Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. VI, junio de 2015, 53–73

MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN PARA EDO'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

FRANCISCO HUGO MARTÍNEZ ORTIZ

RESUMEN. La teoría de las distribuciones desarrolladas por S.L. Sobolev y Laurent Schwartz es una herramienta poderosa para el estudio de las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como en derivadas parciales, por lo que es conveniente introducirla en los cursos de ecuaciones diferenciales a nivel licenciatura. En este reporte expongo el uso de la teoría elemental de las distribuciones, aplicando el método de la función de Green en el análisis tanto de problemas con valores iniciales, como en problemas con valores a la frontera no homogéneos, asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden dos en forma autoadjunta.

El método de la función de Green es un método que presenta grandes ventajas tales como el de expresar la solución de los problemas mencionados de manera natural en función de las condiciones iniciales o de frontera, así como del término no homogéneo.

Por último, deseo manifestar mi agradecimiento al Dr. Gabriel López Garza por sus comentarios que han enriquecido este trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

Sea

$$\begin{aligned} A:\ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & A(u) = f \end{aligned} \tag{1}$$

donde A es una matriz invertible $n \times n$.

Un método para resolver la ecuación en (1), para cualquier $f \in \mathbb{R}^n$, consiste en invertir la matriz A, puesto que si A^{-1} denota la matriz inversa de A entonces la solución de $Au = f$ se expresa como $u = A^{-1}f$.

Por otra parte un método para encontrar A^{-1} consiste en reemplazar a f en el problema (1) por la delta de Kronocker

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & i = j \\ 0 & si & i \neq j \end{array} \right. .$$

En forma análoga se puede tratar el siguiente problema:

$$\begin{aligned} L_1:\ & D_1 \to V \\ & L_1(u) = f \end{aligned} \tag{2}$$

donde

i) L_1 es un operador diferencial lineal invertible.
ii) D_1 es un subespacio vectorial del espacio vectorial real V.

Para construir L_1^{-1}, en lugar de reemplazar a f por la delta de Kronocker, ahora se reemplaza por la delta de Dirac $\delta(x-y)$.

Si $G(x,y)$ es la solución correspondiente a la delta de Dirac, se demostrará en los casos que se estudiarán que

$$L_1^{-1}(f)(x) = u(x) = \int G(x,y)f(y)dy.$$

De esta manera, la tarea de resolver el problema (2) se reduce a encontrar la función $G(x,y)$, conocida como función de Green del problema (2). A este método se le conoce como método de la función de Green.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46F10, 34B27 .
Palabras clave. función generalizada, función de Green.

En estas notas trataré principalmente con operadores diferenciales ordinarios lineales de orden dos, sin embargo para motivar el método se analizan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Resuelva el Problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = f(x) \qquad a \leq x \leq b \\ &u(a) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde f es continua en $[a,b]$, es decir: $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

Será conveniente expresar el problema en (3) en términos de operadores; Para esto se introduce el operador

$$L_2 : D_2 = \{u \in \mathcal{C}^1[a,b] \big| u(a) = 0\} \longrightarrow \mathcal{C}[a,b].$$

$$L_2(u) = \frac{du}{dx}.$$

Así el problema en (3) se formula como:

$$L_2(u) = f.$$

Por el teorema fundamental del cálculo existe el inverso L_2^{-1} de L_2 el cual está definido por:

$$L_2^{-1} : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow D_2$$

$$u(x) = L_2^{-1}f(x) = \int_a^x f(y)dy = \int_a^b H(x-y)f(y)dy$$

donde

$$H(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y < x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad a \leq x \leq y \end{cases}$$

es la función escalón unitaria.

De esta manera resolver el problema con valores iniciales en (3) se reduce a introducir la función de Green causal $G(x,y) = H(x-y)$, la cual es el núcleo del operador inverso L_2^{-1} de L_2.

Observe que la función de Green causal $G(x,y)$ es cero si $x < y$, además como se mostrará posteriormente satisface $L_2 G(x,y) = \delta(x-y)$.

Adelantándome un poco esto se debe a que en la teoría de las Distribuciones se tiene que $H' = \delta$ donde H' denota la derivada distribucional de H y δ denota la distribución de Dirac, comunmente llamada la delta de Dirac.

Para proporcionar una interpretación física de la función de Green causal, se recuerda que las acciones puntuales, como por ejemplo las fuerzas impulsivas, cargas concentradas, masas concentradas, etc. de magnitud uno se modelan por medio de la delta de Dirac. Así, físicamente la función de Green causal $G(x,y)$ se interpreta como la respuesta del sistema modelado por el problema (3), la cual es cero para $x < y$ y para $x > y$ como la respuesta a una acción puntual unitaria aplicada en $x = y$.

En conclusión, la función de Green causal $G(x,y)$ es por definición el núcleo del operador integral L_2^{-1} de L_2 o desde el punto de vista de la física es la respuesta a una acción puntual aplicada en $x = y$ y que es cero para $x < y$.

Si el problema que se plantea es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = f(x) \qquad a \leq x \leq b \\ &u(a) = \alpha \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es diferente de cero, entonces se descompone en los siguientes dos problemas

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f(x) & a \leq x \leq b \\ \\ u(a) = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = 0 & a \leq x \leq b \\ \\ u(a) = \alpha \end{cases}$$

se ha resuelto el primer problema y el segundo tiene la solución $u(x) = \alpha$. Como el problema es lineal, la solución del problema es la suma de las soluciones de los dos problemas.

Nota: A un nivel intuitivo se introduce la delta de Dirac $\delta(x-y)$ como un objeto simbólico que satisface las siguientes propiedades

$$\text{i)} \quad \delta(x-y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq y \\ \\ \infty & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)dx = 1$$

la cual se puede pensar para y fijo, como un "límite"por ejemplo de las funciones $\delta_\epsilon(x)$ cuando $\epsilon \to 0$, donde

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si} \quad y-\epsilon \leq x \leq y+\epsilon \\ \\ 0 & \text{si} \quad x < y-\epsilon \quad \text{ó} \quad x > y+\epsilon \end{cases}$$

y ϵ es mayor que cero.

En la sección de las distribuciones se introduce la delta de Dirac $\delta(x-y)$ rigurosamente.

Ejemplo 2. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

donde $f \in \mathcal{C}[0, L]$.

Este problema se puede resolver por varios métodos, por ejemplo, integrando dos veces y aplicando las condiciones de frontera, sin embargo, ahora se resolverá en términos de una interpretación física del ejemplo 2 y también de la función de Green.

La función u se interpreta como la temperatura en estado estacionario de una barra aislada lateralmente de longitud L, cuyos extremos se mantienen a cero grados y f como una fuente de calor distribuida (densidad) sobre dicha barra.

La función de Green $G(x, y)$ se interpreta como la temperatura en x debido a una fuente de calor concentrada en $x = y \in (0, L)$ de magnitud uno y cuyos extremos de $[0, L]$ se mantienen a cero grados.

