Mixba'al Rev. Met. de Mat.
No. 1, Vol. VI, Junio de 2015, 41–52

LÓGICAS INFINITARIAS Y ÁLGEBRA

CECILIA HERNÁNDEZ DOMÍNGUEZ

RESUMEN. En este trabajo se exponen algunas de las ideas básicas de una de las extensiones más exitosas de la lógica de primer orden, la lógica infinitaria, la necesidad de su estudio y, como ejemplo, se estudia una aplicación al álgebra.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las ideas de la teoría de modelos es obtener resultados mediante relaciones entre estructuras matemáticas y sus propiedades, descritas utilizando expresiones en cierto lenguaje. La noción básica es la de *satisfacción*: decimos que $\mathfrak{A}$ *modela a* φ, $\mathfrak{A} \models \varphi$, si la expresión (fórmula) φ es cierta, o satisfecha, en la estructura $\mathfrak{A}$. El lenguaje utilizado para describir las estructuras consta de símbolos de constantes, de funciones y de predicados. Dependiendo del lenguaje se pueden describir diversas propiedades y expresiones matemáticas con la ayuda de los conceptos lógicos de *y, o, no, para todo, alguno*. Pero, el poder expresivo que podemos lograr con esto tiene sus limitaciones.

Una *lógica* consiste en un lenguaje equipado con reglas de inferencia para deducir la veracidad de un enunciado a partir de otros. En la lógica clásica o de primer orden, las expresiones que podemos formar son aquellas en las cuales podemos hacer cuantificaciones finitas, como *existe al menos un ...* o *para cualesquiera dos ...*, y aseveraciones sobre un número finito de propiedades a la vez, esto es, sólo se permite la conjunción y disyunción finita de fórmulas. Es llamada de primer orden haciendo referencia a que las variables susceptibles a ser cuantificadas son individuales, es decir, sólo toman individuos como valores.

La teoría de modelos de primer orden ha sido fuertemente desarrollada desde sus inicios; un sinfín de construcciones y resultados se han encontrado, y se siguen obteniendo, cuya importancia radica por sí solos, inherentes al desarrollo de la teoría misma, y al aplicarlos enriquecen a otras áreas de la matemática. En el transcurso de este trabajo asumiremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de lógica de primer orden. Para una introducción a la lógica véase [12].

No obstante a sus fascinantes resultados, el primer orden no abarca todo lo que se estudia en matemáticas. Conceptos tan sencillos, como *ser finito* (o *tener cierta cardinalidad*), no pueden ser expresados, esto es, no existe un enunciado de primer orden con la propiedad de que si una estructura lo satisface, sea equivalente a que dicha estructura es finita (o tenga cierta cardinalidad). Este hecho es una consecuencia de los dos resultados fundamentales de la lógica de primer orden: el teorema de compacidad y el teorema de Löwenhein-Skolem. En la mayor parte del desarrollo de teoría de modelos ambos resultados son indispensables.

TEOREMA DE COMPACIDAD. Sea T una teoría de primer orden. T tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de T tiene un modelo.

TEOREMA DE LÖWENHEIN-SKOLEM. Si una teoría de primer orden numerable tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo de tamaño κ, para todo cardinal $\kappa > \aleph_0$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C75.
Palabras clave. lógica infinitaria, teoría de grupos, $\aleph_1$-libre, isomorfismo parcial.

Como muestra de un argumento a seguir para demostrar que cierta propiedad matemática no se puede expresar mediante una fórmula de primer orden veamos el siguiente ejemplo. Es pertinente mencionar que entre las propiedades algebraicas que no son expresables en la lógica clásica se encuentran las de *ser un grupo simple*, *libre* o *de torsión*.

Observación 1. Ser un grupo de torsión no se puede expresar en primer orden.

Demostración. Sea $\mathscr{L} = \{\cdot, e\}$ el lenguaje de la teoría de grupos, que consiste en un símbolo de función binaria que denota a la operación del grupo y un símbolo de constante para el elemento neutro. Supongamos que existe una $\mathscr{L}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que

$$\mathfrak{G} \models \varphi[a] \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ tiene orden finito.}$$

Denotamos con Φ al conjunto de $\mathscr{L}$-enunciados que axiomatizan a los grupos. Los grupos de torsión serían exactamente los que modelan

$$\Phi \cup \{\forall x \varphi(x)\}.$$

Sea $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c\}$, donde c es un nuevo símbolo de constante. Definimos al conjunto de $\mathscr{L}'$-enunciados

$$\Psi = \Phi \cup \{\varphi(c)\} \cup \{\neg(\underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ veces}} = e) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Si tomamos $\Delta \subset \Psi$ finito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta \subset \Phi \cup \{\varphi(c)\} \cup \{\neg(\underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ veces}} = e) \mid 0 < n \leq m\}.$$

Claramente, Δ tiene un modelo, por ejemplo, el grupo $\mathfrak{G} = (\mathbb{Z}_{m+1}, +)$ con la interpretación $c^{\mathfrak{G}} = [1]$.

Del teorema de compacidad, Ψ debe tener un modelo $\mathfrak{G}'$, lo cual es imposible: por una parte $c^{\mathfrak{G}'}$ satisface φ en tal modelo, pero también satisface que ninguna de sus potencias coincide con $e^{\mathfrak{G}'}$. $\square$

Además de intentar expresar propiedades mediante fórmulas, frecuentemente se busca que las teorías matemáticas se puedan axiomatizar, esto es, que sea factible encontrar un conjunto de fórmulas (finito o infinito) para las que sea equivalente ser modelo de ellas y ser modelo de dicha teoría matemática.

