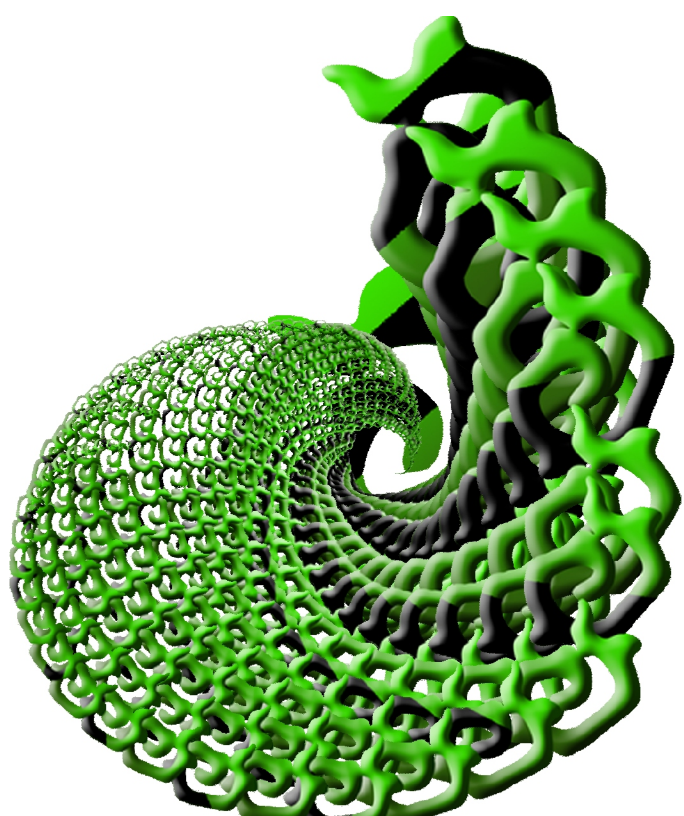
ISSN 2007-7874

mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas



VOL VI, No. 1, JUNIO 2015

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

MIXBA'AL Vol. VI, No. 1, junio de 2014 a junio de 2015 es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas.

Prolongación Canal de Miramontes # 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, D.F. y Av. San Rafael Atlixco # 186, Edificio AT, tercer piso, Col. Vicentina, Delegación Iztapalapa, C.P. 09340, México, D.F. Tel. 5804 4654. Correo electrónico de la revista: mixbaal2009@gmail.com .
Página electrónica de la revista: http://repos.izt.uam.mx .

Editora Responsable: Dra. Laura Hidalgo Solís. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2010-072017382600. ISSN: 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Responsable de la última actualización de este número, Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas, M. en C. Daniel Espinoza Pérez.

Fecha de última modificación: 5 de julio de 2015. Tamaño de archivo: 12.0 MB.

Contacto:
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.
Teléfonos: (01) 55 5804 4654.
Fax: (01) 55 5804 4660.
Email: mixbaal2009@gmail.com
Web: http://repos.izt.uam.mx

Diseño Portada: Srita. Michaell Rivera Arce.

mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas

ALFREDO NICOLÁS CARRIZOSA

(1946-2014)

VOL VI, No. 1, JUNIO 2015

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

A los autores

Mixba'al es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Está dirigida a la comunidad matemática.

Los artículos pueden ser artículos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas; por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos, artículos panorámicos sobre un área de investigación, la presentación de una visión distinta de algún tema vinculado con la docencia, notas de cursos avanzados, aplicaciones de las matemáticas, historia y filosofía de las matemáticas y aspectos lúdicos de las mismas, entre otros.

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español, aunque en casos excepcionales podrán aceptarse artículos en inglés. El comité editorial tiene la responsabilidad de cuidar la calidad de la revista, tanto en su contenido como de su presentación, de acuerdo a los lineamientos, tipografía y corrección de lenguaje (ortografía, estilo, etcétera). Asimismo, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista, y en caso de que así sea, lo enviará a arbitraje, sin excepción.

La versión preliminar de los trabajos sometidos a la revista deberá enviarse en formato pdf.

Puesto que la presentación final de los trabajos se hará en Latex2ε, aquellos autores, cuyos trabajos sean aceptados, deberán enviarlos con el formato y macros que proporcionará la revista para su publicación final. Las fotografías o gráficas que acompañen al texto deberán ser enviadas, por separado, en formato pdf y deberán tener la calidad y resolución suficientes para una buena reproducción impresa, además deberán contar con los correspondientes derechos de autor. Se recomienda que la extensión de los trabajos no exceda de 20 páginas.

Laura Hidalgo Solís
Coordinadora

Presentación

Mixba'al es una revista de divulgación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana. Entre los artículos de este número, encontrarán tanto trabajos de investigación original como exposición de resultados importantes conocidos en varias ramas de la matemática básica y aplicada.

En el artículo del profesor Héctor Juárez, *"Alfredo Nicolás Carrizosa (1946-2014)"*, se presenta una semblanza de la vida y obra de Alfredo Nicolás, donde se muestran algunos aspectos importantes de su vida, la cual es un ejemplo de lucha contra las adversidades, esfuerzo, tenacidad y calidez humana. Por otra parte, se nos presenta su labor como profesor e investigador, y en particular el impacto que tuvo el trabajo de Alfredo en el Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa, y en especial, dentro del área de Análisis Numérico y Modelación Matemática.

A continuación tenemos el trabajo de los profesores Siegfried Macías, José Eduardo Macías-Díaz y José Villa-Morales *"A historical perspective on the problem of representing the roots of unity through radicals"*, los autores presentan algunos aspectos históricos donde se muestra para qué ángulos θ las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ pueden expresarse en términos de radicales. Partiendo de la fórmula general de las raíces de los polinomios cuadráticos con coeficientes reales, evocan aquellos esfuerzos relacionados con la solución de este problema, desde los problemas de constructibilidad con regla y compás, así como los esfuerzos de De Moivre, Vandermonde y Gauss, hasta la solución del problema.

Posteriormente, la profesora Kinrha Aguirre en su trabajo *"Lógicas $\mathfrak{M}$-finitas"*, destaca algunas de las propiedades más importantes y ofrece algunos ejemplos relevantes de los conjuntos admisibles. La autora hace referencia a las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, lógicas que tienen la posibilidad de aceptar un número infinito de conjunciones y disyunciones, lo que las hace más expresivas que la lógica de primer orden. Estas lógicas preservan algunas nociones de la lógica de primer orden, lo cual está expresado en el teorema de compacidad de Barwise, cuya demostración es el propósito de su trabajo.

Continuamos con el trabajo de la profesora Cecilia Hernández, *"Lógicas infinitarias y álgebra"*, la autora expone algunas de las ideas básicas de una de las extensiones más exitosas de la lógica de primer orden, la lógica infinitaria y la necesidad de su estudio. Con el propósito de mostrar una de las relaciones fructíferas que mantienen las lógicas infinitarias con otros ámbitos de la matemática elige la existente con el álgebra, específicamente con la teoría de los grupos abelianos.

Finalmente, en el artículo del profesor Hugo Martínez, *"Método de la función de Green para EDO's lineales de segundo orden"*, el autor expone el uso de la teoría elemental de las distribuciones, aplicando el método de la función de Green en el análisis tanto de problemas con valores iniciales, como en problemas con valores a la frontera no homogéneos, asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden dos en forma autoadjunta. El método de la función de Green es un método que presenta grandes ventajas tales como el de expresar la solución de los problemas mencionados de manera natural en función de las condiciones iniciales o de frontera, así como del término no homogéneo.

La intención es continuar con este formato y la revista invita a someter contribuciones de esta índole en el idioma español, aunque ocasionalmente pueden aceptarse contribuciones en inglés. Inicialmente se publicará al menos un número al año.

Toda comunicación debe ser dirigida al comité editorial, al correo electrónico: `mixbaal2009@gmail.com`

Mixba'al Rev. Met. de Mat.
No. 1, Vol. VI, Junio de 2015, 7–10

ALFREDO NICOLÁS CARRIZOSA
1946-2014

LORENZO HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA

Alfredo Nicolás nació el 3 de agosto de 1946 en Santiago Yosondúa, en el municipio de Tlaxiaco, Oaxaca. Huérfano a los 9 años, se trasladó a la Ciudad de México y, bajo la tutela de un hermano mayor, aquí continuó sus estudios de primaria, secundaria y bachillerato. En 1966, a la edad de 20 años, Alfredo ingresó a la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN. Como es fácil imaginar, le toco vivir como estudiante momentos críticos, reflejados en los movimientos estudiantiles, que culminaron con la masacre de 1968, mismos que impactaron el desarrollo del país en las décadas siguientes. A pesar de ello, la dedicación de Alfredo, le permitió culminar sus estudios de licenciatura en tiempo y forma en 1970.

Al término de sus estudios de licenciatura, Alfredo ingresó como profesor de matemáticas en la ESIME del IPN. Entre 1973 y 1974 participó como *Miembro de la Comisión del Tronco Común del IPN para la elaboración del programa de matemáticas.* Entre 1974 y 1977, ya con más madurez y buenas perspectivas profesionales, fue *Coordinador de la Academia de Matemáticas de Ciencias Básicas de la ESIME.* En 1975, contrajo matrimonio, y también ingresó a la maestría en matemática educativa del CINVESTAV. Un aspecto poco conocido de Alfredo es que en los años 70 desempeñó otras actividades académicas y docentes importantes. Cabe destacar su participación en la impartición de cursos para la formación de profesores de matemáticas como: *El curso de educación continua en la ESIME* entre 1977 y 1978; *El programa de cursos CINVESTAV-SEP para la formación de profesores en universidades de provincia*, en agosto de 1982, en la Universidad Michoacana; *Cursos de verano, Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV,* entre julio y agosto de 1977; *Profesor de matemáticas en el sistema S.A.I. (Sistema de Aprendizaje Individualizado) de la UAM-A* en 1979.

Alfredo concluyó sus estudios de maestría en el CINVESTAV en 1978 y obtuvo el grado de maestro en 1979. Al parecer, ésta fue su actividad académica más importante en esa década. Con el grado de maestro en ciencias, ingresó como profesor de la Sección de Graduados de la ESIME.

Sus estudios de doctorado y su viaje a los Estados Unidos

En 1980, Alfredo inició estudios de doctorado en el mismo CINVESTAV, enfocando su interés académico principalmente en el análisis y las ecuaciones diferenciales. En esta etapa, él tiene la oportunidad de participar en algunos eventos internacionales como: *El curso de otoño sobre métodos variacionales en análisis y física matemática,* en Trieste Italia (octubre-diciembre de 1981); *La escuela latinoamericana de ecuaciones diferenciales,* en Sao Paulo, Brasil (junio-julio de 1981). El interés de Alfredo en las ecuaciones diferenciales parciales, además del consejo de Onésimo Hernández, lo llevan a viajar a Estados Unidos en 1984, con el objeto de continuar sus estudios de doctorado en la Universidad de Houston, bajo la supervisión del muy prestigiado profesor Roland Glowinski. Alfredo obtuvo el grado de doctor en filosofía (Ph.D.) con especialidad en matemáticas en 1988 con el trabajo *Numerical aspects of some time partial differential equation problems.*

En la tesis doctoral de Alfredo destaca el estudio numérico de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, la cual es una ecuación diferencial parcial altamente no lineal que se utiliza para modelar flamas, entre otros fenómenos físicos complejos del tipo de reacción-difusión, los cuales dan lugar a la formación de estructuras disipativas, así como difusión inducida y caos. El trabajo de Alfredo consistió en la solución numérica del modelo unidimensional por medio de un esquema de diferencias finitas, en contraste a los métodos espectrales, muy de moda en aquel momento. Por otro lado, Alfredo también abordó el problema de la controlabilidad exacta de la ecuación de onda en dominios generales (complejos), utilizando el método de elementos finitos y métodos de regularización de Tijonov, así como el método iterativo de gradiente conjugado para la minimización de funcionales (dimensión infinita). Cabe mencionar que este tipo de problemas eran novedosos en ese entonces. De hecho, muchos de los métodos que se utilizan en la actualidad tuvieron su origen en la investigación pionera de varios investigadores entusiastas de esa época.

Su regreso a México

A su regreso a México en 1988, ya con el grado de doctor, Alfredo se reincorporó a la ESIME como profesor de matemáticas en la sección de graduados. Con mucho entusiasmo, y el prestigio que le dio haber terminado exitosamente estudios de alto nivel en el extranjero, Alfredo inició una etapa de trabajo muy intenso. Resalta su participación en diversos eventos académicos y seminarios de investigación. Por ejemplo, en 1989, ofreció tres charlas, que él mismo resalta en su CV. Una de las charlas fue sobre *'Las ecuaciones de Navier-Stokes'* en el Seminario de Matemáticas Aplicadas y Métodos Numéricos del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV; participó en el Seminario de Análisis en la UAM-A con la charla *Solución Numérica al Problema de Controlabilidad Exacta;* y también ofreció una charla en el Seminario de la Maestría de Matemáticas Aplicadas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN con el título *Ecuaciones de Navier-Stokes y la Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.* Ese mismo año (1989) participó también en el V Mexico-USA Workshop IIMAS(UNAM)-University of Rice, en el Seminario del Instituto de Geofísica de la UNAM, en el Congreso Nacional de la SMM en Puebla y en el VI Coloquio de Matemáticas del CINVESTAV en Oaxtepec.

Su llegada a la UAM Iztapalapa

En 1990 Alfredo inició su carrera como docente e investigador en el Departamento de Matemáticas de la UAM-I, lugar en donde encontró un ambiente académico propicio para desarrollar su trabajo. Me permito aclarar que lo dicho no es presunción, sino el sentir personal de Alfredo en aquellos momentos, y que motivó que Alfredo renunciara a la ESIME para venir a la UAM y finalmente quedarse. Recuerdo que en 1989, año en que nos conocimos personalmente en el Congreso Nacional de Matemáticas de la SMM en Puebla, Alfredo buscaba investigadores que trabajaran en temas afines. Por fortuna, existía en la UAM-I un grupo del área de Análisis Aplicado liderado por Patricia Saavedra y que sostenía un seminario sobre análisis numérico. Lo invité a participar en el mismo y él aceptó con mucho entusiasmo. Pronto llamó la atención y el interés de los líderes del grupo en aquel momento. Además, por suerte, Patricia Saavedra había realizado su doctorado en Francia con Philippe G. Ciarlet, profesor del mismo grupo que Roland Glowinski, y miembro de la fuerte escuela francesa de análisis numérico, análisis funcional y las ecuaciones diferenciales, uno de cuyos pioneros fue el famoso Jaques-Louis Lions.

La incorporación de Alfredo Nicolás a la UAM determinó de alguna manera el rumbo del grupo en el futuro. Alfredo inició inmediatamente colaboración con algunos integrantes del grupo; puedo mencionar, por ejemplo, a Patricia Saavedra, Octavio Arzate, Hans Fetter, Francisco Sánchez y Héctor Juárez. Además, junto con Patricia Saavedra, organizó en 1990 un evento académico en el cual participaron los profesores Roland Glowinski y Ridgway Scott, además del profesor Francisco Castillo. Esto motivó que tanto Francisco Sánchez como Héctor Juárez iniciaran estudios de doctorado en la misma Universidad de Houston con los profesores mencionados. Posteriormente, Héctor Juárez realizó una estancia posdoctoral con el profesor Roland Glowinski, manteniendo hasta el momento esta fructífera colaboración que ahora se ha extendido a algunos alumnos activos del posgrado. Por lo tanto, el legado de Alfredo se mantiene vigente y ojalá siga rindiendo frutos hacia el futuro.

Su trabajo de investigación

El trabajo de investigación de Alfredo puede dividirse en tres etapas:

1. **1990-1993.** Etapa de inicio en la UAM. Destacan sus trabajos sobre investigación de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky en dos dimensiones, problemas hiperbólicos semilineales y en particular el problema de Cauchy de una ecuación de onda semilineal. Curiosamente, realizó un trabajo sobre un esquema numérico para el flujo en un tanque de almacenamiento de un colector solar. Comienza a utilizar los esquemas de descomposición de operadores para la ecuación de Navier-Stokes no estacionaria.
2. **1993-2000.** En 1993 Alfredo ya se encuentra trabajando muy intensamente en problemas de fluidos con convección natural y métodos de tipo upwind para abordar el problema del término convectivo en las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con la ecuación de energía (calor). Asimismo, utiliza los métodos de partición del operador. Además, trabaja simultáneamente en problemas de control óptimo aplicados a problemas de difusión y advección-difusión y gradúa a David Parra como maestro en ciencias en 1995. Cabe mencionar que en esta etapa Alfredo mantiene un estrecho vínculo con el grupo de investigación de Gonzalo Alduncin, del Instituto de Geofísica, con quienes explora temas relacionados con el método de elementos finitos y su implementación computacional con aplicaciones a problemas en geofísica. En 1996 el trabajo de investigación de Alfredo comienza a rendir frutos y publica los primeros artículos sobre problemas de fluidos en revistas internacionales. Esta etapa culmina con la graduación de su primer estudiante de doctorado, Blanca Bermúdez, y con su ingreso al SNI en 1998. Algunos resultados, producto del trabajo en esta etapa, todavía se publicaron en 1999 y 2000.
3. **2000-2014.** La tercera etapa es la de mayor productividad y la de su consolidación como investigador. Alfredo continúa trabajando en problemas de fluidos viscosos incompresibles, modelados mediante la ecuación de Navier-Stokes con

números de Reynolds altos y turbulencia, flujos en medios porosos y flujos multifásicos, además de fluidos térmicos y convección natural. Es durante el inicio de esta etapa, en 2001, en la que Elsa Báez termina su tesis de maestría sobre la aproximación de Boussinesq en medios porosos, bajo la dirección de Alfredo Nicolás. Además Alfredo incursiona en el estudio de problemas de convección mixta, además de problemas de inestabilidad y búsqueda de soluciones críticas. En algún momento comienza a utilizar la formulación de función-corriente y vorticidad, así como la formulación de velocidad-vorticidad. A mediados de la década de los 2000 inicia la publicación de sus trabajos sobre convección natural en cavidades rectangulares tanto en medios porosos como en medios libres. Destaca el trabajo sobre cavidades rectangulares y cavidades inclinadas, la obtención del doctorado por parte de Elsa Báez en 2008, así como y el posterior estudio de flujos térmicos sobre cavidades inclinadas, en donde estudió la transición desde estructuras llamadas 'ojos de gato' hasta múltiples celdas disjuntas de convección natural, investigación que lo llevó a publicar sus trabajos, junto con sus colaboradores, en prestigiadas revistas como Physics Letters and Physics of Fluids. En los últimos años, Alfredo intenta, junto con sus alumnos Raúl Téllez y Habershell Acevedo principalmente, introducir el cómputo en paralelo y GPUs en la implementación computacional de los métodos numéricos utilizados. En particular, Raúl Téllez presentará este año su examen de maestría, bajo la asesoría de la Dra. Elsa Báez, como relevo en la dirección de su tesis. Finalmente, cabe mencionar que Alfredo publicó más de cuarenta trabajos de investigación entre reportes, artículos y memorias de congresos.

Además de lo anterior, Alfredo participó en numerosos congresos, seminarios y eventos académicos tanto locales, como nacionales e internacionales, presentando principalmente sus productos de investigación. También realizó otras actividades, como coordinador y organizador de eventos académicos, miembro de comités editoriales, evaluador de proyectos de investigación, jurado y revisor de tesis de posgrado, entre otros. Adicionalmente, dirigió cuatro estudiantes de licenciatura en Proyecto Terminal en la UAMI (2011) y fue co-director de tesis de maestría de Pablo Aguilar Terrés, quién obtuvo el grado en 2013, además de dos estudiantes de licenciatura en la BUAP, graduados en 2008 y 2009. Al momento de su deceso tenía el nombramiento como Investigador Nacional nivel II del SNI.

Sus amigos y conocidos, además de los integrantes del área de Análisis Numérico y Modelación Matemática de la UAMI, sin duda lo recordarán con afecto. Por cierto, el profesor Roland Glowinski y su esposa Angela, quienes apreciaron mucho a Alfredo, han lamentado mucho su deceso.

Un abrazo fraterno para su familia que le sobrevive, principalmente a su esposa Lupita y a su hija Claudia.

Dirección del autor:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `hect@xanum.uam.mx`

Mixba'al Rev. Met. de Mat.
No. 1, Vol. VI, Junio de 2015, 11–22

A HISTORICAL PERSPECTIVE ON THE PROBLEM OF REPRESENTING THE ROOTS OF UNITY THROUGH RADICALS

SIEGFRIED MACÍAS, JORGE EDUARDO MACÍAS-DÍAZ, AND JOSÉ VILLA-MORALES

Abstract. The aim of this work is to provide a concise perspective on some historical developments toward the determination of those angles θ for which $\sin\theta$ (and thus, also $\cos\theta$) may be expressed in terms of radicals. This is clearly a particular task in the investigation of conditions under which the roots of the polynomial $x^n = 1$ may be expressed through radicals, for $n \in \mathbb{Z}^+$. Departing from the general formula for the roots of quadratic polynomials with real coefficients, we evoke important efforts related to the solution of this problem, like the problem of ruler and compass constructibility as well as individual approaches due to De Moivre, Vandermonde and Gauss. We close the present note providing an easy, partial, affirmative solution to the problem in question.

1. Introduction

The emergence of new problems in scientific areas in general and, in particular, in the mathematical sciences, is an every-day event. In fact, any biographical investigation on the research achievements of famous mathematicians, shows that the satisfactory resolution of a particular problem gives rise to many questions on the problem itself (limitations, possible directions of generalization, determination of examples and counter-examples, etc.) and on problems of parallel interest derived during the course of the investigation. Examples of these facts are abundant in the history of mathematics and science, and they evince that the mathematical and scientific tasks yet to be accomplished are still great in number. In most of the cases, the problems possess a high complexity which requires the use of sophisticated mathematical tools for both its resolution and its introduction. For those problems, the historical background is hardly relevant; in fact, what matters is the set of recent results that lead to prove the new results reported. On the other hand, problems like Fermat's last theorem are also difficult to establish, but easy to present to a general audience [16].

In this work, we state a mathematical problem which is easy to describe to a general audience of undergraduate students. The problem, in many respects, resembles the traditional exercises of Galois theory on the radical representation of roots of polynomials, but the authors have not been able to find its general solution in the context of Galois groups. Looking for an affirmative answer to the problem of interest, the authors devoted part of their efforts to investigate several traditional approaches to the task. In this way, we became involved (and interested) in the historical evolution of the problem of representing certain roots of unity with radicals. The present report is thus a summary on some historical developments that converge to understanding the problem and the possible methods of solution. Here, we will state individual efforts by several mathematicians which have contributed significantly to the theory of equations, and will try to put together their approaches to provide a concise perspective on the solution of the problem.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 12-03; Secondary 01A67.

Palabras clave. Historical perspective of a mathematical problem, development in pure and applied mathematics, solubility of equations by radicals, roots of unity, constructibility by ruler and compass.

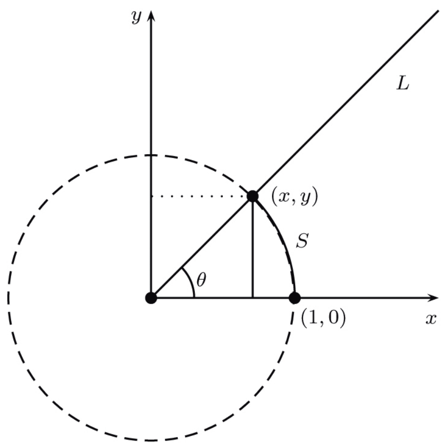


FIGURE 1. Definition of the trigonometric functions.

We give a fresh start to this discussion by introducing the problem. Consider the unit circle and an angle θ formed with the x-axis, and a segment of line L obtained by a rotation of the x-axis counterclockwise. Let (x, y) be the point of intersection of the unit circle and the segment L. We say that θ is equal to S radians, where S is the arc-length between the points (x, y) and $(1, 0)$ (see Figure 1). The trigonometric functions of θ are defined as

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x.$$

These definitions extend the Greek's definitions of the trigonometric functions to angles of any measure. Some particular values may be obtained using this definition and some trigonometric identities. For example, using the identity $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ with $\theta = \pi/3$ and $x = \sin(\pi/3)$, one may readily verify that $0 = 3x - 4x^3 = x(3-4x^2)$. The solutions to this equation are $0, -\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2$, but the only admissible (positive) solution is $\sqrt{3}/2$; therefore $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Using the same idea, we can check that

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A natural question arises in this context: *For which angles θ are the trigonometric functions* $\sin\theta$ *and* $\cos\theta$ *expressible in terms of radicals?*

This paper is organized as follows. In Section 2, we provide a brief historical review on the development of methods of solutions of polynomial functions. Starting from the general formula for quadratic equations, we recall successful efforts by Scipone del Ferro, Niccolò Fontana of Brescia (Tartaglia), Gerolamo Cardano and Ludovico Ferrari to represent the roots of polynomials by radicals involving the coefficients of the polynomial. The connections between the roots of unity and ruler-and-compass constructions are examined in Section 3. We take a look therein at the de Moivre's formula to determine the nth roots of 1 and, in a parallel stage, at the constructibility of the regular pentagon. Vandermonde's method is introduced in Section 4, together with an application to the radical representation of the 11th roots of unity. Following our historical perspective, Section 5 presents Gauss' method of radical representation of the roots of unity. Finally, we close this manuscript with a section of concluding remarks which converge to the problem that has motivated this historical discussion.

2. UNSOLVABILITY OF THE QUINTIC

Physical evidence suggests that, as early as 2000 BC, Babylonian mathematicians were able to solve some second-degree equations arising from daily-life tasks [6].

However, humankind had to wait until the 12th century A. D. to possess a means to solve the general, quadratic equation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Based largely on previous efforts by Al-Khwarizmi (c. 780–c. 850) [13], the Jewish mathematician Abraham bar Hiyya Ha-Nasi (c. 1065–1136) provided a sequence of instructions to determine the solutions of the general quadratic equation. The details were published in his manuscript *Treatise on measurement and calculation*, which is considered the first European recording of the resolution of general, quadratic polynomials [14]. Nowadays, we know that the solutions are given by the formula

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

The beginning of the formal investigation of equations still had to wait several centuries. In part, this was due to the lack of an operational nomenclature, and the limitations of the mathematical language to state and solve problems. The mathematical development of the theory and its notation was hard and slow, and its history is carved with small individual efforts that resulted in the modern theory of equations [9, 21]. For instance, the symbol = was introduced in 1557 by the English mathematician Robert Recorde (c. 1512–1558) [12], and François Viète (1540–1603) introduced the concept of literal constants in equations [3] in 1591.

