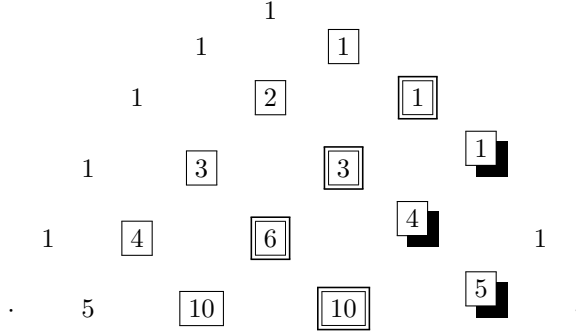


FIGURA 6. Patrón del palo de hockey

TEOREMA 10. Para cada $m \geq 1$ y $1 \leq n \leq m$, se satisface que

$$(21) \quad \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}.$$

Demostración. Usaremos inducción sobre $m \geq 1$. Si $m = 1$, entonces $n = 1$ y tenemos que

$$\binom{1}{1} = 1 = \binom{2}{2}.$$

Ahora supóngase que el resultado vale para $m > 1$ y cada $1 \leq n \leq m$; demostrémoslo para $m+1$ y cada $1 \leq n \leq m+1$. Si $1 \leq n \leq m+1$ tenemos, por la hipótesis de inducción y la proposición 9,

$$(22) \quad \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{m}{n} + \binom{m+1}{n} = \binom{m+1}{n+1} + \binom{m+1}{n} \\ = \binom{m+2}{n+1}.$$

Esto demuestra el teorema. \square

Revisemos algunas consecuencias de este resultado. La primera de ellas es un hecho bien conocido.

COROLARIO 11. La suma de los primeros m números naturales es igual a $\frac{m(m+1)}{2}$.

Demostración. Para cada $m \geq 1$, tómesese $n = 1$ y aplíquese el teorema anterior para obtener,

$$(23) \quad 1 + 2 + \cdots + m = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{m}{1} = \binom{m+1}{1+1} \\ = \frac{(m+1)!}{2!(m-1)!} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

\square

COROLARIO 12. El n -ésimo número triangular puede escribirse en la forma $p_3(n) = \binom{n+1}{2}$, que son los términos en la tercera diagonal del triángulo de Pascal, y además

$$(24) \quad p_3(1) + p_3(2) + \cdots + p_3(n) = \binom{n+2}{3}.$$

Demostración. Para demostrar la primera afirmación bastará demostrar que $\binom{n+1}{2}$ satisface la ecuación en diferencias (3) con $m = 3$ y la condición inicial $p_3(1) = 1$. En efecto, claramente tenemos que $\binom{1+1}{2} = 1$, entonces la condición inicial se cumple. Además, usando el resultado de la proposición 9 se obtiene que,

$$\binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{n!} = 1 + n.$$

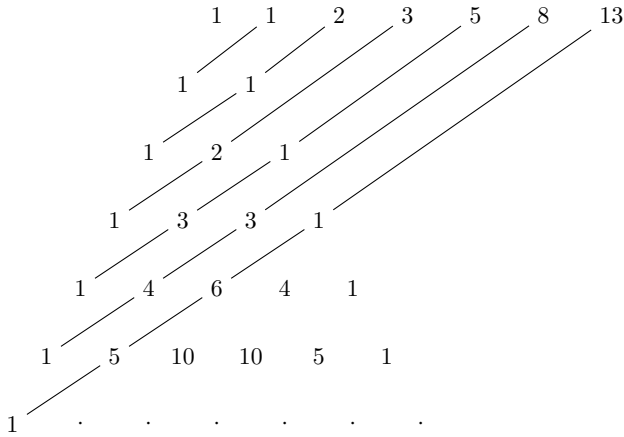


FIGURA 7. La sucesión de Fibonacci

Entonces podemos concluir que $p_3(n) = \binom{n+1}{2}$.

Por otra parte, para cada $m \geq 1$ y $n = 2$ el resultado del teorema anterior implica que

$$(25) \quad p_3(1) + p_3(2) + \dots + p_3(n) = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

Con lo cual queda demostrado el corolario. □

Finalmente, obsérvese que sumando los términos en las diagonales señaladas en la figura 7, se obtiene la sucesión de Fibonacci.

En el siguiente teorema formulamos rigurosamente y demostramos esta propiedad del triángulo de Pascal.

TEOREMA 13. *Sea $\{f(n)\}_{n \geq 0}$ la sucesión de Fibonacci. Entonces $f(0) = 0$ y para $n \geq 1$ se tiene que*

(i) *si n es par, digamos $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$(26) \quad f(2k) = \binom{2k-1}{0} + \binom{2k-2}{1} + \dots + \binom{k}{k-1};$$

(ii) *si n es impar, digamos $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces*

$$(27) \quad f(2k+1) = \binom{2k}{0} + \binom{2k-1}{1} + \dots + \binom{k}{k}.$$

Demostración. Bastará demostrar que la sucesión definida por los términos en los lados derechos de (26) y (27) satisfacen la ecuación en recurrencias de Fibonacci (11) y las condiciones iniciales.

Para las condiciones iniciales tenemos que, por definición, $f(0) = 0$ y si $n = 1$, i.e., $k = 0$ en (27) obtenemos que $\binom{0}{0} = 1$. Entonces las condiciones iniciales se satisfacen. Ahora, usando la recurrencia de Pascal (18) en los términos con signo positivo de la siguiente expresión, tenemos para $n = 2k$ con $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \binom{2k-1}{0} + \binom{2k-2}{1} + \dots + \binom{k}{k-1} - \binom{2k-2}{0} - \binom{2k-3}{1} - \dots - \binom{k-1}{k-1} \\ &= \binom{2k-3}{0} + \binom{2k-4}{1} + \dots + \binom{k-1}{k-2}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la ecuación en diferencias (11) también se satisface. El caso $n = 2k + 1$, $k \geq 1$ se demuestra de manera similar. □

Hemos discutido sólo algunas de las propiedades de los números naturales que se encuentran en el triángulo de Pascal. Invitamos al lector a continuar descubriendo y demostrando otras.

REFERENCIAS

- [1] Deza E. and Deza M.M., *Figurate Numbers*, World Scientific, 2012.
- [2] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [3] Goldberg, S., *Introduction to difference equations: with illustrative examples from economics, psychology and sociology*, Dover Publications Inc., USA, 2010.

Dirección del autor:

Roberto Quezada
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: roqb@xanum.uam.mx



CONJETURA DE CATALAN

MARIO HUICOCHEA

RESUMEN. El siguiente texto tiene un doble propósito. El primero es ver algunas de las muchas herramientas utilizadas y desarrolladas en la búsqueda de la demostración de la Conjetura de Catalan. El segundo es dar una muy breve idea de los principales pasos en la demostración de la Conjetura de Catalan realizada por P. Mihăilescu.

1. INTRODUCCIÓN

Si un profesor de secundaria pregunta a sus alumnos qué números enteros satisfacen la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1,$$

no serán pocos los que demuestren que $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$. Del mismo modo, habrá varios que demuestren que si n es un número natural mayor a 1, entonces la ecuación

$$x^n - y^n = 1$$

tiene únicamente las soluciones $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0)\}$ si n es par y $(x, y) \in \{(1, 0), (0, -1)\}$ si n es impar. Es más, un alumno de secundaria o bachillerato suficientemente avisado y motivado puede demostrar que si n y m son números naturales mayores a 1 y existe un número natural d mayor a 1 que divide a n y m , entonces alguno de los enteros x y y que resuelven la ecuación

$$x^n - y^m = 1$$

es cero; en particular esto nos permite encontrar fácilmente las soluciones enteras. Es natural entonces preguntarnos qué tantas soluciones existen si n y m son números naturales mayores que 1, posiblemente sin algún factor común, de la ecuación antes mencionada. El matemático belga Eugène Catalan [3] conjeturó en 1844 lo siguiente

CONJETURA 1. (Catalan) *Si n y m son números naturales mayores que 1 tales que la ecuación*

$$(1) \quad x^n - y^m = 1$$

tiene solución en los enteros distintos de 0, entonces $n = 2, m = 3, x = 3$ y $y = 2$.

Esta conjetura sería una de las más asediadas e intrigantes por más de 150 años; específicamente sería hasta el año 2003 que el matemático Preda Mihăilescu daría una demostración completa de la Conjetura de Catalan. El propósito de este trabajo es, en la primera parte, dar un rápido recorrido cronológico por los resultados parciales e intentos fallidos, no por ello poco enriquecedores, de la demostración de dicha conjetura y, en la segunda parte, dar una breve explicación de las ideas que llevaron a Mihăilescu a la demostración de esta famosa e interesante conjetura.

Antes de concluir esta introducción, estableceremos la notación que utilizaremos en adelante. Los conjuntos de los números racionales, enteros y naturales serán denotados por \mathbb{Q} , \mathbb{Z} y \mathbb{N} respectivamente; consideramos que el cero no es un número natural. El anillo de los enteros gaussianos es $\mathbb{Z}[i] := \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $i^2 = -1$. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, escribimos $a|b$ si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $ac = b$. Si $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, $\text{MCD}(a_1, \dots, a_k)$ es su máximo común divisor. Si R es un anillo, entonces $\langle a \rangle$ denota el ideal generado por

$a \in R$ y R^* es el conjunto de elementos con inverso multiplicativo también conocidos como unidades. Si \mathbb{K} es una extensión finita de \mathbb{Q} , $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ el anillo de enteros de \mathbb{K} es el conjunto de elementos en \mathbb{K} que son raíces de polinomios mónicos con coeficientes en \mathbb{Z} . $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ es un anillo, ver [11, Cap. 1 Sec. 2]; $I \subseteq \mathbb{K}$ es un ideal fraccionario si es un $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ -submódulo de \mathbb{K} tal que existe un $r \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}, r \neq 0$ el cual cumple que $rI \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, además decimos que I es principal si es generado por un elemento de \mathbb{K} . Si $I_{\mathbb{K}}$ es el conjunto de ideales fraccionarios y $P_{\mathbb{K}} \subseteq I_{\mathbb{K}}$ es el subconjunto de ideales fraccionarios principales, entonces $I_{\mathbb{K}}$ es un grupo (con la multiplicación), $P_{\mathbb{K}}$ es un subgrupo de $I_{\mathbb{K}}$ y el número de clases $h_{\mathbb{K}} := [I_{\mathbb{K}} : P_{\mathbb{K}}]$ es finito, ver por ejemplo [11, Cap. 1 Sec. 6]. Si $n \in \mathbb{N}$, $\zeta = \zeta_n$ denota una raíz enésima primitiva de la unidad y $\mathbb{Q}(\zeta)$ el enésimo campo ciclotómico; un resultado clásico de teoría de números, consulte por ejemplo [11, Cap. 1 Sec. 10], es que $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta)}$, el anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\zeta)$, es igual a $\mathbb{Z}[\zeta]$. Finalmente, si A es un grupo conmutativo y $k \in \mathbb{N}$, entonces $[A]_k := \{x \in A : x^{kr} = 1 \text{ para algún } r \in \mathbb{N}\}$.