Un ejemplo significativo de una teoría que no es axiomatizable en primer orden es la de la aritmética: existen modelos no estándar de la aritmética, es decir, hay estructuras que satisfacen a los axiomas de Peano que no son isomorfas a los naturales. De manera análoga al ejemplo anterior, si denotamos con Ψ a dichos axiomas y s el símbolo de función interpretado como el sucesor, entonces

$$\Psi \cup \{\underbrace{s \circ s \cdots s(0)}_{n \text{ veces}} < c \mid n \in \mathbb{N}\},$$

es finito satisfacible, y por compacidad, tiene un modelo $\mathfrak{A}$ que no puede ser isomorfo a $\mathbb{N}$, debido a que $c^{\mathfrak{A}}$ es mayor que cada natural.

Si estas observaciones sobre expresividad las tenemos como marco, se comprende el porqué de la necesidad de salir de la lógica clásica. Al indagar en la ganancia en expresión es cuando entran al estudio, entre otras, las lógicas infinitarias. Aunque, dicho sea de paso, que podamos expresar más propiedades matemáticas hará que se pierda alguna parte de la teoría clásica desarrollada[1].

Con el propósito de mostrar una de las relaciones fructíferas que mantienen las lógicas infinitarias con otros ámbitos de la matemática se eligió a la que existe con el álgebra, específicamente con la teoría de los grupos abelianos.

---

[1]Lindström, en 1969 (véase [10]), demostró que cualquier lógica más expresiva que la de primer orden siempre fallará en compacidad y la propiedad de Löwenhein-Skolem, para T numerable.

El argumento de *ida y vuelta*, una de las técnicas básicas en teoría de modelos, está inmerso también, aunque de manera no explícita, en las pruebas de diversos resultados sobre grupos. Este argumento brinda un puente entre ambas ramas, por lo cual se ahondará en él.

2. Los lenguajes infinitarios

Sea $\mathscr{L} = \{C, F, R\}$ un lenguaje, es decir, C es un conjunto de símbolos de constante individuales, F un conjunto de símbolos de función finitarios y R un conjunto de símbolos de predicado finitarios. Los símbolos lógicos son los usuales: $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\forall$ (cuantificador universal), $\exists$ (cuantificador existencial), $\to$ (condicional) y $\leftrightarrow$ (bicondicional); más los conectivos infinitarios $\bigwedge$ (conjunción infinita) y $\bigvee$ (disyunción infinita). A diferencia de la lógica clásica de primer orden, las variables serán tantas como λ. Cabe señalar que las variables a cuantificar siguen siendo individuales.

Sean κ y λ cardinales. Dado un lenguaje $\mathscr{L}$ se construye la lógica infinitaria $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ utilizando los símbolos en $\mathscr{L}$. Los términos y fórmulas atómicas se construyen de la misma manera que en la lógica clásica; se procede igual con la negación y los demás conectivos ya conocidos. La gran diferencia es:

- Si Y es un conjunto de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas de cardinalidad $\rho < \kappa$, entonces $\bigwedge Y$ y $\bigvee Y$, también son $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas.
- Si $\delta < \lambda$, ψ es una $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmula y $X = \langle x_\xi \mid \xi < \delta \rangle$ es un sucesión de variables, entonces $\exists X(\psi)$ y $\forall X(\psi)$, también son $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas.

Esto es, en $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ se permiten conjunciones y disyunciones de conjuntos de fórmulas de tamaño menor que κ; y cuantificaciones sobre sucesiones de variables de longitud menor que λ. Si κ fuese menor que λ se tendría el poder de cuantificar más variables de las que se necesitaría, así que siempre se descarta este caso. Una fórmula siempre debe poder acotarse para expresar propiedades, así si tiene más variables de las que se permiten cuantificar no son de utilidad; por lo tanto, sólo consideramos como fórmulas aquellas expresiones que tengan menos que λ variables. Denotamos con $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$ al conjunto de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas.

Como es usual, un $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-enunciado es una fórmula sin variables libres y una $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-teoría es un conjunto de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-enunciados.

También definimos las lógicas infinitarias $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$, para cada λ cardinal, y $\mathscr{L}_{\infty\infty}$, cuyas fórmulas son:

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda}) = \bigcup_{\kappa \geq \lambda} \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$$

y

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty}) = \bigcup_{\lambda \geq \aleph_0} \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda})$$

Vale la pena realizar las siguientes observaciones. $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ no es otra lógica, sino la de primer orden. Las diferencias entre $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ y $\mathscr{L}_{\kappa 2}$ son mínimas, ya que en $\mathscr{L}_{\kappa 2}$ sólo se puede cuantificar una variable a la vez, y en $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ se cuantifica una cantidad finita; así ambas lógicas son semánticamente equivalentes, cada fórmula sólo cambia en el número de cuantificadores. Por último, $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ es la lógica que tiene la menor diferencia sintáctica con la de primer orden; debido a esta cualidad ha sido la más estudiada.

Las estructuras y la forma de interpretar el lenguaje no sufren ningún cambio con respecto a la lógica de primer orden, esto es porque el tipo de símbolos en cuestión es el mismo para ambas lógicas. En nuestra notación, en general, si para las estructuras utilizamos las letras góticas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., sus respectivos universos los denotamos con A, B, ...

La noción de satisfacción en las lógicas infinitarias es la esperada. Para los conectivos y cuantificadores infinitarios se generaliza la versión finita de la lógica. Como ejemplo, si $\varphi \equiv \bigwedge \Psi$, donde $\Psi \subset \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$ de cardinalidad menor que κ, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si para toda $\psi \in \Psi$, $\mathfrak{A}$ satisface a la fórmula ψ.

Decimos que las $\mathscr{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-equivalentes, en símbolos $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$, si todos los $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-enunciados que se satisfacen en $\mathfrak{A}$, se satisfacen en $\mathfrak{B}$ y viceversa. De manera análoga se definen $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\infty} \mathfrak{B}$.