It is historically important to mention that Scipione del Ferro (1465–1526) [10] is believed to have solved third-degree equations of the form

$$x^3 + px = q, \tag{1}$$

for $p, q \in \mathbb{R}^+$. However, del Ferro never published his investigations but before his death he communicated the results of some of his studies to his student Antonio Maria Fiore [5]. In 1535, Fiore challenged Niccolò Fontana of Brescia (c. 1500–1557), also known as Tartaglia, to a public contest in which each of the two men had to solve 30 mathematical problems proposed by the other. Tartaglia, a mathematics teacher in Venice, had apparently discovered the solution to cubic equations of the form

$$x^3 + bx^2 = q,$$

with $b, q \in \mathbb{R}^+$, and Fiore, keen to obtain a good teaching position in his native Venice, was confident to reach his goal by publicly humiliating his opponent.

The night before the contest, Tartaglia discovered a method to solve (1). Being all problems of that form, it took Tartaglia less than two hours to solve all the problems proposed by Fiore. The equations proposed by Tartaglia, on the other hand, were more diverse in form and difficulty, and Fiore could not solve the entire list. Tartaglia's method of solution of cubic polynomials was popularized in 1545 by Gerolamo Cardano (1501–1576) in his work *Ars Magna*, a landmark in the history of algebra [18] that also reports on Ludovico Ferrari's (1522–1565) method to solve fourth-degree equations. Indeed, Cardano's work is considered the formal beginning in the investigation of equations.

After these successful efforts in the resolution of cubic and quartic polynomials, many mathematicians tried to find a general formula for the quintic equation [20]. Using Joseph Louis Lagrange's (1736–1813) approach on permutations, Paolo Ruffini (1765–1822) almost demonstrated the insolubility by radicals of the general polynomial equations of degree five or higher [2]. His proofs contained several mistakes which were fixed later in 1823 by Niels Henrik Abel (1802–1829) [23]. Finally, Évariste Galois (1811–1832) developed a general method to determine when an arbitrary polynomial equation has solutions by radicals [22].

3. Ruler-and-compass constructions

The representation of the solutions of equations by means of radicals is an interesting problem related to the problem of constructibility of geometric figures by ruler and compass. For the sake of completeness, we devote the present section to outline the relevant relationships between these two problems, since an in-depth treatise is not part of the aims of this manuscript (see [25] for a formal study).

The ancient Greek used only an ungraded ruler and a compass to construct geometric figures. The rules for performing these constructions are the following [1]:

- Given two previously constructed points, one can construct the line segment joining them; evidently, if this segment intersects a line segment previously constructed, then one readily constructs their point of intersection.
- Given a previously constructed segment and a given point, we can construct a circle with center at the point and radius equal to the length of the segment. Moreover, if the circle intersects a line segment or a circle previously constructed, then their intersection points are thus constructed.
- We can construct new points by intersecting a previously constructed line or circle, with a previously constructed segment extended in both directions.
- These rules of constructibility can only be applied a finite number of times.

Example 1. The following are examples of ruler-and-compass constructions [26]:

(a) A line perpendicular to a previously constructed line.
(b) The bisection of an angle.
(c) Finding the midpoint of a segment. □

We say a *length is constructible* if it can be obtained from a finite number of applications of the ruler-and-compass rules. We say that a *number is constructible* if a segment of such length is constructible. Clearly, any positive integer number n is constructible, its length being obtained through the juxtaposition of n segments of unit length. Example 1(c) shows that $\frac{1}{2}$ in particular and, in general, any rational number can also be built with a ruler and a compass. Moreover, if $a \in \mathbb{R}^+$ can be constructed, then so can $\sqrt{a}$, as shown by Figure 2.

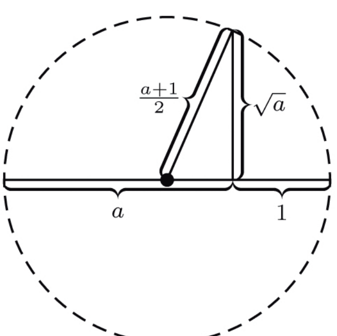


FIGURE 2. Ruler-and-compass construction of $\sqrt{a}$.

Remark 2. The number $\sqrt[3]{2}-1$ is not constructible using ruler and compass. Thus, for an angle θ equal to $\cos^{-1}(\sqrt[3]{2}-1)$, the number $\cos\theta$ cannot be expressed in terms of integer numbers, the four elementary operations and square roots, exclusively. In fact, the presence of cubic roots is necessary to provide such representation. We are interested in deciding whether the number $\cos(\sqrt[3]{2}\pi)$ is expressible by means of radicals. □

3.1. **De Moivre's method.** Abraham de Moivre (1667–1754) was one of the first mathematicians to investigate the roots of the equation $x^n = 1$, for $n \in \mathbb{Z}^+$. These special roots are called the *nth roots of* 1, and they are given by the well-known de Moivre's formula [11]. Among many other mathematical achievements [24], de Moivre proved that the roots of the equation

$$x^5 = 1 \tag{2}$$

can be expressed by radicals.

Since $x_1 = 1$ is a solution of (2) then $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$. In this way, the expression to be solved is $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Dividing by x^2, we obtain

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Using the change of variable $y = x+1/x$, one readily reaches the equation $y^2+y-1 = 0$, whose solutions are the numbers $y_1 = (\sqrt{5}-1)/2$ and $y_2 = -(\sqrt{5}+1)/2$. In terms of the original variable x, one obtains the following equations:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0, \qquad x^2 - y_2 x + 1 = 0.$$

Using again the general formula for second-degree equations, we obtain the other four roots:

$$x_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \frac{1}{4} i \sqrt{\sqrt{20}+10}, \qquad x_3 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{4} i \sqrt{10-\sqrt{20}},$$
$$x_4 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{4} i \sqrt{10-\sqrt{20}}, \qquad x_5 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4} i \sqrt{\sqrt{20}+10}.$$

This discussion clearly illustrates the existence of quintic equations whose solutions can be expressed using radicals.

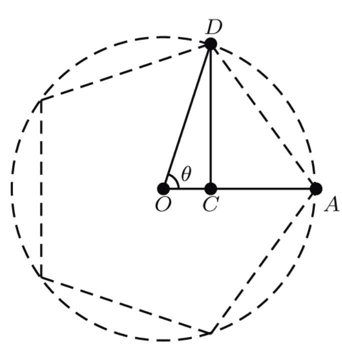


FIGURE 3. Ruler-and-compass construction of the pentagon. In this figure, $\theta = 2\pi/5$ and the segment OC has length equal to $\cos(2\pi/5)$.

The case of the equation $x^6 = 1$ is trivial. Indeed, notice that we may rewrite it as $(x^2)^3 = 1$. If we let $y = x^2$, then $y^3 = 1$. As before, since 1 is a solution for this last equation, then the problem reduces to solving $y^2 + y + 1 = 0$. Using the quadratic formula, one readily obtains that $y_1 = -(1+i\sqrt{3})/2$ and $y_1 = -(1-i\sqrt{3})/2$, whence the following equations result:

$$x^2 = 1, \qquad x^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad x^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

The six solutions to these equations are

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x_4 = 1, \qquad x_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad x_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Remark 3. Using the same method to solve (2), de Moivre proved that the seventh roots of unity can also be expressed by radicals [26], though cubic roots of complex numbers appear in this case. □

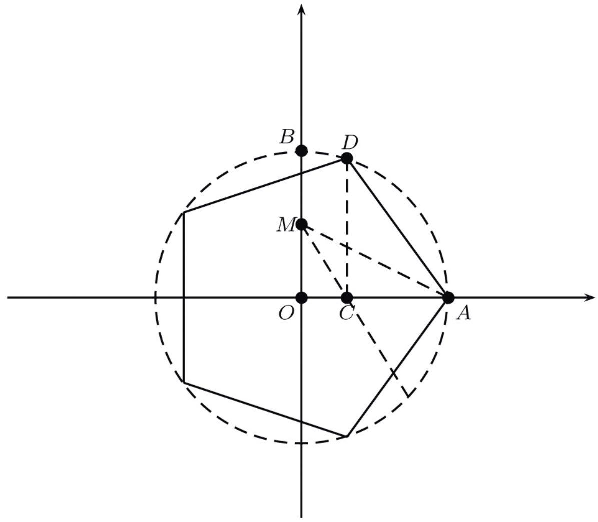


FIGURE 4. A method for the ruler-and-compass construction of the pentagon.

3.2. **Construction of the regular pentagon.** The ruler-and-compass construction of a regular pentagon is carried out in Figure 3, where $\theta = 2\pi/5$. One readily sees that the pentagon is constructible if the segment OC (which has length equal to $\cos(2\pi/5)$) can be constructed. In fact, it suffices to trace a line perpendicular to the segment OA that passes through the point C, in order to determine D (whose x- and y-coordinates are $\cos(2\pi/5)$ and $\sin(2\pi/5)$, respectively). In this way, the segment AD becomes one of the sides of the regular pentagon. On the other hand, de Moivre's formula guarantees that $\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$ is a root of Equation (2), which means that either $\cos\theta$ is equal to $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, or $-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$. Consequently, $\cos\theta = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. Since 5 is constructible then so is $\sqrt{5}$; thus, $\cos\theta$ can be constructed using ruler and compass. In fact, the construction can be performed following the rules of Example 1 (see Figure 4):

I Consider a unit circle with center O.
II Draw a segment of line OA, and a perpendicular segment OB of the same length of the segment OA, that passes through O.
III Find the midpoint M of the segment OB, and trace the segment AM.
IV Bisect the angle OMA, and let C be the point of intersection with the segment OA.
V Trace a segment perpendicular to OA that passes through C, and let D be the point of intersection with the unit circle. In this way, D and A will be two vertices of the pentagon.

Before we close this section, it is worth mentioning that the regular heptagon cannot be constructed by ruler and compass. This follows from the fact that the number $2\cos(2\pi/7)$ is a zero of the irreducible cubic polynomial $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

4. Vandermonde's method

In the present section, we will show that the method developed by Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) [8] can be adapted to establish that the roots of the equation $x^{11} = 1$ may be represented through radicals. Our approach will hinge on the use of Lagrange's resolvent.

One of the first successful efforts to relate the coefficients of a polynomial to its roots was achieved by François Viète. In general, he considered a polynomial of degree n over $\mathbb{R}$ of the form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{3}$$

By the Fundamental Theorem of Algebra, this polynomial has n (not necessarily different) complex roots which may be denoted by $x_1, x_2, \dots, x_n$. Viète established that the coefficient a_{n-k} satisfies the formula

$$\sum_{1\le m_1<m_2<\ldots<m_k\le n}\prod_{i=1}^{k} x_{m_i} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n},$$

for each $k = 1, 2, \dots, n$. However, Lagrange's contributions to the investigation of radical representations of roots of polynomials were more interesting and innovative. Indeed, while searching for a general formula to find the roots of polynomials of degree n, Lagrange was one of the first mathematicians to notice the importance of the symmetries of the roots of polynomials. In our approach, we take a fresh start by considering a general polynomial of the form (3).

Let $\eta_1, ..., \eta_n$ be the roots of the polynomial $p(x)$. The Lagrange resolvent [15] is defined by

$$t(w) = \eta_1 + w\eta_2 + w^2\eta_3 + \cdots + w^{n-1}\eta_n,$$

where w is an nth root of 1. It is not difficult to verify that

$$\eta_j = \frac{1}{n}\sum_{w} w^{-(j-1)} t(w), \tag{4}$$

where the summation runs over all the roots of unity. As we noticed before, it suffices to study the roots of the cyclotomic polynomial

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0. \tag{5}$$

Dividing this polynomial by x^4 and using the change of variable $y = x + 1/x$, we obtain the quintic equation

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0. \tag{6}$$

For each $\theta \in \mathbb{R}$ define $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Since the roots of Equation (5) are of the form $e^{2k\pi i/11}$ for $k = 1, \dots, 11$, then the roots of (6) take the form

$$\begin{aligned} e^{2k\pi i/11} + \frac{1}{e^{2k\pi i/11}} &= \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + \cos\left(-\frac{2k\pi}{11}\right) + i\sin\left(-\frac{2k\pi}{11}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right). \end{aligned}$$

Let $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ be the roots of (6). By letting

$$\eta_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right), \quad \eta_2 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{11}\right),$$
$$\eta_3 = 2\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right), \quad \eta_4 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{11}\right), \quad \eta_5 = 2\cos\left(\frac{10\pi}{11}\right),$$

and using the formula $2\cos\theta\cos\varphi = \cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)$, Vandermonde proved the following relations between the roots:

$$\begin{cases} \eta_1^2 = \eta_2 + 2, & \eta_2^2 = \eta_4 + 2, & \eta_3^2 = \eta_5 + 2, \\ \eta_1\eta_2 = \eta_1 + \eta_3, & \eta_1\eta_3 = \eta_2 + \eta_4, & \eta_1\eta_4 = \eta_3 + \eta_5, \\ \eta_2\eta_3 = \eta_1 + \eta_5, & \eta_2\eta_4 = \eta_2 + \eta_5, & \eta_2\eta_5 = \eta_3 + \eta_4, \\ \eta_3\eta_4 = \eta_1 + \eta_4, & \eta_3\eta_5 = \eta_2 + \eta_3, & \eta_4^2 = \eta_3 + 2, \\ \eta_4\eta_5 = \eta_1 + \eta_2, & \eta_5^2 = \eta_1 + 2, & \eta_1\eta_5 = \eta_4 + \eta_5. \end{cases} \tag{7}$$

Surprisingly enough, Vandermonde discovered that the permutation

$$\eta_1 \mapsto \eta_2 \mapsto \eta_4 \mapsto \eta_3 \mapsto \eta_5 \mapsto \eta_1 \tag{8}$$

of the roots, preserves the relations between them. For example, if we apply this permutation to the expression $\eta_1\eta_4 = \eta_3+\eta_5$, then the resulting relation $\eta_2\eta_3 = \eta_5+\eta_1$ is also a valid identity, according to the list (7).

The Lagrange resolvent of (6) is given by

$$V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5) := t(w^k) = \eta_1 + w^k\eta_2 + w^{2k}\eta_3 + w^{3k}\eta_4 + w^{4k}\eta_5,$$

for $k = 1,\dots,5$ [2], with $w = e^{2\pi i/5}$. The relations (7) imply that

$$\begin{aligned} V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5 &= \left(\eta_1 + w^k\eta_2 + w^{2k}\eta_3 + w^{3k}\eta_4 + w^{4k}\eta_5\right)^5 \\ &= C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + C_3\eta_3 + C_4\eta_4 + C_5\eta_5 + C_6, \end{aligned}$$

where the coefficients C_i are polynomial functions in w. Four applications of the permutation (8) yield

$$\begin{aligned} V_k(\eta_2,\eta_4,\eta_5,\eta_3,\eta_1)^5 &= C_1\eta_2 + C_2\eta_4 + C_3\eta_5 + C_4\eta_3 + C_5\eta_1 + C_6, \\ V_k(\eta_4,\eta_3,\eta_1,\eta_5,\eta_2)^5 &= C_1\eta_4 + C_2\eta_3 + C_3\eta_1 + C_4\eta_4 + C_5\eta_2 + C_6, \\ V_k(\eta_3,\eta_5,\eta_2,\eta_1,\eta_4)^5 &= C_1\eta_3 + C_2\eta_5 + C_3\eta_2 + C_4\eta_1 + C_5\eta_4 + C_6, \\ V_k(\eta_5,\eta_1,\eta_4,\eta_2,\eta_3)^5 &= C_1\eta_5 + C_2\eta_1 + C_3\eta_4 + C_4\eta_2 + C_5\eta_3 + C_6. \end{aligned} \tag{9}$$

On the other hand, an application of the permutation (8) to $V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)$ results in the identities

$$\begin{aligned} V_k(\eta_2,\eta_4,\eta_5,\eta_3,\eta_1) &= \eta_2 + w^k\eta_4 + w^{2k}\eta_3 + w^{3k}\eta_5 + w^{4k}\eta_1 \\ &= w^{-1}\left(\eta_2 w + w^{2k}\eta_4 + w^{3k}\eta_3 + w^{4k}\eta_5 + w^{5k}\eta_1\right) \\ &= w^{-1}V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5). \end{aligned}$$

As a consequence,

$$\begin{aligned} V_k(\eta_2,\eta_4,\eta_5,\eta_3,\eta_1)^5 &= w^{-5}V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5 \\ &= V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5, \end{aligned}$$

that is, the permutation (8) leaves $V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5$ invariant. This and Equations (9) establish that

$$5V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5 = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5)(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5) + 5C_6.$$

But the coefficient of y^4 in (6) is equal to 1, so $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 = 1$ [27]. Thus,

$$V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5 = \frac{1}{5}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5) + C_6.$$

As a consequence, $V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5$ is expressed in terms of a polynomial that depends on ω, which is a 5th root of 1. Therefore, an application of de Movrie's formula yields that $V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5$ can also be expressed in terms of radicals. Finally, applying Lagrange's formula (4), we obtain that

$$\eta_j = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}\omega^{-(j-1)k}\sqrt[5]{V_k(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^5},$$

for every $j = 1,\dots,5$. We conclude that all the 11th roots of 1 can also be expressed using radicals.

5. Gauss' method

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) established many important contributions to the theory of equations. His idea of congruence, for instance, has been used in the theory of numbers, and it has been extended to other algebraic scenarios [19]. Recall that two integer numbers a and b are congruent modulo an integer $n \neq 0$ if $a - b$ is divisible by n. Gauss denoted this relation by $a \equiv b \bmod n$.

Another important concept introduced by Gauss was that of a primitive root. An integer number g is called a *primitive root modulo* a prime number p if $g^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ and $g^i \not\equiv 1 \bmod p$, for every $i = 1,\dots,p-2$. For every prime number p there is a primitive root g modulo p, and $g^0, g^1, g^2, \dots, g^{p-2}$ are congruent with 1, 2, 3,…,$p-1$ modulo p (the congruences are not necessarily in order). This induces the function $\vartheta : \{1,2,\dots,p-1\} \to \{0,1,2,\dots,p-2\}$, given by

$$g^{\vartheta(k)} \equiv k \bmod p. \tag{10}$$

Example 4. If $p = 11$ then 2 is a primitive root and, in this case,

$$\begin{array}{ll} 2^0 \equiv 1 \bmod 11, & 2^9 \equiv 6 \bmod 11, \\ 2^1 \equiv 2 \bmod 11, & 2^7 \equiv 7 \bmod 11, \\ 2^8 \equiv 3 \bmod 11, & 2^3 \equiv 8 \bmod 11, \\ 2^2 \equiv 4 \bmod 11, & 2^6 \equiv 9 \bmod 11, \\ 2^4 \equiv 5 \bmod 11, & 2^5 \equiv 10 \bmod 11. \end{array} \tag{11}$$

□

Let $p > 2$ be a prime number, and consider now the equation

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0. \tag{12}$$

Dividing $\Phi_p(x)$ by $x^{(p-1)/2}$ and using the change of variable $y = x + 1/x$, we obtain

$$\Psi_{(p-1)/2}(y) = \frac{\Phi_p(x)}{x^{(p-1)/2}} = 0, \tag{13}$$

which is an equation of degree $(p-1)/2$. Let ζ be a primitive pth root of 1, that is, let $\zeta = e^{2\pi i/p}$. Then the roots of (13) take on the form $\eta_j = \zeta^j + \frac{1}{\zeta^j} = \zeta^j + \zeta^{p-j}$, where $j = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Equation (10) yields that $\eta_j = \zeta^{g^{\vartheta(j)}} + \zeta^{g^{\vartheta(p-j)}}$. The rule of assignment

$$\zeta^{g^0} \mapsto \zeta^{g^1} \mapsto \zeta^{g^2} \mapsto \cdots \mapsto \zeta^{g^{p-2}} \mapsto \zeta^{g^0} \tag{14}$$

implies now that $\zeta^{g^{\vartheta(j)}} + \zeta^{g^{\vartheta(p-j)}} \mapsto \zeta^{g^{\vartheta(j)+1}} + \zeta^{g^{\vartheta(p-j)+1}}$ which, in turn, induces a permutation on the roots $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{(p-1)/2}$, namely,

$$\eta_1 \mapsto \eta_{\sigma(1)} \mapsto \eta_{\sigma(2)} \mapsto \cdots \mapsto \eta_{\sigma((p-1)/2)} \mapsto \eta_1. \tag{15}$$

Example 5. If $\zeta = e^{2\pi i/11}$, then $\eta_1 = \zeta + \zeta^{10}$, $\eta_2 = \zeta^2 + \zeta^9$, $\eta_3 = \zeta^3 + \zeta^8$, $\eta_4 = \zeta^4 + \zeta^7$, and $\eta_5 = \zeta^5 + \zeta^6$. Using (11) and (14) we deduce that

$$\begin{array}{lll} \eta_1 & = & \zeta^{2^0} + \zeta^{2^5} \mapsto \zeta^{2^1} + \zeta^{2^6} = \eta_2, \\ \eta_2 & = & \zeta^{2^1} + \zeta^{2^6} \mapsto \zeta^{2^2} + \zeta^{2^7} = \eta_4, \\ \eta_3 & = & \zeta^{2^8} + \zeta^{2^3} \mapsto \zeta^{2^9} + \zeta^{2^4} = \eta_5, \\ \eta_4 & = & \zeta^{2^2} + \zeta^{2^7} \mapsto \zeta^{2^3} + \zeta^{2^8} = \eta_3, \\ \eta_5 & = & \zeta^{2^4} + \zeta^{2^9} \mapsto \zeta^{2^5} + \zeta^{2^{10}} = \zeta^{2^5} + \zeta^{2^0} = \eta_1. \end{array}$$

Comparing these assignments with (8), we readily check that this is the same permutation discovered by Vandermonde. □

Let $\omega = e^{4\pi i/(p-1)}$ be a primitive $[(p-1)/2]$th root of 1, and let

$$V_k\left(\eta_1, \ldots, \eta_{\frac{p-1}{2}}\right) = \sum_{j=1}^{(p-1)/2} \omega^{(j-1)k} \eta_j,$$

for each $k = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$, be the Lagrange resolvent. The permutation (15) leaves the following function (actually, a polynomial in the variable ω) invariant:

$$V_k\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\frac{p-1}{2}}\right)^{(p-1)/2}.$$

From Lagrange's formula (4), it follows that

$$\eta_j = \frac{2}{p-1}\left(\sum_{k=1}^{(p-1)/2} w^{-(j-1)k} \sqrt[(p-1)/2]{V_k\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\frac{p-1}{2}}\right)^{(p-1)/2}}\right),$$

which shows that the roots of (12) are expressible in terms of radicals if ω is. We conclude that the roots η_j can be expressed through radicals.

Gauss employed induction to prove that the roots of $x^n = 1$ can be expressed by means of radicals. The cases $n = 1, 2$ being immediate, one supposes that the result is true for $k < n$. If n is not prime, then $n = uv$, for suitable integer numbers u and v. Let $x_1, \dots, x_u$ and $y_1, \dots, y_v$ be the uth and vth roots of 1, respectively. Then, $x_j \sqrt[u]{y_k}$, for $j = 1, \dots, u$ and $k = 1, \dots, v$, are the roots of $x^n = 1$. Thus, we can suppose that n is a prime number, in which case, the conclusion is reached from the previous discussion in view that, by hypothesis, $\omega = e^{4\pi i/(p-1)}$ is a primitive $[(p-1)/2]$th root of 1, so expressible in terms of radicals. An excellent reference for a rigorous proof of Gauss method is [26]

6. Closing remarks

Let p and q be positive integers. The division algorithm states that there exist positive integers k and r, such that $p = kq + r$ and $0 \leq r < q$. Using the trigonometric identities

$$\begin{aligned} \sin\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \\ \cos\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \\ \cos(\theta+\phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi), \end{aligned}$$

we obtain

$$\sin\left(\frac{p\pi}{q}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{2r}{q}\pi\right)}{2}}, \quad \cos\left(\frac{p\pi}{q}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{2r}{q}\pi\right)}{2}}.$$

Since all of the nth roots of 1 are given by de Moivre's formula and they can be expressed using radicals, then $\sin(p\pi/q)$ and, thus, also $\cos(p\pi/q)$, can be written by means of radicals.

Notice that the solutions of Equation $x^n = 1$ may be represented as the n vertices of a regular polygon. Using this fact, Gauss [7] concluded that a regular polygon with n vertices is constructible with ruler and compass if n is of the form $2^m p_1 p_2 \cdots p_k$, where the numbers $p_1, p_2, \dots, p_k$ are different prime numbers, and each of them assumes the form $2^{2^j} + 1$ (that is, Fermat's primes [4]). The converse is due to Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) [17]. In particular, it is impossible to construct a regular polygon of 7, 9, 11 and 13 vertices, using ruler and compass.

As we mentioned in Section 2, Abel showed that there does not exist a general formula for the quintic, but it was Évariste Galois who provided the complete solution to the problem of solubility of equations through radicals. More precisely, given a polynomial equation, Galois associates a unique algebraic object, namely, its *Galois group*, and establishes that the equation is soluble by means of radicals if and only if the Galois group is soluble [26].

To close this work, the authors would like to state that they have performed an exhaustive research on available methods and approaches to try to solve the problem under consideration. Instead, they have acquired some historical perspective of the problem, and the present manuscript is a summary of what they consider relevant developments toward its satisfactory solution. What began as an undergraduate project (to prove that $\sin(p\pi)$ and $\cos(p\pi)$ is expressible in terms of radicals for $p \in \mathbb{Q}$), turned out to be a more general task in which the authors have not been able to elucidate the way to apply certain historical and traditional approaches. Remark 2 raises the following open question.

Problem 6. Characterize those $p \in \mathbb{R}$ such that $\sin(p\pi)$ and $\cos(p\pi)$ have a representation in terms of radicals.