2. LA HISTORIA DE LA CONJETURA DE CATALAN

Antes de comenzar con el recorrido por la historia de la Conjetura de Catalan, notemos que basta demostrar que la conjetura es cierta en el caso en el que m y n son primos; en efecto, si encontramos una solución $x = x_0$ y $y = y_0$ de (1) cuando $x_0 y_0 \neq 0$ y alguno de m y n no es primo, sin pérdida de generalidad $m = m' m''$ con $m', m'' > 1$ enteros, entonces $x = x_0$ y $y = y_0^{m''}$ es una solución de la ecuación

$$x^n - y^{m'} = 1$$

con x y y enteros tales que $xy \neq 0$. Por lo tanto, de ahora en adelante supondremos que n y m son primos distintos.

2.1. Primeros años. El primer avance que se tiene registrado en la demostración de la Conjetura de Catalan es el caso $m = 2$ gracias a V. A. Lebesgue [7] en 1850. La herramienta fundamental es la estructura aritmética de $\mathbb{Z}[i]$.

Más de un siglo después Ko Chao [6] demostró la Conjetura de Catalan en el caso $n = 2$. También en este caso las herramientas e ideas son accesibles para cualquier persona que haya tomado un curso básico de teoría de números o teoría algebraica de números; sin embargo, las ideas son tanto ingeniosas como útiles para resolver otros problemas. Cabe mencionar que el caso $(n, m) = (2, 3)$ fue resuelto mucho antes por L. Euler [4] en 1738 con el método del descenso infinito, a grandes rasgos esto quiere decir que bajo ciertas hipótesis se demuestra que si existe una solución de números naturales a una ecuación entonces se puede encontrar otra donde los valores son menores a los valores de la solución original por lo que se puede llegar a una contradicción suponiendo que la solución original era mínima.

Un avance significativo fue el que obtuvo J.W.S. Cassels [2] en 1960.

LEMA 2. (Cassels) *Si n y m son primos impares con x y y enteros distintos de cero que resuelven (1), entonces $n|y$ y $m|x$.*

De nuevo, la demostración utiliza únicamente métodos elementales. Más específicamente

$$(y+1) \left(\frac{y^m+1}{y+1} \right) = x^n \quad \text{y} \quad (x-1) \left(\frac{x^n-1}{x-1} \right) = y^m;$$

por otro lado

$$\text{MCD} \left((y+1), \left(\frac{y^m+1}{y+1} \right) \right) = 1 \quad \text{ó} \quad m | \text{MCD} \left((y+1), \left(\frac{y^m+1}{y+1} \right) \right)$$

y

$$\text{MCD} \left((x-1), \left(\frac{x^n-1}{x-1} \right) \right) = 1 \quad \text{ó} \quad n | \text{MCD} \left((x-1), \left(\frac{x^n-1}{x-1} \right) \right);$$

después se puede demostrar, tratando los casos por separado y notando que las potencias de los números crecen *rápido*, que $n|y^m$ y $m|x^n$ de donde se deduce el resultado.

2.2. Tijdeman casi lo logra. Se puede decir que los resultados hasta ahora mencionados, son obtenidos únicamente con métodos elementales¹. El siguiente resultado de C. L. Siegel, ver [13], implica que si m y n son números fijos, entonces (1) tiene un número finito de soluciones.

TEOREMA 3. (Siegel) *Si \mathbb{K} es una extensión finita de \mathbb{Q} , $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ su anillo de enteros y C una curva suave de género positivo definida sobre \mathbb{K} en un espacio afín, entonces $C(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$, el conjunto de puntos de C con coordenadas en $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, es finito.*

Sin embargo, uno de los principales problemas de esta afirmación es que no es efectiva; en este contexto, que no sea efectivo quiere decir que aunque sepamos que el número de soluciones es finito, no sabemos desde dónde y hasta dónde buscarlas. Algunos años después A. Baker obtuvo uno de los resultados más importantes de la teoría de números del siglo XX.

TEOREMA 4. (Baker) *Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{Z}$, $\beta := \max_{0 \leq i \leq n} \beta_i$ y*

$$\Lambda := \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \log(\alpha_i).$$

Existe una constante c independiente de β , por ende independiente de β_0, \dots, β_n , tal que si $\Lambda \neq 0$, entonces

$$\log |\Lambda| > -c \max\{\log(\beta), 1\}.$$

Este resultado tiene varias aplicaciones y a través de los años se han mejorado las cotas para c , consulte por ejemplo [1]. En particular, R. Tijdeman [15] encontró una fascinante aplicación de este resultado.

TEOREMA 5. (Tijdeman) *Si existe una solución de (1) con $xy \neq 0$, entonces existen $c_1, c_2 > 0$ constantes absolutas, tales que*

$$m \leq c_1 \log(n)^3 \quad \text{y} \quad n \leq c_2 m \log(n)^2.$$

En particular, existe $c_3 > 0$ una constante absoluta, tal que $\max\{m, n\} \leq c_3$.

Combinando una versión efectiva del teorema de Siegel, al menos para las curvas particulares definidas por (1), y el teorema de Tijdeman, se debería de poder concluir la demostración de la Conjetura de Catalan. Desgraciadamente, incluso con las mejoras posteriores, las constantes c_i del teorema de Tijdeman son demasiado grandes por lo que aun con otras técnicas existen $0 < c_4 < c_3$, constantes absolutas, por ejemplo $c_3 = 10^{17}$, tales que no se sabía si la Conjetura de Catalan era válida para valores de m y n tales que $c_4 < \max\{m, n\} < c_3$.

3. DEMOSTRACIÓN DE MIHĂILESCU

Nos disponemos a dar un breve resumen de la demostración de la Conjetura de Catalan realizada por Mihăilescu; pueden consultarse [8] y [12] para ver resúmenes de la demostración más completos. Recordemos que, por lo visto anteriormente, podemos suponer que m y n son dos primos impares distintos.

¹En matemáticas decir que algo se resuelve con métodos elementales significa que no se utilizan resultados de análisis o teorías sofisticadas; de cualquier modo el término nos parece ambiguo y fácilmente discutible.

3.1. Analogías con el Último Teorema de Fermat. A principio de los años noventa, K. Inkeri [5] tuvo la idea de realizar un trabajo similar al efectuado por E. Kummer en su intento de resolver el último teorema de Fermat. Una de las consecuencias del lema de Cassels (Lema 2) es que

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = nb^m \quad \text{con } \text{MCD}(n, b) = 1$$

y por otro lado $n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \zeta_n^k)$. De lo anterior, obtenemos que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{x - \zeta_n^k}{1 - \zeta_n^k} = b^m.$$

No es muy difícil darse cuenta de que $\frac{x - \zeta_n^k}{1 - \zeta_n^k} \in \mathbb{Z}[\zeta_n]$ y los ideales $\langle \frac{x - \zeta_n^k}{1 - \zeta_n^k} \rangle$ son primos relativos por lo que existe un ideal J_k de $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ tal que $\langle \frac{x - \zeta_n^k}{1 - \zeta_n^k} \rangle = J_k^m$. Sin embargo, no siempre $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ es un dominio de ideales principales; en particular, no podemos asegurar que J_k es generado por un elemento de $\mathbb{Z}[\zeta_n]$. En el caso en el que m es primo relativo con el número de clases de $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ entonces J_k sí es principal; trabajando con aritmética elemental podemos concluir en este caso que $m^2 | n^{m-1} - 1$. De un modo muy similar se puede demostrar que si n es primo relativo con el número de clases de $\mathbb{Q}(\zeta_m)$, entonces $n^2 | m^{n-1} - 1$. Recapitulando, si h_n y h_m son los números de clases de los campos $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ y $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ respectivamente y $\text{MCD}(h_n, m) = \text{MCD}(h_m, n) = 1$, entonces

$$(2) \quad m^2 | n^{m-1} - 1 \quad \text{y} \quad n^2 | m^{n-1} - 1.$$

Inkeri demostró que, sujetos a las condiciones $\text{MCD}(h_n, m) = \text{MCD}(h_m, n) = 1$, los primos m y n tienen que ser muy particulares; tan raros son los primos que satisfacen (2) que sólo se conocen siete pares de ellos cuando $\max\{m, n\} < 10^{15}$. Uno de los grandes logros de Mihăilescu, ver [9], fue demostrar que (2) debería ser cierta a pesar de que $\text{MCD}(h_n, m) > 1$ ó $\text{MCD}(h_m, n) > 1$.

3.2. Anuladores. A partir de esta sección, $\zeta := \zeta_n$ es una raíz enésima primitiva de la unidad. Sea $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$. Uno de los conjuntos que juega un papel fundamental en la demostración de la Conjetura de Catalan es $E := \mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}]^*$ que coincide con el conjunto de unidades de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Otro conjunto que juega un papel fundamental es C , el subgrupo de E generado por -1 y $\frac{\zeta^{\frac{k}{2}} - \zeta^{-\frac{k}{2}}}{\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}}$ con $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$.

Un hecho interesante es que $[E : C]$ no es tan sólo finito sino que además es igual a $h_{\mathbb{K}}$.

Denotamos por $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ al grupo de Galois de \mathbb{K}/\mathbb{Q} ; sea G el subgrupo de $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ generado por los automorfismos $\tau_k : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ para $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, donde τ_k es el automorfismo que deja fijo a \mathbb{Q} y que satisface $\tau_k(\zeta + \zeta^{-1}) = \zeta^k + \zeta^{-k}$. Escribimos

$$\mathbb{Z}[G] := \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} n_k \tau_k : n_k \in \mathbb{Z} \text{ para todo } 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \right\}$$

el cual actúa en \mathbb{K}^* de la siguiente forma: si $g := \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} n_k \tau_k \in \mathbb{Z}[G]$, entonces

$$x^g := \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \tau_k(x^{n_k})$$

para todo $x \in \mathbb{K}^*$. De manera natural, $I_{\mathbb{K}}/P_{\mathbb{K}}$ y E/C son $\mathbb{Z}[G]$ -módulos. Para un $k \in \mathbb{N}$, $[I_{\mathbb{K}}/P_{\mathbb{K}}]_k$ y $[E/C]_k$ son submódulos de $I_{\mathbb{K}}/P_{\mathbb{K}}$ y E/C respectivamente.