Si $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ y para toda $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmula φ y $\langle a_\alpha \mid \alpha < \delta\rangle$ en A, $\delta < \lambda$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\langle a_\alpha\rangle] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\langle a_\alpha\rangle],$$

decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \preceq_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$. De la misma manera se define $\mathfrak{A} \preceq_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \preceq_{\infty\infty} \mathfrak{B}$.

Recordemos que una de las principales metas, al extenderse a las lógicas infinitarias, es aumentar la expresividad. Con los siguientes ejemplos podemos ver que, efectivamente, se ha logrado, al menos en algunos casos.

- En $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, con $\mathscr{L} = \emptyset$ podemos axiomatizar la clase de todos los modelos finitos:

$$\bigvee_{n<\omega} \quad \exists x_1, \dots, x_n \quad \forall y \quad (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

- Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje de la aritmética, que incluye al símbolo de función s, el cual sirve para interpretar la función sucesor. Entonces, la clase de los modelos isomorfos al modelo estándar de la aritmética se axiomatiza añadiendo a los axiomas de Peano, el enunciado infinitario

$$\forall x(x = 0 \vee x = s0 \vee x = ss0 \vee \dots)$$

o bien,

$$\forall x \bigvee_{n<\omega} x = s^n 0,$$

axioma que impide la aparición de elementos no estándar.

Aún tenemos más, el esquema de inducción se puede convertir en una $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$- fórmula:

$$\bigwedge_{\varphi \in \bigcup\limits_{n<\omega} \mathrm{Form}_{n+1}(\mathscr{L})} \quad \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}, 0) \wedge \forall y(\varphi(\bar{x}, y) \to \varphi(\bar{x}, sy)) \to \forall y \varphi(\bar{x}, y)].$$

donde $\mathrm{Form}_{n+1}(\mathscr{L})$ es el conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas de primer orden con a lo más $n+1$ variables libres.

- Si $\mathscr{L}$ es el lenguaje de la teoría de grupos abelianos[2], en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ *sí* se puede axiomatizar a los grupos de torsión, sólo tenemos que añadir a los axiomas de grupo el enunciado

$$\forall x \bigvee_{0<n<\omega} nx = 0.$$

- Dado $\mathscr{L} = \{\leq\}$, en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$ la clase de los buenos órdenes se axiomatiza, junto con los axiomas de orden total, con el enunciado

$$\neg\left(\exists x_0, x_1, x_2, \cdots \bigwedge_{n<\omega} (x_{n+1} \leq x_n \wedge x_{n+1} \neq x_n)\right),$$

el cual expresa que no puede haber una sucesión infinita estrictamente decreciente. Otra manera de describir la propiedad es mediante el axioma

$$\forall x_0, x_1, x_2 \dots \exists y \left(\left(\bigvee_{n<\omega} y = x_n\right) \wedge \left(\bigwedge_{n<\omega} y \leq x_n\right)\right),$$

[2]En el lenguaje de la teoría de grupos abelianos la operación del grupo la denotamos, como es usual, con el símbolo $+$. Observemos que las fórmulas atómicas, es decir, las más básicas posibles con este lenguaje, son ecuaciones lineales como por ejemplo $x_1 + \cdots + x_l = y_1 + \cdots + y_k$, donde las x_i, y_j son variables o e. Para agrupar las variables o constantes que se repiten dentro de una ecuación escribimos nx en lugar de $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ veces}}$.

que afirma que todo subconjunto numerable tiene un menor elemento.

El último ejemplo tiene un detalle relevante. Observemos que es el único donde cuantificamos sobre una cantidad numerable de variables y no sobre una cantidad finita, como lo habíamos hecho en las demás axiomatizaciones. Eso no fue un error, para describir la propiedad de ser un buen orden es necesario referirse a conjuntos y no a elementos, por lo cual $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ no alcanza para definir el buen orden. Más aún, ningún $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ es suficiente, con κ cardinal. Este hecho es un magnífico resultado de López-Escobar [11].

Aunque se gana en expresión en las lógicas infinitarias, se pierden compacidad y tampoco es cierto el teorema de Löwenhein-Skolem. Basta un ejemplo sencillo para corroborar esto.

Sean $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ constantes en $\mathscr{L}$. Sea Σ el conjunto de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-enunciados

$$\left\{\forall x\left(\bigvee_{n<\omega} x = c_n\right)\right\} \cup \{c \neq c_n \mid n < \omega\}.$$

Cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, pero Σ no. Además, el primer enunciado tiene un modelo de cardinalidad $\aleph_0$, pero ningún modelo no numerable.

Algunas alternativas para esta pérdida de compacidad han sido desarrolladas, por ejemplo, propiedades de consistencia, lógicas infinitarias en cardinales inaccesibles, etcétera. Además algunas versiones de Löwenhein-Skolem se cumplen para ciertas lógicas infinitarias; como ejemplo, y porque más adelante se requerirá, aprovechamos para enunciar la siguiente propiedad de Löwenhein-Skolem descendente, cuya prueba es muy parecida a la de primer orden.

Dada una $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula φ, denotamos con $|\varphi|$ al número de subfórmulas que contiene.

LEMA 1. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje numerable, $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura infinita, A_0 un subconjunto de A y φ un $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-enunciado con a lo más $|A|$ subfórmulas. Entonces, existe una subestructura $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ con $A_0 \subseteq B$ y $|B| = \text{máx}\{|\varphi|, |A_0|, \aleph_0\}$, tal que para toda subfórmula $\psi(\bar{x})$ de φ y $\bar{b}$ en B se tiene*

$$\mathfrak{B} \models \psi[\bar{b}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \psi[\bar{b}].$$

A pesar de estos problemas —si se pueden llamar así—, la teoría alrededor de las lógicas infinitarias es muy vasta. Con este trabajo se pretende dejar constancia ello.