At the closure of the present manuscript, the authors have learned through private communications that G. Villa and M. Rzedowski, professors of the Department of Automatic Control at the Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), Mexico, have successfully established the existence of an infinite number of angles θ for which $\sin\theta$ and $\cos\theta$ cannot be expressed through radicals. However, to the best of our knowledge, Problem 6 has not been solved yet.

Acknowledgments. The authors would like to mention that one of the referees pointed out that the conclusions of Section 6 could be reached using other approaches, like de Moivre's formula in the form $[\cos(p\pi/q) + \sin(p\pi/q)]^{2q} = 1$. Also, the authors would like to thank the anonymous reviewers and the associate editor in charge of handling this work, for their time, efforts and invaluable suggestions and criticism. All of their comments clearly contributed to improve the quality of this manuscript. J. Villa-Morales was partially supported by grant PIM14-4 of the Universidad Autónoma de Aguascalientes.

References

[1] Anglin, W. S. Mathematics, a concise history and philosophy. Springer-Verlag, New York, first edition, 1994.

[2] Ayoub, R.G. *Paolo Ruffini's contributions to the quintic.* Arch. Hist. Exact Sci., 23, 253–277, 1980.

[3] Bashmakova, I. G. & Smirnova, G. S. The beginnings and evolution of algebra. Number 23 in Dolciani Mathematical Expositions. Mathematical Association of America, United States of America, 2000.

[4] Coxeter, H. S. M. *Gauss as a geometer.* Hist. Math., 4, 379–396, 1977.

[5] Ekert, A. *Complex and unpredictable Cardano.* Int. J. Theor. Phys., 47, 2101–2119, 2008.

[6] Friberg, J. *Methods and traditions of babylonian mathematics: Plimpton 322, pythagorean triples, and the babylonian triangle parameter equations.* Hist. Math., 8, 277–318, 1981.

[7] Gauss, C.F. *Disquisitiones Arithmeticae (1801). English translation by Arthur A. Clarke*, 1986.

[8] Hamburg, R.R. *The theory of equations in the 18th century: The work of Joseph Lagrange.* Arch. Hist. Exact Sci., 16, 17–36, 1976.

[9] Heeffer, A. *On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism.* New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics. World Scientific Publishing, Singapore, pages 1–27, 2009.

[10] Høyrup, J. *Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra.* Hist. Math., 33, 4–42, 2006.

[11] Jeffrey, A. & Dai, H. H. Handbook of mathematical formulas and integrals. Academic Press, United States of America, fourth edition, 2008.

[12] Jones, I. & Pratt, D. *A substituting meaning for the equals sign in arithmetic notating tasks.* J. Res. Math. Educ., 43, 2–33, 2012.

[13] Katz, V. J. & Barton, B. *Stages in the history of algebra with implications for teaching.* Educ. Studies Math., 66, 185–201, 2007.

[14] Kaunzner, W. *On the transmission of mathematical knowledge to Europe.* Sudhoffs Arch., pages 129–140, 1987.

[15] Kiernan, B.M.. *The development of Galois theory from Lagrange to Artin.* Arch. Hist. Exact Sci., 8, 40–154, 1971.

[16] Laubenbacher, R. and Pengelley, D. *"Voici ce que j'ai trouvé:" Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem.* Hist. Math., 37, 641–692, 2010.

[17] Lützen, J. *Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result.* Hist. Math., 36, 374–394, 2009.

[18] Manders, K. *Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes.* Hist. Math., 33, 184–209, 2006.

[19] Mehrtens, H. *TS Kuhn's theories and mathematics: A discussion paper on the "new historiography" of mathematics.* Hist. Math., 3, 297–320, 1976.

[20] Patterson, S.J. *Eisenstein and the quintic equation.* Hist. Math., 17, 132–140, 1990.

[21] Pycior, H.M. *George Peacock and the British origins of symbolical algebra.* Hist. Math., 8, 23–45, 1981.

[22] Radloff, I. *Évariste Galois: principles and applications.* Hist. Math., 29, 114–137, 2002.

[23] Rosen, M.I. *Niels Hendrik Abel and equations of the fifth degree.* Amer. Math. Monthly, 102, 495–505, 1995.

[24] Schneider, I. *The introduction of probability into mathematics.* Hist. Math., 3, 135–140, 1976.

[25] Suzuki, J. *A brief history of impossibility.* Math. Magazine, 81, 27–38, 2008.

[26] Tignol, J.P. Galois' theory of algebraic equations. World Scientific Publishing Company Inc., Singapore, 2001.

[27] Uspensky, J.V. Theory of equations, volume 72. McGraw-Hill, New York, 1948.

Authors' address:
Universidad Autónoma de Aguascalientes,
Centro de Ciencias Básicas,
Departamento de Matemáticas y Física.
Avenida Universidad 940, Ciudad Universitaria
Aguascalientes, Ags., C.P. 20131, México.
e-mails: `sieg_macias@hotmail.com` (Siegfried Macías),
`jemacias@correo.uaa.mx` (J. E. Macías-Díaz),
`jvilla@correo.uaa.mx` (J. Villa-Morales).

Mixba'al Rev. Met. de Mat.
No. 1, Vol. VI, Junio de 2015, 23–39

LÓGICAS $\mathfrak{M}$-FINITAS

KINRHA AGUIRRE DE LA LUZ

Resumen. Revisamos el concepto de conjuntos admisibles, destacamos algunas de sus propiedades más importantes y ofrecemos algunos ejemplos relevantes de estos conjuntos. Con ayuda de los conjuntos admisibles, definimos una familia de lógicas infinitarias, las llamadas lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, donde $\mathfrak{M}$ hace referencia a un conjunto admisible fijo. Dichas lógicas tienen la posibilidad de aceptar un número infinito de conjunciones y disyunciones, lo que las hace más expresivas que la lógica de primer orden. Al mismo tiempo las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas preservan algunas nociones de la lógica de primer orden, lo cual está expresado en el teorema de compacidad de Barwise, cuya demostración es el propósito del presente trabajo.

1. Introducción

La teoría de los conjuntos admisibles surge como una alternativa para generalizar la teoría de recursión clásica a ámbitos más grandes que los números naturales. Dicha teoría resulta más que aceptable, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, es decir, de los axiomas usuales de ZFE (los axiomas de la teoría de conjuntos más el axioma de elección), pues permite desarrollar, en conjuntos admisibles de altura ordinal α, la llamada teoría de α-recursión.

Por tal motivo, comenzamos con las nociones básicas de recursividad. Mismas que empleamos para establecer el concepto de admisibilidad, el cual acompañamos de algunas propiedades y ejemplos significativos. En seguida, aprovechando los conjuntos admisibles, proponemos una familia de lógicas, que involucran conjunciones y disyunciones, no necesariamente finitas, con ciertas características.

El permitir conjunciones y disyunciones infinitas en nuestro lenguaje nos da como resultado una ganancia significativa en el poder expresivo. Ahora, el precio por este poder, es que en general es difícil que las lógicas infinitarias sean compatibles con compacidad, una herramienta importantísima en la teoría de modelos. Pues, entre otras cosas, el teorema de compacidad, proporciona un método útil para la construcción de modelos de cualquier conjunto de enunciados que sea finito consistente. Suele decirse que un conjunto de fórmulas es finito satisfacible si cualquiera de sus subconjuntos finitos es satisfacible.

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que las lógicas infinitarias no siempre mantienen compacidad. Supongamos que tenemos una lógica que acepta un número infinito de conjunciones y disyunciones, si tomamos un lenguaje $\mathcal{L}$ que contenga una cantidad numerable de constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots, c_\omega$ y hacemos a Σ el conjunto de enunciados:

$$\forall x \bigvee_{n<\omega} (x = c_n), \quad c_\omega \neq c_0, \quad c_\omega \neq c_1 \ldots$$

Encontramos que cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, pero Σ no tiene modelo, por lo que no cumple el teorema de compacidad.

En el caso de las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, buena parte de estas carencias se remedian con el teorema de compacidad de Barwise que será el motivo principal del presente trabajo. Por esta razón, y el hecho de que cuentan con α-recursión, las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, se tornan bastante atractivas, desde el punto de vista de la lógica y la teoría de conjuntos,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C70.
Palabras clave. Estructuras admisibles, conjuntos admisibles, lógicas $\mathfrak{M}$-finitas, teorema Rasiowa-Sikorski, compacidad, teorema de compacidad de Barwise.

pues logran una ganancia en el poder expresivo sin perder del todo compacidad. Más aún, con la demostración del teorema de compacidad de Barwise se logra desarrollar en gran medida la teoría de modelos en conjuntos.

Es pertinente subrayar que los conjuntos admisibles suponen axiomas más débiles que los axiomas de ZFE. Sin embargo, nuestro marco de referencia sí supone todos los axiomas de ZFE.

2. Preliminares

Esta sección tiene el propósito de motivar una generalización de la teoría de recursión a dominios trasfinitos. Esta generalización sentará las bases para poder definir las estructuras admisibles. Además, definimos algunas nociones básicas que serán usadas repetidamente en lo que resta de este trabajo.

Usualmente el dominio de la teoría ordinaria de recursión es ω, sin embargo el uso de la colección de conjuntos hereditarios finitos H_ω es una elegante manera de desarrollar dicha teoría, por lo que a continuación le dedicamos un breve análisis.

Definición 1. Decimos que un conjunto x es transitivo si para todo $z \in x$, se cumple $z \subseteq x$. El que un conjunto x sea transitivo lo denotamos por $\mathrm{Trans}(x)$. Formalmente $\mathrm{Trans}(x)$ denota a la fórmula $\forall z \in x(y \in z \to y \in x)$. Siempre que x sea un conjunto podemos construir un supraconjunto transitivo (el más pequeño posible) que contine a x. Este supraconjunto es llamado la cerradura transitiva de x ($\mathrm{CT}(x)$) y lo definimos de la siguiente manera:

$$\mathrm{CT}(x) = \bigcap\{z : x \subseteq z \wedge \mathrm{Trans}(z)\}.$$

Así $H_\omega = \{x : |\mathrm{CT}(x)| < \omega\}$ es la colección de conjuntos hereditariamente finitos. Sin embargo, podemos, también, definir H_ω de la siguiente manera:

$HF(0) = HF_0 = 0$

$HF(n+1) = HF_{n+1} = \{x | x \in Pot(HF(n)) \wedge |x| < \omega\}$

$H_\omega = HF(\omega) = HF_\omega = \bigcup_{n<\omega} HF_n$

Donde $Pot(HF_n)$ denota el conjunto potencia de HF_n, en general $Pot(x)$ es el conjunto potencia de x.

La prueba es por $\in$-inducción[1]. Para demostrar que $HF_\omega \subseteq H_\omega$ observemos que si u es un conjunto finito, entonces $\mathrm{CT}(u)$ resulta ser, también, un conjunto finito. Pues, si $u \in HF_\omega$, $u \in HF_n$ para algún $n \in \omega$, es decir u es finito. Asimismo, si $x \in u$, x es un conjunto finito (pues $x \in HF_m$ con $m < n$), entonces, por hipótesis de inducción $x' =\mathrm{CT}(x)$ es finito y sabemos que $\mathrm{CT}(u) = \bigcup_{x' \in u} x'$, y por lo tanto $|\mathrm{CT}(u)| = |\bigcup_{x \in u} x'| < \omega$. Por otro lado, si $|\mathrm{CT}(x)| < \omega$, debido a que siempre que $x \subseteq\mathrm{CT}(x)$, se tiene que $|x| < \omega$, al igual que $|y| < \omega$ para toda $y \in x$. Probando de esta manera que $H_\omega \subseteq HF_\omega$. En definitiva $HF_\omega = H_\omega$.

Dada la importante relación que guarda la teoría de recursión con las fórmulas Δ_1 es necesario incluir su definición, aunque sería conveniente, antes recordar el concepto de variable libre y cuantificador acotado.

Las variables libres de una fórmula φ son aquellas que aparecen en φ y no están cuantificadas, mientras que las variables que no son libres se llaman acotadas. Por ejemplo:

$\varphi \equiv \forall y R(x, y)$, y es acotada y x es libre.

$\varphi \equiv \forall x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$, no tiene variables libres.

La cuantificación acotada está relacionada con el hecho de suponer que nuestro lenguaje $\mathcal{L}$, contiene entre sus símbolos, el de pertenencia $\in$. Se acostumbra abreviar

[1]Esquema inductivo para $\in$: sea $\Phi(x, \vec{v})$ una fórmula de LTC (el Lenguaje de la Teoría de Conjuntos). Entonces la siguiente afirmación es válida:

$$\forall x(\forall y \in x(\Phi(y, \vec{w}) \Rightarrow \Phi(x, \vec{w}))) \Rightarrow \forall x \Phi(x, \vec{w}).$$

Es decir, si para cualquier conjunto x la validez de la propiedad Φ en x se sigue de su validez en todos los conjuntos pertenecientes a x, entonces Φ se cumple, para todo conjunto.

las fórmulas de la forma $\forall x(x \in z \to \varphi(x))$ y $\exists x(x \in z \wedge \psi(x))$ con $\forall x \in z\varphi(x)$ y $\exists x\psi(x)$ respectivamente. Estas abreviaciones son conocidas como fórmulas con cuantificadores acotados.

Aclarada la noción de variable libre y cuantificadors acotados, nos disponemos a definir[2] las fórmulas Δ_1, para tal fin usamos la jerarquía usual de fórmulas de Levy:

φ es Π_0=Σ_0 si todos sus cuantificadores están acotados.

φ es Σ_{n+1} si es del tipo $\exists\vec{x}\psi$ donde ψ es una Π_n-fórmula.

φ es Π_{n+1} si es del tipo $\forall\vec{x}\psi$ donde ψ es una Σ_n-fórmula.

φ es Δ_n si tanto φ como $\neg\varphi$ son Σ_n.

Una fórmula es $\Sigma_n(\mathbb{M})$, si es Σ_n y sus parámetros pertenecen a $\mathbb{M}$. De manera semejante definimos $\Pi_n(\mathbb{M})$ y $\Delta_n(\mathbb{M})$.

Por ejemplo, sea el lenguaje $\mathcal{L}_N = \langle <, \in, +, 0, 1\rangle$. Entonces:

$\forall x \in 1(x = 0)$, $\exists x \in 1(x = 0)$ y $(x = 0 \vee x = 1)$ son fórmulas Σ_0,

$\exists x(0 < x)$ y $\exists x\forall y \in 1(y < x)$ son fórmulas Σ_1,

$\forall x(x < x + 1)$ y $\forall x\exists y \in 1(y < x)$ son fórmulas Π_1 y

$\exists x\forall y(x < y)$ y $\exists x\exists y\forall z(((\neg(z = 0)) \to x < z) \wedge z < y)$ son fórmulas Σ_2.

Definición 2. La clase de Σ-fórmulas es la menor clase Y que contiene a todas las fórmulas Δ_0, es cerrada respecto conjunción, disyunción, cuantificación acotada y además satisface:

Si $\varphi \in Y$, también $\exists u\varphi \in Y$, para cualquier variable u.

Por ejemplo, la fórmula $\forall x \in a\exists b(\mathrm{Trans}(b) \wedge x \in b)$ es una Σ-fórmula. Vale la pena decir que este ejemplo nos ilustra que, en general, el conjunto de Σ-fórmulas difiere del conjunto de Σ_1-fórmulas. Sin embargo en presencia de ZFE, si ψ es una Σ-fórmula siempre podemos encontrar una Σ_1-fórmula ψ' tal que $\psi \leftrightarrow \psi'$. Esta es una de las propiedades que deseamos que nuestras estructuras admisibles conserven.

Decimos que una relación $R \subseteq H_\omega^n$ es recursiva enumerable (r.e. o "H_ω-r.e.") si y sólo si R es Σ_1-definible sobre H_ω, es decir si existe una Σ_1-fórmula φ, con parámetros en H_ω^n, tal que si $\vec{x} \in H_\omega^n$, entonces $R(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})$. Análogamente, llamamos a R recursiva (o H_ω-recursiva) si y sólo si es Δ_1-definible (es decir tanto R como su complemento $\neg R$ son Σ_1-definibles). Si $R \subseteq \omega^n$, decimos que es r.e. si es la restricción de una relación R' H_ω-r.e. sobre ω, análogamente definimos las relaciones $R \subseteq \omega^n$ recursivas.

Lo anterior sugiere una manera de relativizar el concepto de la teoría de recursión para dominios trasfinitos: sea $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{B}, \in, B_1, B_2, \ldots\rangle$ una estructura transitiva (es decir $\mathbb{B}$ es un conjunto transitivo), con una cantidad finita o infinita de predicados. Definimos:

$R \subseteq \mathbb{B}^n$ es $\mathfrak{B}$-r.e (respectivamente $\mathfrak{B}$-rec) si y sólo si R es Σ_1 (respectivamente Δ_1) definible sobre $\mathbb{B}$.

Se debe tener en cuenta que los elementos de ω y de H_ω son conjuntos finitos, por ello resulta muy importante el concepto de finito. Sin embargo nuestra estructura $\mathfrak{B}$ puede contener conjuntos infinitos, pues sólo hemos pedido que $\mathbb{B}$ sea transitiva. Si observamos con atención, y con especial atención al caso H_ω, expresar que un conjunto u sea finito, es equivalente a decir que $u \in H_\omega$, por lo que, relativizando:

$$u \text{ es } \mathfrak{B} - \text{finito si y sólo si } u \in \mathbb{B}.$$

Aclarados los conceptos de Σ_n-fórmula y $\mathfrak{B}$-finito, cuando $\mathfrak{B}$ es una estructura, nos disponemos a definir las estructuras admisibles.

3. Conjuntos Admisibles

El objetivo, de este apartado es presentar a las estructuras admisibles. Se pretende que la estructura $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{M}, \in, A_1, A_2 \ldots\rangle$, que estamos por definir, cumpla con las siguientes propiedades básicas:

[2]A lo largo del trabajo utilizamos Σ_n-fórmulas para denotar las fórmulas que son de la forma Σ_n. Análogamente para las fórmulas Π_n y Δ_n.

I.: Si A es recursivo y u es $\mathfrak{M}$-finito, entonces $A \cap u$ es $\mathfrak{M}$-finito.
II.: Si u es finito y $F : u \to N$ es recursiva, entonces la imagen de u respecto a F ($F''u$) es $\mathfrak{M}$-finita.

Este tipo de estructuras son llamadas estructuras admisibles y fueron caracterizadas por Kripke y Platek con la siguiente definición.

Definición 3. Una estructura transitiva $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{M}, \in A_1, A_2, ...\rangle$ es admisible si cumple con los siguientes axiomas:

1. $\emptyset, \{x, y\}, \bigcup x$ pertenecen a $\mathbb{M}$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{M}$.
2. Σ_0-comprensión:
   $x \cap \{z|\varphi(z)\}$, es un conjunto, siempre que φ sea una Σ_0-fórmula.
3. Σ_0-remplazo:
   $\forall x \exists y \varphi(x, y) \to \forall u \exists v \forall x \in u \exists y \in v \varphi(x, y)$, cuando φ sea una Σ_0-fórmula.

En particular, un conjunto A transitivo es admisible si $\langle A, \in\rangle$ es una estructura admisible.

Observemos que debido a la transitividad, $\mathfrak{M}$ cuenta además con los axiomas de extensionalidad y fundación[3]. Notemos también que en las estructuras admisibles, gracias a los axiomas de vacío, par y unión, siempre pueden definirse los números naturales. Recordemos que $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\}$, y en general $n + 1 = n \cup \{n\}$.

La definición de estructuras admisibles implica las propiedades básicas **I** y **II**, cosa que mostramos mediante los tres lemas siguientes.

Lema 4. *Sean $u \in \mathbb{M}$ y R un conjunto definido mediante una $\Delta_1(\mathbb{M})$-fórmula, entonces $R \cap u \in \mathbb{M}$.*

Demostración. Sea R un conjunto definido mediante una $\Delta_1(\mathbb{M})$-fórmula, entonces tanto $R(x)$ como $\neg R(x)$ son $\Sigma_1(\mathbb{M})$-definibles, es decir, si $x \in \mathbb{M}$, entonces $R(x) \leftrightarrow \exists y R_0(y, x)$ y $\neg R(x) \leftrightarrow \exists y R_1(y, x)$ con R_0, R_1 fórmulas $\Sigma_0(\mathbb{M})$.

Es claro que $\forall x \exists y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x))$, y por lo tanto $\forall x \in u \exists y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x))$, y debido a que $\mathfrak{M}$ es admisible, podemos utilizar Σ_0-remplazo, lo que nos garantiza que existe $v \in \mathbb{M}$ tal que:

$$\forall x \in u \exists y \in v (R_0(y, x) \vee R_1(y, x)).$$

En vista de que $(\exists y \in v R_1(y, x))$ es una Σ_0-fórmula, aplicando Σ_0-comprensión, obtenemos:

$$u \cap R = u \cap \{x|\exists y \in v R_0(y, x)\} \in \mathbb{M}.$$

□

Lema 5. *Sea $\mathfrak{M}$ una estructura admisible, entonces satisface:*

$$\forall x \in u \exists y_1 \dots \exists y_n \varphi(x, \vec{y}) \to \exists v \forall x \in u \exists y_1 \in v \dots \exists y_n \in v \varphi(x, \vec{y}),$$

si φ es una Σ_0-fórmula.

Demostración. Supongamos $\forall x \in u \exists y_1 \dots \exists y_n \varphi(x, \vec{y})$. Debido a que $\mathfrak{M}$ admite el axioma de par podemos definir $w = \{y_1, \dots, y_n\}$ y por lo tanto se cumple $\forall x \exists w (x \in u \to \exists y_1 \dots \exists y_n \in w \varphi(x, \vec{y}))$ en $\mathfrak{M}$. Por Σ_0-remplazo, existe $v' \in \mathbb{M}$ tal que $\forall x \in u \exists w \in v' \exists y_1 \dots \exists y_n \in w \varphi(x, \vec{y})$. Para terminar, tomamos $v = \bigcup_{x \in u} v'$. □

Lema 6. *Sean $\mathfrak{M}$ una estructura admisible, $u \in \mathbb{M}$ y $u \subseteq dom(F)$, donde F es $\Sigma_1(\mathbb{M})$-definible; entonces $F''u \in \mathbb{M}$, donde $F''u$ es la imagen de u respecto a F.*

[3]Toda estructura transitiva es modelo del axioma de extensionalidad y del axioma de fundación.

Demostración. Sean $u \in \mathbb{M}$ y F una función definida mediante una $\Sigma_1(\mathbb{M})$-fórmula. Por lo que, $y = F(x) \leftrightarrow \exists z F'(z, y, x)$ donde F' es $\Sigma_0(\mathbb{M})$-fórmula. Usando el hecho de que $u \subseteq \mathrm{dom}(F)$, tenemos que $\forall x \in u \exists y(y = F(x))$, es decir $\forall x \in u \exists y(\exists z F'(z, y, x))$, por el lema anterior, existe v tal que $\forall x \in u \exists y \in v \exists z \in v F'(z, x, y)$.

Finalmente, hacemos:

$$F''u = v \cap \{y | \exists x \in u \exists z \in v F'(z, y, x)\}.$$

Notemos que $F''u \in \mathbb{M}$, pues $\mathfrak{M}$ admite Σ_0-comprensión. □

Los lemas 1. y 3. nos advierten que en estructuras admisibles realmente se cumplen Δ_1-comprensión y Σ_1-remplazo.

El siguiente teorema es uno de los objetivos de esta sección.

Teorema 7. *(Definición por Σ-recursión). Sean G un símbolo de una Σ-función de paridad $n+2$, con $n \geq 0$ y $\mathfrak{M}$ una estructura admisible. Es posible definir un nuevo símbolo de Σ-función F, en $\mathfrak{M}$, tal que para toda $x_1, \ldots, x_n, y$:*

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = G(x_1, \ldots, x_n, y, \{\langle z, F(x_1, \ldots, x_n, z)\rangle | z \in TC(y)\}).$$

Demostración. Primero vamos a probar que para toda $x_1, \ldots, x_n, y$ existe una f tal que:

1. f es una función $\wedge$ $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{TC}(y)$,
2. $\forall w \in \mathrm{dom}(f)(f(w) = F(x_1, \ldots, x_n, w))$ y
3. $F(x_1, \ldots, x_n, y) = G(x_1, \ldots, x_n, y, f)$.

Esto sugiere la fórmula para definir F. Para simplificar la notación, tomamos $n = 1$. Sea $P(x, y, z, f)$ el Σ-predicado dado por:

$$\forall a \in f \exists a_1 \in a \exists a_2 \in a(a_1 = \{y\} \wedge a_2 = \{y, z\} \wedge a = \{a_1, a_2\}) \wedge$$

$$\forall a \in f \forall b \in f(a_1 = b_1 \rightarrow a_2 = b_2)$$

$$\bigwedge \forall b \in f(b_1 \in \mathrm{TC}(y)) \wedge \forall x \in a \exists b \in f(b_1 = x)$$

$$\bigwedge \forall w \in \mathrm{TC}(y)(f(w) = G(x, w, f \restriction \mathrm{TC}(w))) \wedge z = G(x, y, f)^4.$$

Dicho de manera más clara, $P(x, y, z, f)$ simboliza:

$$f \text{ es una función } \wedge \mathrm{dom}(f) = \mathrm{TC}(y)$$
$$\wedge \forall w \in \mathrm{TC}(y)(f(w) = G(x, w, f \restriction \mathrm{TC}(w)))$$
$$\wedge z = G(x, y, f).$$

Afirmación (1):$\forall x \forall y \exists! z \exists f P(x, y, z, f)$. Donde el símbolo $\exists! z$ abrevia la expresión: existe un único z[5].

Para corroborar (1), es suficiente probar que para cualquier x:

I.: $\forall y \exists z \exists f P(x, y, z, f)$

II.: $(P(x, y, z, f) \wedge P(x, y, z', f')) \rightarrow (z = z' \wedge f = f')$.

---

[4]Para no alargar en demasía nuestra fórmula, a_1 y b_1 simbolizan las primeras coordenadas de a y b, respectivante y formalmente escribimos esto, mediante la fórmula $\exists a_1 \exists a_2(a = \langle a_1, a_2\rangle)$. Análogamente a_2 y b_2 representan las segundas coordenadas.

[5]$\forall x \forall y \exists! z \exists f P(x, y, z, f) \equiv (\forall x \forall y \exists z \exists f P(x, y, z, f)) \wedge (\exists z' P(x, y, z', f) \rightarrow z = z'))$.