El teorema de F. Thaine, ver [14], menciona lo siguiente

TEOREMA 6. (Thaine)² Si $m \nmid \frac{n-1}{2}$, entonces un $g \in \mathbb{Z}[G]$ que anula a $[E/C]_m$ también anula a $[I_{\mathbb{K}/P_{\mathbb{K}}}]_m$.

Otro resultado relativo a los anuladores, por muchos considerado el teorema que llevó a Mihăilescu [10] a la demostración de su resultado, es el siguiente.

TEOREMA 7. (Mihăilescu) Si $g := \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} n_k \tau_k \in \mathbb{Z}[G]$,

$$((x - \zeta)(x - \zeta^{-1}))^g \in \{x^m : x \in \mathbb{K}^*\},$$

y $m \mid \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} n_k$, entonces $m \mid n_k$ para todo $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$.

3.3. Conclusión de la demostración. Supongamos que la conjetura es falsa. Como en la sección 2.1, $\langle \frac{x-\zeta}{1-\zeta} \rangle = J^m$ para algún ideal J de $\mathbb{Z}[\zeta]$ y de la misma manera lo es el ideal conjugado por lo que

$$\left\langle \frac{(x - \zeta)(x - \zeta^{-1})}{(1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})} \right\rangle = (J\bar{J})^m.$$

El teorema de Thaine implica que si $g := r \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \tau_i \in \mathbb{Z}[G]$ para algún $r \in \mathbb{N}$ satisfice $E^g \subseteq C$, entonces

$$\left\langle \frac{(x - \zeta)(x - \zeta^{-1})}{(1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})} \right\rangle^g = \langle \gamma \rangle^m.$$

por lo que existe una unidad v tal que

$$(3) \quad \left(\frac{(x - \zeta)(x - \zeta^{-1})}{(1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})} \right)^g = v\gamma^m.$$

Sin embargo $((1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1}))^g \in \{\pm 1\}$. Es importante notar que v es única módulo $(\mathbb{K}^*)^m$, en otras palabras v' satisfice (3) si y sólo si $v' = vb^m$ con $b \in \mathbb{K}^*$. Una parte técnica y difícil de la demostración es probar que existe $\eta \in C_m := \{z \in C : \exists s \in \mathbb{N} \text{ con } z^{sm} - 1 \in \langle m^2 \rangle\}$ tal que

$$((x - \zeta)(x - \zeta^{-1}))^g = \eta\lambda^m$$

con $\lambda \in \mathbb{K}$; si tomamos g' un anulador de C_m , entonces

$$((x - \zeta)(x - \zeta^{-1}))^{gg'} = \mu^m$$

con $\mu \in \mathbb{K}$, de donde se puede concluir, gracias al teorema 7, que $gg' = m\tau$ con $\tau \in \mathbb{Z}[G]$. Como $\epsilon^g \in C$ para todo $\epsilon \in E$, se puede concluir que $\epsilon^{g'} \in C$ y se demuestra que g' no tan sólo anula a C_m sino que también anula a C . Con lo anterior se puede demostrar que $C = C_m$, lo cual es imposible como demostramos a continuación. Sea C_0 el subgrupo de $\mathbb{Z}[\zeta]^*$ generado por C y ζ ; como $C = C_m$ y $\zeta^{dm} = \zeta$ si $dm \equiv 1 \pmod{n}$, tenemos que para todo $\eta \in C_0$ existe $\rho \in \mathbb{Z}[\zeta]^*$ tal que $\eta - \rho^m \in \langle m^2 \rangle$; en particular, $1 + \zeta^m - \rho^m \in \langle m^2 \rangle$ por lo que $(1 + \zeta)^m - \rho^m \in \langle m \rangle$ y concluimos que

$$(1 + \zeta)^m - 1 - \zeta^m \in \langle m^2 \rangle.$$

El polinomio $P(x) = \frac{1}{m}((1+x)^m - 1 - x^m) \in \mathbb{Z}[\zeta]/\langle m \rangle[x]$ tiene al menos $n-1$ ceros en $\mathbb{Z}[\zeta]/\langle m \rangle$, por ejemplo $\zeta, \dots, \zeta^{n-1}$ son soluciones de $P(x)$, sin embargo $P(x)$ tiene grado $m-1$ por lo que obtenemos que $n-1 \leq m-1$. Intercambiando los papeles de n y m llegamos a que $n-1 \geq m-1$ pero esto es imposible ya que asumimos que m y n no pueden ser iguales.

Agradecimientos. Agradezco a Pedro Luis Del Ángel la motivación e interés para escribir este texto y al árbitro por las múltiples y muy valiosas observaciones.

²Este resultado fue demostrado por primera vez antes de que Thaine lo hiciese en [14], ver [8, p.51] para más información.

REFERENCIAS

- [1] Baker, A., Wüstholz, G., *Logarithmic forms and Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs 9, Cambridge University Press, (2007).
- [2] Cassels, J.W.S., *On the equation $a^x - b^y = 1$, II*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 56 (1960), 97-103.
- [3] Catalan, E., *Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur*, J. Reine Angew. Math. 27 (1844), 192.
- [4] Euler, L., *Theorematum quorundam arithmeti corum demonstrationes* 56-68, *Commenationes Arithmeticae*, Opere Omnia Series I, Vol II. Teubner (1915).
- [5] Inkeri, K., *On Catalan's conjecture*, J. Number Theory 34 (1990), 142-152.
- [6] Ko Chao, *On the diophantine equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$* , Sichun Daxue Xuebao 1 (1962), 1-6.
- [7] Lebesgue, V. A., *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^m = y^2 + 1$* , Nouv. Ann. Math. 9 (1850), 178-181.
- [8] Metsänkylä, T., *Catalan's Conjecture: Another Old Diophantine Problem Solved*, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (2003), 43-57.
- [9] Mihăilescu, P., *A class number free criterion for Catalan's conjecture*, J. Number Theory 99 (2003), 225-231.
- [10] Mihăilescu, P., *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine Angew. Math. 572 (2004), 167-195.
- [11] Neukirch, J., *Algebraic Number Theory (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften) vol. 322*, Springer-Verlag (2002).
- [12] Schoof, R., *Catalan's Conjecture*, Universitext, Springer-Verlag, (2008).
- [13] Siegel, C. L., *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 1 (1929), 41-69.
- [14] Thaine, F., *On the ideal class groups of real abelian number fields*, Ann. of Math. 128 (1988), 1-18.
- [15] Tijdeman, R., *On the equation of Catalan*, Acta Arith. 29 (1976), 197-209.

Dirección del autor:

Mario Huicochea
ETH-Zürich,
Rämistrasse 101
8006 Zürich
e-mail: mario.huicochea@math.ethz.ch



DEL ÁLGEBRA LINEAL Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS AL ANÁLISIS FUNCIONAL Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

L. HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA

RESUMEN. En el presente trabajo se pretende ilustrar la analogía entre dos modelos, uno discreto y otro continuo. El modelo discreto describe el comportamiento de un sistema de masas-resortes, y el modelo continuo describe el comportamiento de una barra elástica, ambos bajo la acción de la gravedad. En los dos casos se estudia el problema de equilibrio y el problema dinámico, éste último obtenido al perturbar el equilibrio. La analogía entre ambos problemas va desde la construcción de los modelos, los aspectos físicos como equilibrio, trabajo y energía, hasta los aspectos matemáticos involucrados. Estas analogías sirven como pretexto para ilustrar la generalización del producto interior en \mathbb{R}^n a los espacios de funciones en dimensión infinita, los conceptos de ortogonalidad y completez, el análogo de las matrices con los operadores diferenciales, el análogo de las matrices traspuestas con los operadores adjuntos, ecuaciones matriciales y ecuaciones funcionales, el cálculo multivariado y el cálculo variacional. En consecuencia, ambos modelos (discreto y continuo) se pueden concebir con un mismo enfoque, desde el punto de vista matemático.

1. INTRODUCCIÓN

En algunos cursos de modelos matemáticos para estudiantes de licenciatura en la UAM-Iztapalapa, el presente autor ha utilizado parte del material del excelente libro de Strang, *Introduction to Applied Mathematics* [14]. Específicamente se han tomado dos modelos: uno discreto, el cuál consiste de un sistema de masas y resortes; y otro continuo, que describe el comportamiento de una barra elástica. En ambos casos se estudian los problemas de equilibrio bajo la acción de la gravedad, así como la dinámica cuando se perturba el equilibrio. Estos problemas sirven como pretexto para introducir al estudiante a la modelación matemática y también para integrar conocimientos adquiridos en los cursos de cálculo, álgebra lineal y análisis. El recurso didáctico de la analogía, así como la generalización, son explotados para ilustrar los conceptos de producto interior, ortogonalidad, operador, completez, y motivar otros más avanzados del análisis funcional y el cálculo variacional, sin pretender ser formal y riguroso.

El álgebra lineal, el cálculo, el análisis funcional y el cálculo de variaciones juegan un papel central en muchos campos de la matemática aplicada como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, así como el análisis numérico, la optimización, el control y los problemas inversos, por mencionar algunos. En ocasiones, es posible auxiliarse de resultados conocidos del álgebra lineal y del cálculo, los cuales se utilizan más frecuentemente en modelos que se pueden trabajar en dimensión finita, para desarrollar un poco de intuición en problemas que requieren del uso de herramientas matemáticas más sofisticadas. Aunque en el libro de texto mencionado arriba se presentan algunas ideas, en el presente trabajo se profundiza en los conceptos matemáticos. Además, se establece la relación entre los dos modelos y sus propiedades en forma detallada y minuciosa. El presente artículo es una adaptación de las notas

2010 *Mathematics Subject Classification.* 34B07, 35A15, 46N20, 49K20.

Palabras clave. Ecuación diferencial ordinaria y ecuación diferencial parcial, función cuadrática y funcional cuadrático, producto interior, ortogonalidad, operador elíptico, cálculo de variaciones.

del curso ofrecido en el VI Coloquio del Departamento de Matemáticas en el Centro Vacacional de Metepec, Puebla, en enero de 2014.

2. MODELO DE EQUILIBRIO DISCRETO. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Considérese un sistema de dos masas de magnitud m_1, m_2 , unidas por tres resortes con constantes de rigidez k_1, k_2, k_3 , sujetos en dos extremos opuestos fijos, como se ilustra en la figura 1. El sistema se encuentra suspendido en equilibrio bajo la acción de la gravedad, y se supone que los resortes tienen masa despreciable. La gravedad, de magnitud g , provoca los desplazamientos u_1, u_2 , moviendo las masas de sus posiciones iniciales x_1 y x_2 a sus nuevas posiciones $x_1 + u_1$ y $x_2 + u_2$, por la deformación de los resortes. El interés es calcular los desplazamientos u_1, u_2 en términos de las fuerzas externas $f_1 = m_1g, f_2 = m_2g$.