3. Ida y vuelta

El método de *ida y vuelta* tiene sus orígenes en la extraordinaria prueba, hecha por Hausdorff, del teorema de Cantor que enuncia: cualquier conjunto numerable con un orden lineal denso sin extremos no es otro, salvo isomorfismo, que el conjunto de los racionales con el orden natural. La construcción del isomorfismo se realiza mediante biyecciones finitas entre elementos del conjunto y de los racionales, de manera exhaustiva se elige un elemento a la vez, de un lado y luego del otro, adecuadamente.

TEOREMA 2. *Cualesquiera conjuntos numerables con órdenes lineales densos sin extremos son isomorfos. Por lo tanto, todos son isomorfos a $(\mathbb{Q}, <)$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ y $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$ acordes a las hipótesis. Enumeramos $A = (a_i)_{i\in\omega}$ y $B = (b_i)_{i\in\omega}$. Definimos recursivamente sucesiones $(c_i)_{i<\omega}$ y $(d_i)_{i<\omega}$ hasta agotar A y B, respectivamente; para definir de manera natural $f_n : (c_i)_{i\leq n} \to (d_i)_{i\leq n}$ isomorfismos de orden.

Comenzamos definiendo $c_0 = a_0$ y $d_0 = b_0$.

Supongamos que tenemos definidos $(c_i)_{i<n}$ y $(d_i)_{i<n}$ para $n \in \omega$. Si n es par, elegimos $c_n = a_j$, donde

$$j = \text{mín}\{\, i \mid a_i \text{ no aparece en } (c_i)_{i<n}\};$$

como $\mathfrak{B}$ es un orden lineal denso sin extremos, existe un elemento $d_n \in \{b_i \mid i \in \omega\}$ tal que $(c_i)_{i\leq n}$ y $(d_i)_{i\leq n}$ son isomorfos. Para ilustrar esto, si ocurre que $c_i < c_n = a_j < c_{i'}$, para ciertas $i, i' < n$, entonces elegimos d_n de tal manera que $d_i < d_n < d_{i'}$. Si n es impar, intercambiamos los papeles de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, de tal manera que primero elegimos el elemento d_n y después el c_n que le corresponde.

Como

$$f_0 \subset f_1 \subset \dots f_n \subset \dots,$$

podemos definir $f = \cup_{n\in\omega} f_n$, cuyo dominio es, justamente, A y rango B. Además, preserva el orden, por lo tanto, f es el isomorfismo buscado. □

Observemos que la construcción del isomorfismo en el teorema anterior depende de los isomorfismos entre subconjuntos de A y B; a ese tipo de isomorfismos se les llama parciales. Decimos que f es un *isomorfismo parcial* de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, si es un isomorfismo, su dominio es una subestructura $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ y su rango es una subestructura $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$.

Definición 3. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras. Decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *isomorfos parcialmente*, $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, si existe una familia no vacía I de isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, con la *propiedad de ida y vuelta*:

- Para cada $f \in I$ y $a \in A$ (respectivamente, $b \in B$), existe $g \in I$ que extiende a f y $a \in \mathrm{dom} g$ (respectivamente, $b \in \mathrm{rang}$).

Para enfatizar al conjunto I, escribimos $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Cabe señalar que la noción de ser isomorfos parcialmente se puede generalizar a $\cong_\kappa$, κ cardinal, donde los isomorfismos van abarcando a subconjuntos de tamaño menor que κ en lugar de un elemento a la vez. También existe la noción $\cong^\alpha_\kappa$, en el libro [9] se puede profundizar sobre ambas.

En la demostración del teorema 2, definimos el conjunto de isomorfismos parciales entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, $I = \{f_n \mid n < \omega\}$. Entonces, por construcción $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Si ocurre que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas parcialmente y ambas son numerables, como en el caso de la prueba del teorema 2, resulta que también son isomorfas.

Teorema 4. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras numerables, o $\aleph_0$-generadas, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. De hecho, si $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y $f_0 \in I$, entonces f_0 es puede extender a un isomorfismo $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Demostración. Es claro que si $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces con $I = \{f\}$, $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

La demostración del inverso tampoco es complicada. Supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son generadas, respectivamente, por $\{a_i \mid i \in \omega\}$ y $\{b_i \mid i \in \omega\}$. Sean $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y $f_0 \in I$. Como se hizo en la prueba del teorema de Cantor, se van añadiendo, de manera exhaustiva, los a_i y b_i mediante la propiedad de *ida y vuelta* de I. □

El método de *ida y vuelta* no es exclusivo de las lógicas infinitarias, pero teorema de Karp en [6] es la fuerte conexión de los isomorfismos parciales con la equivalencia en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$. A este resultado se le conoce como la caracterización algebraica de $\equiv_{\infty\omega}$.

Teorema 5. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$

Demostración. Primero demostraremos 2 implica 1. Dado $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, mostraremos por inducción en la construcción de las $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmulas $\varphi(\bar{x})$ que si $f \in I$ y $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathrm{dom} f$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a})],$$

donde $f(\bar{a})$ abrevia $(f(a_0), \dots, f(a_{n-1}))$. Lo cual implica, en particular, que para todo $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-enunciado σ, $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \sigma$.

Si φ es atómica, el resultado es una consecuencia inmediata del hecho de que f es isomorfismo.

Los casos en que φ es $\neg\psi$ o bien $\bigwedge \Phi$, se siguen claramente de la hipótesis inductiva.