Dado que una fuente de calor concentrada de magnitud uno en $x = y \in (0, L)$, se modela por la delta de Dirac $\delta(x-y)$, se considera el siguiente problema simbólico

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x-y) \qquad 0 < x, y < L$$

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \end{aligned}$$

Aceptando que $\dfrac{dH(x-y)}{dx} = \delta(x-y)$ se tiene, integrando

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\delta(x-y) \Rightarrow \frac{du}{dx} = -H(x-y) + A \Rightarrow$$

entonces

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\int_0^x H(s-y)ds + Ax + B \\ &= \begin{cases} Ax + B & \text{si} \quad 0 \leq x < y \\ -x + y + Ax + B & \text{si} \quad y \leq x \leq L \end{cases}. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 = B \\ u(L,y) &= 0 = -L + y + AL + B \end{aligned}$$

se tiene que

$$A = \frac{L-y}{L} \qquad \text{y} \qquad B = 0.$$

Por lo tanto la función de Green $G(x,y)$ del problema(4) está dada por:

$$u = G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(L-y)}{L} & \text{si} \quad 0 \leq x < y \\ \dfrac{y(L-x)}{L} & \text{si} \quad y \leq x \leq L \end{cases}.$$

Para expresar el ejemplo 2 en términos de operadores se introduce el operador

$$L_3 : D_3 = \{u \in \mathcal{C}^2[0,L] \big| u(0) = u(L) = 0\} \longrightarrow \mathcal{C}[0,L]$$

$$L_3 u = -\frac{d^2u}{dx^2}$$

el cual no es difícil verificar que es uno a uno.

Así el ejemplo 2 se formula como

$$L_3 u = f.$$

Motivados por el ejemplo 1.1 se espera que $L_3^{-1} : \mathcal{C}[0,L] \to D_3$ este dado por:

$$u(x) = L_3^{-1} f(x) = \int_0^L G(x,y) f(y) dy.$$

En efecto, si se escribe

$$u(x) = \int_0^x \frac{y(L-x)}{L} f(y)dy + \int_x^L \frac{x(L-y)}{L} f(y)dy$$

y se aplica la regla de Leibniz para derivar se obtiene

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f(x)$$

también se tiene $u(0) = u(L) = 0$, es decir, u es la solución única de (4), de donde L_3^{-1} es el operador inverso de L_3.

De esta manera resolver el problema con valores en la frontera (4) se reduce a encontrar la función de Green $G(x,y)$, la cual es solución del problema simbólico.

Si el problema que se plantea es:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x) \qquad 0 \leq x \leq L \\ u(0) &= \alpha \\ u(L) &= \beta \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces se descompone en los siguientes dos problemas

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} &= f(x) \qquad 0 \le x \le L \\ \\ u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} &= 0 \qquad 0 \le x \le L \\ \\ u(0) &= \alpha \\ u(L) &= \beta \end{cases}.$$

Se ha resuelto el primer problema y el segundo no es difícil de resolver. Como el problema es lineal, la solución del problema planteado es la suma de las soluciones de los dos problemas.

2. Aspectos elementales de la teoría de las distribuciones

Ahora lo que se hará es precisar algunos hechos mencionados, por ejemplo, el que la delta de Dirac cumple con las propiedades

$$\delta(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

pero desde el punto de vista clásico, la integral de una función que es cero excepto en un punto, es cero. Entonces: ¿Cómo se define de manera precisa la delta de Dirac?. ¿En qué sentido $\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$? ¿Qué significa que la función de Green satisface $Lu = \delta(x-y)$?, etcétera.

Para dar respuesta a estas preguntas entre otras se hace una breve introducción a la teoría de las distribuciones.

Se empezará con algunos conceptos y propiedades de las distribuciones.

Definición 1. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el soporte de h, que se denota por $\mathrm{sop}(h)$ es la cerradura del conjunto $\{x \in \mathbb{R} | h(x) \neq 0\}$.

Sea Ω un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}^n(\Omega)$ denota el espacio de funciones $h : \Omega \to \mathbb{R}$ que tienen $n \in \mathbb{N}$ derivadas continuas en Ω.

$\mathcal{C}_0^n(\Omega)$ denota el espacio de las funciones en $\mathcal{C}^n(\Omega)$ que tienen soporte compacto (cerrado y acotado) contenido en Ω.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^n(\Omega)$

$D = D(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ denota a los elementos en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ que tienen soporte compacto contenido en Ω.

A los elementos de D se les llama funciones de prueba.

3. Algunas propiedades de las funciones de prueba

i) $D \neq \emptyset$; $\quad \phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-c)(x-d)}\right) & \text{si} \quad x \in (c,d) \subsetneq \Omega \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega | (c,d) \end{cases}$

es una función de prueba con soporte $[c,d]$.

ii) Con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un número real, D es un espacio vectorial real.

iii) Si $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\phi \in D$ entonces $h\phi \in D$.

iv) Si $\phi \in D$ entonces la p-ésima derivada de ϕ, $\phi^{(p)} \in D$ para $p = 1, 2, \ldots$

v) Si $\phi(x) \in D(\mathbb{R})$ entonces $\phi(x+c) \in D(\mathbb{R})$ para c fijo en $\mathbb{R}$.

Para definir las distribuciones y algunas operaciones del análisis se requiere de una topología en D, sin embargo para tratar con las ecuaciones diferenciales que nos interesan es suficiente introducir el siguiente concepto de convergencia en D.

Definición 2. Sea $\{\phi_n\} \subset D$ y $\phi \in D$. Diremos que $\{\phi_n\}$ converge a ϕ en D y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n \overset{D}{=} \phi$ ó $\phi_n \xrightarrow{D} \phi$ si

i) Existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $sop(\phi_n)$ y $sop(\phi)$ estan contenidos en K para $n = 1, 2, \ldots$
ii) $\phi_n^{(p)} \longrightarrow \phi^{(p)}$ uniformemente en K para $p=0, 1, 2, \ldots$ cuando $n \to \infty$.

Algunas propiedades de las sucesiones convergentes en D.
Si $\phi_n \xrightarrow{D} \phi$ y $\psi_n \xrightarrow{D} \psi$ entonces

i) $\lambda_1\phi_n + \lambda_2\psi_n \xrightarrow{D} \lambda_1\phi + \lambda_2\psi$ donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
ii) $h\phi_n \xrightarrow{D} h\phi$ para $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$
iii) $\phi_n^{(p)} \xrightarrow{D} \phi^{(p)}$ para $p = 1, 2, \ldots$
iv) $\phi_n(x+c) \xrightarrow{D(\mathbb{R})} \phi(x+c)$ donde $c \in \mathbb{R}$.

Definición 3. Una funcional lineal sobre D es una función $F : D \to \mathbb{R}$ tal que $F(\lambda_1\phi + \lambda_2\psi) = \lambda_1 F(\phi) + \lambda_2 F(\psi)$ para toda $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\phi, \psi \in D$.

Definición 4. Una funcional lineal F sobre D es continua, si para toda sucesión $\{\phi_n\}$ que converge a ϕ en D se tiene que $F(\phi_n)$ converge a $F(\phi)$ en $\mathbb{R}$.

Definición 5. Una distribución de F sobre D es una funcional lineal continua sobre D. También se usa la notación $F = F(x) = \langle F, \phi\rangle$. Aunque no tiene sentido $F(x)$ cuando $x \in \mathbb{R}$.

El espacio vectorial de las distribuciones sobre D se denota por $D' = D'(\Omega)$.
En estas notas, sólo se usarán las distribuciones generadas por las funciones localmente integrables y las distribuciones de Dirac.

Definición 6. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable si

$$\int_K |f(x)|dx < \infty$$

para todo subconjunto compacto K de Ω.

4. Ejemplos de distribuciones

i) Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente integrable define una distribución $F : D \to \mathbb{R}$ dada por $\langle F, \phi\rangle = \displaystyle\int_\Omega f(x)\phi(x)dx$.