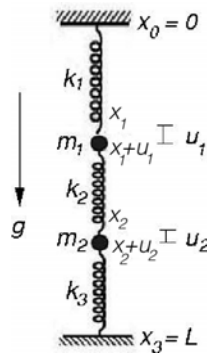


FIGURA 1. Sistema de dos masas y tres resortes en equilibrio bajo la acción de la gravedad

Las variables involucradas son: los desplazamientos de las masas, u_1 y u_2 ; las deformaciones de los resortes, e_1, e_2 y e_3 ; las fuerzas internas (de restitución) de los resortes, σ_1, σ_2 y σ_3 ; las fuerzas externas (por acción de la gravedad) sobre las masas, f_1 y f_2 . Para derivar el modelo de equilibrio se realizan los siguientes pasos:

- Se establece la relación entre las deformaciones de los resortes y los desplazamientos de las masas:

$$(1) \quad e_i = u_i - u_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Es decir, para medir cuanto se estira o comprime un resorte, se calcula la diferencia de los desplazamientos de las masas adyacentes. Como el primer resorte está fijo en la parte superior, se define $u_0 = 0$. Análogamente, como el tercer resorte está fijo en el extremo inferior, se define $u_3 = 0$.

- Se utiliza la ley de Hooke para establecer la relación entre fuerzas de restitución de los resortes y la deformación de los mismos:

$$(2) \quad \sigma_i = k_i e_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Esta ley establece que la fuerza de restitución sobre un resorte es proporcional al tamaño de su deformación. Suponiendo que cada resorte i está hecho de material uniforme, entonces la relación de proporción es constante e igual a la rigidez k_i .

- Se obtiene la ecuación de equilibrio, realizando el balance de fuerzas sobre las masas:

$$(3) \quad f_i = \sigma_i - \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2.$$

En el equilibrio, el peso f_i de la masa m_i es igual y en sentido opuesto a la fuerza total que los resortes ejercen sobre ella.

Utilizando la notación vectorial

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

las ecuaciones (1), (2) y (3) se pueden expresar en la forma matricial

$$(4) \quad \mathbf{e} = D \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = K \mathbf{e}, \quad \mathbf{f} = D^T \boldsymbol{\sigma},$$

respectivamente, en donde

$$(5) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix},$$

y D^T denota a la matriz traspuesta a la matriz D . De (4) se obtiene la ecuación de equilibrio $\mathbf{f} = D^T K D \mathbf{u}$. Para simplificar la notación, se denotará por A a la matriz $D^T K D$. Entonces, los desplazamientos de las masas se pueden calcular resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$(6) \quad A \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = g \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}.$$

La solución de esta ecuación es única, pues la matriz A es simétrica y definida positiva. De ahora en adelante se utilizará la notación A^T para indicar la matriz traspuesta de A , y $A > 0$ para indicar que A es definida positiva.

Generalización del modelo. Cuando se consideran n masas suspendidas y acopladas por medio de $n + 1$ resortes, las relaciones matriciales (4) se siguen cumpliendo, sólo que ahora las matrices son

$$(7) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = g \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix},$$

con $D \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ y $K \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$. Los desplazamientos u_1, u_2, \dots, u_n se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones (6), con la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dada por

$$(8) \quad A = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

la cual también es simétrica y definida positiva, [7], [14].

3. TRABAJO Y PRODUCTO INTERIOR. ENERGÍA Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

Trabajo. El sistema de masas y resortes en equilibrio satisface un principio fundamental: *el trabajo interno de deformación de los resortes debe ser igual al trabajo externo hecho sobre las masas*. Para verificarlo, calculamos ambos trabajos:

$$\text{Trabajo interno sobre los resortes (por la deformación)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i e_i = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

$$\text{Trabajo externo sobre las masas (por acción de la gravedad)} = \sum_{i=1}^n f_i u_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

El símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ denota el producto interno en \mathbb{R}^n . Utilizando (4) se verifica que ambos trabajos son iguales

$$(9) \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle \boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle D^T \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Hay dos propiedades implícitas importantes que vale la pena destacar:

1. La matriz que conecta la fuerza $\boldsymbol{\sigma}$ con \mathbf{f} es la traspuesta de la que conecta \mathbf{u} con \mathbf{e} , ver (4).
2. El producto interno es una forma adecuada para definir la traspuesta de una matriz. Si se piensa la matriz D como una transformación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^{n+1} , la traspuesta D^T es otra transformación de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R}^n que satisface $\langle \boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle D^T \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Energía potencial. Otro principio físico importante del sistema en equilibrio es que *los resortes buscan la posición en la cual la energía potencial total (de masas y resortes) es mínima*. Con el objeto de verificarlo, primero se calcula la energía potencial de las masas

$$(10) \quad - \sum_{i=1}^n m_i g u_i = - \sum_{i=1}^n f_i u_i = - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

El signo menos indica que se requiere trabajo externo para llevar a las masas a su posición original (es decir, a la posición que tendrían en ausencia de gravedad). Por otro lado, la energía potencial asociada a los resortes es

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} k_i e_i^2 = \frac{1}{2} \langle K\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle K D\mathbf{u}, D\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{1}{2} \langle D^T K D\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

la cual es positiva, debido a que cuando se quitan las masas (en decir, ausencia de gravedad) los resortes ceden trabajo. Por lo tanto, la energía potencial total es la suma de las dos anteriores

$$(12) \quad p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

la cual es una función cuadrática con matriz Hessiana $A = A^T > 0$. Por condiciones suficientes de segundo orden, se sabe que tiene un único mínimo global \mathbf{u}^* , el cuál se encuentra resolviendo el sistema $\nabla p(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Es decir, el vector de desplazamientos de equilibrio \mathbf{u}^* minimiza $p(\mathbf{u})$ si y sólo si resuelve sistema de ecuaciones $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Desde el punto de vista práctico este resultado es muy importante debido a que permite encontrar la solución de equilibrio de dos maneras equivalentes:

1. Resolviendo el sistema de ecuaciones $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ (balance de fuerzas).
2. Minimizando la función cuadrática $p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ (energía potencial).

Un método muy eficiente para resolver el sistema de ecuaciones es *el método de Choleski*, el cuál es un método directo de factorización [7]. Para encontrar el mínimo de la función cuadrática se recomienda *el método iterativo de gradiente conjugado*. Si además, la matriz A es tridiagonal, el algoritmo más efectivo para resolver el sistema de ecuaciones es *el método de Thomas* (ver [12]).

4. MODELO DINÁMICO DISCRETO. VALORES Y VECTORES PROPIOS

Si se introduce una perturbación en el sistema, las masas y los resortes buscarán volver al equilibrio. Por ejemplo, si inicialmente se desplazan las masas la cantidad $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)^T$, y después se sueltan con velocidad inicial nula, el sistema comenzará a oscilar. Se puede aplicar la segunda ley de Newton para obtener el modelo dinámico; para ello se denota por $u_i(t)$ el desplazamiento de la masa m_i en el instante $t > 0$, y por $\dot{u}_i(t)$ y $\ddot{u}_i(t)$ su primera y segunda derivada, respectivamente.

La fuerza total externa sobre la masa m_i es $f_i - (\sigma_i - \sigma_{i+1}) = f_i - (A\mathbf{u})_i$, así que $m_i \ddot{u}_i(t) = f_i - (A\mathbf{u})_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Este sistema de ecuaciones diferenciales se complementa dando los desplazamientos iniciales $u_i(0) = u_i^0$ y las velocidades iniciales nulas $\dot{u}_i(0) = 0$. Utilizando notación vectorial, y suponiendo que todas las masas tienen el mismo valor m , el modelo dinámico es

$$(13) \quad m \ddot{\mathbf{u}}(t) + A \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}, \quad (\text{ecuación diferencial})$$

$$(14) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad (\text{desplazamiento inicial})$$

$$(15) \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}, \quad (\text{velocidad inicial})$$

Este sistema lineal de segundo orden tiene solución única [2] y consta de dos componentes naturales:

$$(16) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^* + \mathbf{v}(t),$$

en donde \mathbf{u}^* representa la *solución de equilibrio*, y el vector $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*$ representa las *desviaciones del equilibrio*. Sustituyendo $\mathbf{u}(t)$ en el anterior sistema de ecuaciones, y utilizando que $A\mathbf{u}^* = \mathbf{f}$, se obtiene el siguiente sistema para las desviaciones del equilibrio

$$(17) \quad m \ddot{\mathbf{v}}(t) + A \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \quad (\text{ecuación diferencial})$$

$$(18) \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \quad (\text{desviación inicial})$$

$$(19) \quad \dot{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{0}, \quad (\text{velocidad inicial}),$$

con desviaciones iniciales $\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*$. Por lo tanto, para resolver el problema debemos de resolver dos problemas: el problema de equilibrio y el problema para las desviaciones del equilibrio.

Solución del problema de equilibrio. Esta solución generalmente se encuentra resolviendo el sistema lineal $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, por medio de alguno de los métodos mencionados al final de la sección anterior. Sin embargo, aquí se resolverá este problema utilizando los valores y vectores propios de la matriz A . Aunque no es típico resolver sistemas de ecuaciones lineales de esta manera, pues el cálculo de los valores y vectores propios es considerablemente más laborioso que resolver sistemas de ecuaciones, lo haremos motivados por dos razones: primero, porque los problemas dinámicos generalmente necesitan de los valores y vectores propios; otra razón es que esta técnica (método de Fourier) es común en la solución de ecuaciones diferenciales lineales que modelan problemas en medios continuos.