Primero probaremos (II), por inducción sobre TC(y); supongamos que para $w \in$TC(y) existen a lo más un u y un g tal que $P(x,w,u,g)$. Supongamos que $P(x,y,z,f) \wedge P(x,y,z',f')$, entonces por definición de P, tenemos $z = G(x,y,f)$ y $z' = G(x,y,f')$, así, basta probar que $f = f'$. Mas, f y f' son funciones con el mismo dominio, por tanto es suficiente probar $f(w) = f'(w)$ para toda $w \in$TC(y). Sin embargo, también de la definición se consigue:

(i) $P(x,y,z,f) \wedge w \in \mathrm{TC}(y) \rightarrow P(x,w,f(w),f \restriction \mathrm{TC}(w))$.

Es decir $P(x,w,f(w),f \restriction \mathrm{TC}(w))$ y $P(x,w,f'(w),f' \restriction \mathrm{TC}(w))$, y usando la hipótesis de inducción, tenemos $f(w) = f'(w)$.

La prueba de (I) será también por inducción, esto es, para demostrar que se cumple $\forall y \exists z \exists f P(x,y,z,f)$ supondremos

$$\forall w \in \mathrm{TC}(y) \exists z \exists f P(x,w,z,f).$$

Ahora, por (II), sabemos que existe una única pareja u_w, g_w que satisface $P(x,w,u_w,g_w)$. En vista de que $\mathfrak{M}$ es admisible, podemos usar Σ- remplazo, para afirmar que la función:

$$f = \{\langle w, u_w \rangle | w \in \mathrm{TC}(y)\}$$

existe. En consecuencia, para probar $\forall y \exists z \exists f P(x,y,z,f)$, es suficiente probar $P(x,y,G(x,y,f),f)$ y esto, a su vez, se sigue de $\forall z \in TC(x)(f(z) = G(x,z,f \restriction \mathrm{TC}(z)))$. Considerando que $P(x,z,\, u_z, g_z)$, tenemos $f(z) = u_z = G(x,y,g_z)$. Así que lo que tenemos que mostrar es $f \restriction \mathrm{TC}(z) = g_z$. Si $w \in$dom(g_z) =TC(z), (i) implica $P(x,w,g_z(w),g_z \restriction \mathrm{TC}(w))$. Como consecuencia de $P(x,y,z,f) \wedge P(x,y,z',f') \rightarrow z = z' \wedge f = f'$, sabemos que $g_z(w) = u_w = f(w)$ y por consiguiente $g_z = f \restriction \mathrm{TC}(w)$, como se buscaba, lo que prueba $\forall y \exists z \exists P(x,y,z,f)$.

Ahora, introducimos un símbolo de Σ-función F, el cual está definido por:

$F(x,y) = z \leftrightarrow \exists f P(x,y,z,f)$, donde $\exists f P(x,y,z,f)$ es una Σ-fórmula.

De modo que $F(x,y) = G(x,y,f)$ y $P(x,y,G(x,y,f),f)$.

Finalmente, sólo necesitamos probar que $f = \{\langle z, F(x,z)\rangle | z \in \mathrm{TC}(y)\}$. Empero, esto se cumple por construcción.

□

Definimos $rk(x) = \sup\{rk(y) : y \in x\}$.

Nótese que el rango se puede definir, por recursión en cualquier admisible.

Proposición 8. *Sea $\mathfrak{M}$ una estructura admisible. Para cualquier Σ_1-fórmula φ existe una Σ_1-fórmula ψ tal que $\mathfrak{M} \vdash \forall x \in y \varphi \leftrightarrow \psi$* [6].

Demostración. Si φ es, en particular, una Σ_0-fórmula, no hay nada que probar. De modo que, sea $\varphi \equiv \exists v \phi$, donde ϕ es una Σ_0-fórmula. Consiguientemente, lo que tenemos que probar es que $\forall x \in y \exists v \phi$ es equivalente a una Σ_1-fórmula ψ. Con miras a acotar la variable v por un conjunto u, definimos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \{z | \phi(x,z) \wedge z \text{ de rango mínimo}\} & \text{si } \exists z \phi(x,z) \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En efecto, $f(x) \in \mathbb{M}$ para toda $x \in \mathbb{M}$, pues ϕ es una Σ_0-fórmula, y $\mathfrak{M}$ admite Σ_0-comprensión. Sea $u = \bigcup_{x \in y} f(x)$, se tiene que:

$$\mathfrak{M} \vdash \forall x \in y \exists v \phi \leftrightarrow \exists u \forall x \in y \exists v \in u \phi$$

Naturalmente, $\psi = \exists u \forall x \in y \exists v \in u \phi$. □

Es decir, según la proposición anterior, en estructuras admisibles cualquier Σ-fórmula es equivalente a una Σ_1-fórmula. Por tanto, los conjuntos admisibles admiten Σ-remplazo y Σ-recursión.

[6] Por $\mathfrak{M} \vdash \forall x \in y \varphi \leftrightarrow \psi$ entendemos, en un abuso de notación, que los axiomas de admisibilidad, vistos en la definición 2, prueban que $\forall x \in y \varphi \leftrightarrow \psi$ con ψ una Σ_1-fórmula.

Definición 9. El ordinal o altura ordinal de un conjunto admisible $\mathbb{A}$, denotado por $o(\mathbb{A})$, es el menor ordinal que no pertenece a $\mathbb{A}$. Un ordinal α es admisible si $\alpha = o(\mathbb{A})$ para algún conjunto admisible $\mathbb{A}$.

TEOREMA 10. *H_ω es el menor conjunto admisible.*

Demostración.

i): Primero confirmemos que H_ω es un conjunto admisible.

- **a):** H_ω es transitivo: supongamos que $y \in x \in H_\omega$, por lo que $|\mathrm{CT}(x)| < \omega$, ahora como $y \in x$, tenemos que $\mathrm{CT}(y) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, de donde $|\mathrm{CT}(y)| < \omega$, es decir $y \in H_\omega$.
- **b):** $\emptyset \in H_\omega$, pues $\emptyset$ es transitivo y $|\emptyset| < \omega$.
- **c):** Axioma de unión. Supongamos que $x \in H_\omega$, entonces $|x| < \omega$, por transitividad, tenemos $\cup x \subseteq \mathrm{CT}(x)$ de donde se sigue que $\mathrm{CT}(\cup x) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, por tanto $|\mathrm{CT}(\cup x)| < \omega$, o sea $\cup x \in H_\omega$.
- **d):** Axioma de par. Sean $x, y \in H_\omega$, entonces existe un n tal que tanto x como y pertenecen a HF_n, por lo que $\{x, y\} \in HF_{n+1}$, así que $\{x, y\} \in H_\omega$.
- **e):** Axioma de Σ_0-comprensión. Supongamos que $x \in H_\omega$ y φ es una Σ_0-fórmula, como $\mathrm{CT}(x \cap \{z|\varphi(z)\}) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, tenemos que $x \cap \{z|\varphi(z)\} \in H_\omega$.
- **f):** Axioma de Σ_0-remplazo. Supongamos que φ es una Σ_0-fórmula tal que $\forall x \exists y \varphi(x, y)$. Sea $a \in H_\omega$, queremos ver que $\exists v \forall x \in u \exists y \in v \varphi(x, y)$. Como $a \in H_\omega$, es finito, tiene k elementos: $x_1, \ldots, x_k$, y por hipótesis, para cada x_i existe y_i tal que $\varphi(x_i, y_i)$. Debido a que $y_1, \ldots, y_k \in H_\omega$, existe un n tal que $y_1, \ldots, y_k \in HF_n$, por lo que $\{y_1, \ldots, y_k\} \in HF_{n+1}$, lo que implica que $\{y_1, \ldots, y_k\} \in H_\omega$. Así $v = \{y_1, \ldots, y_k\}$.

ii): A fin de probar que H_ω es el menor admisible, supondremos que $\mathbb{A}$ es un conjunto admisible y demostraremos por inducción sobre n que cada $HF_n \subseteq \mathbb{A}$. Primeramente $HF_0 = \emptyset \subseteq \mathbb{A}$. Ahora supongamos que $a \in HF_{n+1}$, dicho de otra manera $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq HF_n$ $(k \in \omega)$, y por hipótesis de inducción $a \subseteq \mathbb{A}$, pues $\forall a_i \in \mathbb{A} (\forall i < k)$. Debido a que entre los axiomas que admite $\mathbb{A}$ se encuentra el de par tenemos que $a \in \mathbb{A}$, de modo que $HF_{n+1} \subseteq \mathbb{A}$. Por lo tanto $H_\omega = \bigcup_{n \in \omega} HF_n \subseteq \mathbb{A}$.

$\square$

Así H_ω es nuestro primer ejemplo de un conjunto admisible. El siguiente conjunto admisible que presentamos es una generalización de H_ω. Sea κ un cardinal infinito, definimos:

$$H(\kappa) = H_\kappa = \{a : |TC(a)| < \kappa\}.$$

Observemos que H_κ es un conjunto según ZFE, pues $H_\kappa \subseteq V_\kappa$[7] y V_κ ciertamente es un conjunto en ZFE. La demostración se basa en el hecho de que para cualquier conjunto x y para cualquier ordinal α, si $\alpha \leq rk(x)$, entonces $\alpha \subseteq rk[CT(x)]$. Por lo que, si $x \in H_\kappa$, entonces $|\mathrm{CT}(x)| < \kappa$, por lo que $\kappa \nsubseteq rk[\mathrm{CT}(x)]$, se tiene $rk(x) < \kappa$ y $x \in V_\kappa$.

TEOREMA 11. *Sea κ regular, entonces H_κ es admisible.*

Demostración.

- **a):** H_κ es transitivo: supongamos que $y \in x \in H_\kappa$, por lo que $|\mathrm{CT}(x)| < \kappa$, ahora como $y \in x$, tenemos que $\mathrm{CT}(y) \subseteq \mathrm{CT}(x)$, de donde $|\mathrm{CT}(y)| < \kappa$, es decir $y \in H_\kappa$.
- **b):** $\emptyset \in H_\kappa$, pues $\emptyset$ es transitivo y $|\emptyset| < \kappa$.

---

[7] V_κ se refiere a la jerearquía de von Neumann, definida recursivamente de la siguiente manera:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = Pot(V_\alpha)$
- $V_\delta = \cup_{\alpha<\delta} V_\delta$ para δ límite.

c): Axioma de unión. Supongamos que $x \in H_\kappa$, tenemos $\cup x \subseteq$CT(x) de donde se sigue que CT$(\cup x) \subseteq$CT(x), con lo cual nos aseguramos de que $\cup x \in H_\kappa$.

d): Axioma de par. Supongamos que x y $y \in H_\kappa$, entonces $|CT(x)| < \kappa$ y $|CT(y)| < \kappa$, sabemos que $CT(\{x, y\}) \subseteq CT(x) \cup CT(y) \cup x \cup y$, por lo que $|CT(x, y)| < \kappa$.

e): Axioma de Σ_0-comprensión. Supongamos que $x \in H_\kappa$ y φ es una Σ_0-fórmula, como CT$(x \cap \{z|\varphi(z)\}) \subseteq$CT$(x)$, tenemos que $x \cap \{z|\varphi(z)\} \in H_\kappa$.

f): Axioma de Σ_0-remplazo. Supongamos que φ es una Σ_0-fórmula tal que $\forall x \exists y \varphi(x, y)$. Sea $u \in H_\kappa$, queremos ver que existe un $v \in H_\kappa$ que cumple $\forall x \in u \exists y \in v\varphi(x, y)$. Por hipótesis, para cada $x_i \in u$ existe $y_i \in H_\kappa$ tal que $\varphi(x_i, y_i)$, por lo que $|y_i| < \kappa \quad (\forall i \in \sigma)$. Para construir dicho v fijamos un y_i para cada x_i tal que $\varphi(x_i, y_i)$, observemos que $|v| < \kappa$, debido a que $|u| = \sigma < \kappa$. Para terminar la demostración falta verificar que $|\text{CT}(v)| < \kappa$. Notemos que $\text{CT}(v) \subseteq \bigcup_{i\in\sigma}\text{CT}(y_i) \bigcup v$, entonces $|\text{CT}(v)| \leq |\bigcup_{i\in\sigma}\text{CT}(y_i) \bigcup v| < \Sigma_{i\in\sigma}|\text{CT}(y_i)| + |v| < \kappa$, pues κ es regular.

□

Teorema 12. *Para todo cardinal infinito κ el conjunto H_κ es admisible.*

Demostración. Sólo falta demostrar el caso donde κ es un cardinal singular. Los axiomas de par, unión, vacío y Σ_0-comprensión son análogos al caso donde κ es regular, pues nótese que si κ es singular, éste es el límite de una sucesión de cardinales sucesores (regulares). Probaremos, entonces, el axioma de Σ_0-remplazo. Supongamos que $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y)$ es verdadero en H_κ. Sea κ^+ el siguiente cardinal mayor que κ, por lo tanto $a \in H_{\kappa^+}$ y $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y)$ son verdaderos en H_{κ^+}. Tomemos $X =$CT$(a) \cup a$, dado que $a \in H_\kappa$, se sabe que $|X| < \kappa$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski, podemos encontrar una subestructura elemental $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{B}, \in \rangle$ admisible tal que $X \subseteq \mathbb{B}$ (por lo tanto $a \in \mathbb{B}$) y $|\mathfrak{B}| < \kappa$, y al ser κ^+ un cardinal regular el teorema anterior nos asegura que H_{κ^+} es admisible, y por consiguiente todas sus subestructuras son admisibles también. En particular $\mathfrak{B}$ es admisible, y lo por tanto, si $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y, z)$ entonces usando Σ_0-remplazo en $\mathfrak{B}$, tenemos que existe $b \in \mathbb{B}$ tal que:

$$\forall x \in a \exists y \in b\varphi(x, y).$$

Ahora sólo falta asegurarnos de que $b \in H_\kappa$. Sin embargo $\mathbb{B} \subseteq H_\kappa$, y por ello CT$(b) < \kappa$, lo que quiere decir que $b \in H_\kappa$. □

El teorema anterior nos proporciona un método efectivo para encontrar diversas estructuras admisibles: si $\mathfrak{M}$ es admisible, también lo son sus subestructuras elementales.

Corolario 13. *Todo cardinal κ es un ordinal admisible, esto se debe al hecho de que $H_\kappa \cap Or = \kappa$.*

□

En resumen, la teoría de los conjuntos admisibles es una subteoría de ZFE, la cual recupera muchos de sus aspectos más importantes. Uno de ellos está dado por el teorema de recursión visto en esta sección.

Lógicas $\mathfrak{M}$-finitas

Lo que pretendemos en este apartado es definir una lógica infinitaria muy particular. Por una lógica infinitaria, intuitivamente, entendemos, que con los símbolos de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$, a diferencia de la lógica clásica, podemos construir fórmulas que contengan una cantidad infinita de símbolos ya sean conjunciones, disyunciones, o cuantificadores, para su definición formal veáse [Barw75].

La teoría lógica que Jon Barwise desarrolló, para estructuras admisibles $\mathfrak{M}$, permite fórmulas con conjunciones y disyunciones $\mathfrak{M}$-finitas. Sin embargo, los predicados admiten sólo un número finito de argumentos y las fórmulas admiten sólo un número finito de cuantificadores.[8]

Empero, si queremos usar el concepto de $\mathfrak{M}$-finito, es necesario aritmetizar nuestro lenguaje y para este fin aprovechamos la estructura admisible. Lo que buscamos es identificar símbolos del lenguaje con objetos del universo $\mathbb{M}$, para decidir, de manera formal, que conjunciones y disyunciones aceptará la lógica que estamos por definir. Una típica aritmetización, para un lenguaje $\mathcal{L}$ con sus símbolos de constantes, funciones y relaciones, es la siguiente:

Predicados: $P^n_x = \langle 0, \langle n, x\rangle\rangle$ ($x \in M, 1 \leq n \leq \omega$, $P^n_x =$ el x-ésimo predicado y n argumentos). Para fines prácticos se reservan los predicados P^2_0 y P^2_1 para la igualdad ($\doteq$) y la pertenencia ($\dot\in$) respectivamente.

Constantes: $C_x = \langle 1, x\rangle$ ($x \in M$).

Variables: $v_x = \langle 2, x\rangle$ ($x \in M$).

Es importante notar que el conjunto de variables debe ser $\mathfrak{M}$-infinito, de lo contrario una sóla fórmula podría agotar todas las variables.

El siguiente paso es asignarle un código a las fórmulas primitivas. Una fórmula primitiva es una fórmula que tiene la forma $t_1 = t_2$ o $R(t_1, \ldots, t_n)$, donde R es un símbolo de n-relación y $t_1, \ldots, t_n$ son terminos, que en este caso, $t_1, \ldots, t_n$ pueden ser variables o constantes[9].

De esta manera, cada fórmula primitiva $P(t_1, \ldots, t_n)$ la identificamos con el código $\langle 3, \langle P, t_1, \ldots t_n\rangle\rangle$. Definidos los códigos para predicados, constantes, variables y fórmulas primitivas, podemos definir por recursión:

$\neg\varphi = \langle 4, \langle\varphi\rangle\rangle$,
$\varphi \vee \psi = \langle 5, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\varphi \wedge \psi = \langle 6, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\varphi \to \psi = \langle 7, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\varphi \leftrightarrow \psi = \langle 8, \langle\varphi, \psi\rangle\rangle$,
$\forall v\varphi = \langle 9, \langle v, \varphi, \rangle\rangle$,
$\exists v\varphi = \langle 10, \langle v, \varphi, \rangle\rangle$,
$\bigvee f = \langle 11, f\rangle$,
$\bigwedge f = \langle 12, f\rangle$.

Cabe señalar que cada código es un conjunto de $\mathfrak{M}$, pues, como ya hemos mencionado, en las estructuras admisibles se pueden construir todos los naturales, además de contar, en particular, con los axiomas de par y unión.

Ahora podemos definir al conjunto $\mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ compuesto por las $\mathfrak{M}$-fórmulas como el menor conjunto, que contiene todas las fórmulas primitivas, es cerrado respecto a los conectivos $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$, es decir:

- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\neg\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \vee \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \wedge \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \to \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $\psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.
- Si v es una variable y $\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$, entonces $\forall v\varphi$, $\exists v\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$.

y cumple:

- Si $f = \langle\varphi_i | i \in I\rangle \in M$ y φ_i para $i \in I$, entonces:

$$\bigvee_{i\in I} \varphi_i =_{\mathrm{Df}} \bigvee f \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$$

y

[8]Toda $\mathfrak{M}$-lógica se puede ver como un fragmento de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ (véase [Barw75]), y aunque no son nesarios estos conceptos para el presente artículo, mencionamos el hecho de que el concepto de admisibilidad motivó la noción de fragmentos de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$.

[9]Recuerde que los símbolos de n-función, siempre pueden ser vistos como símbolos de $n{+}1$-relación.

$$\bigwedge_{i\in I}\varphi_i =_{\mathrm{Df}} \bigwedge f \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}.$$

Verbigracia, si tomamos $\mathfrak{M} = H_\kappa$ con κ un cardinal mayor que ω, nuestro lenguaje admite conjunciones y disyunciones de "tamaño" α con $\alpha < \kappa$, es decir, nuestra teoría, no se restringe a conjunciones y disyunciones finitas (en el sentido usual).

Nuestra lógica $\mathfrak{M}$-finita tiene como axiomas todas las instancias de la lógica usual de predicados, y además para todo $u \in \mathbb{M}$:

$$\bigwedge_{i\in u}\varphi_i \to \varphi_i \quad \text{y} \quad \varphi_i \to \bigvee_{i\in u}\varphi_i.$$

Para toda $\psi, \varphi, \varphi_i \in \mathrm{Fml}_{\mathfrak{M}}$ y $u \in \mathbb{M}$, las reglas de inferencia son:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)}.$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x\psi}, \quad \frac{\psi \to \varphi}{\exists x\psi \to \varphi} \quad \text{para } x \notin \mathrm{Fr}(\varphi).$$

$$\frac{\varphi \to \psi_i \quad (i \in u)}{\varphi \to \bigwedge_{i\in u}\psi_i}, \quad \frac{\psi_i \to \varphi \quad (i \in u)}{\bigvee_{i\in u}\psi_i \to \varphi}.$$

Donde $\mathrm{Fr}(\psi)$ denota el conjunto $\{x|x \text{ es una variable libre de } \psi\}$, mismo que puede ser definido mediante Σ_1-fórmula.

Decimos que φ es demostrable a partir de un conjunto de enunciados A (en lo sucesivo sólo escribimos φ es demostrable a partir de A), si φ pertenece a un conjunto que contiene tanto a A, como a los axiomas, además de ser cerrado respecto las reglas de inferencia. Formalmente:

Definición 14. Por una prueba de φ a partir de A entendemos una sucesión de $\mathfrak{M}$-fórmulas $\langle p_i|i < \alpha\rangle$ tal que $\alpha \in On$ y para cada $i < \alpha$, si $\psi \in p_i$, entonces $\psi \in A$ o ψ es un axioma o ψ se sigue de $\bigcup_{h<i} p_h$ mediante una sola aplicación de alguna de las reglas de inferencia.

$p = \langle p_i|i < \alpha\rangle$ es una prueba de φ si y sólo si $\varphi \in \bigcup_{i<\alpha} p_i$.

Subrayamos el hecho de que toda prueba p de la definición anterior, gracias a la aritmetización del lenguaje, es subconjunto de $\mathbb{M}$. Sin embargo, no cualquier prueba p pertenece a $\mathbb{M}$, es decir no podemos concluir de la definición de prueba que si p es una prueba, entonces $p \in \mathbb{M}$. Lo que nos advierte de la existencia de pruebas $\mathfrak{M}$-infinitas.

$A \vdash \varphi$ simboliza que existe una prueba de φ a partir de A. Una fórmula es demostrable si y sólo si tiene una prueba.

Si A es un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados,[10] resulta que el conjunto

$$W = \{p \in M \mid p \text{ es una prueba a partir de } A\}$$

puede escribirse como una Σ-fórmula, usando recursión[11]:

$$p \in W \leftrightarrow (p = \langle p_i|i < \alpha\rangle \wedge (\forall k \in \alpha(\varphi \in p_k \longrightarrow$$

$$(A(\varphi)$$

$$\bigvee \exists u\forall i \in u\exists\psi_i(\varphi \leftrightarrow (\wedge_{i\in u}\psi_i \to \psi_i))$$

[10]Obsérvese, que el que A sea un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados, no quiere decir que los enunciados de A sean forzosamente $\Sigma_1(\mathbb{M})$-enunciados, sino que el conjunto A puede ser descrito por una $\Sigma_1(\mathbb{M})$-fórmula.

[11]Como A es un Σ_1-conjunto de enunciados, hay una Σ_1 fórmula que lo define, esa fórmula la denotamos justamente como $A(x)$, con la finalidad de no introducir más notación. Todas las instancias de la lógica de predicados se escriben similar al segundo disyunto, aquí no los escribimos para no complicar más esta fórmula. Recuerde que cada fórmula del $\mathfrak{M}$-lenguaje está representado por un elemento de $\mathbb{M}$, así, por ejemplo $A(\varphi)$, formalmente significa que existe $a \in \mathbb{M}$ tal que a es el código de φ y $A(a)$.

$$\bigvee \exists u \forall i \in u \exists \psi_i (\varphi \leftrightarrow (\psi_i \rightarrow \vee_{i\in u} \psi_i))$$

$$\bigvee \exists j < k \exists i < k (\psi \in p_j \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \in p_i)$$

$$\bigvee \exists \psi_1 \exists \psi_2 \exists x (x \notin \mathrm{Fr}(\psi_1) \wedge (\varphi \leftrightarrow (\psi_1 \rightarrow \forall x \psi_2)) \rightarrow$$

$$\exists j < k ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \in p_j))$$

$$\bigvee \exists \psi_1 \exists \psi_2 \exists x (x \notin \mathrm{Fr}(\psi_1) \wedge (\varphi \leftrightarrow (\exists x \psi_2 \rightarrow \psi_1)) \rightarrow$$

$$\exists j < k ((\psi_2 \rightarrow \psi_1) \in p_j))$$

$$\bigvee \exists \psi \exists u \forall i \in u \exists \psi_i ((\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \wedge_{i\in u} \psi_i)) \rightarrow$$

$$\forall i \in u \exists j < k (\psi \rightarrow \psi_i \in p_j)$$

$$\bigvee \exists \psi \exists u \forall i \in u \exists \psi_i ((\varphi \leftrightarrow (\vee_{i\in u} \psi_i \rightarrow \psi)) \rightarrow$$

$$\exists i \in u \exists j < k (\psi_i \rightarrow \psi \in p_j))))).$$

Gracias a que W resulta ser descrito por una Σ_1-fórmula, podemos establecer algunas analogías con la lógica de primer orden, entre ellas, y adelantando el final de este artículo, el teorema de compacidad de Barwise.

Lema 15. *Sea A un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados, entonces $A \vdash \varphi$ si y sólo existe una prueba $\mathfrak{M}$-finita p (es decir una prueba $p \in \mathbb{M}$) de φ a partir de A.*

Demostración. ($\Leftarrow$) es trivial, pues una prueba $\mathfrak{M}$-finita de φ a partir de A es una prueba de φ a partir de A.

$\Rightarrow$) Llamamos X al conjunto de fórmulas φ para las que existe un $p \in \mathbb{M}$, el cual prueba φ a partir de A. Claramente $X \subseteq \{\varphi | A \vdash \varphi\}$, probaremos $\{\varphi | A \vdash \varphi\} \subseteq X$, de donde tendremos la igualdad, y así cada fórmula demostrable a partir de A tendrá una prueba $\mathfrak{M}$-finita a partir de A.

Sabemos que cada enunciado de A al igual que todos los axiomas, también, se encuentran en X, por lo que es suficiente mostrar que X es cerrado respecto a las reglas de inferencia. Esto se muestra regla por regla.

Sea $P(p, \psi)$ la fórmula que afirma que p es una prueba $\mathfrak{M}$-finita de ψ a partir de A.