En efecto, observe que F es una funcional lineal sobre D. Para demostrar que F es continua, sea $\{\phi_n\} \subset D$ y $\phi \in D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ en D, por definición existe un compacto K tal que sop $\phi \subset K$ y sop $\phi_n \subset K$ para $n = 1, 2, \ldots$. De ahí que:

$$\begin{aligned} |\langle F, \phi_n\rangle - \langle F, \phi\rangle| &\leq \int_\Omega |f(x)||\phi_n(x) - \phi(x)|dx = \\ &= \int_K |f(x)||\phi_n(x) - \phi(x)|dx \leq \\ &\leq \sup_K |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |f(x)|dx \to 0 \\ &\quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Así, a toda función localmente integrable f le corresponde una distribución $\langle F, \phi\rangle$; en este sentido, toda función localmente integrable sobre Ω puede considerarse como una distribución.

ii) Distribución delta de Dirac, la distribución de Dirac que se denota por δ se define como:

$$\delta : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0).$$

δ es una función lineal sobre $D(\mathbb{R})$. Para demostrar que δ es continua, nótese que $\phi_n \xrightarrow{D} \phi$ implica que $\phi_n \to \phi$ uniformemente y así $\phi_n(0) \to \phi(0)$. Por lo tanto δ es una distribución.

iii) Para cualquier $p = 1, 2, \ldots$ La funcional

$$F : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\langle F, \phi \rangle = \phi^{(p)}(0)$$

es una distribución para cada p, como puede verificarse.

Definición 7. Una distribución F se llama una distribución regular si existe una función localmente integrable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle F, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \quad \text{para toda } \phi \in D.$$

Una distribución que no es regular se llama singular.

Proposición 8. *La distribución δ es una distribución singular.*

La demostración que se hace es por reducción al absurdo. Supóngase que δ es regular entonces existe una función localmente integrable f tal que

$$\int_\mathbb{R} f(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Considere la función de prueba $\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & \text{si } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{si } |x| \geq \epsilon \end{cases}$ y observe que $\phi_\epsilon(0) = e^{-1}$ y $|\phi_\epsilon(x)| \leq e^{-1}$, de donde

$$e^{-1} = \phi_\epsilon(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x) \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) dx \leq e^{-1} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x)| dx.$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon \to 0$ se obtiene la contradicción $e^{-1} \leq 0$ ya que f es localmente integrable. Por lo tanto la distribución δ es singular.

5. Algunas definiciones en las distribuciones

Se darán algunas definiciones en las distribuciones las cuales se motivan por las correspondientes propiedades de las distribuciones regulares. Por ejemplo para definir hF donde $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $F \in D'(\Omega)$ se considera el caso en que F es una distribución regular generada por la función localmente integrable f, así

$$\langle hF, \phi \rangle = \int_\Omega h(x)f(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f(x)(h(x)\phi(x))dx = \langle F, h\phi \rangle.$$

Este cálculo motiva la siguiente

Definición 9. Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $F \in D'(\Omega)$, se define la distribución $hF : D \to \mathbb{R}$ por $\langle hF, \phi \rangle = \langle F, h\phi \rangle$ para toda $\phi \in D$.

Para definir la traslación de una distribución se considera el caso en que F es una distribución regular en $D(\mathbb{R})$ generada por la función localmente integrable f. Si f se traslada por el número real ξ se obtiene la función localmente integrable $f(x - \xi)$, la cual define la distribución

$$\langle F(x - \xi), \phi \rangle = \int_\mathbb{R} f(x - \xi)\phi(x)dx = \int_\mathbb{R} f(x)\phi(x + \xi)dx = \langle F(x), \phi(x + \xi) \rangle$$

Este cálculo motiva la siguiente

Definición 10. Sea $\xi \in \mathbb{R}$ y $F \in D'(\mathbb{R})$, se define la distribución $F(x - \xi) : D \to \mathbb{R}$ por $\langle F(x - \xi), \phi(x) \rangle = \langle F(x), \phi(x + \xi) \rangle$ para toda $\phi \in D(\mathbb{R})$.

En lo sucesivo se usará el símbolo f para la distribución F y se escribirá $\langle f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$ sea f regular o no. Por supuesto, si f es singular, es una notación simbólica. En particular

$$\langle \delta, \phi\rangle = \int_\Omega \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Con esta notación las definiciones 6.1 y 6.2 se expresan como sigue:
Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in D'(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{l} \langle hf, \phi\rangle = \langle f, h\phi\rangle \qquad \text{y} \\ \langle f(x-\xi), \phi\rangle = \langle f(x), \phi(x+\xi)\rangle \end{array}$$

las cuales se puede verificar que definen distribuciones.

Para estudiar ecuaciones diferenciales en $D'(\Omega)$ una pregunta natural es como se define la derivada de una distribución.

Para definir la derivada de una distribución f, supóngase que f y f' son localmente integrables; integrando por partes se tiene

$$\langle f', \phi\rangle = \int_\Omega f'(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\phi'(x)dx = -\langle f, \phi'\rangle \quad \text{para toda } \ \phi \in D(\mathbb{R}).$$

Este cálculo motiva la siguiente

Definición 11. Sea $f \in D'(\Omega)$, se define la distribución

$$f' : D \to \mathbb{R} \quad \text{por :} \quad \langle f', \phi\rangle = -\langle f, \phi'\rangle \quad \text{para toda} \quad \phi \in D(\Omega).$$

Para verificar que f' es una distribución se procede como sigue:

- f' es lineal
  Sean $\phi, \psi \in D(\Omega)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \langle f', \lambda_1\phi + \lambda_2\psi\rangle &=& -\langle f, (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\psi)'\rangle = -\langle f, \lambda_1\phi' + \lambda_2\psi'\rangle = \\ &=& -\lambda_1\langle f, \phi'\rangle - \lambda_2\langle f, \psi'\rangle = \lambda_1\langle f', \phi\rangle + \lambda_2\langle f', \psi\rangle \end{array}$$

- f' es continua.
  Sea $\{\phi_n\} \subset D$ y $\phi \in D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ en D. Dado que la convergencia es uniforme en un compacto K se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n' = \phi' \ \text{ en } D, \text{ de donde } \ \lim_{n\to\infty} \langle f, \phi_n'\rangle = \langle f, \phi'\rangle.$$

  Por lo tanto f' es continua.

De manera análoga se define la p-ésima derivada distribucional $f^{(p)}$ de una distribución f por

$$\langle f^{(p)}, \phi\rangle = (-1)^p\langle f, \phi^{(p)}\rangle \qquad \text{para toda} \quad \phi \in D.$$

EJEMPLOS.

1. $\langle \delta(x-\xi), \phi(x)\rangle = \langle \delta(x), \phi(x+\xi)\rangle = \phi(\xi)$ que con la notación simbólica equivale a $\int_\mathbb{R} \delta(x-\xi)\phi(x)dx = \phi(\xi)$.
   Para los siguientes ejemplos se requiere definir cuando dos distribuciones son iguales.

   Definición 12. Las distribuciones f y g son iguales en Ω si

$$\langle f, \phi\rangle = \langle g, \phi\rangle \qquad \text{para toda} \quad \phi \in D(\Omega).$$

   Así por ejemplo $\delta(x) = 0$ en cualquier intervalo abierto que no contiene al origen.