Dado que la matriz A es simétrica, existen n vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, que se suponen unitarios, los cuáles forman un sistema ortogonal completo en \mathbb{R}^n , es decir son vectores mutuamente ortogonales (por tanto, linealmente independientes) que generan \mathbb{R}^n . Así que la solución \mathbf{u}^* se puede expresar en la forma $\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i$, en donde los coeficientes a_i se deben determinar. Sustituyendo \mathbf{u}^* en el sistema $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, y recordando que $A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{f}.$$

Multiplicando ambos lados de esta igualdad por cada vector propio \mathbf{u}_j , y utilizando la ortogonalidad, se obtienen los coeficientes:

$$a_j = \frac{f_j}{\lambda_j}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

en donde $f_j = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$ es la j -ésima coordenada de \mathbf{f} en la base ortonormal. Los valores propios λ_j son positivos debido a que $A > 0$. Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones está dada por la siguiente expresión muy simple

$$(20) \quad \mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i.$$

Solución del problema para las desviaciones del equilibrio. Para resolver este problema lo típico es hacer uso de las coordenadas naturales (los vectores propios). En cada instante $t > 0$, $\mathbf{v}(t)$ es un vector en \mathbb{R}^n , por lo que

$$(21) \quad \mathbf{v}(t) = a_1(t) \mathbf{u}_1 + a_2(t) \mathbf{u}_2 + \cdots + a_n(t) \mathbf{u}_n,$$

en donde los coeficientes $a_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, se deben determinar. Para calcularlos se sustituye (21) en (17)–(19) y recordando que $A \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [m \ddot{a}_i(t) + \lambda_i a_i(t)] \mathbf{u}_i &= \mathbf{0}, \\ \sum_{i=1}^n a_i(0) \mathbf{u}_i &= \mathbf{v}^0, \\ \sum_{i=1}^n \dot{a}_i(0) \mathbf{u}_i &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Utilizando la ortonormalidad de los vectores propios, se obtienen las ecuaciones diferenciales escalares

$$(22) \quad m \ddot{a}_i(t) + \lambda_i a_i(t) = 0,$$

$$(23) \quad a_i(0) = v_i^0, \quad \text{con } v_i^0 = \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{u}_i \rangle,$$

$$(24) \quad \dot{a}_i(0) = 0,$$

para $0 \leq i \leq n$. Las soluciones son

$$(25) \quad a_i(t) = v_i^0 \cos \omega_i t, \quad \text{con } \omega_i^2 = \frac{\lambda_i}{m}.$$

Por lo tanto, las desviaciones del equilibrio están dadas por

$$(26) \quad \mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^n v_i^0 \cos \omega_i t \mathbf{u}_i,$$

y sumando la solución de equilibrio se obtiene la solución del problema (13)–(15)

$$(27) \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_i}{\lambda_i} + v_i^0 \cos \omega_i t \right] \mathbf{u}_i, \quad \text{con } f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle, \quad v_i^0 = \langle \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}_i \rangle, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}}.$$

Es claro que la primera parte de la suma corresponde al equilibrio y la segunda a las desviaciones del equilibrio. Además, las desviaciones del equilibrio siguen una dinámica oscilatoria producto de la superposición de n **modos normales** $v_i^0 \cos \omega_i t \mathbf{u}_i$, con las siguiente características:

- Sus *amplitudes* v_i^0 dependen de los vectores propios \mathbf{u}_i .
- Sus *frecuencias* ω_i dependen de los valores propios λ_i .

En conclusión, para resolver el problema de equilibrio es necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales algebraicas, mientras que para resolver el problema dinámico es necesario resolver un problema de valores propios. Los dos problemas son fundamentalmente diferentes y, desde el punto de vista computacional, es considerablemente más difícil resolver un problema de valores propios $A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ que un sistema de ecuaciones lineales $A \mathbf{u} = \mathbf{f}$.

5. MODELO DE EQUILIBRIO CONTINUO. OPERADORES DIFERENCIALES. ESPACIOS DE FUNCIONES

Se considera una barra delgada hecha de material elástico homogéneo, que cuelga en forma vertical bajo la acción de la gravedad. La barra está sujeta de ambos extremos en una posición fija, como se ilustra en la figura 2, y se puede pensar como un caso límite de una infinidad de masas puntuales unidas por resortes infinitesimales. El interés es conocer la magnitud de la deformación de la misma.

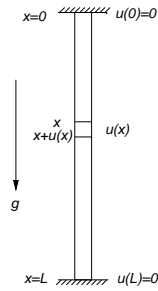


FIGURA 2. Barra elástica bajo la acción de la gravedad

Para obtener un modelo que describa la deformación se parte de un principio básico: *la magnitud de la deformación en cada porción (elemento) de la barra dependerá del desplazamiento de la barra en dicha porción por unidad de longitud*. Más específicamente,

- Sea $u(x)$ la magnitud del ‘desplazamiento’ en la posición $x \in (0, L)$. Esta magnitud indica cuanto se desplaza un punto $x \in (0, L)$ sobre la barra cuando ésta se somete a la acción de la gravedad. Por supuesto que este desplazamiento depende de las propiedades físicas de la barra y de la fuerza externa aplicada (‘carga’).
- La deformación de la barra (elongación) en el punto x se medirá mediante la variación del desplazamiento por unidad de longitud en dicho punto, es decir

$$(28) \quad e(x) = \frac{du(x)}{dx}.$$

A mayor variación del desplazamiento, mayor será la elongación de la barra.

- Hay dos fuerzas actuando sobre cada porción infinitesimal Δx de la barra ubicada en una posición x :
 1. El esfuerzo interno ó tracción, $\sigma(x)$, dado por la Ley de Hooke

$$(29) \quad \sigma(x) = k(x) e(x).$$

La barra internamente trata de regresar a su estado original cuando es deformada. La función $k(x)$ se denomina el módulo de elasticidad y describe las propiedades elásticas de la barra, de manera análoga a la constante de elasticidad en los resortes.

2. La fuerza externa por unidad de longitud $f(x)$, debido a la acción de la gravedad, dada por

$$(30) \quad f(x) = \rho(x) g,$$

en donde $\rho(x)$ es la densidad lineal en x , y g es la aceleración de la gravedad.

Cuando la barra cuelga en equilibrio, las dos fuerzas (la interior y la exterior) tienen la misma magnitud, y sentido opuesto. Por lo tanto, la ecuación de equilibrio se puede obtener para cada pequeño elemento de la barra $[x, x + \Delta x]$ por medio de la siguiente igualdad

$$(31) \quad \sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) + f(x) \Delta x = 0.$$

Dividiendo sobre Δx y tomando el límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene $-\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x)$.

Utilizando (28) y (29)), se obtiene

$$(32) \quad -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

Esta ecuación se complementa con las condiciones de frontera

$$(33) \quad u(0) = u(L) = 0,$$

debido a que la barra está sujeta en posición fija en esos puntos.

Trabajo. Para calcular el trabajo que las fuerzas del sistema realizan, se procede por analogía con el caso discreto:

- El trabajo interno de los resortes en el modelo discreto es $\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i e_i = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Se aplica el mismo razonamiento a la barra elástica, en lugar de la fuerza de restitución σ_i tenemos la tracción $\sigma(x)$ y, en lugar de las elongaciones e_i tenemos las deformaciones por unidad de longitud $e(x)$. Naturalmente, en lugar de sumar productos de cantidades discretas ahora debemos integrar productos de cantidades continuas. Por lo tanto

$$(34) \quad \text{Trabajo interno sobre la barra} = \int_0^L \sigma(x) e(x) dx.$$

- El trabajo externo sobre las masas en el modelo discreto es $\sum_{i=1}^n f_i u_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

Para la barra elástica, en lugar de las fuerzas de gravedad f_i tenemos la fuerza de gravedad por unidad de longitud $f(x)$, y en lugar de los desplazamientos discretos u_i tenemos los desplazamientos continuos $u(x)$. Por lo tanto

$$(35) \quad \text{Trabajo externo sobre la barra} = \int_0^L f(x) u(x) dx$$

En el equilibrio estos dos trabajos deben de ser iguales. Una forma de verificarlo es sustituyendo en (34) las definiciones de $\sigma(x)$ y $e(x)$, obteniendo

$$\int_0^L \sigma(x) e(x) dx = \int_0^L \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx.$$

Haciendo integración por partes en la integral de la derecha se obtiene

$$\int_0^L \sigma(x) e(x) dx = - \int_0^L \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) u(x) dx.$$

El término de frontera en la integración por partes, $k(L) \frac{du(L)}{dx} u(L) - k(0) \frac{du(0)}{dx} u(0)$, se anula debido a las condiciones de frontera $u(0) = u(L) = 0$. A su vez, la integral de la derecha en la última expresión se puede transformar utilizando (32), obteniendo

$$(36) \quad \int_0^L \sigma(x) e(x) dx = \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Esta igualdad es el análogo continuo de la expresión (9) y expresa que *el trabajo total realizado por la barra para contrarrestar la deformación es igual al trabajo total externo realizado por la gravedad sobre la barra.*

Producto interior. Las analogías entre el problema de equilibrio de la barra elástica y el problema estático de masas y resortes se han basado en conceptos físicos como fuerza, trabajo y equilibrio. Tratando de encontrar analogías de tipo matemático, se observa que el trabajo externo sobre n masas se puede calcular mediante el producto interno $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$, por lo que es natural preguntar si la forma de calcular ese trabajo en el caso continuo también define un producto interior. Si se considera el espacio de las funciones continuas de valores reales definidas sobre el intervalo $(0, L)$, denotado por $\mathcal{C}(0, L)$, es fácil verificar que efectivamente la expresión (35) define un producto interior sobre este espacio y se escribe

$$\langle f, u \rangle_{\mathcal{C}(0, L)} = \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

La norma inducida por este producto interior se define mediante $\|f\|_{\mathcal{C}(0, L)}^2 = \langle f, f \rangle_{\mathcal{C}(0, L)}$, y se puede hablar de distancias entre funciones, ortogonalidad, sucesiones y series de

funciones, convergencia, entre otros. En particular, la famosa desigualdad de Cauchy–Schwartz, $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$ toma la forma

$$\int_0^L u(x)v(x) dx \leq \left(\int_0^L u(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L v(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Sin embargo, es fácil construir sucesiones de funciones continuas cuyo límite con esta norma no es una función continua [8], [10]. En las aplicaciones es muy importante trabajar con espacios normados completos. Al completar el espacio quedan incluidas todas las funciones medibles sobre el intervalo $(0, L)$ que son ‘cuadrado integrables’, en el sentido de Lebesgue [8], [9], [13]. Éste espacio vectorial se denota por $L^2(0, L)$ y está definido por

$$(37) \quad L^2(0, L) = \left\{ v : (0, L) \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^L u^2 dx < \infty \right\}.$$

Éste es un espacio de Hilbert (espacio normado completo con producto interior), es uno de los espacios de funciones más importantes del análisis funcional para el estudio de las ecuaciones diferenciales [4].