Por lo cual, resta comprobar cuando $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \equiv \exists x_n \psi(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Sean $f \in I$ y $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathrm{dom} f$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \exists x_n \psi(a_0, \dots, a_{n-1}, x_n)$ si y sólo si existe $a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(a_0 \dots a_n)$. Por la propiedad de *ida y vuelta*, existe $f \subseteq g \in I$ con $a_n \in \mathrm{dom} g$. Así, por nuestra hipótesis de inducción, $\mathfrak{B} \models \psi[g(a_0), \dots, g(a_{n-1}), g(a_n)]$, o equivalentemente, $\mathfrak{B} \models \psi[f(a_0), \dots, f(a_n), b]$ para algún $b \in B$, es decir, $\mathfrak{B} \models \exists x_n \psi[f(a_0), \dots, f(a_n), x_n]$. Para demostrar que $\mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a})]$ implica $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$, procedemos de manera similar, donde el único cambio es que ahora utilizamos la otra propiedad de *ida y vuelta*, extendiendo a f mediante $g \in I$ con $b \in \mathrm{ran} g$.

Continuamos con la demostración de 1 implica 2, para tal propósito supongamos $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$. Sea I el conjunto de los isomorfismos f, tales que $\mathrm{dom} f$ es una subestructura finitamente generada de $\mathfrak{A}$, $\mathrm{ran} f$ es una subestructura finitamente generada de $\mathfrak{B}$ y

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a})],$$

para toda $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula $\varphi(\bar{x})$ y para cualesquiera $\bar{a}$ en $\mathrm{dom} f$ de longitud apropiada. Como $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, las subestructuras de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ generadas por el conjunto vacío son isomorfas y tal isomorfismo debe pertenecer a I, así I es no vacío.

Probaremos que $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Sea $f \in I$ y $a' \in A$ tal que $a' \notin \mathrm{dom} f = \langle \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \rangle$. Entonces, existe b en B tal que

$$(\mathfrak{A}, (a_0, \dots, a_{n-1}, a')) \equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, (f(a_0), \dots, f(a_{n-1}), b)),$$

es decir,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}, a'] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a}), b],$$

para toda $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula $\varphi(x_0, \dots, x_n)$.

Para verificar esta afirmación, sea S el conjunto de $b \in B$ tales que

$$(\mathfrak{A}, (a_0, \dots, a_{n-1}, a')) \not\equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, (f(a_0), \dots, f(a_{n-1}), b)).$$

Podemos suponer que S no es vacío, en caso contrario habríamos terminado. Para cada $b \in S$, elegimos una $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula $\varphi_b(\bar{x})$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_b[\bar{a}, a']$, pero $\mathfrak{B} \models \neg\varphi_b[f(\bar{a}), b]$. Sea $\psi \equiv \bigwedge \{\varphi_b \mid b \in S\}$.

Por construcción, $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, a']$, de donde $\mathfrak{A} \models \exists x_n \psi[\bar{a}, x_n]$, luego, por hipótesis $\mathfrak{B} \models \exists x_n \psi[f(\bar{a}), x_n]$, porque $f \in I$. Sea b en B el testigo de ψ en $\mathfrak{B}$.

Entonces, b no puede pertenecer a S ya que ningún elemento de S satisface ψ. Así, por la definición de S, $(\mathfrak{A}, \bar{a}, a') \equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, f(\bar{a}), b)$, como se deseaba.

Definimos el homomorfismo,

$$g : \langle \{a_0, \dots, a_{n-1}, a'\} \rangle \cong \langle \{f(a_0), \dots, f(a_{n-1}), b\} \rangle,$$

como $g(a_j) = f(a_j)$ para $0 \leq j < n$ y $g(a') = b$. Entonces, $g(t[\bar{a}, a']) = t[f(\bar{a}), b]$, para todo $\mathscr{L}$-término $t(x_0, \dots, x_n)$. Es claro que g es un isomorfismo parcial y $g \supseteq f$.

Sólo resta verificar que $g \in I$.

Dadas $c_0, \dots, c_{m-1} \in \langle \{a_0, \dots, a_{n-1}, a'\} \rangle$, existen $\mathscr{L}$-términos t_j tales que

$$c_j = t_j(a_0, \dots, a_{n-1}, a'),$$

para $0 \leq j < m$.

Sea φ una $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{c}]$, o de manera equivalente, $\mathfrak{A} \models \varphi'[\bar{a}, a']$, donde

$$\varphi'(x_0, \dots, x_n) = \varphi(t_0(x_0, \dots, x_n), \dots, t_{m-1}(x_0, \dots, x_n)).$$

De $(\mathfrak{A}, \bar{a}, a') \equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, f(\bar{a}), b)$ se sigue

$$\mathfrak{A} \models \varphi'[(a_0, \dots, a_{n-1}, a')] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi'[(f(a_0), \dots, f(a_{n-1}), b)].$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[(c_0, \dots, c_{m-1})] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[(d_0, \dots, d_{n-1})],$$

con $d_j = t_j(f(a_0), \dots, f(a_{n-1}), b)$, para $0 \leq j < m$.

El otro caso de *ida y vuelta* se demuestra de manera análoga. $\square$

La demostración del siguiente resultado se obtiene mediante una modificación del teorema de Karp.

Teorema 6. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{A} \preceq_{\infty\omega} \mathfrak{B}$
2. *Existe un conjunto I tal que $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y para cada $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ existe una $f \in I$ con $f(a_i) = a_i$ para $0 \leq i < n$.*

Un corolario inmediato de los teoremas 4 y 5 es:

Corolario 7. *Sea $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras numerables. Entonces, $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Para un lenguaje numerable, el resultado anterior es equivalente al teorema de Scott para $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, el cual enuncia que si $\mathfrak{A}$ es numerable, entonces existe un $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-enunciado φ tal que para cualquier otra estructura numerable $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas; dicho de otro modo, toda la información de la estructura $\mathfrak{A}$ se resume en dicho enunciado.

También existe una versión del teorema de Scott para $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ sin restricción en el tamaño del lenguaje. A continuación lo enunciamos.

Teorema 8. *Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura. Existe un $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-enunciado σ, con $|\sigma| \leq$ máx$\{|\mathscr{L}|, \aleph_0\}$, tal que para cualquier $\mathfrak{B}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{B} \models \sigma$.