1. Si tanto φ como $(\varphi \rightarrow \psi)$ pertenecen a X, queremos ver que $\psi \in X$. Por hipótesis tenemos $P(p, \varphi)$ y $P(q, \varphi \rightarrow \psi)$, con $p = \langle p_i | i < \alpha \rangle$ y $q = \langle q_i | i < \delta \rangle$. Intuitivamente, la prueba p^* que estamos por definir está dada por la unión de las funciones p, q, y añadiendo al final la pareja ordenada $\langle \alpha + \delta, \psi \rangle$.

   Así, definimos una prueba p^*, de longitud $\alpha + \delta$, suponiendo que $\alpha < \delta$, por:

$$p^*(i) = \begin{cases} p_i & \text{para } i < \alpha \\ q_i & \text{para } i = \alpha + \gamma_i \text{ con } \gamma_i < \delta \\ \{\psi\} & \text{para } i = \alpha + \gamma. \end{cases}$$

   Por la construcción $p^* \in \mathbb{M}$ prueba ψ a partir de A. Observe que fue necesario reordenar los índices de q, para poder definir p^*.

2. La demostración de las reglas de inferencia:

$$\frac{(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi \rightarrow \forall x \psi}$$

y

$$\frac{(\psi \to \varphi)}{\exists x\psi \to \varphi}$$

Es similar al caso anterior.

3. Sea $(\varphi \to \psi_i) \in X$ para toda $i \in u$ y $u \in \mathbb{M}$, queremos ver que $(\varphi \to \bigwedge_{i\in u} \psi_i) \in X$.

   Como para cada $i \in u$ existe una prueba $p_j = \langle p_{j_i} | i < \alpha_j \rangle$, podríamos pensar en realizar una unión similar al caso anterior, pues $u \in \mathbb{M}$. Sin embargo, a diferencia de 1, tenemos que asegurarnos de que la unión de las pruebas pertenezca a $\mathbb{M}$ y así poder usar el axioma de unión. Para este fin, necesitamos asegurar que existe un $w \in \mathbb{M}$ tal que $p_j \in w$ para toda $j \in u$.

   Sea $u \in \mathbb{M}$, por nuestra hipótesis, tenemos:

   (i) $\forall i \in u \exists p P(p, \varphi \to \psi_i)$.

   Hemos visto que la fórmula abreviada por $P(x, y)$ es $\Sigma_1(\mathbb{M})$, por lo que tenemos:

   $P(p, \psi) \leftrightarrow \exists z P'(z, p, \psi)$, donde P' es Σ_0, entonces:

   (ii) $\forall i \in u \exists z \exists p P'(z, p, \varphi \to \psi_i)$.

   De lo cual se deduce que existe $v \in \mathbb{M}$ (ya que $\mathfrak{M}$ satisface Σ_0-comprensión) tal que:

   (iii) $\forall i \in u \exists z \in v \exists p \in v P'(z, p, \varphi \to \psi_i)$.

   Hacemos $w = \{p \in v | \exists i \in u \exists z \in v P'(z, p, \varphi \to \psi_i)\}$ $(w \in \mathbb{M})$, entonces:

   (iv) $\forall i \in u \exists p \in w P(p, \varphi \to \psi_i)$.

   Sea $\alpha \in \mathbb{M}$, $\alpha \geq$dom(p) para todo $p \in w$. Definimos una prueba p^* de longitud $\alpha + 1$ por:

$$p^*(i) = \begin{cases} \bigcup\{p_i | p \in w \wedge i \in \mathrm{dom}(p)\} & \text{para } i < \alpha \\ \{\varphi \to \bigwedge_{i\in u} \psi_i\} & \text{para } i = \alpha. \end{cases}$$

   Por construcción, $p^* \in \mathbb{M}$ prueba $\varphi \to \bigwedge_{i\in u} \psi_i$ a partir de A.

4. El último caso donde $(\psi_i \to \varphi) \in X$ para $i \in u$ para probar que $\bigvee_{i\in u} \psi \to \varphi_i$ es análogo.

Por lo que $X = \{\varphi | A \vdash \phi\}$. □

Lema 16. *Sea A un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados. Entonces $A \vdash \varphi$ si y sólo existe $u \in \mathbb{M}$, es decir u es $\mathbb{M}$-finito, tal que $u \subseteq A$ y $u \vdash \varphi$.*

Demostración. Como en el lema anterior $(\Leftarrow)$ es trivial, por lo que sólo probaremos $(\Rightarrow)$.

Por el lema anterior existe $p \in \mathbb{M}$ una prueba de φ a partir de A. Sea u el conjunto de fórmulas ψ tal que para alguna $i \in$dom(p), $\psi \in p_i$, pero, ψ no es un axioma, ni se sigue mediante una sola aplicación de $\cup_{n<i} p_n$ $(\in \mathbb{M})$, esto es $\psi \in A$. Entonces, $u \in \mathbb{M}$, además por construcción p es una prueba de φ a partir de u $(u \vdash \varphi)$ y $u \subseteq A$. □

Es decir, si A es un $\Sigma_1(\mathbb{M})$-conjunto de enunciados y A prueba a ψ, entonces el lema 4. nos asegura que necesariamente existe una prueba $\mathfrak{M}$-finita de ψ a partir de A, pero no sólo eso, sino que además, por el lema 5, para probar ψ sólo necesitamos un subconjunto $\mathfrak{M}$-finito de A.

Para finalizar esta sección definimos la nociones semánticas usuales, haciendo énfasis en la interpretación de las "nuevas" conjunciones y disyunciones de nuestra $\mathfrak{M}$-lógica.

Por un modelo de $\mathcal{L}$ nos referimos a una estructura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}, \langle t^{\mathfrak{A}} | t \in \mathbb{L} \rangle \rangle$ donde $t^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathbb{A}^n$, si t es un símbolo de n-relación, $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{A}$, si t es un símbolo de constante y $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Una asignación de variables es una función f :Vbl$\longrightarrow \mathbb{A}$ (donde Vbl corresponde al conjunto de todas las variables). La relación de satisfacción $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$, significa que φ es verdadera en $\mathfrak{A}$ y es definida de manera usual, añadiendo:

$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i\in u} \phi_i[f]$ si y sólo si $\forall i \in u$ $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$ y

$\mathfrak{A} \models \bigvee_{i\in u} \phi_i[f]$ si y sólo si $\exists i \in u$ $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$.

Sea $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ una fórmula con variables libres $x_1, \ldots, x_n$, $\mathfrak{A} \models \varphi[v_1, \ldots, v_n]$ denota $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$, donde $f(x_i) = v_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Cuando φ es un enunciado sólo escribimos $\mathfrak{A} \models \varphi$, en caso de tener un conjunto de enunciados A, $\mathfrak{A} \models A$ significa $\mathfrak{A} \models \varphi$, para toda $\varphi \in A$.

4. Teorema de Compacidad de Barwise

La finalidad de este trabajo es establecer condiciones suficientes para garantizar "compacidad" en una clase particular de $\mathfrak{M}$-lógicas: la clase de $\mathfrak{A}$-lógicas con universo numerable. La primera tarea será relacionar la semántica con la sintáctica definida para nuestras $\mathfrak{M}$-lógicas. En otras palabras demostrar la correctud para $\mathfrak{M}$-lógicas, lo cual es conocido como el teorema de correctud de Barwise.[12] Correctud nos brinda la posibilidad de ocupar los resultados demostrados en la sección anterior (es conveniente observar que dichos resultados se han enunciado para conjuntos de enunciados Σ_1, lo cual se refleja en el enunciado de compacidad de Barwise). Empero, antes de demostrar tanto el teorema de correctud, como el de compacidad de Barwise es conveniente revisar el teorema Rasiowa-Sikorski, ya que brinda una poderosa herramienta para la prueba de dichos teoremas.

Con vistas a demostrar el teorema Rasiowa-Sikorski, establecemos las siguientes definiciones:

Definición 17. Un álgebra booleana es una estructura $\mathcal{K} = \langle \mathbb{K}, \oplus, \otimes, ^-, \mathbb{O}, \mathbb{I} \rangle$ tal que:

i): $\oplus$ y $\otimes$ son operaciones binarias sobre $\mathbb{K}$.
ii): $^-$ es una operación unitaria sobre $\mathbb{K}$.
iii): $\mathbb{O}$ y $\mathbb{I}$ son elementos distintos de $\mathbb{K}$.
iv): Para cualquier $a, b, c \in \mathbb{K}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll}
a \oplus a = a & a \otimes a = a \\
a \oplus b = b \oplus a & a \otimes b = b \otimes a \\
(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) & (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \\
a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) & a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c) \\
a \oplus \bar{a} = \mathbb{I} & a \otimes \bar{a} = \mathbb{O} \\
a \oplus \mathbb{O} = a & a \otimes \mathbb{I} = a.
\end{array}$$

En particular, podemos describir el álgebra de Lindenbaum, la cual además de servir como ejemplo de un álgebra booleana, jugará un papel importantísimo en la demostración del Teorema de Correctud de Barwise.

Para definir el álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}_\Gamma = \langle S_\Gamma, \oplus, \otimes, ^-, \mathbb{O}, \mathbb{I} \rangle$, sean $\mathcal{L}$ un lenguaje, Γ un conjunto consistente de $\mathfrak{M}$-enunciados (Γ bien puede ser un conjunto vacío de enunciados). Los elementos de S_Γ son clases de equivalencia de enunciados Γ-equivalentes, es decir $s \in S_\Gamma$ si $s = [\varphi]_\Gamma = \{\psi | \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$, para alguna fórmula. Las operaciones $\oplus$, $\otimes$ y $^-$ las identificamos, respectivamente, con $\vee$, $\wedge$ y $\neg$:

$$[\varphi] \oplus [\psi] = [\varphi \vee \psi],$$
$$[\varphi] \otimes [\psi] = [\varphi \wedge \psi],$$
$$\bar{[\varphi]} = [\bar{\varphi}] = [\neg\varphi].$$

Finalmente $[\mathbb{O}] = [\perp]_\Gamma = [x \neq x]_\Gamma$ y $[\mathbb{I}] = [\top]_\Gamma = [x = x]_\Gamma$, donde $[\perp]_\Gamma$ es la clase de contradicciones y $[\top]_\Gamma$ es la clase de tautologías a partir de Γ. Notemos que para todo $\psi \in \Gamma$, $\psi \in [\top]_\Gamma$. Además, debido a que Γ es consistente, $[\perp]_\Gamma \neq [\top]_\Gamma$.

Para cualquier álgebra booleana $\mathcal{A}$ se puede definir un orden parcial mediante la operación $\oplus$ como sigue:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b.$$

[12] El teorema de correctud dice que si A es un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados y A tiene un modelo, $\mathfrak{A} \models A$, entonces A es consistente, es decir, a partir de A no se puede demostrar ninguna contradicción.

En el álgebra de Lindenbaun, el orden está determinado por la implicación, es decir: $[\varphi] \leq_\Gamma [\psi]$ si y sólo si $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$. Esto se sigue de la equivalencia entre $\varphi \to \psi$ y $\neg\varphi \vee \psi$.

Definición 18. Para un álgebra booleana $\mathcal{K}$ un conjunto no vacío $U \subseteq \mathbb{K}$ es un filtro sobre $\mathcal{K}$ si y sólo si para todo $a, b \in \mathbb{K}$:

i): $\mathbb{O} \notin U$.
ii): Si $a \in U$ y $a \leq b$, entonces $b \in U$.
iii): Si $a \in U$ y $b \in U$, entonces $a \otimes b \in U$.

Definición 19. Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{K}$, un conjunto $B \subseteq \mathbb{K}$ tiene la propiedad de la intersección finita (PIF) si y sólo si para cualquier $a_0, ..., a_n \in B$, $a_0 \otimes \ldots \otimes a_n \neq \mathbb{O}$.

Si B tiene la PIF, se sigue que:

$$F = \{b \in \mathbb{K} | \exists n \text{ y } \exists a_0, \ldots, a_n \text{ tal que } a_0 \otimes, \ldots, a_n \leq b\}$$

es un filtro sobre $\mathcal{F}$ que contiene a B. Un filtro máximo respecto a la inclusión es llamado un ultrafiltro. Como se espera, en un ultrafiltro U siempre ocurre $a \in U$ o $\bar{a} \in U$, y en el caso particular del álgebra de Lindenbaum siempre $[\varphi] \in U$ o $[\neg\varphi] \in U$.

Lema 20. *Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{K}$, cualquier ultrafiltro U sobre $\mathcal{K}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$ se tiene:*

$$a \oplus b \in U \Leftrightarrow a \in U \ \ o\ b \in U.$$

Demostración. Primero, si $a \in U$, entonces, por definición, $a < a \oplus b$ y como U es un filtro, tenemos que $a \oplus b \in U$.

Ahora, supongamos que $a \oplus b \in U$ y que tanto a como b no pertencen a U. Entonces $\bar{a} \in U$ y $\bar{b} \in U$ y por tanto $\bar{a} \otimes \bar{b} \in U$ (pues, en particular, U es un filtro), sin embargo $\bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \oplus b}$, así que $(a \oplus b) \otimes (\overline{a \oplus b}) = \mathbb{O} \in U$, lo cual es una contradicción, concluyendo de esta manera que $a \in U$ o $b \in U$. $\square$

Definición 21. Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{K}$ y cualquier C subconjunto de $\mathbb{K}$ si $c \in \mathbb{K}$ es la menor cota superior de C, escribimos $\Sigma C = c$ y llamamos a c el supremo (o sup) de c. Observemos que en el caso de que C sea finito, es decir $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ ΣC es una abreviación de $c_1 \oplus c_2 \oplus \ldots \oplus c_n$. De manera análoga, escribimos $\prod D = d$, para denotar al ínfimo (o ínf) de D. Similarmente, si $D = \{d_1, d_2, \ldots d_m\}$, entonces $\prod D$ es una abreviación de $d_1 \otimes d_2 \ldots \otimes d_m$.

Decimos que el ultrafiltro U preserva $\Sigma C = c$ si y sólo si:

$$c \in U \Leftrightarrow \text{ para algún } b \in C, b \in U.$$

Dado nuestro breve análisis sobre las álgebras booleanas, nos disponemos a enunciar y demostrar el teorema de Rasiowa-Sikorski.

Teorema 22. *(Rasiowa-Sikorski) Para cualquier álgebra Booleana $\mathcal{N}$ y cualquier conjunto numerable de supremos $\Sigma B_k = a_k$ $(k \in \omega)$, existe un ultrafiltro U sobre $\mathcal{N}$ que los preserva a todos.*

Demostración. Definimos recursivamente elementos $b_k \in B_k$ de tal manera que para todo $k \in \omega$:

$$\prod_{j<k} (\bar{a}_j \oplus b_j) \neq \mathbb{O}.$$

De esto se sigue que: $B = \{\prod_{j<k}(\bar{a}_j \oplus b_j) | k \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Si U es un ultrafiltro que extiende a B, tenemos:

$$a_k \in U \Rightarrow b_k = \mathbb{O} \oplus (a_k \otimes b_k) = (a_k \otimes \bar{a}_k) \oplus (a_k \otimes b_k) = a_k \otimes (\bar{a}_k \oplus b_k) \in U,$$

como es deseado. Por otro lado, un filtro siempre contiene sus supremos. Es decir U, definido de la forma anterior, respeta supremos.

A continuación se define dicha sucesión por recursión. Dado b_j para $j < k$ tal que $c_k = \prod_{j<k} \bar{a}_j \oplus b_j \neq \mathbb{O}$. Buscamos definir b_k. Supongamos que para todo $b \in B_k$, se tiene que $c_k \otimes (\bar{a}_k \oplus b) = \mathbb{O}$, no obstante que $a \oplus \sum B = \sum_{b \in B}(a \oplus b)$ y $a \otimes \prod B = \prod_{b \in B}(a \otimes b)$, cuando $\sum B$ y $\prod B$ existen, tenemos:

$$c_k = c_k \otimes \mathbb{I} = c_k \otimes (\bar{a}_k \oplus a_k) = c_k \otimes (\bar{a}_k \oplus \sum B_k) = c_k \otimes \sum_{b \in B_k} (\bar{a}_k \oplus b) =$$

$$\sum_{b \in B_k} c_k \otimes (\bar{a} \oplus b) = \mathbb{O},$$

contrario a la hipótesis de inducción, por lo que existe por lo menos un elemento b_k en B_k que cumple con lo requerido, concluyendo así la demostración. □

Demostrado el teorema de Rasiowa-Sikorski, estamos en condiciones de demostrar el teorema de correctud de Barwise, el cual es un paso importante para establecer las condiciones de la compacidad en las lógicas $\mathfrak{M}$-finitas.

TEOREMA 23. *(Correctud Barwise). Sean $\mathfrak{M}$ una estructura admisible numerable y A un conjunto de enunciados en el $\mathfrak{M}$-lenguaje $\mathcal{L}$. Si A es consistente en la lógica $\mathfrak{M}$-finita, entonces A tiene un modelo $\mathfrak{A}$.*

Demostración. Primero extendemos el lenguaje $\mathcal{L}$ añadiendo un conjunto $\mathfrak{M}$-infinito C de nuevas constantes, llamamos a este nuevo lenguaje $\mathcal{L}^*$. Hacemos: $[\varphi] = \{\psi | A \vdash \psi \leftrightarrow \varphi\}$, para todo $\mathcal{L}^*$-enunciado φ. Sea $\mathbb{B} = \{[\varphi] | \varphi \in$ es un enunciado de $\mathcal{L}^*\}$.

Definimos $\mathcal{B}$ como el álgebra de Lindenbaum de universo $\mathbb{B}$, más las siguentes operaciones. Para toda $c \in C$ y cualquier $u \in \mathbb{M}$:

$$\begin{array}{rlcl}
1. & \sum_{i \in u}[\varphi_i] & = & [\bigvee_{i \in u} \varphi_i] \\
2. & \prod_{i \in u}[\varphi_i] & = & [\bigwedge_{i \in u} \varphi_i] \\
3. & \sum[\varphi(c)] & = & [\exists v \varphi(v)] \\
4. & \prod[\varphi(c)] & = & [\forall v \varphi(v)].
\end{array}$$

Observemos, que en nuestra álgebra de Lindenbaum, $[\varphi] \leq_A [\psi]$ si y sólo si $(A \vdash \varphi \rightarrow \psi)$.

Primero debemos verificar que estas operaciones están bien definidas. Sea $u \in \mathbb{M}$. En 1, tenemos que probar que $[\bigvee_{i \in u} \varphi_i]$ es el supremo de $[\varphi_i]$ $(i \in u)$, es decir debemos probar que $[\bigvee_{i \in u} \varphi_i]$ es la mínima cota superior de $\{[\varphi_i] | i \in u\}$. Para toda $i \in u$, $A \vdash \varphi_i \rightarrow \bigvee \varphi_i$, por lo que $[\bigvee \varphi_i]$ es una cota superior. Para ver que es la mínima, supongamos que existe $z \geq [\varphi_i]$ para toda $i \in u$. Debemos probar que $[\bigvee_{i \in u} \varphi_i] \leq z$, es decir que $A \vdash \bigvee_{i \in u} \varphi_i \rightarrow z$. Supongamos que $A \vdash \bigvee \varphi_i$, entonces existe por lo menos una φ_{i_0} tal que $A \vdash \varphi_{i_0}$; tomamos esa fórmula para afirmar que $A \vdash \varphi_{i_0} \rightarrow z$, para concluir que $A \vdash \bigvee \varphi_i \rightarrow z$.

La prueba para establecer a $\bigwedge \varphi_i$ como ínfimo es análoga.

Verifiquemos ahora, que $\exists v \varphi(v)$ es el supremo de $\{[\varphi(c)] | c \in C\}$. Sea $\varphi(c)$ un $\mathcal{L}^*$-enunciado, entonces $\exists v \varphi(v)$ es cota superior de dicho conjunto, pues si $c \in C$ y $A \vdash \varphi(c)$, entonces $A \vdash \exists v \varphi(v)$ es decir $A \vdash \varphi(c) \rightarrow \exists v \varphi(v)$. Confirmemos que es la mínima cota: supongamos que z es una cota superior de dicho conjunto, sabemos que $\varphi(c) \rightarrow \exists v \varphi(v)$ y $\varphi(c) \rightarrow z$, y supongamos que $A \vdash \exists v \varphi(v)$, en particular podemos elegir una constante c_0 que no aparezca en $\varphi(x)$ (esto lo podemos lograr debido a que C es $\mathfrak{M}$-infinito), tal que $A \vdash \varphi(c_0)$, y por hipótesis $A \vdash \varphi(c_0) \rightarrow z$, por lo tanto $A \vdash \exists v \varphi(v) \rightarrow z$.

Similarmente establecemos que $[\forall v \varphi(v)]$ es ínfimo para el conjunto $\{\varphi(c) | c \in C\}$. Por lo que las operaciones anteriores están bien definidas.

Por el teorema de Rasiowa-Sikorski (podemos usuarlo gracias a que $\mathbb{M}$ es numerable) existe un ultrafiltro U sobre $\mathbb{B}$ que respeta las operaciones anteriores. Definimos un modelo $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}, \langle t^{\mathfrak{A}} | t \in \mathcal{L} \rangle \rangle$ como sigue:

Para $c \in C$ hacemos $[c] = \{c' \in C | [c = c'] \in U\}$, así definimos $\mathbb{A} = \{[c] | c \in C\}$.

Si t es una constante en $\mathcal{L}$, interpretamos a t en $\mathfrak{A}$ como $t^{\mathfrak{A}} = [c]$, si y sólo si $[t = c] \in U$, lo cual está bien definido, pues si t es una constante, la fórmula $\exists x(x = b)$ es una tautología, por lo que se encuentra en el ultrafiltro U, y debido a la construcción de U existe $c \in C$ tal que $[t = c] \in U$.

Si $P \in \mathcal{L}$ es un n-predicado hacemos:

$$P^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]) \leftrightarrow [P(c_1, \dots, c_n)] \in U.$$

Sea $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula con a lo más $v_1, \dots, v_n$ variables libres, por inducción, mostraremos que $\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n]) \leftrightarrow [\varphi(c_1, \dots, c_n)] \in U$:

1. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi([c_1], \dots, [c_n]) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi([c_1], \dots, [c_n])$, por hipótesis de inducción se tiene $[\varphi(c_1, \dots, c_n)] \notin U$, y como U es ultrafiltro entonces $[\neg\varphi(c_1, \dots, c_n)] \in U$.
2. Sabemos que $\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n]) \vee \psi([c_1], \dots, [c_n]) \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], \dots, [c_n])$ o $\mathfrak{A} \models \psi([c_1], \dots, [c_n])) \Leftrightarrow ([\varphi(c_1, \dots, c_n)] \in U$ o $[\psi(c_1, \dots, c_n)] \in U)$. Sin embargo, por el lema 6, esto último ocurre si y sólo si $[\varphi(c_1, \dots, c_n) \vee \psi(c_1, \dots, c_n)] \in U$.
3. $\mathfrak{A} \models \exists v\varphi(v)$ si y sólo si $\exists c \in \mathbb{A}$ tal que $\models\varphi(c)$, por hipótesis de inducción $[\varphi(c)] \in U$, y esto ocurre si y sólo si $[\exists v\varphi(v)] \in U$ ya que U respeta supremos.
4. Sea $u \in \mathbb{M}$ y supongamos que $\mathfrak{A} \models \bigvee_{i \in u} \varphi_i([c_1], \dots, [c_n])$, lo cual sucede si y sólo si $\exists i_0 \in u$, $\mathfrak{A} \models \varphi_{i_0}([c_1], \dots, [c_n])$, si y sólo si $[\varphi_{i_0}(c_1, \dots, c_n)] \in U$, pues es nuestra hipótesis de inducción, y por construcción de U (pues por el teorema de Rasiowa-Sikoski, U respeta supremos y hemos probado que $\bigvee_{i \in u} \varphi_i([c_1], \dots, [c_n])$ es el supremo de $\varphi_{i_0}([c_1], \dots, [c_n])$), tenemos que $[\bigvee_{i \in u} \varphi_i(c_1, \dots, c_n)] \in U$.

En particular tenemos que para cualquier $\mathcal{L}^*$-enunciado φ, $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $[\varphi] \in U$. Por lo que $\mathfrak{A} \models A$, ya que $\varphi \in U$ para todo $\varphi \in A$.

□

Con el teorema de correctud de Barwise hemos llegado a nuestra meta, pues el teorema de compacidad en lógicas $\mathfrak{M}$-finitas para conjuntos de enunciados Σ_1 es tan sólo una consecuencia del lema 5 y dicho teorema:

Corolario 24. *(Teorema de Compacidad de Barwise). Sea $\mathfrak{M}$ una estructura admisible y numerable. Sea A un Σ_1-conjunto de enunciados del $\mathfrak{M}$-lenguaje. Si todo subconjunto $\mathfrak{M}$-finito de A tiene modelo, entonces A tiene modelo.*

Demostración. De acuerdo con el teorema de correctud de Barwise, debemos demostrar que A es consistente. Supongamos que no, es decir que $A \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, por el lema 5, existe $u \subseteq A$ y $\mathfrak{M}$-finito tal que $u \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, sin embargo, por hipótesis u es consistente, por lo que no puede derivar contradicciones. Entonces concluimos que A es consistente. □

Referencias

[1] J.Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer–Verlag, 1975.
[2] M. Dickmann, *Large Infinitary Languages*, North–Holland, 1975.
[3] H. Keisler, *Model Theory for Infinitary Logic*, North–Holland, 1974.
[4] Peter G. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic*, AK Peters, 2005.
[5] Ronald Jensen, *Subcomplete Forcing and L-Forcing*, `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html`, 2012.

Dirección de la autora:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `kinrha@xanum.uam.mx`

Mixba'al Rev. Met. de Mat.
No. 1, Vol. VI, Junio de 2015, 41–52

LÓGICAS INFINITARIAS Y ÁLGEBRA

CECILIA HERNÁNDEZ DOMÍNGUEZ

RESUMEN. En este trabajo se exponen algunas de las ideas básicas de una de las extensiones más exitosas de la lógica de primer orden, la lógica infinitaria, la necesidad de su estudio y, como ejemplo, se estudia una aplicación al álgebra.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las ideas de la teoría de modelos es obtener resultados mediante relaciones entre estructuras matemáticas y sus propiedades, descritas utilizando expresiones en cierto lenguaje. La noción básica es la de *satisfacción*: decimos que $\mathfrak{A}$ *modela a* φ, $\mathfrak{A} \models \varphi$, si la expresión (fórmula) φ es cierta, o satisfecha, en la estructura $\mathfrak{A}$. El lenguaje utilizado para describir las estructuras consta de símbolos de constantes, de funciones y de predicados. Dependiendo del lenguaje se pueden describir diversas propiedades y expresiones matemáticas con la ayuda de los conceptos lógicos de *y, o, no, para todo, alguno*. Pero, el poder expresivo que podemos lograr con esto tiene sus limitaciones.