Con el objeto de extraer más analogías de corte matemático entre el caso discreto y el caso continuo, conviene presentar una comparación de ambos modelos, como se indica en el cuadro 1

CASO DISCRETO	CASO CONTINUO
Sistema masas–resortes	Barra elástica
Desplazamientos de las masas: \mathbf{u}	Desplazamiento de la barra: $u(x)$
Elongación: $\mathbf{e} = D \mathbf{u}$	Deformación: $e(x) = \frac{du(x)}{dx}$
Fuerza de restitución: $\boldsymbol{\sigma} = K \mathbf{e}$	Tracción: $\sigma(x) = k(x) e(x)$
Equilibrio: $D^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$	Equilibrio: $-\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x)$
Ecuación matricial: $D^T K D \mathbf{u} = \mathbf{f}$	Ec. diferencial: $-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x)$
Trabajo interno: $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$	Trabajo interno: $\langle \sigma, e \rangle_{L^2(0,L)}$
Trabajo externo: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$	Trabajo externo: $\langle f, u \rangle_{L^2(0,L)}$

CUADRO 1. Comparación entre los modelos discreto y continuo

El operador adjunto e integración por partes. En el cuadro 1 se observa que el operador matricial D actúa sobre el vector de desplazamientos \mathbf{u} , mientras que el operador diferencial $\frac{d}{dx}$ actúa sobre las funciones $u(x)$. Además, la matriz traspuesta D^T actúa sobre los vectores $\boldsymbol{\sigma}$, mientras que el operador diferencial $-\frac{d}{dx}$ actúa sobre las tracciones $\sigma(x)$. Es decir, los operadores discretos y continuos están relacionados

$$(38) \quad D \sim \frac{d}{dx}, \quad D^T \sim -\frac{d}{dx}.$$

El operador diferencial $\frac{d}{dx}$ puede pensarse como el límite del operador matricial D cuando $n \rightarrow \infty$, ya que

$$\frac{du(x_i)}{dx} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i}, \quad \text{mientras que} \quad (D\mathbf{u})_i = u_i - u_{i-1}.$$

Es decir, el operador diferencial es el límite continuo de la matriz D escalada, en donde los factores de escalamiento son las longitudes h_i . Estas longitudes se pueden pensar como la separación de las masas m_i y m_{i-1} , en el caso discreto. Para explicar

la analogía entre D^T y $-\frac{d}{dx}$, denotamos por \mathcal{D} al operador diferencial $\frac{d}{dx}$. Haciendo integración por partes se obtiene

$$(39) \quad \langle \mathcal{D}u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L \frac{du}{dx} v dx = \int_0^L u \left(-\frac{dv}{dx} \right) dx = \left\langle u, -\frac{dv}{dx} \right\rangle_{L^2(0,L)} = \langle u, \mathcal{D}^*v \rangle_{L^2(0,L)}.$$

Los términos de frontera en la integración por partes son cero ya que $u(0) = u(L) = 0$. La igualdad (39) muestra que la ‘*traspuesta*’ del operador diferencial es el mismo operador pero con signo contrario. A dicho operador se le denomina el operador adjunto y se denota por \mathcal{D}^* . En realidad, los operadores diferenciales, definidos sobre funciones que están definidas sobre regiones acotadas, vienen acompañados de condiciones de frontera. Así que es más adecuado definir los operadores \mathcal{D} y \mathcal{D}^* de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} & \text{ se define por medio de } \mathcal{D}u = \frac{du}{dx}, \quad u(0) = 0, \\ \mathcal{D}^T & \text{ se define por medio de } \mathcal{D}^*u = -\frac{du}{dx}, \quad u(L) = 0. \end{aligned}$$

Los anteriores operadores diferenciales son claramente lineales, además de que están bien definidos sobre el subconjunto de funciones en $L^2(0, L)$ cuyas derivadas generalizadas también pertenecen a $L^2(0, L)$, [4], [8]. Este subconjunto define un espacio que se denota por $H^1(0, L)$, y es también un espacio de Hilbert con el siguiente producto interior y correspondiente norma:

$$(40) \quad \langle u, v \rangle_{H^1(0,L)} = \int_0^L [u(x)v(x) + u'(x)v'(x)] dx, \quad \|u\|_{H^1(0,L)}^2 = \langle u, u \rangle_{H^1(0,L)}.$$

Un subespacio muy útil en el estudio y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es

$$(41) \quad H_0^1(0, L) = \{v \in H^1(0, L) : v(0) = v(L) = 0\}.$$

La *desigualdad de Poincaré-Friedrichs*, $\int_0^L v(x)^2 dx \leq C \int_0^L \|v'(x)\|^2 dx$ para toda $v \in H_0^1(0, L)$, implica que la seminorma

$$(42) \quad |v|_{H_0^1(0,L)}^2 = \int_0^L \|v'(x)\|^2 dx,$$

es una norma en el espacio $H_0^1(0, L)$, la cuál es equivalente a la norma en $H^1(0, L)$. Por último, vale decir que las posibles soluciones de la ecuación diferencial se buscan en el espacio

$$H^2(0, L) = \{v \in L^2(0, L) : v', v'' \in L^2(0, L)\},$$

el cuál es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$(43) \quad \langle u, v \rangle_{H^2(0,L)} = \int_0^L [u(x)v(x) + u'(x)v'(x) + u''(x)v''(x)] dx.$$

Los espacios de funciones $L(0, L)$, $H_0^1(0, L)$, $H^1(0, L)$ y $H^2(0, L)$ son ejemplos de los denominados *espacios de Sobolev*, los cuales son de fundamental importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Para un estudio mucho más detallado de los mismos se pueden consultar las referencias [1], [4] y [8].

6. ENERGÍA POTENCIAL. FUNCIONALES CUADRÁTICOS Y CÁLCULO DE VARIACIONES

En el caso de la barra elástica también se satisface un principio del mínimo: *El desplazamiento de equilibrio es aquel en el que la energía total del sistema es mínima*. En esta sección se justificará esta aseveración y se mostrarán las analogías con el caso discreto.

La energía potencial almacenada debido a un desplazamiento $u(x)$ se debe a dos factores:

- La tracción debida a las fuerzas elásticas internas. Esta parte de la energía potencial se calcula utilizando la expresión análoga al caso discreto (11)

$$\frac{1}{2} \int_0^L k(x) e(x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L k(x) \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx.$$

- La fuerza externa debida a la gravedad. Utilizando la expresión análoga al caso discreto (10), se obtiene

$$- \int_0^L \rho(x) g u(x) dx = - \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Por lo tanto, la **energía potencial total** está dada por la expresión:

$$(44) \quad P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L k(x) \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Haciendo integración por partes en la primera integral obtenemos

$$(45) \quad P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L - \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) u(x) dx - \int_0^L f(x) u(x) dx.$$

Con el objeto de mostrar que esta expresión es análoga a la expresión (12), definimos el operador \mathcal{K} como $(\mathcal{K}u)(x) = k(x) u(x)$, con $k(x) > 0$ y acotada sobre $(0, L)$. Utilizando los operadores diferenciales definidos previamente, \mathcal{D} y \mathcal{D}^* , se construye el operador diferencial lineal

$$(46) \quad \mathcal{A} = \mathcal{D}^* \mathcal{K} \mathcal{D}, \text{ definido por } (\mathcal{A}u)(x) = - \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right), \quad u(0) = u(L) = 0.$$

Por lo tanto, la energía potencial se puede expresar en forma operacional por medio del *funcional cuadrático*

$$(47) \quad P(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} - \langle f, u \rangle_{L^2(0,L)}.$$

Las analogías más importantes entre la matriz $A = D^T K D$ en (12) y el operador $\mathcal{A} = \mathcal{D}^* \mathcal{K} \mathcal{D}$ en (47) son:

- La matriz A es simétrica, por lo que $\langle \mathbf{A}u, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}v \rangle_{\mathbb{R}^n}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Para verificar que el operador \mathcal{A} es simétrico ($\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$) se utiliza integración por partes dos veces:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u, v \rangle_{L^2(0,L)} &= \int_0^L - \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^L k(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \\ &= - \int_0^L u(x) \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dv(x)}{dx} \right) dx = \langle u, \mathcal{A}v \rangle_{L^2(0,L)}. \end{aligned}$$

- La matriz A es definida positiva, es decir $\langle \mathbf{A}u, u \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, y es cero sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Para verificar que el operador \mathcal{A} es positivo, se utiliza integración por partes una vez:

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L - \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) u(x) dx = \int_0^L k(x) \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx.$$

Esta cantidad es no negativa, pues $k(x) > 0$. Además, es cero sólo cuando u es constante e igual a cero, pues $u(0) = u(L) = 0$.

La propiedad de positividad del operador diferencial \mathcal{A} permite vislumbrar que el funcional cuadrático (47) tiene un único mínimo global. Es posible utilizar técnicas del cálculo de variaciones [5], [6], para ayudar a convencernos de lo anterior.

Definición 1. La *primera y segunda variaciones* del funcional P en u , en la *dirección* v , se define por medio de

$$D^{(1)}P(u; v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(u + \epsilon v) - P(u)}{\epsilon} = \left. \frac{\partial P(u + \epsilon v)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0},$$

$$D^{(2)}P(u; v) = \left. \frac{\partial^2 P(u + \epsilon v)}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=0},$$

respectivamente. Se le conoce también como derivada de Gâteaux.

Utilizando la linealidad y simetría de \mathcal{A} , se obtiene

$$\begin{aligned} P(u + \epsilon v) &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}(u + \epsilon v), u + \epsilon v \rangle_{L^2(0,L)} - \langle f, u + \epsilon v \rangle_{L^2(0,L)} \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} - \langle f, u \rangle_{L^2(0,L)} + \epsilon \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)} + \frac{\epsilon^2}{2} \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{L^2(0,L)} \\ &= P(u) + \epsilon \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)} + \frac{\epsilon^2}{2} \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{L^2(0,L)}. \end{aligned}$$

Obsérvese que esta expresión se puede considerar como la expansión de Taylor de P alrededor de u . Aplicando las definiciones de la primera y segunda variación, se obtiene

$$(48) \quad D^{(1)}P(u; v) = \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)}, \quad D^{(2)}P(u; v) = \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{L^2(0,L)}, \quad \forall v \in H_0^1(0, L).$$

Debido a que el operador \mathcal{A} es positivo, entonces $\langle \mathcal{A}v, v \rangle > 0$, para toda función v no nula, y el mínimo u^* de $P(u)$ sería aquel que resuelve la ecuación variacional

$$(49) \quad \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)} = 0, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(0, L).$$

Es un asunto delicado demostrar la existencia y unicidad de la solución de este problema variacional. Baste decir que $u^* \in H_0^1(0, L)$ y es posible utilizar el *teorema de Lax-Milgram* para demostrarlo, [3], [4]. Además, si se pide que $u^* \in H^2(0, L)$, entonces la solución de (49) es aquella que resuelve el problema de equilibrio (32)–(33).