A σ se le conoce como el *enunciado de Scott para* $\mathfrak{A}$, el cual determina, salvo equivalencia $\equiv_{\infty\omega}$, a dicha estructura. Está de sobra mencionar la importancia de dicho teorema en las lógicas infinitarias.

4. Una aplicación a la teoría de grupos

Un grupo abeliano es $\aleph_1$-libre si todos sus subgrupos numerables son libres. Debido a que todos los subgrupos de un grupo libre son libres, cada grupo libre es $\aleph_1$-libre. Pero, como veremos el inverso no es cierto. Se mostrará el siguiente teorema: G es $\aleph_1$-libre si y sólo si es $\equiv_{\infty\omega}$ a un grupo con $\aleph_0$ generadores.

Lema 9. *Si $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen, salvo isomorfismo, las mismas subestructuras numerablemente generadas.*

Demostración. La demostración es un corolario del teorema 5. Por hipótesis, existe $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Sea $\mathfrak{A}_0$ una subestructura numerablemente generada de $\mathfrak{A}$. Supongamos que $\{a_i \mid i < \omega\}$ es el conjunto de generadores de $\mathfrak{A}_0$. Construimos el encaje f de $\mathfrak{A}_0$ a $\mathfrak{B}$ como $f = \cup_{n<\omega} f_n$ con $f_n \in I$ tal que $a_n \in \mathrm{dom}(f_n)$. Obtenemos así la subestructura numerablemente generada $f(\mathfrak{A}_0)$ de $\mathfrak{B}$. El recíproco es análogo. $\square$

Teorema 10. *[Kueker, [8]] Sea G un grupo libre con $\aleph_0$ generadores. Entonces, para cualquier grupo H, $G \cong_p H$ si y sólo si H es $\aleph_1$-libre.*

Demostración. Supongamos que $G \cong_p H$ y H_0 es un subgrupo numerable de H. Por el lema anterior, H_0 es isomorfo a un subgrupo de G y , por tanto, es libre.

Para el recíproco, supongamos que H es $\aleph_1$-libre. Es suficiente mostrar que H es modelo del enunciado de Scott $\sigma(G)$, con lo cual, por el teorema de Karp, $G \cong_p H$. Sea A un conjunto infinito de elementos independientes de H, entonces A es a lo más numerable. Por el lema de Löwenhein-Skolem 1, obtenemos un subgrupo $H_1 \subseteq H$ numerable, con $A \subseteq H_1$, tal que $H \models \sigma(G)$ si y sólo si $H_1 \models \sigma(G)$. Pero, $H_1 \cong G$, ya que H_1 es libre y también G. De donde, por la propiedad de σ, $H_1 \models \sigma(G)$ como se deseaba. $\square$

4.1. Ser $\aleph_1$-libre es expresable en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$, aunque ser libre no lo es. Si G un grupo abeliano y G_0 un subgrupo de G, decimos que G_0 es *delgado en* G si es finitamente generado y $G = G_0 \oplus G_1$, para algún subgrupo G_1 isomorfo a G.

Sea $\{G_j \mid j \in J\}$ una familia infinita de grupos cíclicos infinitos, digamos que cada G_j es generado por x_j. Sean $G = \bigoplus_{j\in J} G_j$ la suma directa y $H = \prod_{j\in J} G_j$ el producto directo de los G_j.

Proposición 11. *Sean G y H como antes, I el conjunto de isomorfismos de un subgrupo delgado de G sobre un subgrupo delgado de H. Entonces,*

$$I : G \cong_p H.$$

Nótese que H y G tienen diferente cardinalidad, por tanto dos estructuras pueden ser parcialmente isomorfas sin ser isomorfas en el sentido estricto.

Demostración. Para demostrar que G y H son parcialmente isomorfos mediante I, se necesitan comprobar las dos propiedades de *ida y vuelta.*

Si $f \in I$ y $a \in G$ no pertenece a su dominio, sea $A = \bigoplus_{0\le n<m} G_{j_n}$, donde j_n son los índices correspondientes a las entradas de a que son distintas de cero. Claramente A es un subgrupo delgado de G que contiene a a. Elegimos cualquier $g \in I$ que extienda a f y que $\mathrm{dom} g = \mathrm{dom} f \oplus A$, ya que es un subgrupo delgado de G.

Ahora, si $f \in I$ y $b \in H$ no pertenece a su rango debemos encontrar una extensión de f en I cuyo rango contenga a b. Para esto, primero mostraremos que cualquier elemento de H está contenido en algún subgrupo delgado de él. Teniendo esto, de forma análoga al caso anterior, sea B un subgrupo delgado de H que contiene a b, entonces $\mathrm{ran} f \oplus B$ tiene las características deseadas. Así, elegimos $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ y $\mathrm{ran} g = \mathrm{ran} f \oplus B$.

Por lo tanto, sólo resta probar que dado $b = (n_j x_j)_{j\in J} \in H$ podemos encontrar un subgrupo delgado de H al que pertenezca. Definimos $\|b\|$ como el menor natural distinto de cero de $|n_j|$. La demostración se hará por inducción sobre $\|b\|$.

Si $\|b\| = 1$, entonces existe $\tilde{\jmath} \in J$ tal que $|n_{\tilde{\jmath}}| = 1$. Por lo cual, $H = \langle b\rangle \oplus H_{\tilde{\jmath}}$, donde $H_{\tilde{\jmath}}$ consiste en todos los elementos de H con la $\tilde{\jmath}-$ésima coordenada igual a 0.

Si $\|b\| > 1$, dividimos cada n_j entre $\|b\|$, es decir, para cada $j \in J$ hacemos $n_j = \|b\| q_j + r_j$, con $0 \le r_j < \|b\|$. Definimos b_1 y b_2 elementos de H como $b_1 = (q_j x_j)_{j\in J}$ y $b_2 = (r_j x_j)_{j\in J}$. Con lo que podemos expresar a $b = \|b\| b_1 + b_2$.