2. Calcule la derivada distribucional de la función localmente integrable

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = |x|$$

Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle |x|', \phi\rangle &= -\langle |x|, \phi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)dx = \\ &- \int_{-\infty}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)dx = \langle \operatorname{sgn}(x), \phi\rangle \end{aligned}$$

donde $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Por lo tanto $\quad |x|' = \operatorname{sgn}(x)$.

3. Calcule la derivada distribucional de la función localmente integrable

$$H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

llamada función de Heaviside o escalón unitario.

Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle H', \phi\rangle = -\langle H, \phi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \phi'(x)dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi\rangle.$$

Por lo tanto $H'(x) = \delta(x)$, como se mencionó después del ejemplo 1.
Además

$$\langle \delta^{(n)}, \phi\rangle = (-1)^n \phi^n(0)$$

Con el propósito de estudiar operadores diferenciales se requiere analizar el operador derivada $\dfrac{d}{dx}$ en D'.

ALGUNAS PROPIEDADES DEL OPERADOR DERIVADA $\dfrac{d}{dx} : D' \to D'$

Propiedad 1) $\quad \dfrac{d}{dx}(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \dfrac{df}{dx} + \lambda_2 \dfrac{dg}{dx}$ donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $f, g \in D'$.

En efecto, sea $\phi \in D$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx}(\lambda_1 f + \lambda_2 g), \phi \right\rangle &= \langle (\lambda_1 f + \lambda_2 g)', \phi\rangle = -\langle \lambda_1 f + \lambda_2 g, \phi'\rangle \\ &= -\lambda_1\langle f, \phi'\rangle - \lambda_2\langle g, \phi'\rangle = \lambda_1\langle f', \phi\rangle + \lambda_2\langle g', \phi\rangle = \\ &= \langle \lambda_1 f' + \lambda_2 g', \phi\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)' = \lambda_1 f' + \lambda_2 g'$

Propiedad 2) $\quad$ Si $f \in D'$ y $h \in \mathcal{C}^\infty$ entonces $\langle \dfrac{d}{dx}(hf), \phi\rangle = \langle h\dfrac{df}{dx} + \dfrac{dh}{dx} f, \phi\rangle$.

En efecto, sea $\phi \in D$

$$\begin{aligned} \langle (hf)', \phi\rangle &= -\langle hf, \phi'\rangle = -\langle f, h\phi'\rangle = -\langle f, (h\phi)' - h'\phi\rangle \\ &= \langle f', h\phi\rangle + \langle f, h'\phi\rangle = \langle hf', \phi\rangle + \langle h'f, \phi\rangle = \langle hf' + h'f, \phi\rangle. \end{aligned}$$

De donde se sigue la propiedad 2.

Para demostrar la continuidad del operador derivada se requiere el concepto de convergencia en D'.

Definición 13. Una sucesión de distribuciones $\{f_n\} \subset D'$ converge a una distribución $f \in D'$ si $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$ en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$, para toda $\phi \in D$.

Propiedad 3) Si $f_n \to f$ en D' entonces $f'_n \to f'$ en D'.

Sea $\phi \in D$, entonces

Dado que $f_n \to f$ en D' se tiene que $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$ cuando $n \to \infty$, y como $\langle f'_n, \phi\rangle = -\langle f_n, \phi'\rangle$ y $\langle f', \phi\rangle = -\langle f, \phi'\rangle$ esto implica que $f'_n \to f'$ en D', es decir, el operador derivada es continuo en D'.

Se han desarrollado algunos aspectos de la derivada de una distribución, ahora se introduce la integral de una distribución.

Definición 14. Una distribución F es una integral de una distribución f si $F' = f$.

Primero se demuestra la proposición 15. y después se demuestra la existencia de una integral de una distribución.

Proposición 15. *Si $u \in D'(\Omega)$ es tal que $\frac{du}{dx} = u' = 0$ entonces u es una distribución constante.*

demostración. Sea $\phi \in D$. Si u es solución de $u' = 0$ entonces $\langle u', \phi\rangle = -\langle u, \phi'\rangle = 0$, es decir, $\langle u, \psi\rangle = 0$ para toda $\psi \in D$ que es la derivada de alguna función de prueba, también se tiene que ψ es la derivada de una función de prueba si y sólo si $\displaystyle\int_\Omega \psi(s)ds = 0$.

Sea $\phi_1 \in D$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \phi_1(s)ds = 1$. Observe que cualquier $\phi \in D$ se puede expresar como

$$\phi(x) = \phi_1(x)\int_\Omega \phi(s)ds + \psi(x) \tag{5}$$

donde $\displaystyle\int_\Omega \psi(s)ds = 0$.

Dado que $\langle u, \psi\rangle = 0$ se tiene que

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \phi_1\rangle \int_\Omega \phi(s)ds = \langle < u, \phi_1 >, \phi\rangle$$

es decir $u = \langle u, \phi_1\rangle = c$ es una constante.

Proposición 16. *Sea $f \in D'(a, b)$, la ecuación $u' = f$ tiene una integral en $D'(a, b)$.*

demostración. Para construir una integral de f se usará la descomposición dada en (5).

Sea $\eta(x) = \int_a^x \psi(s)ds$. Si u es solución de $u' = f$ entonces

$$\langle u', \eta\rangle = -\langle u, \eta'\rangle = -\langle u, \psi\rangle = \langle f, \eta\rangle.$$

De esta manera

$$\langle u, \phi\rangle = c\int_a^b \phi(s)ds + \langle u, \psi\rangle = \langle c, \phi\rangle - \langle f, \eta\rangle.$$

La distribución u_0 definida por

$$\langle u_0, \phi\rangle = \langle u, \psi\rangle = -\langle f, \eta\rangle$$

es solución particular de $u' = f$.

Por lo tanto: $\langle u, \phi\rangle = \langle c, \phi\rangle + \langle u_0, \phi\rangle$, es decir, $u = u_0 + c$ es solución de $u' = f$.

En forma análoga se demuestra la proposición 16, si $f \in D'(\mathbb{R})$ ó $f \in D'(a, \infty)$.

Para demostrar la existencia de soluciones en $D'(\mathbb{R})$ de la ecuación $p_0(x)u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)u = g$ donde $p_i(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ con $p_0(x) \neq 0$ en $\mathbb{R}$ y $g \in D'(\mathbb{R})$, lo que se hace es transformar la ecuación en un sistema equivalente de primer orden, en el cual, cada ecuación del sistema se puede reducir a una ecuación de la forma $u' = f$, donde $f \in D'(\mathbb{R})$.

6. Soluciones fundamentales

Con el propósito de describir el método de la función de Green para los problemas que se estudiarán se introduce el concepto de solución fundamental asociado al operador diferencial:

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{du}\right) + q(x)u$$

donde $p, q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ p \neq 0$ en $\mathbb{R}$ y $u \in D'(\mathbb{R})$, a $\mathcal{L}$ comunmente se le llama operador.

Nota: Se dice que un operador diferencial ordinario lineal de segundo orden $\mathcal{L}^*$ está en forma autoadjunta en I si

$$\mathcal{L}^* = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

donde $p', q \in \mathcal{C}(I),\ p \neq 0$ en I, I un intervalo en $\mathbb{R}$.