Por lo tanto para encontrar el desplazamiento de equilibrio en la barra elástica, se tienen dos opciones:

1. Resolver el modelo de equilibrio, dado por la ecuación diferencial (32)–(33).
2. Minimizar la energía potencial, dada por el funcional cuadrático (44) o (47).

Para resolver la ecuación diferencial se pueden utilizar los métodos de Fourier, basados en expansiones con funciones ortogonales, mientras que para minimizar el funcional es posible utilizar métodos iterativos de descenso.

Existe una tercera opción para resolver el problema, *el método de Ritz-Galerkin*. Este método consiste en resolver el problema variacional (49) de manera aproximada, convirtiendo el operador diferencial en un operador matricial mediante la aproximación de las funciones en subespacios de dimensión finita. Uno de los métodos más utilizado de este tipo, es el método de elemento finito [3].

Para finalizar la sección se muestra un resumen de las analogías entre el problema discreto y el problema continuo, como se indica en el cuadro 2, el cual complementa al cuadro 1.

7. MÉTODO DE FOURIER. VALORES Y FUNCIONES PROPIAS DEL OPERADOR DIFERENCIAL

Se considera el caso especial en que la barra está hecha de un material con elasticidad uniforme, es decir $k(x) = k$ con $k > 0$ en \mathbb{R} . En este caso, el modelo de equilibrio es

$$(50) \quad -k \frac{d^2}{dx^2} u(x) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

$$(51) \quad u(0) = u(L) = 0.$$

	CASO DISCRETO	CASO CONTINUO
	Sistema masas-resortes	Barra elástica
Operador	Matricial $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $A = D^T K D$	Diferencial $\mathcal{A} : H^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$ $\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} \right)$
P. interno	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$	$\langle u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L u(x) v(x) dx$
Simetría	$A = A^T$, es decir $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, es decir $\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \langle u, \mathcal{A}v \rangle_{L^2(0,L)}$
Positividad	$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$	$\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} > 0$ si u es no nula
Energía	$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i e_i^2 - \sum_{i=0}^n f_i u_i$	$P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L k(x) e(x)^2 dx - \int_0^L f(x) u(x) dx$
Potencial	$= \frac{1}{2} \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ en donde $\mathbf{e} = D\mathbf{u}$	$= \frac{1}{2} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} - \langle \mathbf{f}, u \rangle_{L^2(0,L)}$ en donde $e = \frac{du}{dx}$
Derivada	$\nabla p(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} - \mathbf{f}$	$D^{(1)}P(u; v) = \langle \mathcal{A}u - \mathbf{f}, v \rangle_{L^2(0,L)}$
Cond. para el mínimo	$A\mathbf{u}^* = \mathbf{f} : D^T K D \mathbf{u}^* = \mathbf{f}$ $u_0 = u_{n+1} = 0$	$\mathcal{A}u^* = f : -\frac{d}{dx} \left(k \frac{du^*}{dx} \right) = f$ $u(0) = u(L) = 0$

CUADRO 2. Comparación de los modelos discreto y continuo (continuación)

La idea fundamental del método de Fourier para resolver este problema con valores a la frontera, es encontrar los valores propios y las funciones propias del operador diferencial

$$(52) \quad \mathcal{A} = -k \frac{d^2}{dx^2}.$$

al cual se le asocian condiciones de frontera Dirichlet nulas en $x = 0$ y $x = L$.

Funciones propias y valores propios. Una función propia u de \mathcal{A} satisface $\mathcal{A}u = \lambda u$ (con valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$) además de $u(0) = u(L) = 0$. Así que, busquemos funciones que se anulen en los extremos y cuya su segunda derivada es igual a un múltiplo negativo de la misma. Se puede intentar la combinación

$$u(x) = a \sin \Omega x + b \cos \Omega x,$$

en donde, a , b y Ω se deben determinar. Para que $u(0) = 0$ se debe escoger $b = 0$. Para que $u(L) = 0$ se debe cumplir que $a \sin \omega L = 0$, es decir $\Omega = \frac{m\pi}{L}$, con $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, las funciones propias son de la forma

$$u_m(x) = \sin \Omega_m x, \quad \text{con frecuencias} \quad \Omega_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Estas funciones satisfacen

- $\langle u_m, u_n \rangle_{L^2(0,L)} = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ si $n \neq m$.
- $\langle u_m, u_m \rangle_{L^2(0,L)} = \|u_m\|_{L^2(0,L)}^2 = \int_0^L \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{L}{2}$.

Para obtener los valores propios se utiliza la ecuación $\mathcal{A}u_m = \lambda_m u_m$, obteniendo $\lambda_m = k \Omega_m^2$. En resumen, el operador diferencial $\mathcal{A} = -k \frac{d^2}{dx^2}$ tiene las *funciones propias normalizadas* y valores propios siguientes:

$$(53) \quad \hat{u}_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \Omega_m x, \quad \lambda_m = k \Omega_m^2, \quad \text{con} \quad \Omega_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Construcción de la solución. El espacio generado por las funciones propias es denso sobre $L^2(0, L)$ y se pueden utilizar para encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal (50)–(51). Para construir la solución, se expresa el dato f como combinación lineal de las funciones propias:

$$(54) \quad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \hat{u}_m(x),$$

en donde los coeficientes $f_m \in \mathbb{R}$ se denominan los coeficientes de Fourier de $f(x)$. Para calcular estos coeficientes se utiliza la ortonormalidad de las funciones propias:

$$\langle f, \hat{u}_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \langle \hat{u}_m, \hat{u}_n \rangle = f_n.$$

Para que el dato f se encuentre en $L^2(0, L)$ estas constantes deben satisfacer

$$\|f\|_{L^2(0, L)}^2 = \int_0^L f(x)^2 dx = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2 < \infty.$$

Asimismo, se busca una solución de la forma

$$(55) \quad u^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \hat{u}_m(x),$$

en donde hay que determinar los coeficientes $a_m \in \mathbb{R}$. Para calcular estos coeficientes se sustituyen las series para f y u^* en la ecuación $\mathcal{A}u^* = f$. Recordando que $\mathcal{A}u_m = \lambda_m u_m$, se obtiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m \hat{u}_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \hat{u}_m(x).$$

Finalmente, utilizando la ortogonalidad de las funciones propias se encuentra que $\lambda_m a_m = f_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Se concluye que la solución de la ecuación diferencial es:

$$(56) \quad u^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m} \hat{u}_m(x).$$

La solución satisface las condiciones de frontera ya que esta serie converge a u^* en $H^2(0, L)$ y, en consecuencia, la convergencia de la serie es uniforme sobre el intervalo $(0, L)$.

El procedimiento utilizado para calcular la solución de equilibrio en ambos casos, discreto y continuo, fue enteramente análogo. La clave en ambos casos fue la utilización de las ‘*coordenadas naturales*’ del problema determinadas por los vectores propios del sistema. En ambos casos la ortogonalidad de las bases fue una propiedad central para encontrar las soluciones en forma muy sencilla. En particular, se puede observar la analogía entre las soluciones (20) y (56).

8. MODELO DINÁMICO CONTINUO

El problema dinámico de la barra elástica consiste en desplazar la barra fuera del equilibrio y soltarla desde el reposo. Al intentar volver a la posición de equilibrio la barra desarrollará un movimiento oscilatorio. Nuestro propósito es describir este movimiento calculando los desplazamientos de la barra en cada instante.

Los desplazamientos ahora dependerán tanto de la posición como del tiempo, por lo que al balance de fuerzas que se obtuvo en el equilibrio se le agrega la fuerza introducida por la aceleración. Esta fuerza por unidad de longitud es $\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, en donde $\rho(x)$ indica la densidad lineal de la barra elástica. Por lo tanto, el modelo que describe la dinámica oscilatoria de la barra se obtiene agregando al sistema (32)–(33) este término, así como las condiciones iniciales:

$$(57) \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = f(x), \quad 0 < x < L, 0 < t \leq T,$$

$$(58) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (\text{Condiciones de frontera})$$

$$(59) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{Desplazamiento inicial})$$

$$(60) \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{Velocidad inicial})$$

en donde la primera ecuación representa el balance de fuerzas. Suponiendo que se puede calcular el estado del sistema en cada instante $t > 0$, su evolución se puede describir por el sistema dinámico

$$(61) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u = f,$$

$$(62) \quad u(0) = u^0,$$

$$(63) \quad \frac{\partial u(0)}{\partial t} = 0,$$

en donde se utiliza la notación $u(t) \rightarrow u(x, t)$, $x \in (0, L)$. Las condiciones de frontera están incluidas implícitamente en el operador diferencial $\mathcal{A} : H^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$, definido por

$$(64) \quad (\mathcal{A}u)(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u(x, \cdot)}{\partial x} \right) \quad \text{con} \quad u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = 0.$$

El sistema obtenido es el análogo continuo del sistema discreto (13)–(15).

Cálculo de la solución. Descomponiendo la solución como la suma de la solución del equilibrio más las desviación del equilibrio, $u(x, t) = u^*(x) + v(x, t)$, y sustituyendo en (61)–(63), se obtienen las ecuaciones para la desviación del equilibrio

$$(65) \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathcal{A}v = 0,$$

$$(66) \quad v(0) = v^0,$$

$$(67) \quad \frac{\partial v(0)}{\partial t} = 0,$$

en donde la desviación inicial está dada por $v^0 = u^0 - u^*$. Se considera el caso especial en que la densidad ρ y la elasticidad k de la barra son constantes. El estado del sistema en cada instante t se expresa como combinación lineal de las funciones propias (serie de Fourier)

$$(68) \quad v(x, t) = a_1(t) \hat{u}_1(x) + a_2(t) \hat{u}_2(x) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_m(t) \hat{u}_m(x).$$

El objetivo es calcular los coeficientes $a_m(t)$, y para ello sustituye la serie de Fourier en (65)–(67). Recordando que $\mathcal{A} \hat{u}_m = \lambda_m \hat{u}_m$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\rho \ddot{a}_m(t) + \lambda_m a_m(t)] \hat{u}_m(x) = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_m(0) \hat{u}_m(x) = v^0, \quad x \in (0, L),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_m(0) \hat{u}_m(x) = 0, \quad x \in (0, L).$$

Haciendo uso de la ortogonalidad de las funciones propias, se obtiene para cada $m \in \mathbb{N}$

$$(69) \quad \rho \ddot{a}_m(t) + \lambda_m a_m(t) = 0,$$

$$(70) \quad a_m(0) = v_m^0 \quad \text{con} \quad v_m^0 = \langle v^0, \hat{u}_m \rangle,$$

$$(71) \quad \dot{a}_m(0) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$(72) \quad a_m(t) = v_m^0 \cos \omega_m t, \quad \text{con} \quad \omega_m^2 = \frac{\lambda_m}{\rho}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, la desviación del equilibrio es

$$(73) \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_m^0 \cos \omega_m t \hat{u}_m(x), \quad \text{con} \quad v_m^0 = \langle v^0, \hat{u}_m \rangle, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}.$$

Sumando coordenada a coordenada la solución de equilibrio con la desviación del equilibrio, se obtiene el desplazamiento

$$(74) \quad u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{\lambda_m} + v_m^0 \cos \omega_m t \right] \hat{u}_m(x), \quad \text{con} \quad f_m = \langle f, \hat{u}_m \rangle, v_m^0 = \langle v^0, \hat{u}_m \rangle, \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}.$$

Esta solución es análoga a la solución para el sistema discreto de masas y resortes (27). Al igual que en ese caso, la primera parte de la suma corresponde al equilibrio y la segunda a las desviaciones del equilibrio. La desviación del equilibrio $v(x, t)$ sigue una dinámica oscilatoria producto de la superposición de un número infinito de **modos normales** $v_m^0 \cos \omega_m t \hat{u}_m(x)$, con las siguientes características:

- Sus amplitudes v_m^0 dependen de las **funciones propias**, pues son las proyecciones de v^0 sobre \hat{u}_m .
- Sus frecuencias ω_m dependen de los **valores propios** λ_m escalados por el inverso de la densidad ρ .