Una *lógica* consiste en un lenguaje equipado con reglas de inferencia para deducir la veracidad de un enunciado a partir de otros. En la lógica clásica o de primer orden, las expresiones que podemos formar son aquellas en las cuales podemos hacer cuantificaciones finitas, como *existe al menos un ...* o *para cualesquiera dos ...*, y aseveraciones sobre un número finito de propiedades a la vez, esto es, sólo se permite la conjunción y disyunción finita de fórmulas. Es llamada de primer orden haciendo referencia a que las variables susceptibles a ser cuantificadas son individuales, es decir, sólo toman individuos como valores.

La teoría de modelos de primer orden ha sido fuertemente desarrollada desde sus inicios; un sinfín de construcciones y resultados se han encontrado, y se siguen obteniendo, cuya importancia radica por sí solos, inherentes al desarrollo de la teoría misma, y al aplicarlos enriquecen a otras áreas de la matemática. En el transcurso de este trabajo asumiremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de lógica de primer orden. Para una introducción a la lógica véase [12].

No obstante a sus fascinantes resultados, el primer orden no abarca todo lo que se estudia en matemáticas. Conceptos tan sencillos, como *ser finito* (o *tener cierta cardinalidad*), no pueden ser expresados, esto es, no existe un enunciado de primer orden con la propiedad de que si una estructura lo satisface, sea equivalente a que dicha estructura es finita (o tenga cierta cardinalidad). Este hecho es una consecuencia de los dos resultados fundamentales de la lógica de primer orden: el teorema de compacidad y el teorema de Löwenhein-Skolem. En la mayor parte del desarrollo de teoría de modelos ambos resultados son indispensables.

TEOREMA DE COMPACIDAD. Sea T una teoría de primer orden. T tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de T tiene un modelo.

TEOREMA DE LÖWENHEIN-SKOLEM. Si una teoría de primer orden numerable tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo de tamaño κ, para todo cardinal $\kappa > \aleph_0$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C75.
Palabras clave. lógica infinitaria, teoría de grupos, $\aleph_1$-libre, isomorfismo parcial.

Como muestra de un argumento a seguir para demostrar que cierta propiedad matemática no se puede expresar mediante una fórmula de primer orden veamos el siguiente ejemplo. Es pertinente mencionar que entre las propiedades algebraicas que no son expresables en la lógica clásica se encuentran las de *ser un grupo simple*, *libre* o *de torsión*.

Observación 1. Ser un grupo de torsión no se puede expresar en primer orden.

Demostración. Sea $\mathscr{L} = \{\cdot, e\}$ el lenguaje de la teoría de grupos, que consiste en un símbolo de función binaria que denota a la operación del grupo y un símbolo de constante para el elemento neutro. Supongamos que existe una $\mathscr{L}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que

$$\mathfrak{G} \models \varphi[a] \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ tiene orden finito.}$$

Denotamos con Φ al conjunto de $\mathscr{L}$-enunciados que axiomatizan a los grupos. Los grupos de torsión serían exactamente los que modelan

$$\Phi \cup \{\forall x \varphi(x)\}.$$

Sea $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c\}$, donde c es un nuevo símbolo de constante. Definimos al conjunto de $\mathscr{L}'$-enunciados

$$\Psi = \Phi \cup \{\varphi(c)\} \cup \{\neg(\underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ veces}} = e) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Si tomamos $\Delta \subset \Psi$ finito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta \subset \Phi \cup \{\varphi(c)\} \cup \{\neg(\underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ veces}} = e) \mid 0 < n \leq m\}.$$

Claramente, Δ tiene un modelo, por ejemplo, el grupo $\mathfrak{G} = (\mathbb{Z}_{m+1}, +)$ con la interpretación $c^{\mathfrak{G}} = [1]$.

Del teorema de compacidad, Ψ debe tener un modelo $\mathfrak{G}'$, lo cual es imposible: por una parte $c^{\mathfrak{G}'}$ satisface φ en tal modelo, pero también satisface que ninguna de sus potencias coincide con $e^{\mathfrak{G}'}$. □

Además de intentar expresar propiedades mediante fórmulas, frecuentemente se busca que las teorías matemáticas se puedan axiomatizar, esto es, que sea factible encontrar un conjunto de fórmulas (finito o infinito) para las que sea equivalente ser modelo de ellas y ser modelo de dicha teoría matemática.

Un ejemplo significativo de una teoría que no es axiomatizable en primer orden es la de la aritmética: existen modelos no estándar de la aritmética, es decir, hay estructuras que satisfacen a los axiomas de Peano que no son isomorfas a los naturales. De manera análoga al ejemplo anterior, si denotamos con Ψ a dichos axiomas y s el símbolo de función interpretado como el sucesor, entonces

$$\Psi \cup \{\underbrace{s \circ s \cdots s(0)}_{n \text{ veces}} < c \mid n \in \mathbb{N}\},$$

es finito satisfacible, y por compacidad, tiene un modelo $\mathfrak{A}$ que no puede ser isomorfo a $\mathbb{N}$, debido a que $c^{\mathfrak{A}}$ es mayor que cada natural.

Si estas observaciones sobre expresividad las tenemos como marco, se comprende el porqué de la necesidad de salir de la lógica clásica. Al indagar en la ganancia en expresión es cuando entran al estudio, entre otras, las lógicas infinitarias. Aunque, dicho sea de paso, que podamos expresar más propiedades matemáticas hará que se pierda alguna parte de la teoría clásica desarrollada[1].

Con el propósito de mostrar una de las relaciones fructíferas que mantienen las lógicas infinitarias con otros ámbitos de la matemática se eligió a la que existe con el álgebra, específicamente con la teoría de los grupos abelianos.

[1]Lindström, en 1969 (véase [10]), demostró que cualquier lógica más expresiva que la de primer orden siempre fallará en compacidad y la propiedad de Löwenhein-Skolem, para T numerable.

El argumento de *ida y vuelta*, una de las técnicas básicas en teoría de modelos, está inmerso también, aunque de manera no explícita, en las pruebas de diversos resultados sobre grupos. Este argumento brinda un puente entre ambas ramas, por lo cual se ahondará en él.

2. Los lenguajes infinitarios

Sea $\mathscr{L} = \{C, F, R\}$ un lenguaje, es decir, C es un conjunto de símbolos de constante individuales, F un conjunto de símbolos de función finitarios y R un conjunto de símbolos de predicado finitarios. Los símbolos lógicos son los usuales: $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\forall$ (cuantificador universal), $\exists$ (cuantificador existencial), $\rightarrow$ (condicional) y $\leftrightarrow$ (bicondicional); más los conectivos infinitarios $\bigwedge$ (conjunción infinita) y $\bigvee$ (disyunción infinita). A diferencia de la lógica clásica de primer orden, las variables serán tantas como λ. Cabe señalar que las variables a cuantificar siguen siendo individuales.

Sean κ y λ cardinales. Dado un lenguaje $\mathscr{L}$ se construye la lógica infinitaria $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ utilizando los símbolos en $\mathscr{L}$. Los términos y fórmulas atómicas se construyen de la misma manera que en la lógica clásica; se procede igual con la negación y los demás conectivos ya conocidos. La gran diferencia es:

- Si Y es un conjunto de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas de cardinalidad $\rho < \kappa$, entonces $\bigwedge Y$ y $\bigvee Y$, también son $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas.
- Si $\delta < \lambda$, ψ es una $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmula y $X = \langle x_\xi \mid \xi < \delta \rangle$ es un sucesión de variables, entonces $\exists X(\psi)$ y $\forall X(\psi)$, también son $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas.

Esto es, en $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ se permiten conjunciones y disyunciones de conjuntos de fórmulas de tamaño menor que κ; y cuantificaciones sobre sucesiones de variables de longitud menor que λ. Si κ fuese menor que λ se tendría el poder de cuantificar más variables de las que se necesitaría, así que siempre se descarta este caso. Una fórmula siempre debe poder acotarse para expresar propiedades, así si tiene más variables de las que se permiten cuantificar no son de utilidad; por lo tanto, sólo consideramos como fórmulas aquellas expresiones que tengan menos que λ variables. Denotamos con $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$ al conjunto de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmulas.

Como es usual, un $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-enunciado es una fórmula sin variables libres y una $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-teoría es un conjunto de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-enunciados.

También definimos las lógicas infinitarias $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$, para cada λ cardinal, y $\mathscr{L}_{\infty\infty}$, cuyas fórmulas son:

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda}) = \bigcup_{\kappa\geq\lambda} \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$$

y

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty}) = \bigcup_{\lambda\geq\aleph_0} \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda})$$

Vale la pena realizar las siguientes observaciones. $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ no es otra lógica, sino la de primer orden. Las diferencias entre $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ y $\mathscr{L}_{\kappa 2}$ son mínimas, ya que en $\mathscr{L}_{\kappa 2}$ sólo se puede cuantificar una variable a la vez, y en $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ se cuantifica una cantidad finita; así ambas lógicas son semánticamente equivalentes, cada fórmula sólo cambia en el número de cuantificadores. Por último, $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ es la lógica que tiene la menor diferencia sintáctica con la de primer orden; debido a esta cualidad ha sido la más estudiada.

Las estructuras y la forma de interpretar el lenguaje no sufren ningún cambio con respecto a la lógica de primer orden, esto es porque el tipo de símbolos en cuestión es el mismo para ambas lógicas. En nuestra notación, en general, si para las estructuras utilizamos las letras góticas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., sus respectivos universos los denotamos con A, B, ...

La noción de satisfacción en las lógicas infinitarias es la esperada. Para los conectivos y cuantificadores infinitarios se generaliza la versión finita de la lógica. Como ejemplo, si $\varphi \equiv \bigwedge \Psi$, donde $\Psi \subset \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$ de cardinalidad menor que κ, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si para toda $\psi \in \Psi$, $\mathfrak{A}$ satisface a la fórmula ψ.

Decimos que las $\mathscr{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-equivalentes, en símbolos $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$, si todos los $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-enunciados que se satisfacen en $\mathfrak{A}$, se satisfacen en $\mathfrak{B}$ y viceversa. De manera análoga se definen $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\infty} \mathfrak{B}$.

Si $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ y para toda $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-fórmula φ y $\langle a_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$ en A, $\delta < \lambda$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\langle a_\alpha \rangle] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\langle a_\alpha \rangle],$$

decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \preceq_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$. De la misma manera se define $\mathfrak{A} \preceq_{\infty\lambda} \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \preceq_{\infty\infty} \mathfrak{B}$.

Recordemos que una de las principales metas, al extenderse a las lógicas infinitarias, es aumentar la expresividad. Con los siguientes ejemplos podemos ver que, efectivamente, se ha logrado, al menos en algunos casos.

- En $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, con $\mathscr{L} = \emptyset$ podemos axiomatizar la clase de todos los modelos finitos:

$$\bigvee_{n<\omega} \quad \exists x_1, \ldots, x_n \quad \forall y \quad (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

- Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje de la aritmética, que incluye al símbolo de función s, el cual sirve para interpretar la función sucesor. Entonces, la clase de los modelos isomorfos al modelo estándar de la aritmética se axiomatiza añadiendo a los axiomas de Peano, el enunciado infinitario

$$\forall x(x = 0 \vee x = s0 \vee x = ss0 \vee \ldots)$$

o bien,

$$\forall x \bigvee_{n<\omega} x = s^n 0,$$

axioma que impide la aparición de elementos no estándar.

Aún tenemos más, el esquema de inducción se puede convertir en una $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$- fórmula:

$$\bigwedge_{\varphi \in \bigcup\limits_{n<\omega} \mathrm{Form}_{n+1}(\mathscr{L})} \quad \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}, 0) \wedge \forall y(\varphi(\bar{x}, y) \to \varphi(\bar{x}, sy)) \to \forall y \varphi(\bar{x}, y)].$$

donde $\mathrm{Form}_{n+1}(\mathscr{L})$ es el conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas de primer orden con a lo más $n+1$ variables libres.

- Si $\mathscr{L}$ es el lenguaje de la teoría de grupos abelianos[2], en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ *sí* se puede axiomatizar a los grupos de torsión, sólo tenemos que añadir a los axiomas de grupo el enunciado

$$\forall x \bigvee_{0<n<\omega} nx = 0.$$

- Dado $\mathscr{L} = \{\leq\}$, en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$ la clase de los buenos órdenes se axiomatiza, junto con los axiomas de orden total, con el enunciado

$$\neg \left(\exists x_0, x_1, x_2, \cdots \bigwedge_{n<\omega} (x_{n+1} \leq x_n \wedge x_{n+1} \neq x_n) \right),$$

el cual expresa que no puede haber una sucesión infinita estrictamente decreciente. Otra manera de describir la propiedad es mediante el axioma

$$\forall x_0, x_1, x_2 \ldots \exists y \left(\left(\bigvee_{n<\omega} y = x_n \right) \wedge \left(\bigwedge_{n<\omega} y \leq x_n \right) \right),$$

[2]En el lenguaje de la teoría de grupos abelianos la operación del grupo la denotamos, como es usual, con el símbolo $+$. Observemos que las fórmulas atómicas, es decir, las más básicas posibles con este lenguaje, son ecuaciones lineales como por ejemplo $x_1 + \cdots + x_l = y_1 + \cdots + y_k$, donde las x_i, y_j son variables o e. Para agrupar las variables o constantes que se repiten dentro de una ecuación escribimos nx en lugar de $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ veces}}$.

que afirma que todo subconjunto numerable tiene un menor elemento.

El último ejemplo tiene un detalle relevante. Observemos que es el único donde cuantificamos sobre una cantidad numerable de variables y no sobre una cantidad finita, como lo habíamos hecho en las demás axiomatizaciones. Eso no fue un error, para describir la propiedad de ser un buen orden es necesario referirse a conjuntos y no a elementos, por lo cual $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ no alcanza para definir el buen orden. Más aún, ningún $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ es suficiente, con κ cardinal. Este hecho es un magnífico resultado de López-Escobar [11].

Aunque se gana en expresión en las lógicas infinitarias, se pierden compacidad y tampoco es cierto el teorema de Löwenhein-Skolem. Basta un ejemplo sencillo para corroborar esto.

Sean $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ constantes en $\mathscr{L}$. Sea Σ el conjunto de $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-enunciados

$$\left\{\forall x\left(\bigvee_{n<\omega} x = c_n\right)\right\} \cup \{c \neq c_n \mid n < \omega\}.$$

Cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo, pero Σ no. Además, el primer enunciado tiene un modelo de cardinalidad $\aleph_0$, pero ningún modelo no numerable.

Algunas alternativas para esta pérdida de compacidad han sido desarrolladas, por ejemplo, propiedades de consistencia, lógicas infinitarias en cardinales inaccesibles, etcétera. Además algunas versiones de Löwenhein-Skolem se cumplen para ciertas lógicas infinitarias; como ejemplo, y porque más adelante se requerirá, aprovechamos para enunciar la siguiente propiedad de Löwenhein-Skolem descendente, cuya prueba es muy parecida a la de primer orden.

Dada una $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula φ, denotamos con $|\varphi|$ al número de subfórmulas que contiene.

Lema 1. *Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje numerable, $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura infinita, A_0 un subconjunto de A y φ un $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-enunciado con a lo más $|A|$ subfórmulas. Entonces, existe una subestructura $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ con $A_0 \subseteq B$ y $|B| = \text{máx}\{|\varphi|, |A_0|, \aleph_0\}$, tal que para toda subfórmula $\psi(\bar{x})$ de φ y $\bar{b}$ en B se tiene*

$$\mathfrak{B} \models \psi[\bar{b}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \psi[\bar{b}].$$

A pesar de estos problemas —si se pueden llamar así—, la teoría alrededor de las lógicas infinitarias es muy vasta. Con este trabajo se pretende dejar constancia ello.

3. Ida y vuelta

El método de *ida y vuelta* tiene sus orígenes en la extraordinaria prueba, hecha por Hausdorff, del teorema de Cantor que enuncia: cualquier conjunto numerable con un orden lineal denso sin extremos no es otro, salvo isomorfismo, que el conjunto de los racionales con el orden natural. La construcción del isomorfismo se realiza mediante biyecciones finitas entre elementos del conjunto y de los racionales, de manera exhaustiva se elige un elemento a la vez, de un lado y luego del otro, adecuadamente.

Teorema 2. *Cualesquiera conjuntos numerables con órdenes lineales densos sin extremos son isomorfos. Por lo tanto, todos son isomorfos a $(\mathbb{Q}, <)$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ y $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$ acordes a las hipótesis. Enumeramos $A = (a_i)_{i\in\omega}$ y $B = (b_i)_{i\in\omega}$. Definimos recursivamente sucesiones $(c_i)_{i<\omega}$ y $(d_i)_{i<\omega}$ hasta agotar A y B, respectivamente; para definir de manera natural $f_n : (c_i)_{i\leq n} \to (d_i)_{i\leq n}$ isomorfismos de orden.

Comenzamos definiendo $c_0 = a_0$ y $d_0 = b_0$.

Supongamos que tenemos definidos $(c_i)_{i<n}$ y $(d_i)_{i<n}$ para $n \in \omega$. Si n es par, elegimos $c_n = a_j$, donde

$$j = \text{mín}\{\, i \mid a_i \text{ no aparece en } (c_i)_{i<n}\};$$

como $\mathfrak{B}$ es un orden lineal denso sin extremos, existe un elemento $d_n \in \{b_i \mid i \in \omega\}$ tal que $(c_i)_{i \leq n}$ y $(d_i)_{i \leq n}$ son isomorfos. Para ilustrar esto, si ocurre que $c_i < c_n = a_j < c_{i'}$, para ciertas $i, i' < n$, entonces elegimos d_n de tal manera que $d_i < d_n < d_{i'}$. Si n es impar, intercambiamos los papeles de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, de tal manera que primero elegimos el elemento d_n y después el c_n que le corresponde.

Como

$$f_0 \subset f_1 \subset \ldots f_n \subset \ldots,$$

podemos definir $f = \cup_{n \in \omega} f_n$, cuyo dominio es, justamente, A y rango B. Además, preserva el orden, por lo tanto, f es el isomorfismo buscado. $\square$

Observemos que la construcción del isomorfismo en el teorema anterior depende de los isomorfismos entre subconjuntos de A y B; a ese tipo de isomorfismos se les llama parciales. Decimos que f es un *isomorfismo parcial* de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, si es un isomorfismo, su dominio es una subestructura $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ y su rango es una subestructura $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$.

Definición 3. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras. Decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *isomorfos parcialmente*, $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, si existe una familia no vacía I de isomorfismos parciales de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, con la *propiedad de ida y vuelta*:

- Para cada $f \in I$ y $a \in A$ (respectivamente, $b \in B$), existe $g \in I$ que extiende a f y $a \in \text{dom} g$ (respectivamente, $b \in \text{rang}$).

Para enfatizar al conjunto I, escribimos $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Cabe señalar que la noción de ser isomorfos parcialmente se puede generalizar a $\cong_\kappa$, κ cardinal, donde los isomorfismos van abarcando a subconjuntos de tamaño menor que κ en lugar de un elemento a la vez. También existe la noción $\cong_\kappa^\alpha$, en el libro [9] se puede profundizar sobre ambas.

En la demostración del teorema 2, definimos el conjunto de isomorfismos parciales entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, $I = \{f_n \mid n < \omega\}$. Entonces, por construcción $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Si ocurre que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas parcialmente y ambas son numerables, como en el caso de la prueba del teorema 2, resulta que también son isomorfas.

Teorema 4. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras numerables, o $\aleph_0$-generadas, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. De hecho, si $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y $f_0 \in I$, entonces f_0 es puede extender a un isomorfismo $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Demostración. Es claro que si $f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces con $I = \{f\}$, $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

La demostración del inverso tampoco es complicada. Supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son generadas, respectivamente, por $\{a_i \mid i \in \omega\}$ y $\{b_i \mid i \in \omega\}$. Sean $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y $f_0 \in I$. Como se hizo en la prueba del teorema de Cantor, se van añadiendo, de manera exhaustiva, los a_i y b_i mediante la propiedad de *ida y vuelta* de I. $\square$

El método de *ida y vuelta* no es exclusivo de las lógicas infinitarias, pero teorema de Karp en [6] es la fuerte conexión de los isomorfismos parciales con la equivalencia en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$. A este resultado se le conoce como la caracterización algebraica de $\equiv_{\infty\omega}$.

Teorema 5. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$

Demostración. Primero demostraremos 2 implica 1. Dado $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, mostraremos por inducción en la construcción de las $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmulas $\varphi(\bar{x})$ que si $f \in I$ y $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \text{dom} f$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a})],$$

donde $f(\bar{a})$ abrevia $(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$. Lo cual implica, en particular, que para todo $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-enunciado σ, $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \sigma$.

Si φ es atómica, el resultado es una consecuencia inmediata del hecho de que f es isomorfismo.

Los casos en que φ es $\neg\psi$ o bien $\bigwedge \Phi$, se siguen claramente de la hipótesis inductiva.

Por lo cual, resta comprobar cuando $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \equiv \exists x_n \psi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n)$. Sean $f \in I$ y $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{dom} f$. Entonces, $\mathfrak{A} \models \exists x_n \psi(a_0, \ldots, a_{n-1}, x_n)$ si y sólo si existe $a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(a_0 \ldots a_n)$. Por la propiedad de *ida y vuelta*, existe $f \subseteq g \in I$ con $a_n \in \mathrm{dom} g$. Así, por nuestra hipótesis de inducción, $\mathfrak{B} \models \psi[g(a_0), \ldots, g(a_{n-1}), g(a_n)]$, o equivalentemente, $\mathfrak{B} \models \psi[f(a_0), \ldots, f(a_n), b]$ para algún $b \in B$, es decir, $\mathfrak{B} \models \exists x_n \psi[f(a_0), \ldots, f(a_n), x_n]$. Para demostrar que $\mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a})]$ implica $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$, procedemos de manera similar, donde el único cambio es que ahora utilizamos la otra propiedad de *ida y vuelta*, extendiendo a f mediante $g \in I$ con $b \in \mathrm{rang}$.

Continuamos con la demostración de 1 implica 2, para tal propósito supongamos $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$. Sea I el conjunto de los isomorfismos f, tales que $\mathrm{dom} f$ es una subestructura finitamente generada de $\mathfrak{A}$, $\mathrm{ran} f$ es una subestructura finitamente generada de $\mathfrak{B}$ y

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a})],$$

para toda $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula $\varphi(\bar{x})$ y para cualesquiera $\bar{a}$ en $\mathrm{dom} f$ de longitud apropiada. Como $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, las subestructuras de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ generadas por el conjunto vacío son isomorfas y tal isomorfismo debe pertenecer a I, así I es no vacío.

Probaremos que $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Sea $f \in I$ y $a' \in A$ tal que $a' \notin \mathrm{dom} f = \langle\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}\rangle$. Entonces, existe b en B tal que

$$(\mathfrak{A}, (a_0, \ldots, a_{n-1}, a')) \equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, (f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}), b)),$$

es decir,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}, a'] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(\bar{a}), b],$$

para toda $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$.

Para verificar esta afirmación, sea S el conjunto de $b \in B$ tales que

$$(\mathfrak{A}, (a_0, \ldots, a_{n-1}, a')) \not\equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, (f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}), b)).$$

Podemos suponer que S no es vacío, en caso contrario habríamos terminado. Para cada $b \in S$, elegimos una $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula $\varphi_b(\bar{x})$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_b[\bar{a}, a']$, pero $\mathfrak{B} \models \neg\varphi_b[f(\bar{a}), b]$. Sea $\psi \equiv \bigwedge\{\varphi_b \mid b \in S\}$.

Por construcción, $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}, a']$, de donde $\mathfrak{A} \models \exists x_n \psi[\bar{a}, x_n]$, luego, por hipótesis $\mathfrak{B} \models \exists x_n \psi[f(\bar{a}), x_n]$, porque $f \in I$. Sea b en B el testigo de ψ en $\mathfrak{B}$.

Entonces, b no puede pertenecer a S ya que ningún elemento de S satisface ψ. Así, por la definición de S, $(\mathfrak{A}, \bar{a}, a') \equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, f(\bar{a}), b)$, como se deseaba.

Definimos el homomorfismo,

$$g : \langle\{a_0, \ldots, a_{n-1}, a'\}\rangle \cong \langle\{f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}), b\}\rangle,$$

como $g(a_j) = f(a_j)$ para $0 \leq j < n$ y $g(a') = b$. Entonces, $g(t[\bar{a}, a']) = t[f(\bar{a}), b]$, para todo $\mathscr{L}$-término $t(x_0, \ldots, x_n)$. Es claro que g es un isomorfismo parcial y $g \supseteq f$.

Sólo resta verificar que $g \in I$.

Dadas $c_0, \ldots, c_{m-1} \in \langle\{a_0, \ldots, a_{n-1}, a'\}\rangle$, existen $\mathscr{L}$-términos t_j tales que

$$c_j = t_j(a_0, \ldots, a_{n-1}, a'),$$

para $0 \leq j < m$.

Sea φ una $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-fórmula tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{c}]$, o de manera equivalente, $\mathfrak{A} \models \varphi'[\bar{a}, a']$, donde

$$\varphi'(x_0, \ldots, x_n) = \varphi(t_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, t_{m-1}(x_0, \ldots, x_n)).$$

De $(\mathfrak{A}, \bar{a}, a') \equiv_{\infty\omega} (\mathfrak{B}, f(\bar{a}), b)$ se sigue

$$\mathfrak{A} \models \varphi'[(a_0, \ldots, a_{n-1}, a')] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi'[(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}), b)].$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[(c_0, \ldots, c_{m-1})] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[(d_0, \ldots, d_{n-1})],$$

con $d_j = t_j(f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}), b)$, para $0 \leq j < m$.