Observemos que los coeficientes de b_2 son r_j, todos menores que $\|b\|$, de donde $\|b_2\| < \|b\|$. Por hipótesis de inducción, existe H' subgrupo delgado de H al que pertenece b_2. Es claro que $\langle b_1\rangle \oplus H'$ es un sumando directo finitamente generado de H que contiene a b. $\square$

Como una consecuencia del teorema 6,

$$G \preceq_{\infty\omega} H.$$

En 11, se mostró, en particular, que $I : \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z} \cong_p \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ es $\aleph_1$-libre. Pero *no* es libre.

El siguiente resultado de Baer [1], es un clásico de la teoría de grupos abelianos. Se expone una demostración detallada.

Teorema 12. *Con las mismas hipótesis de la proposición anterior, H no es libre.*

Demostración. Si $H = \prod_{j\in J} G_j$ fuese libre, todos sus subgrupos también lo serían. Por lo cual, podemos suponer que J es numerable: como cualquier producto infinito, numerable o no numerable, de grupos cíclicos infinitos contendría un subgrupo no libre, él tampoco podría serlo. Aún más, sin pérdida de la generalidad supongamos que $H = \prod_{j\in\omega} G_j$. Obsérvese que H es isomorfo al grupo de Baer $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$.

Con el objetivo de llegar a una contradicción, supongamos que H es libre. Sea $\{b_\alpha \in H \mid \alpha < \kappa\}$, una base para tal grupo, con κ un cardinal infinito. Como H es un grupo no numerable, entonces $\kappa > \aleph_0$, puesto que una cantidad numerable de elementos sólo pueden generar un grupo numerable.

Sean, para cada $j \in \omega$, los elementos $a_j \in H$ cuya entrada j-ésima es el generador de G_j, x_j, y las entradas restantes son los elementos identidad e_k de cada G_k, $k \in \omega$ $k \neq j$. En particular, los a_j generan a $G = \bigoplus_{j\in\omega} G_j$. Representamos a $a_j = \sum_{\alpha<\kappa} n_\alpha^j b_\alpha$ como una combinación lineal de la base, donde los coeficientes son cero, salvo para una cantidad finita. Sea $\Delta \subset \kappa$ el conjunto de los índices $\alpha \in \kappa$ tales que $n_\alpha^j \neq 0$ para al menos un $j \in J$, por lo cual Δ es numerable.

Sea K el subgrupo generado por $\{b_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

Además, el grupo cociente H/K debe ser libre al igual que H, su base es $\{b_\alpha + K \mid \alpha \in \kappa - \Delta\}$, porque $b_\alpha \in K$ si $\alpha \in \Delta$.

Consideremos los elementos $a \in H$ cuyas entradas cumplen la siguiente propiedad: si $a = (n_0x_0, n_1x_1, n_2x_2, \dots)$, entonces $n_0 = p_0$, $n_1 = p_0p_1,$, $\dots$, es decir, $n_i = p_0p_1 \dots, p_i$, donde los p_i son primos. Existen tantos elementos de ese tipo como sucesiones $(p_i)_{i<\omega}$ de primos, por lo tanto, existe una cantidad no numerable. Ya que H es no numerable y K es numerable, podemos elegir un $a = (n_0x_0, n_1x_1, n_2x_2, \dots) \in H$ con las características anteriores tal que $[a] = a + K \in H/K$ no es la identidad, esto es, $a \notin K$.

Como K contiene a los a_j, contiene también a la suma directa G, entonces los elementos

$$(e_0, \dots, e_{i-1}, n_ix_i, n_{i+1}x_{i+1}, \dots) = a + \underbrace{(-n_0x_0, \dots, -n_{i-1}x_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots)}_{\in G\subseteq K},$$

pertenecen a la clase lateral $[a]$, para todo $i \geq 1$.

Las ecuaciones, con variable z, $[a] = n_iz$ tienen solución en H/K, para todo $i \in \omega$, a saber $z = [(e_0, \dots, e_{i-1}, x_i, p_{i+1}x_{i+1}, p_{i+1}p_{i+2}x_{i+2}, \dots)]$. Lo cual no es posible: $[a]$ es generado por la base de H/K, entonces $[a] = \sum_{\alpha<\kappa,\alpha\notin\Delta} m_\alpha[b_\alpha]$, elegimos α tal que $m_\alpha \neq 0$; si la ecuación $[a] = nz$ tiene solución para $n \in \omega$, entonces n divide a m_α, pero sólo tiene una cantidad finita de divisores, así esa ecuación para $[a]$ sólo puede tener solución para un número finito de enteros $n = n_i$. Por lo tanto, llegamos a una contradicción. Concluimos que H no es libre. □

Por lo anterior, podemos concluir que la noción de ser un grupo libre no se puede expresar en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$: de 11 y el teorema 5,

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z} \preceq_{\infty\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z},$$

pero el primero es libre y el otro no.

Sin embargo, es interesante observar que la noción de ser $\aleph_1$-libre *sí* se puede expresar en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$, más aún, en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$. El siguiente resultado es una reformulación del criterio de Pontryagin (p.98 [4]).

COROLARIO 13. *Un grupo abeliano H es $\aleph_1$-libre si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

1. *H es libre de torsión.*
2. *H no es libre mediante una cantidad finita de generadores.*
3. *Para cualesquiera $x_1, \dots, x_k \in H$, el subgrupo puro[3] de H generado por tales elementos es libre en un número finito de generadores.*

Además, dichas propiedades son expresables en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$.

Demostración. Sea G un grupo abeliano generado por una cantidad numerable de elementos. Definimos el conjunto de isomorfismos I, $f \in I$ si f es un isomorfismo

[3]Un subgrupo K de H es *puro* si $nK = nH \cap K$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

de un subgrupo puro finitamente generado de G sobre un subgrupo puro finitamente generado de H. Las tres condiciones nos aseguran que $I : G \cong_p H$, de donde, por el teorema 10, H es $\aleph_1$-libre.