En el cuadro 3 se presenta un resumen comparativo de las soluciones a los casos discreto y continuo.

	CASO DISCRETO: Masas-resortes	CASO CONTINUO: Barra elástica
Modelo de equilibrio	$A \mathbf{u} = \mathbf{f}$, con $A = k D^T D$ $u_0 = u_{n+1} = 0$	$\mathcal{A} u = f$, con $\mathcal{A} = -k \frac{d^2}{dx^2}$ $u(0) = u(L) = 0$
Solución de equilibrio	$\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i$ $f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbf{u}^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m} \hat{u}_m(x)$ $f_m = \langle f, \hat{u}_m \rangle_{L^2(0,L)}$
Modelo dinámico	$m \dot{\mathbf{u}}(t) + A \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}$ $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0$ $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$	$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A} u = f \quad \left(\mathcal{A} = -k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$ $u(0) = u^0$ $\frac{\partial u(0)}{\partial t} = 0$
Solución del mod. dinámico	$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_i}{\lambda_i} + v_i^0 \cos \omega_i t \right] \mathbf{u}_i$ $v_i^0 = \langle \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}}$	$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{\lambda_m} + v_m^0 \cos \omega_m t \right] \hat{u}_m(x)$ $v_m^0 = \langle u^0 - u^*, \hat{u}_m \rangle_{L^2(0,L)}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}$

CUADRO 3. Comparación de los modelos discreto y continuo. (continuación)

9. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

En el presente trabajo se han presentado, analizado y resuelto dos modelos de equilibrio. El primero describe un sistema discreto de masas-resortes, y el segundo describe una barra elástica, ambos bajo la acción de la gravedad. Se estudia también la dinámica cuando se perturba el equilibrio.

La construcción, análisis y solución del modelo discreto ofrece la oportunidad de integrar conocimientos de física, cálculo y álgebra lineal. Para construir el modelo de

equilibrio del sistema masas–resortes se utiliza la ley de Hooke (ecuación constitutiva) y un balance de fuerzas (principio de conservación). El resultado es un sistema de ecuaciones con matriz A simétrica y definida positiva. Se demuestra que la solución de equilibrio minimiza la energía potencial que se describe mediante una función cuadrática. Por lo tanto hay dos formas de resolver el problema de equilibrio: resolviendo el sistema de ecuaciones (6) (método directo) o minimizando la función cuadrática (12) (método iterativo).

Por otro lado, el estudio del modelo continuo para la barra elástica permite introducir, por analogía, conceptos del análisis funcional y el cálculo de variaciones. Concretamente, permite ilustrar la generalización del producto interior, ortogonalidad y completitud a los espacios de funciones. El análogo de las matrices son los operadores diferenciales y el análogo de traspuesta de una matriz es el adjunto de un operador. La solución de equilibrio resuelve la ecuación diferencial de segundo orden (32)–(33) en lugar de un sistema de ecuaciones. El operador diferencial \mathcal{A} , definido en (46), es autoadjunto (simétrico) y elíptico (positivo definido). La solución de equilibrio minimiza la energía potencial, que ahora se describe mediante un funcional cuadrático (47).

El estudio de la dinámica, después de perturbar el equilibrio, requiere de la introducción de los valores y vectores propios de la matriz A en el caso discreto y de los valores y funciones propias del operador diferencial \mathcal{A} en el caso continuo. Los valores y vectores propios en el caso continuo han sido fáciles de calcular para el caso especial en que k y ρ son constantes. Sin embargo, los valores y vectores propios del análogo discreto no se calcularon para el caso general con n masas. Su cálculo requiere de mayor esfuerzo que en el caso continuo, especialmente el cálculo de los valores propios (ver [11]).

La generalización del modelo continuo a d dimensiones es directa. Por ejemplo, el caso $d = 2$ describe una membrana elástica. En estos casos el desplazamiento se describe mediante la función $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, y el operador diferencial \mathcal{A} se sustituye por

$$(75) \quad \mathcal{A}(u)(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot (K(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \quad \text{para } \mathbf{x} \text{ en } \Omega,$$

$$(76) \quad u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

en donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es la región que comprende la membrana y $\partial\Omega$ es su frontera. En este modelo K puede ser una función matricial de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d (caso anisotrópico), una función de \mathbb{R}^d en \mathbb{R} (caso isotrópico no homogéneo) o bien una constante (caso isotrópico homogéneo). El modelo resultante sigue siendo lineal, pero será más difícil de analizar y resolver, especialmente cuando K no es una constante y cuando la región Ω no es simple. En estos casos es muy frecuente que, para encontrar soluciones de equilibrio y de la dinámica de las oscilaciones, se utilicen métodos de aproximación como diferencias finitas, elemento finito ó alguna otra técnica.

Por último, agregamos los siguientes comentarios:

1. La ecuación diferencial que modela la dinámica de una cuerda vibrante con extremos fijos (ecuación de onda), es la misma que la que se utiliza para modelar la dinámica de la barra. La única diferencia es que la incógnita $u(x)$ en este caso denota la desviación de la cuerda de la horizontal. En este caso la posición de equilibrio es precisamente la horizontal $u^*(x) \equiv 0$, cuando se desprecia la gravedad.
2. La solución del problema dinámico de la barra elástica generalmente se calcula por medio del *método de separación de variables* en los textos de ecuaciones diferenciales parciales. Es fácil verificar que ese método es equivalente al método que se utilizó en estas notas.
3. Los métodos utilizados en este trabajo también se puede aplicar a otro tipo de ecuaciones diferenciales parciales lineales. Basta con que sea posible calcular las funciones propias y valores propios del operador diferencial correspondiente.

Por ejemplo, se puede aplicar a la ecuación de difusión de calor, la cual es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de la física-matemática. También es posible considerar otro tipo de condiciones de frontera, sin perder de vista que las funciones propias asociadas al operador diferencial deberán satisfacer las condiciones de frontera.

REFERENCIAS

- [1] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Braun, M., Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics (Texts in Applied Mathematics), Springer; 4th edition 1993.
- [3] Brenner, S. and Scott, R. L., The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 2nd edition, Springer, 2005.
- [4] Brezis, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, Universitext series, 2011.
- [5] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics. Vol. I (First English ed.), Interscience Publishers, 1953.
- [6] Gelfand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of Variations, Dover Publications, 2000.
- [7] Golub, G. H. and Van Loan, C. F., Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, Third Edition, 1996. Colection: Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Fourth edition (2013): ver <http://www.cs.cornell.edu/cv/GVL4/golubandvanloan.htm>
- [8] Izquierdo, G., Introducción a los espacios de Sobolev, notas para el curso del mismo nombre, ofrecido en el VI Coloquio del Departamento de Matemáticas (UAM-I) en Metepec, Puebla del 2 al 6 de enero de 2014.
- [9] Kolmogorov, A. N., and Fomin, S. V., Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Dover, 1999.
- [10] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley 1989.
- [11] Kulkarni, D., Schmidt, D. and Tsui, S. K., *Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices*, Linear Algebra and its Applications, 297:63, 1999.
- [12] Morton, K. W. and Mayers, D. F., Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction, Cambridge University Press, 2nd. edition, 2005.
- [13] Riesz, F. and Nagy, B. S., Functional Analysis, Balkie & Sons, 1956.
- [14] Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press, 1986.

Dirección del autor:

L. Héctor Juárez Valencia
 Universidad Autónoma Metropolitana,
 Unidad Iztapalapa,
 División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
 Departamento de Matemáticas.
 Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
 Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
 e-mail: hect@xanum.uam.mx



Posgrados:

Maestría y Doctorado en Matemáticas

pmat@xanum.uam.mx
<http://pmat.izt.uam.mx/>

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Teoría de anillos y módulos.
Teoría de conjuntos y lógica.
Geometría algebraica.
Geometría diferencial y Riemanniana.
Teoría de números.
Teoría de códigos y criptografía.
Análisis geométrico.
Física matemática.
Análisis diferencial.
Matemáticas discretas, combinatoria y gráficas.
Dinámica de fluidos computacional.
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.
Métodos matemáticos en finanzas y economía.
Control y sistemas dinámicos.
Mecánica celeste, sistemas hamiltonianos y aplicaciones a la física.
Control, estabilidad y robustez de sistemas estocásticos.
Metodología estadística.
Estadística asintótica.
Topología de conjuntos, grupos topológicos y Cp-teoría.
Métodos geométricos en mecánica. Dinámica de vórtices. Mecánica celeste.

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales (MACMAI)

m1ss@xanum.uam.mx
<http://mcm.ai.izt.uam.mx>

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Códigos y Criptografía.
Control y Sistemas Dinámicos.
Combinatoria y Optimización.
Estadística.
Métodos Matemáticos en Finanzas.
Modelación y Simulación Computacional.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

CONTENIDO

9 SUCESIONES Y RECURRENCIAS

ROBERTO QUEZADA BATALLA

19 CONJETURA DE CATALAN

MARIO HUICOCHEA

**25 DEL ÁLGEBRA LINEAL Y LAS ECUACIONES
DIFERENCIALES ORDINARIAS AL ANÁLISIS
FUNCIONAL Y LAS ECUACIONES
DIFERENCIALES PARCIALES**

L. HECTOR JUÁREZ VALENCIA