Se puede verificar que cualquier operador de la forma

$$\tilde{\mathcal{L}} = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

donde $a_2, a_1, a_0 \in \mathcal{C}(I)$ con $a_2(x) \neq 0$ en I se puede expresar en forma autoadjunta, haciendo

$$p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} \quad \text{y} \quad q(x) = -\frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x).$$

De donde las ecuaciones de la forma $\tilde{\mathcal{L}}u = g$ se pueden expresar en la forma equivalente $\mathcal{L}^*u = f$. En particular se cumple si los coeficientes son $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Definición 17. Una solución fundamental para $\mathcal{L}$ es una distribución $K(x, y)$ que satisface la ecuación $\mathcal{L}K(x, y) = \delta(x - y)$ donde y se considera como parámetro.

7. Ejemplos de soluciones fundamentales

Ejemplo 3. Construya una solución fundamental para el operador diferencial

$$Mu = -\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Es decir, hay que encontrar una solución de la ecuación

$$\frac{d^2K(x, y)}{dx^2} = -\delta(x - y). \tag{6}$$

Dado que $\dfrac{d}{dx}H(x - y) = \delta(x - y)$, integrando en (6) se tiene

$$\frac{dK}{dx} = -H(x - y) + A$$

y al integrar nuevamente se concluye que

$$K(x, y) = -(x - y)H(x - y) + Ax + B = \begin{cases} Ax + B, & \text{si } x \leq y \\ -x + y + Ax + B, & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

son soluciones fundamentales de u. Observe que $Ax + B$ es solución general de la ecuación homogénea $\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$ tanto en el sentido clásico como en el distribucional y que $-(x - y)H(x - y)$ es una solución fundamental particular para M.

Para construir una solución fundamental para el operador $\mathcal{L}$ se desarrolla otro procedimiento para el ejemplo 3, el cual cuando se generaliza permite construir soluciones fundamentales para $\mathcal{L}$. En este segundo procedimiento se empieza con un análisis intuitivo y posteriormente se formaliza.

Dado que $\delta(x-y)=0$ si $x\neq y$, se tiene que $K(x,y)$ satisface la ecuación $\dfrac{d^2u}{dx^2}=0$ para $x\neq y$ de donde

$$K(x,y)=\begin{cases} Ax+B, & \text{si} \quad x<y \\ Cx+D, & \text{si} \quad x>y. \end{cases}$$

La función K es continua en $x=y$, porque si K tiene una discontinuidad finita, $\dfrac{\partial K}{\partial x}$ sería la derivada de una función discontinua y de donde contiene a la δ y K'' involucra a δ' lo que no sucede. Por lo tanto

$$Ay+B=Cy+D$$

Ahora K' debe tener una discontinuidad finita en $x=y$ para que K'' contenga a la δ. Para determinar la magnitud de la discontinuidad de K' en $x=y$, se integra la ecuación $K''(x,y)=-\delta(x,y)$ con respecto a x de $y-\epsilon$ a $y+\epsilon$, de donde

$$K'(y+\epsilon,y)-K'(y-\epsilon,y)=-1.$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon\to 0$ se tiene otra ecuación, a saber

$$C-A=-1$$

resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas para C y D en términos de A y B se concluye que

$$K(x,y)=\begin{cases} Ax+B, & \text{si } x\leq y \\ -x+y+Ax+B, & \text{si } x\geq y \end{cases}$$

que son precisamente las soluciones fundamentales del operador M.

Ejemplo 4. Construya una solución fundamental para el operador diferencial $\mathcal{L}$.

Se usará el segundo procedimiento del ejemplo 3, con $A=B=0$ para construir una solución fundamental particular para $\mathcal{L}$.

Sea

$$K(x,y)=0 \qquad \text{si} \qquad x<y.$$

Para $x>y$, K se determina por las condiciones $\mathcal{L}K(x,y)=0$, K continua en $x=y$ y $\frac{\partial K}{\partial x}$ tiene una discontinuidad finita en $x=y$.

Para determinar la magnitud de la discontinuidad de $\dfrac{\partial K}{\partial x}$ en $x=y$ se integra la ecuación $\mathcal{L}K(x,y)=\delta(x-y)$ con respecto a x de $y-\epsilon$ a $y+\epsilon$, es decir

$$-\left[p(y+\epsilon)\frac{\partial K}{\partial x}(y+\epsilon,y)-p(y-\epsilon)\frac{\partial K}{\partial x}(y-\epsilon,y)\right]+\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon}K(x,y)dx=1.$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon\to 0$ y usando el hecho de que p y K son continuas se tiene

$$\frac{\partial K}{\partial x}(y^+,y)=-\frac{1}{p(y)}.$$

Ahora se demuestra que la función $K(x,y)$ definida por

$$K(x,y)=0 \qquad \text{si} \qquad x<y$$

y para $x>y$, como la solución del problema

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}K(x,y) & = & 0 \\ K(y^+,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial K}{\partial x}(y^+,y) & = & -\dfrac{1}{p(y)} \end{array} \tag{7}$$

es una solución fundamental para $\mathcal{L}$.

NOTA. El problema de Cauchy (7) tiene solución única, como se hace ver en el curso de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Además si $U_y(x)$ es solución clásica de (7) para toda x, entonces $K(x,y)=H(x-y)U_y(x)$, es la única solución fundamental del operador diferencial $\mathcal{L}$ tal que $K(x,y)=0$ si $x<y$.

Hay que demostrar que:

$$\langle \mathcal{L}K(x,y),\phi\rangle = \langle \delta(x-y),\phi\rangle = \phi(y) \quad \text{para toda} \quad \phi \in D.$$

En efecto

$$\begin{aligned}\langle LK(x,y),\phi\rangle &= \langle K(x,y),\mathcal{L}\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\mathcal{L}\phi(x)dx = \int_{y}^{\infty} K(x,y)\mathcal{L}\phi(x)dx = \\ &= -\phi(y)p(y)\frac{\partial K}{\partial x}(y^+,y) + \int_{y}^{\infty} \phi(x)\mathcal{L}K(x,y)dx = \phi(y)\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que $K(x,y) = 0$ si $x < y$, $K(y^+,y) = 0$ $\dfrac{\partial K}{\partial x}(y^+,y) = -\dfrac{1}{p(y)}$ y que $\mathcal{L}K(x,y) = 0$ si $x > y$, lo que demuestra que la función continua $K(x,y)$ es una solución fundamental particular para $\mathcal{L}$, llamada solución fundamental causal del operador diferencial $\mathcal{L}$. Su construcción se hará en el ejemplo 6.

Observe que si K es una solución fundamental del operador diferencial $\mathcal{L}$ y v es una solución de $\mathcal{L}(u) = 0$ entonces $K + v$ es solución fundamental de $\mathcal{L}$. Inversamente si $\bar{K}$ es cualquier otra solución fundamental de $\mathcal{L}$ entonces $v = \bar{K} - K$ satisface la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$, de esta manera toda solución fundamental de $\mathcal{L}$ es la suma de K y una solución v de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(u) = 0$.

8. Funciones de Green

Ahora se generaliza el concepto de solución fundamental asociado al operador diferencial $\mathcal{L}$ de manera que se satisfagan tanto condiciones iniciales en $t_0 \in \mathbb{R}$ como condiciones de frontera en $[a,b]$.

Definición 18. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Una distribución $G_1(t,s)$ que satisface

i) $G_1(t,s) = 0 \qquad \text{si} \qquad t_0 < t < s.$

ii) $\mathcal{L}G_1(t,s) = \delta(t-s)$,

donde $\mathcal{L}(u) = -\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right) + q(t)u$, $p, q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $p \neq 0$ en $\mathbb{R}$ se llama función de Green causal del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones iniciales $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 0$.