Sólo resta dar las expresiones infinitarias de las tres condiciones.

1. *H es libre de torsión.*

$$\forall x \left(x \neq e \to \bigwedge_{0<n<\omega} nx \neq e \right).$$

2. *H no es libre mediante una cantidad finita de generadores.* Un grupo abeliano libre generado por $x_1, \ldots, x_k$ consta de todas las posibles combinaciones lineales a de potencias de dichos elementos o de sus inversos, esto es

$$a = r_1 x_1 + \cdots + r_k x_k,$$

con $r_j \in \mathbb{Z}$. Pero nuestro lenguaje *no* posee un símbolo para el inverso, por lo cual no podemos considerar los coeficientes en los enteros. Con la finalidad de evadir este problema, expresamos que a pertenece al grupo generado por $x_1, \ldots, x_k$ si se satisface la fórmula infinitaria $\bigvee \Phi_k[a, x_1, \ldots, x_k]$ donde $\Phi_k(y, x_1, \ldots, x_k)$ es el conjunto de fórmulas de la forma

$$n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k = y + m_1 x_1 \cdots + m_k x_k,$$

con $n_i < \omega$, $m_i < \omega$, para $i = 1, \ldots, k$.

Así, H no es generado mediante una cantidad finita de elementos si es modelo del enunciado

$$\bigwedge_{0<k<\omega} \forall x_1, \ldots, x_k \, \exists y \, \neg \left(\bigvee \Phi_k(y, x_1, \ldots, x_k) \right).$$

3. *Para cualesquiera $x_1, \ldots, x_k \in H$, el subgrupo puro de H generado por tales elementos es libre en un número finito de generadores.*

Como H es libre de torsión, es inmediato que la intersección de subgrupos puros de H también es un subgrupo puro. Por lo cual el subgrupo puro generado por $x_1, \ldots, x_k$ es la intersección de los subgrupos puros que los contienen. Aún más, se puede describir explícitamente dicho subgrupo como

$$\{a \in H \mid na = n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k \text{ para algunos } n, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Por lo cual, a pertenece al subgrupo puro generado por $x_1, \ldots, x_k$ si y sólo si $\rho_k[a, x_1 \ldots, x_k]$ se satisface en H, donde

$$\rho_k(y, x_1 \ldots, x_k) \equiv \bigvee_{0<n<\omega} \left(\bigvee \Phi_k(ny, x_1, \ldots, x_k) \right),$$

y Φ_k se define de la misma manera que en el inciso anterior.

Entonces, la propiedad deseada se expresa mediante la siguiente fórmula infinitaria.

$$\bigwedge_{0<k<\omega} \forall x_1, \ldots, x_k \bigvee_{0<l<\omega} \left(\exists y_1, \ldots, y_l \bigwedge_{1 \leq j \leq l} \rho_k(y_j, \bar{x}) \wedge \forall z \left(\rho_k(z, \bar{x}) \to \bigvee \Phi_l(z, \bar{y}) \right) \right).$$

□

5. Notas

Como se mencionó, $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ ha sido la lógica infinitaria más estudiada por ser la siguiente en complejidad después de la clásica. El libro [7] de Keisler brinda un panorama sobre el estudio de dicha lógica.. Dickmann, en [3], realiza un estudio detallado de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$, con κ y λ cardinales en general. Para $\mathscr{L}_{\infty\omega}$, la recopilación [9] es realmente extensa.

El ejemplo elegido para destacar el vínculo de las lógicas infinitarias con álgebra no es el único relevante. En la teoría de grupos abelianos de torsión se destaca el teorema de Ulm, el cual fue generalizado por Kaplansky, Eklof y Barwise a grupos no numerables mediante lógica infinitaria, con la noción de isomorfismos parciales. Para una referencia detallada véase [2].

En [5], Eklof navega por algunos resultados en diferentes áreas del álgebra, no sólo por la teoría de grupos.

Referencias

[1] R. Baer, *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Mathematical Journal 3, no. 1, 68–122, 1937.

[2] J. Barwise, *Back and forth through infinitary logic*, Studies in model theory, Studies in mathematics, vol. 8, 5–34, Mathematical Association of America, 1973.

[3] A. Dickmann, Large infinitary languages: Model theory, North-Holland Publishing Company, 1975.

[4] P. Eklof & A. Mekler, Almost free modules: Set-theoretic methods, North-Holland Mathematical Library, Elsevier Science, 2002.

[5] P. Eklof, Chapter xi: Applications to algebra, Perspectives in Mathematical Logic, vol. 8, 423–442, Springer-Verlag, New York, 1985.

[6] C. Karp, *Finite quantifier equivalence*, The Theory of Models, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 407–412, 1965.

[7] H. Keisler, Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers, Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland Pub. Co., 1971.

[8] D. Kueker, *Definability, automorphisms, and infinitary languages*, The Syntax and Semantics of Infinitary Languages (Jon Barwise, ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 72, Springer Berlin Heidelberg, 152–165, 1968.

[9] D. Kueker (ed.), Infinitary logic: In memoriam Carol Karp, Lecture Notes in Mathematics, vol. 492, Springer Berlin Heidelberg, 1975.

[10] P. Lindström, *On extensions of elementary logic*, Theoria 35, no. 1, 1–11, 1969.

[11] E. López-Escobar, *On defining well-orderings*, Fundamenta Mathematicae 59, no. 1, 13–21, 1966.

[12] L.M. Villegas Silva & M. Fernández de Castro, Lógica matemática II. Clásica, intuicionista y modal, Universidad Autónoma Metropolitana, 2011.

Dirección de la autora:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `ceciliahd@xanum.uam.mx`