El otro caso de *ida y vuelta* se demuestra de manera análoga. $\square$

La demostración del siguiente resultado se obtiene mediante una modificación del teorema de Karp.

Teorema 6. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{A} \preceq_{\infty\omega} \mathfrak{B}$
2. *Existe un conjunto I tal que $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ y para cada $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ existe una $f \in I$ con $f(a_i) = a_i$ para $0 \leq i < n$.*

Un corolario inmediato de los teoremas 4 y 5 es:

Corolario 7. *Sea $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathscr{L}$-estructuras numerables. Entonces, $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Para un lenguaje numerable, el resultado anterior es equivalente al teorema de Scott para $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, el cual enuncia que si $\mathfrak{A}$ es numerable, entonces existe un $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-enunciado φ tal que para cualquier otra estructura numerable $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas; dicho de otro modo, toda la información de la estructura $\mathfrak{A}$ se resume en dicho enunciado.

También existe una versión del teorema de Scott para $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ sin restricción en el tamaño del lenguaje. A continuación lo enunciamos.

Teorema 8. *Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathscr{L}$-estructura. Existe un $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-enunciado σ, con $|\sigma| \leq$ máx$\{|\mathscr{L}|, \aleph_0\}$, tal que para cualquier $\mathfrak{B}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{B} \models \sigma$.

A σ se le conoce como el *enunciado de Scott para* $\mathfrak{A}$, el cual determina, salvo equivalencia $\equiv_{\infty\omega}$, a dicha estructura. Está de sobra mencionar la importancia de dicho teorema en las lógicas infinitarias.

4. Una aplicación a la teoría de grupos

Un grupo abeliano es $\aleph_1$-libre si todos sus subgrupos numerables son libres. Debido a que todos los subgrupos de un grupo libre son libres, cada grupo libre es $\aleph_1$-libre. Pero, como veremos el inverso no es cierto. Se mostrará el siguiente teorema: G es $\aleph_1$-libre si y sólo si es $\equiv_{\infty\omega}$ a un grupo con $\aleph_0$ generadores.

Lema 9. *Si $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen, salvo isomorfismo, las mismas subestructuras numerablemente generadas.*

Demostración. La demostración es un corolario del teorema 5. Por hipótesis, existe $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Sea $\mathfrak{A}_0$ una subestructura numerablemente generada de $\mathfrak{A}$. Supongamos que $\{a_i \mid i < \omega\}$ es el conjunto de generadores de $\mathfrak{A}_0$. Construimos el encaje f de $\mathfrak{A}_0$ a $\mathfrak{B}$ como $f = \cup_{n<\omega} f_n$ con $f_n \in I$ tal que $a_n \in \mathrm{dom}(f_n)$. Obtenemos así la subestructura numerablemente generada $f(\mathfrak{A}_0)$ de $\mathfrak{B}$. El recíproco es análogo. $\square$

Teorema 10. *[Kueker, [8]] Sea G un grupo libre con $\aleph_0$ generadores. Entonces, para cualquier grupo H, $G \cong_p H$ si y sólo si H es $\aleph_1$-libre.*

Demostración. Supongamos que $G \cong_p H$ y H_0 es un subgrupo numerable de H. Por el lema anterior, H_0 es isomorfo a un subgrupo de G y , por tanto, es libre.

Para el recíproco, supongamos que H es $\aleph_1$-libre. Es suficiente mostrar que H es modelo del enunciado de Scott $\sigma(G)$, con lo cual, por el teorema de Karp, $G \cong_p H$. Sea A un conjunto infinito de elementos independientes de H, entonces A es a lo más numerable. Por el lema de Löwenhein-Skolem 1, obtenemos un subgrupo $H_1 \subseteq H$ numerable, con $A \subseteq H_1$, tal que $H \models \sigma(G)$ si y sólo si $H_1 \models \sigma(G)$. Pero, $H_1 \cong G$, ya que H_1 es libre y también G. De donde, por la propiedad de σ, $H_1 \models \sigma(G)$ como se deseaba. $\square$

4.1. Ser $\aleph_1$-libre es expresable en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$, aunque ser libre no lo es. Si G un grupo abeliano y G_0 un subgrupo de G, decimos que G_0 es *delgado en* G si es finitamente generado y $G = G_0 \oplus G_1$, para algún subgrupo G_1 isomorfo a G.

Sea $\{G_j \mid j \in J\}$ una familia infinita de grupos cíclicos infinitos, digamos que cada G_j es generado por x_j. Sean $G = \bigoplus_{j\in J} G_j$ la suma directa y $H = \prod_{j\in J} G_j$ el producto directo de los G_j.

PROPOSICIÓN 11. *Sean G y H como antes, I el conjunto de isomorfismos de un subgrupo delgado de G sobre un subgrupo delgado de H. Entonces,*

$$I : G \cong_p H.$$

Nótese que H y G tienen diferente cardinalidad, por tanto dos estructuras pueden ser parcialmente isomorfas sin ser isomorfas en el sentido estricto.

Demostración. Para demostrar que G y H son parcialmente isomorfos mediante I, se necesitan comprobar las dos propiedades de *ida y vuelta.*

Si $f \in I$ y $a \in G$ no pertenece a su dominio, sea $A = \bigoplus_{0\leq n<m} G_{j_n}$, donde j_n son los índices correspondientes a las entradas de a que son distintas de cero. Claramente A es un subgrupo delgado de G que contiene a a. Elegimos cualquier $g \in I$ que extienda a f y que $\mathrm{dom} g = \mathrm{dom} f \oplus A$, ya que es un subgrupo delgado de G.

Ahora, si $f \in I$ y $b \in H$ no pertenece a su rango debemos encontrar una extensión de f en I cuyo rango contenga a b. Para esto, primero mostraremos que cualquier elemento de H está contenido en algún subgrupo delgado de él. Teniendo esto, de forma análoga al caso anterior, sea B un subgrupo delgado de H que contiene a b, entonces $\mathrm{ran} f \oplus B$ tiene las características deseadas. Así, elegimos $g \in I$ tal que $f \subseteq g$ y $\mathrm{ran} g = \mathrm{ran} f \oplus B$.

Por lo tanto, sólo resta probar que dado $b = (n_j x_j)_{j\in J} \in H$ podemos encontrar un subgrupo delgado de H al que pertenezca. Definimos $\|b\|$ como el menor natural distinto de cero de $|n_j|$. La demostración se hará por inducción sobre $\|b\|$.

Si $\|b\| = 1$, entonces existe $\tilde{\jmath} \in J$ tal que $|n_{\tilde{\jmath}}| = 1$. Por lo cual, $H = \langle b\rangle \oplus H_{\tilde{\jmath}}$, donde $H_{\tilde{\jmath}}$ consiste en todos los elementos de H con la $\tilde{\jmath}-$ésima coordenada igual a 0.

Si $\|b\| > 1$, dividimos cada n_j entre $\|b\|$, es decir, para cada $j \in J$ hacemos $n_j = \|b\|q_j + r_j$, con $0 \leq r_j < \|b\|$. Definimos b_1 y b_2 elementos de H como $b_1 = (q_j x_j)_{j\in J}$ y $b_2 = (r_j x_j)_{j\in J}$. Con lo que podemos expresar a $b = \|b\|b_1 + b_2$.

Observemos que los coeficientes de b_2 son r_j, todos menores que $\|b\|$, de donde $\|b_2\| < \|b\|$. Por hipótesis de inducción, existe H' subgrupo delgado de H al que pertenece b_2. Es claro que $\langle b_1\rangle \oplus H'$ es un sumando directo finitamente generado de H que contiene a b. $\square$

Como una consecuencia del teorema 6,

$$G \preceq_{\infty\omega} H.$$

En 11, se mostró, en particular, que $I : \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z} \cong_p \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ es $\aleph_1$-libre. Pero *no* es libre.

El siguiente resultado de Baer [1], es un clásico de la teoría de grupos abelianos. Se expone una demostración detallada.

TEOREMA 12. *Con las mismas hipótesis de la proposición anterior, H no es libre.*

Demostración. Si $H = \prod_{j\in J} G_j$ fuese libre, todos sus subgrupos también lo serían. Por lo cual, podemos suponer que J es numerable: como cualquier producto infinito, numerable o no numerable, de grupos cíclicos infinitos contendría un subgrupo no libre, él tampoco podría serlo. Aún más, sin pérdida de la generalidad supongamos que $H = \prod_{j\in\omega} G_j$. Obsérvese que H es isomorfo al grupo de Baer $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$.

Con el objetivo de llegar a una contradicción, supongamos que H es libre. Sea $\{b_\alpha \in H \mid \alpha < \kappa\}$, una base para tal grupo, con κ un cardinal infinito. Como H es un grupo no numerable, entonces $\kappa > \aleph_0$, puesto que una cantidad numerable de elementos sólo pueden generar un grupo numerable.

Sean, para cada $j \in \omega$, los elementos $a_j \in H$ cuya entrada j-ésima es el generador de G_j, x_j, y las entradas restantes son los elementos identidad e_k de cada G_k, $k \in \omega$ $k \neq j$. En particular, los a_j generan a $G = \bigoplus_{j\in\omega} G_j$. Representamos a $a_j = \sum_{\alpha<\kappa} n_\alpha^j b_\alpha$ como una combinación lineal de la base, donde los coeficientes son cero, salvo para una cantidad finita. Sea $\Delta \subset \kappa$ el conjunto de los índices $\alpha \in \kappa$ tales que $n_\alpha^j \neq 0$ para al menos un $j \in J$, por lo cual Δ es numerable.

Sea K el subgrupo generado por $\{b_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

Además, el grupo cociente H/K debe ser libre al igual que H, su base es $\{b_\alpha + K \mid \alpha \in \kappa - \Delta\}$, porque $b_\alpha \in K$ si $\alpha \in \Delta$.

Consideremos los elementos $a \in H$ cuyas entradas cumplen la siguiente propiedad: si $a = (n_0x_0, n_1x_1, n_2x_2, \dots)$, entonces $n_0 = p_0$, $n_1 = p_0p_1,$, $\dots$, es decir, $n_i = p_0p_1\dots,p_i$, donde los p_i son primos. Existen tantos elementos de ese tipo como sucesiones $(p_i)_{i<\omega}$ de primos, por lo tanto, existe una cantidad no numerable. Ya que H es no numerable y K es numerable, podemos elegir un $a = (n_0x_0, n_1x_1, n_2x_2, \dots) \in H$ con las características anteriores tal que $[a] = a + K \in H/K$ no es la identidad, esto es, $a \notin K$.

Como K contiene a los a_j, contiene también a la suma directa G, entonces los elementos

$$(e_0, \dots, e_{i-1}, n_ix_i, n_{i+1}x_{i+1}, \dots) = a + \underbrace{(-n_0x_0, \dots, -n_{i-1}x_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots)}_{\in G\subseteq K},$$

pertenecen a la clase lateral $[a]$, para todo $i \geq 1$.

Las ecuaciones, con variable z, $[a] = n_iz$ tienen solución en H/K, para todo $i \in \omega$, a saber $z = [(e_0, \dots, e_{i-1}, x_i, p_{i+1}x_{i+1}, p_{i+1}p_{i+2}x_{i+2}, \dots)]$. Lo cual no es posible: $[a]$ es generado por la base de H/K, entonces $[a] = \sum_{\alpha<\kappa,\alpha\notin\Delta} m_\alpha[b_\alpha]$, elegimos α tal que $m_\alpha \neq 0$; si la ecuación $[a] = nz$ tiene solución para $n \in \omega$, entonces n divide a m_α, pero sólo tiene una cantidad finita de divisores, así esa ecuación para $[a]$ sólo puede tener solución para un número finito de enteros $n = n_i$. Por lo tanto, llegamos a una contradicción. Concluimos que H no es libre. □

Por lo anterior, podemos concluir que la noción de ser un grupo libre no se puede expresar en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$: de 11 y el teorema 5,

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z} \preceq_{\infty\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z},$$

pero el primero es libre y el otro no.

Sin embargo, es interesante observar que la noción de ser $\aleph_1$-libre *sí* se puede expresar en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$, más aún, en $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$. El siguiente resultado es una reformulación del criterio de Pontryagin (p.98 [4]).

COROLARIO 13. *Un grupo abeliano H es $\aleph_1$-libre si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

1. *H es libre de torsión.*
2. *H no es libre mediante una cantidad finita de generadores.*
3. *Para cualesquiera $x_1, \dots, x_k \in H$, el subgrupo puro[3] de H generado por tales elementos es libre en un número finito de generadores.*

   Además, dichas propiedades son expresables en $\mathscr{L}_{\infty\omega}$.

Demostración. Sea G un grupo abeliano generado por una cantidad numerable de elementos. Definimos el conjunto de isomorfismos I, $f \in I$ si f es un isomorfismo

[3]Un subgrupo K de H es *puro* si $nK = nH \cap K$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

de un subgrupo puro finitamente generado de G sobre un subgrupo puro finitamente generado de H. Las tres condiciones nos aseguran que $I : G \cong_p H$, de donde, por el teorema 10, H es $\aleph_1$-libre.

Sólo resta dar las expresiones infinitarias de las tres condiciones.

1. *H es libre de torsión.*

$$\forall x \left(x \neq e \to \bigwedge_{0<n<\omega} nx \neq e \right).$$

2. *H no es libre mediante una cantidad finita de generadores.* Un grupo abeliano libre generado por $x_1, \dots, x_k$ consta de todas las posibles combinaciones lineales a de potencias de dichos elementos o de sus inversos, esto es

$$a = r_1 x_1 + \cdots + r_k x_k,$$

con $r_j \in \mathbb{Z}$. Pero nuestro lenguaje *no* posee un símbolo para el inverso, por lo cual no podemos considerar los coeficientes en los enteros. Con la finalidad de evadir este problema, expresamos que a pertenece al grupo generado por $x_1, \dots, x_k$ si se satisface la fórmula infinitaria $\bigvee \Phi_k[a, x_1, \dots, x_k]$ donde $\Phi_k(y, x_1, \dots, x_k)$ es el conjunto de fórmulas de la forma

$$n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k = y + m_1 x_1 \cdots + m_k x_k,$$

con $n_i < \omega$, $m_i < \omega$, para $i = 1, \dots, k$.

Así, H no es generado mediante una cantidad finita de elementos si es modelo del enunciado

$$\bigwedge_{0<k<\omega} \forall x_1, \dots, x_k \, \exists y \, \neg \left(\bigvee \Phi_k(y, x_1, \dots, x_k) \right).$$

3. *Para cualesquiera $x_1, \dots, x_k \in H$, el subgrupo puro de H generado por tales elementos es libre en un número finito de generadores.*

Como H es libre de torsión, es inmediato que la intersección de subgrupos puros de H también es un subgrupo puro. Por lo cual el subgrupo puro generado por $x_1, \dots, x_k$ es la intersección de los subgrupos puros que los contienen. Aún más, se puede describir explícitamente dicho subgrupo como

$$\{a \in H \mid na = n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k \text{ para algunos } n, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Por lo cual, a pertenece al subgrupo puro generado por $x_1, \dots, x_k$ si y sólo si $\rho_k[a, x_1 \dots, x_k]$ se satisface en H, donde

$$\rho_k(y, x_1 \dots, x_k) \equiv \bigvee_{0<n<\omega} \left(\bigvee \Phi_k(ny, x_1, \dots, x_k) \right),$$

y Φ_k se define de la misma manera que en el inciso anterior.

Entonces, la propiedad deseada se expresa mediante la siguiente fórmula infinitaria.

$$\bigwedge_{0<k<\omega} \forall x_1, \dots, x_k \bigvee_{0<l<\omega} \left(\exists y_1, \dots, y_l \bigwedge_{1 \le j \le l} \rho_k(y_j, \bar{x}) \wedge \forall z \left(\rho_k(z, \bar{x}) \to \bigvee \Phi_l(z, \bar{y}) \right) \right).$$

□

5. Notas

Como se mencionó, $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ ha sido la lógica infinitaria más estudiada por ser la siguiente en complejidad después de la clásica. El libro [7] de Keisler brinda un panorama sobre el estudio de dicha lógica.. Dickmann, en [3], realiza un estudio detallado de $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$, con κ y λ cardinales en general. Para $\mathscr{L}_{\infty\omega}$, la recopilación [9] es realmente extensa.

El ejemplo elegido para destacar el vínculo de las lógicas infinitarias con álgebra no es el único relevante. En la teoría de grupos abelianos de torsión se destaca el teorema de Ulm, el cual fue generalizado por Kaplansky, Eklof y Barwise a grupos no numerables mediante lógica infinitaria, con la noción de isomorfismos parciales. Para una referencia detallada véase [2].

En [5], Eklof navega por algunos resultados en diferentes áreas del álgebra, no sólo por la teoría de grupos.

Referencias

[1] R. Baer, *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Mathematical Journal 3, no. 1, 68–122, 1937.
[2] J. Barwise, *Back and forth through infinitary logic*, Studies in model theory, Studies in mathematics, vol. 8, 5–34, Mathematical Association of America, 1973.
[3] A. Dickmann, Large infinitary languages: Model theory, North-Holland Publishing Company, 1975.
[4] P. Eklof & A. Mekler, Almost free modules: Set-theoretic methods, North-Holland Mathematical Library, Elsevier Science, 2002.
[5] P. Eklof, Chapter xi: Applications to algebra, Perspectives in Mathematical Logic, vol. 8, 423–442, Springer-Verlag, New York, 1985.
[6] C. Karp, *Finite quantifier equivalence*, The Theory of Models, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 407–412, 1965.
[7] H. Keisler, Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers, Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland Pub. Co., 1971.
[8] D. Kueker, *Definability, automorphisms, and infinitary languages*, The Syntax and Semantics of Infinitary Languages (Jon Barwise, ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 72, Springer Berlin Heidelberg, 152–165, 1968.
[9] D. Kueker (ed.), Infinitary logic: In memoriam Carol Karp, Lecture Notes in Mathematics, vol. 492, Springer Berlin Heidelberg, 1975.
[10] P. Lindström, *On extensions of elementary logic*, Theoria 35, no. 1, 1–11, 1969.
[11] E. López-Escobar, *On defining well-orderings*, Fundamenta Mathematicae 59, no. 1, 13–21, 1966.
[12] L.M. Villegas Silva & M. Fernández de Castro, Lógica matemática II. Clásica, intuicionista y modal, Universidad Autónoma Metropolitana, 2011.

Dirección de la autora:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `ceciliahd@xanum.uam.mx`

Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. VI, junio de 2015, 53–73

MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN PARA EDO'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

FRANCISCO HUGO MARTÍNEZ ORTIZ

Resumen. La teoría de las distribuciones desarrolladas por S.L. Sobolev y Laurent Schwartz es una herramienta poderosa para el estudio de las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como en derivadas parciales, por lo que es conveniente introducirla en los cursos de ecuaciones diferenciales a nivel licenciatura. En este reporte expongo el uso de la teoría elemental de las distribuciones, aplicando el método de la función de Green en el análisis tanto de problemas con valores iniciales, como en problemas con valores a la frontera no homogéneos, asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden dos en forma autoadjunta.

El método de la función de Green es un método que presenta grandes ventajas tales como el de expresar la solución de los problemas mencionados de manera natural en función de las condiciones iniciales o de frontera, así como del término no homogéneo.

Por último, deseo manifestar mi agradecimiento al Dr. Gabriel López Garza por sus comentarios que han enriquecido este trabajo.

1. Introducción

Sea

$$\begin{aligned} A:\ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & A(u) = f \end{aligned} \tag{1}$$

donde A es una matriz invertible $n \times n$.

Un método para resolver la ecuación en (1), para cualquier $f \in \mathbb{R}^n$, consiste en invertir la matriz A, puesto que si A^{-1} denota la matriz inversa de A entonces la solución de $Au = f$ se expresa como $u = A^{-1}f$.

Por otra parte un método para encontrar A^{-1} consiste en reemplazar a f en el problema (1) por la delta de Kronocker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}.$$

En forma análoga se puede tratar el siguiente problema:

$$\begin{aligned} L_1:\ & D_1 \to V \\ & L_1(u) = f \end{aligned} \tag{2}$$

donde

i) L_1 es un operador diferencial lineal invertible.
ii) D_1 es un subespacio vectorial del espacio vectorial real V.

Para construir L_1^{-1}, en lugar de reemplazar a f por la delta de Kronocker, ahora se reemplaza por la delta de Dirac $\delta(x - y)$.

Si $G(x, y)$ es la solución correspondiente a la delta de Dirac, se demostrará en los casos que se estudiarán que

$$L_1^{-1}(f)(x) = u(x) = \int G(x, y) f(y) dy.$$

De esta manera, la tarea de resolver el problema (2) se reduce a encontrar la función $G(x, y)$, conocida como función de Green del problema (2). A este método se le conoce como método de la función de Green.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46F10, 34B27 .
Palabras clave. función generalizada, función de Green.

En estas notas trataré principalmente con operadores diferenciales ordinarios lineales de orden dos, sin embargo para motivar el método se analizan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Resuelva el Problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = f(x) \qquad a \leq x \leq b \\ &u(a) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde f es continua en $[a, b]$, es decir: $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Será conveniente expresar el problema en (3) en términos de operadores; Para esto se introduce el operador

$$L_2 : D_2 = \left\{u \in \mathcal{C}^1[a, b] \middle| u(a) = 0\right\} \longrightarrow \mathcal{C}[a, b].$$

$$L_2(u) = \frac{du}{dx}.$$

Así el problema en (3) se formula como:

$$L_2(u) = f.$$

Por el teorema fundamental del cálculo existe el inverso L_2^{-1} de L_2 el cual está definido por:

$$L_2^{-1} : \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow D_2$$

$$u(x) = L_2^{-1} f(x) = \int_a^x f(y)dy = \int_a^b H(x-y)f(y)dy$$

donde

$$H(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y < x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad a \leq x \leq y \end{cases}$$

es la función escalón unitaria.

De esta manera resolver el problema con valores iniciales en (3) se reduce a introducir la función de Green causal $G(x, y) = H(x - y)$, la cual es el núcleo del operador inverso L_2^{-1} de L_2.

Observe que la función de Green causal $G(x, y)$ es cero si $x < y$, además como se mostrará posteriormente satisface $L_2 G(x, y) = \delta(x - y)$.

Adelantándome un poco esto se debe a que en la teoría de las Distribuciones se tiene que $H' = \delta$ donde H' denota la derivada distribucional de H y δ denota la distribución de Dirac, comunmente llamada la delta de Dirac.

Para proporcionar una interpretación física de la función de Green causal, se recuerda que las acciones puntuales, como por ejemplo las fuerzas impulsivas, cargas concentradas, masas concentradas, etc. de magnitud uno se modelan por medio de la delta de Dirac. Así, físicamente la función de Green causal $G(x, y)$ se interpreta como la respuesta del sistema modelado por el problema (3), la cual es cero para $x < y$ y para $x > y$ como la respuesta a una acción puntual unitaria aplicada en $x = y$.

En conclusión, la función de Green causal $G(x, y)$ es por definición el núcleo del operador integral L_2^{-1} de L_2 o desde el punto de vista de la física es la respuesta a una acción puntual aplicada en $x = y$ y que es cero para $x < y$.

Si el problema que se plantea es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = f(x) \qquad a \leq x \leq b \\ &u(a) = \alpha \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es diferente de cero, entonces se descompone en los siguientes dos problemas

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f(x) & a \leq x \leq b \\ \\ u(a) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = 0 & a \leq x \leq b \\ \\ u(a) = \alpha \end{cases}$$

se ha resuelto el primer problema y el segundo tiene la solución $u(x) = \alpha$. Como el problema es lineal, la solución del problema es la suma de las soluciones de los dos problemas.

Nota: A un nivel intuitivo se introduce la delta de Dirac $\delta(x-y)$ como un objeto simbólico que satisface las siguientes propiedades

$$\text{i)} \qquad \delta(x-y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq y \\ \\ \infty & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

$$\text{ii)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)dx = 1$$

la cual se puede pensar para y fijo, como un "límite"por ejemplo de las funciones $\delta_\epsilon(x)$ cuando $\epsilon \to 0$, donde

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si} \quad y-\epsilon \leq x \leq y+\epsilon \\ \\ 0 & \text{si} \quad x < y-\epsilon \quad \text{ó} \quad x > y+\epsilon \end{cases}$$

y ϵ es mayor que cero.

En la sección de las distribuciones se introduce la delta de Dirac $\delta(x-y)$ rigurosamente.

Ejemplo 2. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L \\ \\ u(0) \;=\; 0 \\ u(L) \;=\; 0 \end{aligned} \tag{4}$$

donde $f \in \mathcal{C}[0, L]$.

Este problema se puede resolver por varios métodos, por ejemplo, integrando dos veces y aplicando las condiciones de frontera, sin embargo, ahora se resolverá en términos de una interpretación física del ejemplo 2 y también de la función de Green.

La función u se interpreta como la temperatura en estado estacionario de una barra aislada lateralmente de longitud L, cuyos extremos se mantienen a cero grados y f como una fuente de calor distribuida (densidad) sobre dicha barra.

La función de Green $G(x, y)$ se interpreta como la temperatura en x debido a una fuente de calor concentrada en $x = y \in (0, L)$ de magnitud uno y cuyos extremos de $[0, L]$ se mantienen a cero grados.

Dado que una fuente de calor concentrada de magnitud uno en $x = y \in (0, L)$, se modela por la delta de Dirac $\delta(x-y)$, se considera el siguiente problema simbólico

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x-y) \qquad 0 < x, y < L \\ \\ u(0) \;=\; 0 \\ u(L) \;=\; 0 \end{aligned}$$

Aceptando que $\dfrac{dH(x-y)}{dx} = \delta(x-y)$ se tiene, integrando

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\delta(x-y) \Rightarrow \frac{du}{dx} = -H(x-y) + A \Rightarrow$$

entonces

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\int_0^x H(s-y)ds + Ax + B \\ &= \begin{cases} Ax+B & \text{si} \quad 0 \le x < y \\ \\ -x+y+Ax+B & \text{si} \quad y \le x \le L \end{cases}. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 = B \\ u(L,y) &= 0 = -L+y+AL+B \end{aligned}$$

se tiene que

$$A = \frac{L-y}{L} \qquad \text{y} \qquad B = 0.$$

Por lo tanto la función de Green $G(x,y)$ del problema(4) está dada por:

$$u = G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(L-y)}{L} & \text{si} \quad 0 \le x < y \\ \\ \dfrac{y(L-x)}{L} & \text{si} \quad y \le x \le L \end{cases}.$$

Para expresar el ejemplo 2 en términos de operadores se introduce el operador

$$L_3 : D_3 = \{u \in \mathcal{C}^2[0,L] \big| u(0) = u(L) = 0\} \longrightarrow \mathcal{C}[0,L]$$

$$L_3 u = -\frac{d^2u}{dx^2}$$

el cual no es difícil verificar que es uno a uno.