De acuerdo a la descripción que se hizo respecto a las soluciones fundamentales de $\mathcal{L}$ en el ejemplo 4, la función $K_1(t,s)$ que cumple con las siguientes propiedades

i) $K_1(t,s) = 0$ si $t_0 < t < s$,

ii) $\mathcal{L}K_1(t,s) = 0$ si $t > s$,

iii) $K_1(s^+,s) = 0$

iv) $\dfrac{\partial K_1}{\partial t}(s^+,s) = -\dfrac{1}{p(s)}$

es función de Green causal del operador diferencial $\mathcal{L}$ que satisface las condiciones iniciales $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 0$

Ejemplo 5. Encuentre la función de Green causal para el operador diferencial

$$Mu = -\frac{d^2u}{dt^2}$$

con las condiciones iniciales $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$.

En este ejemplo se consideran las soluciones fundamentales de M que se encontraron en el ejemplo 3. Haciendo $A = B = 0$, se tiene que

$$G_1(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 < t < s \\ \\ -t+s, & \text{si} \quad t \geq s \end{cases} = -(t-s)H(t-s)$$

es la función de Green causal para M que satisface las condiciones iniciales $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$.

Ejemplo 6. Encuentre la función de Green causal para el operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones iniciales $u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0$.

De acuerdo a (7) del ejemplo 4, sea $G_1(t,s)$ definida como

$$G_1(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t_0 < t < s \\ c_1(s)y_1(t) + c_2(s)y_2(t) & \text{si} \quad t > s \end{cases}$$

donde $y_1(t), y_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de $\mathcal{L}(u) = 0$.

Aplicando las condiciones iniciales en (7) se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} G_1(s^+, s) &= c_1(s)y_1(s) + c_2(s)y_2(s) = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial t}(s^+, s) &= c_1(s)y_1'(s) + c_2(s)y_2'(s) = -\frac{1}{p(s)} \end{aligned}$$

cuya solución está dada por:

$$c_1(s) = \frac{y_2(s)}{p(s)W(y_1,y_2)(s)} \quad \text{y} \quad c_2(s) = -\frac{y_1(s)}{p(s)W(y_1,y_2)(s)}$$

donde $W(y_1, y_2)(s)$ denota el Wronskiano de y_1 y y_2.

Así, para $t > s$

$$G_1(t,s) = \frac{y_2(s)y_1(t) - y_1(s)y_2(t)}{p(s)W(y_1,y_2)(s)}.$$

Por lo tanto

$$G_1(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t_0 < t < s \\ \\ \dfrac{y_2(s)y_1(t) - y_1(s)y_2(t)}{p(s)W(y_1,y_2)(s)}, & \text{si} \quad t \geq s \end{cases}$$

es función de Green causal para el operador diferencial $\mathcal{L}$ que satisface las condiciones iniciales $u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0$.

Observe que la función de Green causal no depende de t_0, ni de la base y_1, y_2 del espacio solución de $\mathcal{L}(u) = 0$, dado que es cero para $t < s$ y para $t > s$ es solución de un problema con valores iniciales.

Definición 19. Una distribución $G_2(x,y)$ que satisface

$$\mathcal{L}G_2(x,y) = \delta(x-y) \quad \text{si} \quad a < x, y < b$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ B_2(u) &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}(u) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)u$, $p, q \in \mathcal{C}^\infty[a,b]$ con $p \neq 0$ en $[a,b]$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ y $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ se llama función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = 0, B_2(u) = 0$.

Nota. Se mostrará que si existe la función de Green $G_2(x,y)$ para el operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = 0, B_2(u) = 0$, entonces es una función continua en $[a,b]$.

Ejemplo 7. Encuentre la función de Green $G_2(x,y)$ para el operador

$$Mu = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{en} \quad (0,1)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Si la función de Green $G_2(x, y)$ existe, ésta satisface

$$-\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, y) = \delta(x - y) \qquad 0 < x, y < 1,$$

$$\begin{aligned} G_2(0, y) &= 0, \\ G_2(1, y) &= 0. \end{aligned}$$

Del ejemplo 3. las soluciones fundamentales del operador M restringidas al intervalo $(0, 1)$ estan dadas por

$$K(x, y) = \begin{cases} Ax + B, & \text{si} \quad 0 < x < y \\ -x + y + Ax + B, & \text{si} \quad y < x < 1 \end{cases}.$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene la función de Green

$$G_2(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{si} \quad 0 \leq x < y, \\ y(1 - x) & \text{si} \quad y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Otro procedimiento para construir la función de Green del operador M, se obtiene del siguiente análisis intuitivo.

Dado que $\delta(x - y) = 0$, si $x \neq y$, para $x < y$, $G(x, y)$ se define como un múltiplo de una solución de $Mu = 0$ que satisface la condición de frontera en $x = 0$, es decir, $G(x, y) = A(y)x$ y para $x > y$ como un múltiplo de una solución de $Mu = 0$ que satisface la condición de frontera en $x = 1$, es decir $G(x, y) = B(y)(1 - x)$, como en el ejemplo 3. G es continua en $x = y$ y $\frac{\partial G}{\partial x}$ tiene una discontinuidad de magnitud -1 en $x = y$, esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} A(y)y &= B(y)(1 - y) \\ -B(y) - A(y) &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es $A(y) = 1 - y \quad \text{y} \quad B(y) = y$.

Por lo tanto, la función $G(x, y)$ dada por:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \begin{cases} A(y)x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq y \\ B(y)(1 - x), & \text{si} \quad y \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x(1 - y), & \text{si} \quad 0 \leq x < y \\ y(1 - x), & \text{si} \quad y \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= y(1 - x)H(x - y) + x(1 - y)H(y - x) \end{aligned}$$

coincide con la función de Green G_2 del operador M con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

Observe que la única solución de $Mu = 0$, $u(0) = u(1) = 0$ es la solución trivial, lo que significa que cero no es valor propio del operador M con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

Ahora se verifica directamente que $G_2(x, y) = y(1-x)H(x-y)+x(1-y)H(y-x)$ es la función de Green del operador diferencial M en $[0, 1]$ con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$, es decir, se demostrará que

$$-\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, y) = \delta(x - y) \qquad 0 < x,\ y < 1$$

$$\begin{aligned} G_2(0, y) &= 0 \\ G_2(1, y) &= 0. \end{aligned}$$

Esta verificación se hace de dos maneras.

Primera. Demostrar que G_2 satisface la ecuación $Mu = \delta(x-y)$ equivale a demostrar que:

$$-\left\langle \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}, \phi \right\rangle = \langle \delta x - y), \phi \rangle \Leftrightarrow -\langle G_2(x, y), \phi'' \rangle = \phi(y)$$

para toda $\phi \in D(0,1)$. En efecto, sea $\phi \in D(0,1)$.

$$\begin{aligned}
-\langle G_2(x,y), \phi'' \rangle &= -\int_0^1 G_2(x,y)\phi''(x)dx \\
&= -(1-y)\int_0^y x\phi''(x)dx - y\int_y^1 (1-x)\phi''(x)dx
\end{aligned}$$

Dado que

$$\int_0^y x\phi''(x)dx = y\phi'(y) - \phi(y)$$

y

$$\int_y^1 (1-x)\phi''(x)dx = (y-1)\phi'(y) - \phi(y),$$

sustituyendo se tiene

$$-\langle G_2(x,y), \phi'' \rangle = -(1-y)\big(y\phi'(y) - \phi(y)\big) - y\big((y-1)\phi'(y) - \phi(y)\big) = \phi(y).$$

Segunda. Se tiene

$$G_2(x,y) = y(1-x)H(x-y) + x(1-y)H(y-x).$$

Calculando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) &= y(1-x)\delta(x-y) - yH(x-y) - x(1-y)\delta(x-y) + (1-y)H(y-x) \\
&= \delta(x-y)\big[y(1-x) - x(1-y)\big] - yH(x-y) + (1-y)H(y-x)
\end{aligned}$$

Dado que $\delta(x-y)\,[y(1-x) - x(1-y)] = 0$ se tiene

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x,y) = -y\delta(x-y) - (1-y)\delta(x-y) = -\delta(x-y).$$

Por lo tanto G_2 es función de Green del operador diferencial M con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

Para el operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$ se tiene la siguiente:

Proposición 20. *La función de Green existe si cero no es valor propio de $\mathcal{L}$.*

demostración. Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad para problemas con valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales existen dos soluciones no triviales u_1 y u_2 definidas en $[a,b]$ de la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$ tales que

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) &=& 0 \\
\beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) &=& 0
\end{array}.$$

Además u_1 y u_2 son linealmente independientes en $\mathcal{C}^\infty[a,b]$, puesto que si $u_1(x) = cu_2(x)$, con $c \neq 0$ entonces $u_1(x)$ satisface ambas condiciones de frontera, que contradice el hecho de que cero no es valor propio de $\mathcal{L}$.

De acuerdo al ejemplo 7. un candidato para una función de Green es la función

$$G_2(x,y) = \begin{cases} A(y)u_1(x), & \text{si} \quad a \le x < y \\ B(y)u_2(x), & \text{si} \quad y \le x \le b \end{cases}.$$

Para que $G_2(x,y)$ resulte continua y su primera derivada tenga una discontinuidad en $x = y$ de magnitud $-1/p(y)$, $A(y)$ y $B(y)$ deben ser tales que

$$\begin{aligned}
B(y)u_2(y) - A(y)u_1(y) &= 0 \\
B(y)u_2'(y) - A(y)u_1'(y) &= -\frac{1}{p(y)}
\end{aligned}$$

para toda $y \in (a,b)$.

Observe que el determinante de este sistema es el Wronskiano de u_1 y u_2, al que se denota por $W(u_1,u_2)$, y como u_1, u_2 son linealmente independientes $W(u_1,u_2)(y) \neq 0$

para toda $y \in [a,b]$. De donde el sistema de ecuaciones algebraicas tiene una única solución $A(y)$ y $B(y)$. Por lo tanto, la función $G_2(x,y)$ definida como

$$G_2(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad a \leq x \leq y \\ -\dfrac{u_2(x)u_1(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad y \leq x \leq b \end{cases}$$

se espera sea la función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$, con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$.

Observe que $G_2(x,y) = G_2(y,x)$, es decir, G_2 es una función simétrica en x y y.

Para verificar que $G_2(x,y)$ es función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$ se expresa $G_2(x,y)$ como

$$G_2(x,y) = -\frac{1}{p(y)W(u_1u_2)(y)}\big[H(x-y)u_1(y)u_2(x) + H(y-x)u_1(x)u_2(y)\big]$$

y se calcula $\mathcal{L}G_2(x,y)$ cuyo resultado es $\delta(x-y)$, también $G_2(x,y)$ satisface las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$. Por lo tanto $G_2(x,y)$ es función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$.

Otro procedimiento es como el que se desarrolla en el ejemplo 3, es decir, se expresa a G_2 como:

$$G_2(x,y) = G_1(x,y) + Au_1(x) + Bu_2(x)$$

donde u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$ tales que $B_1(u_1) = 0$ y $B_2(u_2) = 0$ y G_1 es la función de Green Causal en la definición 18.

De esta manera

$$\mathcal{L}G_2(x,y) = \mathcal{L}G_1(x,y) + A\mathcal{L}u_1(x) + B\mathcal{L}u_2(x) = \delta(x-y).$$

9. Método de la función de Green

La función de Green de un operador diferencial lineal con condiciones auxiliares cuando existe, permite obtener información sobre las soluciones (cuando existen) de los problemas asociados, así como también permite formular problemas equivalentes en ecuaciones integrales lo que presenta grandes ventajas. A este enfoque de estudio de los problemas asociados en ecuaciones diferenciales lineales se le llama método de la función de Green.

Ahora se muestra como se adapta el método de la función de Green para obtener soluciones clásicas de los siguientes dos problemas cuando los coeficientes en $\mathcal{L}$ no necesariamente son $\mathcal{C}^\infty[a,b]$.

PROBLEMA I

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\,\frac{du}{dt}\right) + q(t)u = f(t), \quad a \leq t \leq b$$
$$\begin{aligned} u(a) &= 0, \\ u'(a) &= 0, \end{aligned}$$

donde p', q y f son funciones continuas en $[a,b]$ con $p(t) \neq 0$ en $[a,b]$.

PROBLEMA II

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad a \leq x \leq b$$
$$\begin{aligned} B_1(u) &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ B_2(u) &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{aligned}$$

donde p', q y $f \in \mathcal{C}[a,b]$ con $p(x) \neq 0$ en $[a,b]$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ y $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Definición 21. Una función $G_3(t,s)$ definida en $[a,b] \times [a,b]$ es función de Green causal del PROBLEMA I si

i) $G_3(t,s) = 0, \quad \text{si} \quad a \leq t < s$

ii) $-\dfrac{d}{dt}\left(p(t)\dfrac{dG_3(t,s)}{dt}\right)+q(t)G_3(t,s)=0 \quad \text{si} \quad s\leq t\leq b,$

$$\begin{array}{rcl} G_3(s^+,s) & = & 0, \\ \dfrac{\partial G_3}{\partial t}(s^+,s) & = & -\frac{1}{p(s)}. \end{array}$$

De la Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se concluye que la función de Green causal del PROBLEMA I existe y es única y su construcción es como se hizo en el ejemplo 6.

Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u=0$ se tiene que

$$G_3(t,s)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad a\leq t<s \\ \dfrac{y_2(s)y_1(t)-y_1(s)y_2(t)}{p(s)W(y_1,y_2)(s)}, & \text{si} \quad s\leq t\leq b, \end{cases}$$

es la función de Green causal para el PROBLEMA I, como puede verificarse.

PROPOSICIÓN 22. *Sea $f\in\mathcal{C}[a,b]$, la función $u(t)=\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds$ es la solución clásica del* PROBLEMA I.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & \displaystyle\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds=\int_a^t G_3(t,s)f(s)ds \\ u'(t) & = & \displaystyle G_3(t,t)f(t)+\int_a^t \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)f(s)ds=\int_a^t \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)ds \\ u''(t) & = & \displaystyle \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,t)f(t)+\int_a^t \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds \\ & = & \displaystyle -\frac{f(t)}{p(t)}+\int_a^t \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds. \end{array}$$

De donde

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u=-p(t)\frac{d^2u}{dt^2}-p'(t)\frac{du}{dt}+q(t)u=-p(t)\left(-\frac{f(t)}{p(t)}\right)+$$
$$+\int_a^t\left[-p(t)\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)-p'(t)\frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)+q(t)G_3(t,s)\right]f(s)ds=f(t)$$

también $u(a)=u'(a)=0$. Por lo tanto $u(t)=\displaystyle\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds$ es la solución clásica del PROBLEMA I.

Ahora se expresa el PROBLEMA I en términos de operadores.

Sea $L_4:D_4=\left\{u\in\mathcal{C}^2[a,b]\middle|u(a)=u'(a)=0\right\}\longrightarrow\mathcal{C}[a,b]$ definido por

$$L_4(u)=-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u$$

Así el PROBLEMA I se formula como: $L_4u=f$.

Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales el operador L_4 es uno a uno y por la proposición 10.2 L_4 es sobre. Por lo tanto existe $L_4^{-1}:\mathcal{C}[a,b]\longrightarrow D_4$ definido por:

$$L_4^{-1}(f)=\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds.$$

Así la función de Green causal del PROBLEMA I es el núcleo del operador inverso L_4^{-1} de L_4. De esta manera resolver el PROBLEMA I se reduce a encontrar la función de Green causal del PROBLEMA I. Si el problema que se plantea es la ecuación diferencial del PROBLEMA I con las condiciones iniciales no homogéneas $u(a) = \alpha$ y $u'(a) = \beta$ donde α y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces la solución está dada por

$$u(t) = \int_a^t G_3(t,s)f(s)ds + \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

donde y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea que satisfacen las condiciones iniciales $y_1(a) = 1$, $y_1'(a) = 0$ y $y_2(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$ respectivamente.

Definición 23. Una función $G_4(x,y)$ definida en $[a,b] \times [a,b]$ es función de Green del PROBLEMA II si

i) $G_4(x,y)$ es continua en $[a,b] \times [a,b]$.

ii) $\dfrac{\partial G_4}{\partial x}(y^+ y) - \dfrac{\partial G_4}{\partial x}(y^-, y) = -\dfrac{1}{p(y)}$, donde $y \in (a,b)$.

iii) $-\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{G_4}{dx}\right) + q(x)G_4(x,y) = 0$, si $x \neq y$ en $[a,b]$.

iv) $B_1 G_4(x,y) = 0; B_2 G_4(x,y) = 0$.

En cuanto a la existencia de la función de Green del PROBLEMA II se obtiene de la proposición 20, en cuya construcción se usaron las propiedades i) a iv) y el hecho de que cero no es valor propio del operador correspondiente, y en cuanto a la unicidad, como la diferencia de dos funciones que satisfacen i) a iv) tiene una derivada continua en (a,b) y además es una solución clásica del problema homogéneo y como cero no es valor propio, se tiene que esta diferencia es identicamente cero. Por lo tanto el PROBLEMA II tiene una única solución, si cero no es valor propio del operador diferencial $\mathcal{L}$.

Se recuerda que si $u_1(x)$, $u_2(x)$ son dos soluciones no triviales de la ecuación homogénea tales que $\alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) = 0$ y $\beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) = 0$.

Se tiene que

$$G_4(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad a \leq x \leq y \\ \\ -\dfrac{u_2(x)u_1(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad y \leq x \leq b \end{cases}$$

es la función de Green del PROBLEMA II, como puede verificarse.

PROPOSICIÓN 24. *Sea* $f \in \mathcal{C}[a,b]$, *la función* $u(x) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy$ *es la solución clásica del* PROBLEMA II, *si cero no es valor propio del operador diferencial* $\mathcal{L}$.

DEMOSTRACIÓN. Se empieza por expresar a la función de Green $G_4(x,y)$ en términos de la función de Green causal $G_3(x,y)$ y una combinación lineal de las soluciones no triviales u_1 y u_2 de la ecuación homogénea tales que $B_1 u_1 = 0$ y $B_2 u_2 = 0$, es decir,

$$G_4(x,y) = G_3(x,y) + A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x) = H(x-y)U_y(x) + A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x),$$

$a < x, y < b$ donde $U_y(x)$ es la solución clásica de (7) para toda $x \in [a,b]$.

Observe que

- Si $x < y$, $\quad G_4(x,y) = A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x)$
- Si $x > y$, $\quad G_4(x,y) = U_y(x) + A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x)$.

Aplicando las condiciones de frontera se tiene

$$A = -\frac{\beta_1 u_y(b) + \beta_2 u_y'(b)}{\beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b)}, \qquad B = 0$$

De esta manera

$$u(x) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy = \int_a^b G_3(x,y)f(y)dy + u_1(x)\int_a^b A(y)f(y)dy.$$

Ahora por la proposición 22, u es la solución clásica del PROBLEMA II. Ahora se expresa el PROBLEMA II en términos de operadores.

Sea $L_5 : D_5 = \{u \in \mathcal{C}^2[a,b] \big| B_1 u = B_2 u = 0\} \longrightarrow \mathcal{C}[a,b]$ definido por:

$$L_5 u = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right) + q(x)u.$$

Así el PROBLEMA II se formula como: $L_5 u = f$. El operador L_5 es uno a uno debido a que se está suponiendo que cero no es valor propio de L_5 y por la proposición anterior L_5 es sobre.

Por lo tanto existe $L_5^{-1} : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow D_5$ definido por:

$$L_5^{-1}(f) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy.$$

De esta manera la función de Green del PROBLEMA II es el núcleo del operador inverso L_5^{-1} de L_5. Así resolver el PROBLEMA II cuando cero no es el valor propio de L_5 se reduce a encontrar su función de Green.

Si el problema que se plantea es la ecuación diferencial en el PROBLEMA II con las condiciones de frontera no homogéneas $B_1 u = \alpha$ y $B_2 u = \beta$ donde α y $\beta \in \mathbb{R}$ entonces se descompone en dos.

En el primero se considera la ecuación diferencial no homogénea con las condiciones de frontera homogéneas y en el segundo se considera la ecuación diferencial homogénea con las condiciones de frontera no homogéneas. La solución del primero se da en la proposición 24. y el segundo tiene la solución

$$v(x) = \frac{\beta}{B_2 u_1} u_1(x) + \frac{\alpha}{B_1 u_2} u_2(x)$$

donde u_1 y u_2 son soluciones no triviales de la ecuación homogénea tales que $B_1 u_1 = 0$ y $B_2 u_2 = 0$.

Por lo tanto, por el principio de superposición, el problema

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \qquad a \leq x \leq b$$

$$\begin{aligned} B_1 u &= \alpha, \\ B_2 u &= \beta, \end{aligned}$$

donde p', q y $f \in \mathcal{C}[a,b]$ con $p \neq 0$ en $[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tiene la solución única

$$u(x) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy + \frac{\beta}{B_2 u_1} + \frac{\alpha}{B_1 u_2} u_2(x).$$

Referencias

[1] Coddington, E.A., and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw Hill, New York, 1955.
[2] Griffel, D.H., Applied Functional Analysis, John Wiley and Sons, 1981.
[3] Guelfand, J.M., and Shilov, G.E., Generalized Functions, Vol. 1, Academic Press, New York, 1964.
[4] Kesavan, S., Topics in Functional Analysis and Applications, John Wiley and Sons, 1989.
[5] López, G.G, y Martínez O.F.H., Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales, Universidad Autónoma Metropolitana -Iztapalapa, 2014.
[6] Stakgold, I., Green's Functions and Boundary Value Problems, John Wiley, 1979.
[7] Renardy, M., Roger, C.R., An Introduction to Partial Differential Equations, Second Edition, Springer Verlag, New York, 2004.

Dirección del autor:
Francisco Hugo Martínez Ortiz
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `fcoh@xanum.uam.mx`