Así el ejemplo 2 se formula como

$$L_3 u = f.$$

Motivados por el ejemplo 1.1 se espera que $L_3^{-1} : \mathcal{C}[0,L] \to D_3$ este dado por:

$$u(x) = L_3^{-1} f(x) = \int_0^L G(x,y) f(y) dy.$$

En efecto, si se escribe

$$u(x) = \int_0^x \frac{y(L-x)}{L} f(y)dy + \int_x^L \frac{x(L-y)}{L} f(y)dy$$

y se aplica la regla de Leibniz para derivar se obtiene

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f(x)$$

también se tiene $u(0) = u(L) = 0$, es decir, u es la solución única de (4), de donde L_3^{-1} es el operador inverso de L_3.

De esta manera resolver el problema con valores en la frontera (4) se reduce a encontrar la función de Green $G(x,y)$, la cual es solución del problema simbólico.

Si el problema que se plantea es:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x) \qquad 0 \le x \le L \\ u(0) &= \alpha \\ u(L) &= \beta \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces se descompone en los siguientes dos problemas

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} &= f(x) \qquad 0 \le x \le L \\ \\ u(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} &= 0 \qquad 0 \le x \le L \\ \\ u(0) &= \alpha \\ u(L) &= \beta \end{cases}.$$

Se ha resuelto el primer problema y el segundo no es difícil de resolver. Como el problema es lineal, la solución del problema planteado es la suma de las soluciones de los dos problemas.

2. Aspectos elementales de la teoría de las distribuciones

Ahora lo que se hará es precisar algunos hechos mencionados, por ejemplo, el que la delta de Dirac cumple con las propiedades

$$\delta(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

pero desde el punto de vista clásico, la integral de una función que es cero excepto en un punto, es cero. Entonces: ¿Cómo se define de manera precisa la delta de Dirac?. ¿En qué sentido $\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$? ¿Qué significa que la función de Green satisface $Lu = \delta(x-y)$?, etcétera.

Para dar respuesta a estas preguntas entre otras se hace una breve introducción a la teoría de las distribuciones.

Se empezará con algunos conceptos y propiedades de las distribuciones.

Definición 1. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el soporte de h, que se denota por $\mathrm{sop}(h)$ es la cerradura del conjunto $\{x \in \mathbb{R} | h(x) \neq 0\}$.

Sea Ω un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}^n(\Omega)$ denota el espacio de funciones $h : \Omega \to \mathbb{R}$ que tienen $n \in \mathbb{N}$ derivadas continuas en Ω.

$\mathcal{C}_0^n(\Omega)$ denota el espacio de las funciones en $\mathcal{C}^n(\Omega)$ que tienen soporte compacto (cerrado y acotado) contenido en Ω.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^n(\Omega)$

$D = D(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ denota a los elementos en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ que tienen soporte compacto contenido en Ω.

A los elementos de D se les llama funciones de prueba.

3. Algunas propiedades de las funciones de prueba

i) $D \neq \emptyset$; $\qquad \phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-c)(x-d)}\right) & \text{si} \quad x \in (c,d) \subsetneq \Omega \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega | (c,d) \end{cases}$

es una función de prueba con soporte $[c, d]$.

ii) Con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un número real, D es un espacio vectorial real.

iii) Si $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\phi \in D$ entonces $h\phi \in D$.

iv) Si $\phi \in D$ entonces la p-ésima derivada de ϕ, $\phi^{(p)} \in D$ para $p = 1, 2, \ldots$

v) Si $\phi(x) \in D(\mathbb{R})$ entonces $\phi(x+c) \in D(\mathbb{R})$ para c fijo en $\mathbb{R}$.

Para definir las distribuciones y algunas operaciones del análisis se requiere de una topología en D, sin embargo para tratar con las ecuaciones diferenciales que nos interesan es suficiente introducir el siguiente concepto de convergencia en D.

Definición 2. Sea $\{\phi_n\} \subset D$ y $\phi \in D$. Diremos que $\{\phi_n\}$ converge a ϕ en D y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n \overset{D}{=} \phi$ ó $\phi_n \xrightarrow{D} \phi$ si

i) Existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $sop(\phi_n)$ y $sop(\phi)$ estan contenidos en K para $n = 1, 2, \ldots$
ii) $\phi_n^{(p)} \longrightarrow \phi^{(p)}$ uniformemente en K para $p=0, 1, 2, \ldots$ cuando $n \to \infty$.

Algunas propiedades de las sucesiones convergentes en D.
Si $\phi_n \xrightarrow{D} \phi$ y $\psi_n \xrightarrow{D} \psi$ entonces

i) $\lambda_1 \phi_n + \lambda_2 \psi_n \xrightarrow{D} \lambda_1 \phi + \lambda_2 \psi$ donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
ii) $h\phi_n \xrightarrow{D} h\phi$ para $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$
iii) $\phi_n^{(p)} \xrightarrow{D} \phi^{(p)}$ para $p = 1, 2, \ldots$
iv) $\phi_n(x + c) \xrightarrow{D(\mathbb{R})} \phi(x + c)$ donde $c \in \mathbb{R}$.

Definición 3. Una funcional lineal sobre D es una función $F : D \to \mathbb{R}$ tal que $F(\lambda_1 \phi + \lambda_2 \psi) = \lambda_1 F(\phi) + \lambda_2 F(\psi)$ para toda $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\phi, \psi \in D$.

Definición 4. Una funcional lineal F sobre D es continua, si para toda sucesión $\{\phi_n\}$ que converge a ϕ en D se tiene que $F(\phi_n)$ converge a $F(\phi)$ en $\mathbb{R}$.

Definición 5. Una distribución de F sobre D es una funcional lineal continua sobre D. También se usa la notación $F = F(x) = \langle F, \phi \rangle$. Aunque no tiene sentido $F(x)$ cuando $x \in \mathbb{R}$.

El espacio vectorial de las distribuciones sobre D se denota por $D' = D'(\Omega)$.
En estas notas, sólo se usarán las distribuciones generadas por las funciones localmente integrables y las distribuciones de Dirac.

Definición 6. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable si

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

para todo subconjunto compacto K de Ω.

4. Ejemplos de distribuciones

i) Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente integrable define una distribución $F : D \to \mathbb{R}$ dada por $\langle F, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$.

En efecto, observe que F es una funcional lineal sobre D. Para demostrar que F es continua, sea $\{\phi_n\} \subset D$ y $\phi \in D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ en D, por definición existe un compacto K tal que sop $\phi \subset K$ y sop $\phi_n \subset K$ para $n = 1, 2, \ldots$. De ahí que:

$$\begin{aligned} |\langle F, \phi_n \rangle - \langle F, \phi \rangle| &\leq \int_\Omega |f(x)||\phi_n(x) - \phi(x)| dx = \\ &= \int_K |f(x)||\phi_n(x) - \phi(x)| dx \leq \\ &\leq \sup_K |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |f(x)| dx \to 0 \\ & \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Así, a toda función localmente integrable f le corresponde una distribución $\langle F, \phi \rangle$; en este sentido, toda función localmente integrable sobre Ω puede considerarse como una distribución.

ii) Distribución delta de Dirac, la distribución de Dirac que se denota por δ se define como:

$$\delta : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0).$$

δ es una función lineal sobre $D(\mathbb{R})$. Para demostrar que δ es continua, nótese que $\phi_n \xrightarrow{D} \phi$ implica que $\phi_n \to \phi$ uniformemente y así $\phi_n(0) \to \phi(0)$. Por lo tanto δ es una distribución.

iii) Para cualquier $p = 1, 2, \dots$ La funcional

$$\begin{aligned} F &: D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \langle F, \phi\rangle &= \phi^{(p)}(0) \end{aligned}$$

es una distribución para cada p, como puede verificarse.

Definición 7. Una distribución F se llama una distribución regular si existe una función localmente integrable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle F, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \quad \text{para toda } \ \phi \in D.$$

Una distribución que no es regular se llama singular.

PROPOSICIÓN 8. *La distribución δ es una distribución singular.*

La demostración que se hace es por reducción al absurdo. Supóngase que δ es regular entonces existe una función localmente integrable f tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Considere la función de prueba $\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) & \text{si } \ |x| < \epsilon \\ 0 & \text{si } \ |x| \geq \epsilon \end{cases}$ y observe que $\phi_\epsilon(0) = e^{-1}$ y $|\phi_\epsilon(x)| \leq e^{-1}$, de donde

$$e^{-1} = \phi_\epsilon(0) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right)dx \leq e^{-1}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x)|dx.$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon \to 0$ se obtiene la contradicción $e^{-1} \leq 0$ ya que f es localmente integrable. Por lo tanto la distribución δ es singular.

5. ALGUNAS DEFINICIONES EN LAS DISTRIBUCIONES

Se darán algunas definiciones en las distribuciones las cuales se motivan por las correspondientes propiedades de las distribuciones regulares. Por ejemplo para definir hF donde $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $F \in D'(\Omega)$ se considera el caso en que F es una distribución regular generada por la función localmente integrable f, así

$$\langle hF, \phi\rangle = \int_\Omega h(x)f(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f(x)(h(x)\phi(x))dx = \langle F, h\phi\rangle.$$

Este cálculo motiva la siguiente

Definición 9. Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $F \in D'(\Omega)$, se define la distribución $hF : D \to \mathbb{R}$ por $\langle hF, \phi\rangle = \langle F, h\phi\rangle$ para toda $\phi \in D$.

Para definir la traslación de una distribución se considera el caso en que F es una distribución regular en $D(\mathbb{R})$ generada por la función localmente integrable f. Si f se traslada por el número real ξ se obtiene la función localmente integrable $f(x - \xi)$, la cual define la distribución

$$\langle F(x-\xi), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x-\xi)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x+\xi)dx = \langle F(x), \phi(x+\xi)\rangle$$

Este cálculo motiva la siguiente

Definición 10. Sea $\xi \in \mathbb{R}$ y $F \in D'(\mathbb{R})$, se define la distribución $F(x-\xi) : D \to \mathbb{R}$ por $\langle F(x-\xi), \phi(x)\rangle = \langle F(x), \phi(x+\xi)\rangle$ para toda $\phi \in D(\mathbb{R})$.

En lo sucesivo se usará el símbolo f para la distribución F y se escribirá $\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$ sea f regular o no. Por supuesto, si f es singular, es una notación simbólica. En particular

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_\Omega \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Con esta notación las definiciones 6.1 y 6.2 se expresan como sigue:
Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in D'(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{l} \langle hf, \phi \rangle = \langle f, h\phi \rangle \qquad \text{y} \\ \langle f(x-\xi), \phi \rangle = \langle f(x), \phi(x+\xi) \rangle \end{array}$$

las cuales se puede verificar que definen distribuciones.

Para estudiar ecuaciones diferenciales en $D'(\Omega)$ una pregunta natural es como se define la derivada de una distribución.

Para definir la derivada de una distribución f, supóngase que f y f' son localmente integrables; integrando por partes se tiene

$$\langle f', \phi \rangle = \int_\Omega f'(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\phi'(x)dx = -\langle f, \phi' \rangle \quad \text{para toda} \ \ \phi \in D(\mathbb{R}).$$

Este cálculo motiva la siguiente

Definición 11. Sea $f \in D'(\Omega)$, se define la distribución

$$f' : D \to \mathbb{R} \quad \text{por :} \quad \langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle \quad \text{para toda} \quad \phi \in D(\Omega).$$

Para verificar que f' es una distribución se procede como sigue:

- f' es lineal
  Sean $\phi, \psi \in D(\Omega)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle f', \lambda_1\phi + \lambda_2\psi \rangle &= -\langle f, (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\psi)' \rangle = -\langle f, \lambda_1\phi' + \lambda_2\psi' \rangle = \\ &= -\lambda_1\langle f, \phi' \rangle - \lambda_2\langle f, \psi' \rangle = \lambda_1\langle f', \phi \rangle + \lambda_2\langle f', \psi \rangle \end{aligned}$$

- f' es continua.
  Sea $\{\phi_n\} \subset D$ y $\phi \in D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ en D. Dado que la convergencia es uniforme en un compacto K se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n' = \phi' \ \text{ en } D, \text{ de donde } \ \lim_{n\to\infty} \langle f, \phi_n' \rangle = \langle f, \phi' \rangle.$$

  Por lo tanto f' es continua.

De manera análoga se define la p-ésima derivada distribucional $f^{(p)}$ de una distribución f por

$$\langle f^{(p)}, \phi \rangle = (-1)^p \langle f, \phi^{(p)} \rangle \qquad \text{para toda} \quad \phi \in D.$$

EJEMPLOS.

1. $\langle \delta(x-\xi), \phi(x) \rangle = \langle \delta(x), \phi(x+\xi) \rangle = \phi(\xi)$ que con la notación simbólica equivale a $\int_\mathbb{R} \delta(x-\xi)\phi(x)dx = \phi(\xi)$.

   Para los siguientes ejemplos se requiere definir cuando dos distribuciones son iguales.

   Definición 12. Las distribuciones f y g son iguales en Ω si

$$\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle \qquad \text{para toda} \quad \phi \in D(\Omega).$$

   Así por ejemplo $\delta(x) = 0$ en cualquier intervalo abierto que no contiene al origen.

2. Calcule la derivada distribucional de la función localmente integrable

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = |x|$$

Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle |x|', \phi\rangle &= -\langle |x|, \phi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)dx = \\ &- \int_{-\infty}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(x)\phi(x)dx = \langle \mathrm{sgn}(x), \phi\rangle\end{aligned}$$

donde $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$

Por lo tanto $|x|' = \mathrm{sgn}(x)$.

3. Calcule la derivada distribucional de la función localmente integrable

$$H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

llamada función de Heaviside o escalón unitario.

Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle H', \phi\rangle = -\langle H, \phi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \phi'(x)dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi\rangle.$$

Por lo tanto $H'(x) = \delta(x)$, como se mencionó después del ejemplo 1.
Además

$$\langle \delta^{(n)}, \phi\rangle = (-1)^n \phi^n(0)$$

Con el propósito de estudiar operadores diferenciales se requiere analizar el operador derivada $\frac{d}{dx}$ en D'.

ALGUNAS PROPIEDADES DEL OPERADOR DERIVADA $\frac{d}{dx} : D' \to D'$

Propiedad 1) $\frac{d}{dx}(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \frac{df}{dx} + \lambda_2 \frac{dg}{dx}$ donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $f, g \in D'$.

En efecto, sea $\phi \in D$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dx}(\lambda_1 f + \lambda_2 g), \phi \right\rangle &= \langle (\lambda_1 f + \lambda_2 g)', \phi\rangle = -\langle \lambda_1 f + \lambda_2 g, \phi'\rangle \\ &= -\lambda_1\langle f, \phi'\rangle - \lambda_2\langle g, \phi'\rangle = \lambda_1\langle f', \phi\rangle + \lambda_2\langle g', \phi\rangle = \\ &= \langle \lambda_1 f' + \lambda_2 g', \phi\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)' = \lambda_1 f' + \lambda_2 g'$

Propiedad 2) Si $f \in D'$ y $h \in \mathcal{C}^\infty$ entonces $\langle \frac{d}{dx}(hf), \phi\rangle = \langle h\frac{df}{dx} + \frac{dh}{dx} f, \phi\rangle$.

En efecto, sea $\phi \in D$

$$\begin{aligned}\langle (hf)', \phi\rangle &= -\langle hf, \phi'\rangle = -\langle f, h\phi'\rangle = -\langle f, (h\phi)' - h'\phi\rangle \\ &= \langle f', h\phi\rangle + \langle f, h'\phi\rangle = \langle hf', \phi\rangle + \langle h'f, \phi\rangle = \langle hf' + h'f, \phi\rangle.\end{aligned}$$

De donde se sigue la propiedad 2.

Para demostrar la continuidad del operador derivada se requiere el concepto de convergencia en D'.

Definición 13. Una sucesión de distribuciones $\{f_n\} \subset D'$ converge a una distribución $f \in D'$ si $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$ en $\mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$, para toda $\phi \in D$.

Propiedad 3) Si $f_n \to f$ en D' entonces $f_n' \to f'$ en D'.

Sea $\phi \in D$, entonces

Dado que $f_n \to f$ en D' se tiene que $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$ cuando $n \to \infty$, y como $\langle f_n', \phi\rangle = -\langle f_n, \phi'\rangle$ y $\langle f', \phi\rangle = -\langle f, \phi'\rangle$ esto implica que $f_n' \to f'$ en D', es decir, el operador derivada es continuo en D'.

Se han desarrollado algunos aspectos de la derivada de una distribución, ahora se introduce la integral de una distribución.

Definición 14. Una distribución F es una integral de una distribución f si $F' = f$.

Primero se demuestra la proposición 15. y después se demuestra la existencia de una integral de una distribución.

Proposición 15. *Si $u \in D'(\Omega)$ es tal que $\frac{du}{dx} = u' = 0$ entonces u es una distribución constante.*

demostración. Sea $\phi \in D$. Si u es solución de $u' = 0$ entonces $\langle u', \phi\rangle = -\langle u, \phi'\rangle = 0$, es decir, $\langle u, \psi\rangle = 0$ para toda $\psi \in D$ que es la derivada de alguna función de prueba, también se tiene que ψ es la derivada de una función de prueba si y sólo si $\displaystyle\int_\Omega \psi(s)ds = 0$.

Sea $\phi_1 \in D$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \phi_1(s)ds = 1$. Observe que cualquier $\phi \in D$ se puede expresar como

$$\phi(x) = \phi_1(x)\int_\Omega \phi(s)ds + \psi(x) \tag{5}$$

donde $\displaystyle\int_\Omega \psi(s)ds = 0$.

Dado que $\langle u, \psi\rangle = 0$ se tiene que

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \phi_1\rangle \int_\Omega \phi(s)ds = \langle < u, \phi_1 >, \phi\rangle$$

es decir $u = \langle u, \phi_1\rangle = c$ es una constante.

Proposición 16. *Sea $f \in D'(a, b)$, la ecuación $u' = f$ tiene una integral en $D'(a, b)$.*

demostración. Para construir una integral de f se usará la descomposición dada en (5).

Sea $\eta(x) = \int_a^x \psi(s)ds$. Si u es solución de $u' = f$ entonces

$$\langle u', \eta\rangle = -\langle u, \eta'\rangle = -\langle u, \psi\rangle = \langle f, \eta\rangle.$$

De esta manera

$$\langle u, \phi\rangle = c\int_a^b \phi(s)ds + \langle u, \psi\rangle = \langle c, \phi\rangle - \langle f, \eta\rangle.$$

La distribución u_0 definida por

$$\langle u_0, \phi\rangle = \langle u, \psi\rangle = -\langle f, \eta\rangle$$

es solución particular de $u' = f$.

Por lo tanto: $\langle u, \phi\rangle = \langle c, \phi\rangle + \langle u_0, \phi\rangle$, es decir, $u = u_0 + c$ es solución de $u' = f$.

En forma análoga se demuestra la proposición 16, si $f \in D'(\mathbb{R})$ ó $f \in D'(a, \infty)$.

Para demostrar la existencia de soluciones en $D'(\mathbb{R})$ de la ecuación $p_0(x)u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)u = g$ donde $p_i(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ con $p_0(x) \neq 0$ en $\mathbb{R}$ y $g \in D'(\mathbb{R})$, lo que se hace es transformar la ecuación en un sistema equivalente de primer orden, en el cual, cada ecuación del sistema se puede reducir a una ecuación de la forma $u' = f$, donde $f \in D'(\mathbb{R})$.

6. Soluciones fundamentales

Con el propósito de describir el método de la función de Green para los problemas que se estudiarán se introduce el concepto de solución fundamental asociado al operador diferencial:

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{du}\right) + q(x)u$$

donde $p, q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $p \neq 0$ en $\mathbb{R}$ y $u \in D'(\mathbb{R})$, a $\mathcal{L}$ comunmente se le llama operador.

Nota: Se dice que un operador diferencial ordinario lineal de segundo orden $\mathcal{L}^*$ está en forma autoadjunta en I si

$$\mathcal{L}^* = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

donde $p', q \in \mathcal{C}(I)$, $p \neq 0$ en I, I un intervalo en $\mathbb{R}$.

Se puede verificar que cualquier operador de la forma

$$\tilde{\mathcal{L}} = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

donde $a_2, a_1, a_0 \in \mathcal{C}(I)$ con $a_2(x) \neq 0$ en I se puede expresar en forma autoadjunta, haciendo

$$p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} \quad \text{y} \quad q(x) = -\frac{a_0(x)}{a_2(x)}p(x).$$

De donde las ecuaciones de la forma $\tilde{\mathcal{L}}u = g$ se pueden expresar en la forma equivalente $\mathcal{L}^*u = f$. En particular se cumple si los coeficientes son $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Definición 17. Una solución fundamental para $\mathcal{L}$ es una distribución $K(x, y)$ que satisface la ecuación $\mathcal{L}K(x, y) = \delta(x - y)$ donde y se considera como parámetro.

7. Ejemplos de soluciones fundamentales

Ejemplo 3. Construya una solución fundamental para el operador diferencial

$$Mu = -\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Es decir, hay que encontrar una solución de la ecuación

$$\frac{d^2K(x, y)}{dx^2} = -\delta(x - y). \tag{6}$$

Dado que $\dfrac{d}{dx}H(x - y) = \delta(x - y)$, integrando en (6) se tiene

$$\frac{dK}{dx} = -H(x - y) + A$$

y al integrar nuevamente se concluye que

$$K(x, y) = -(x - y)H(x - y) + Ax + B = \begin{cases} Ax + B, & \text{si } x \leq y \\ -x + y + Ax + B, & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

son soluciones fundamentales de u. Observe que $Ax + B$ es solución general de la ecuación homogénea $\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$ tanto en el sentido clásico como en el distribucional y que $-(x - y)H(x - y)$ es una solución fundamental particular para M.

Para construir una solución fundamental para el operador $\mathcal{L}$ se desarrolla otro procedimiento para el ejemplo 3, el cual cuando se generaliza permite construir soluciones fundamentales para $\mathcal{L}$. En este segundo procedimiento se empieza con un análisis intuitivo y posteriormente se formaliza.

Dado que $\delta(x-y)=0$ si $x\neq y$, se tiene que $K(x,y)$ satisface la ecuación $\dfrac{d^2u}{dx^2}=0$ para $x\neq y$ de donde

$$K(x,y)=\begin{cases} Ax+B, & \text{si} \quad x<y \\ Cx+D, & \text{si} \quad x>y. \end{cases}$$

La función K es continua en $x=y$, porque si K tiene una discontinuidad finita, $\dfrac{\partial K}{\partial x}$ sería la derivada de una función discontinua y de donde contiene a la δ y K'' involucra a δ' lo que no sucede. Por lo tanto

$$Ay+B=Cy+D$$

Ahora K' debe tener una discontinuidad finita en $x=y$ para que K'' contenga a la δ. Para determinar la magnitud de la discontinuidad de K' en $x=y$, se integra la ecuación $K''(x,y)=-\delta(x,y)$ con respecto a x de $y-\epsilon$ a $y+\epsilon$, de donde

$$K'(y+\epsilon,y)-K'(y-\epsilon,y)=-1.$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon\to 0$ se tiene otra ecuación, a saber

$$C-A=-1$$

resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas para C y D en términos de A y B se concluye que

$$K(x,y)=\begin{cases} Ax+B, & \text{si } x\leq y \\ -x+y+Ax+B, & \text{si } x\geq y \end{cases}$$

que son precisamente las soluciones fundamentales del operador M.

Ejemplo 4. Construya una solución fundamental para el operador diferencial $\mathcal{L}$.

Se usará el segundo procedimiento del ejemplo 3, con $A=B=0$ para construir una solución fundamental particular para $\mathcal{L}$.

Sea

$$K(x,y)=0 \qquad \text{si} \qquad x<y.$$

Para $x>y$, K se determina por las condiciones $\mathcal{L}K(x,y)=0$, K continua en $x=y$ y $\frac{\partial K}{\partial x}$ tiene una discontinuidad finita en $x=y$.

Para determinar la magnitud de la discontinuidad de $\dfrac{\partial K}{\partial x}$ en $x=y$ se integra la ecuación $\mathcal{L}K(x,y)=\delta(x-y)$ con respecto a x de $y-\epsilon$ a $y+\epsilon$, es decir

$$-\left[p(y+\epsilon)\frac{\partial K}{\partial x}(y+\epsilon,y)-p(y-\epsilon)\frac{\partial K}{\partial x}(y-\epsilon,y)\right]+\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon}K(x,y)dx=1.$$

Aplicando el límite cuando $\epsilon\to 0$ y usando el hecho de que p y K son continuas se tiene

$$\frac{\partial K}{\partial x}(y^+,y)=-\frac{1}{p(y)}.$$

Ahora se demuestra que la función $K(x,y)$ definida por

$$K(x,y)=0 \qquad \text{si} \qquad x<y$$

y para $x>y$, como la solución del problema

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}K(x,y) & = & 0 \\ K(y^+,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial K}{\partial x}(y^+,y) & = & -\dfrac{1}{p(y)} \end{array} \tag{7}$$

es una solución fundamental para $\mathcal{L}$.

NOTA. El problema de Cauchy (7) tiene solución única, como se hace ver en el curso de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Además si $U_y(x)$ es solución clásica de (7) para toda x, entonces $K(x,y)=H(x-y)U_y(x)$, es la única solución fundamental del operador diferencial $\mathcal{L}$ tal que $K(x,y)=0$ si $x<y$.

Hay que demostrar que:

$$\langle \mathcal{L}K(x,y),\phi\rangle = \langle \delta(x-y),\phi\rangle = \phi(y) \quad \text{para toda} \quad \phi\in D.$$

En efecto

$$\begin{aligned}\langle LK(x,y),\phi\rangle &= \langle K(x,y),\mathcal{L}\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\mathcal{L}\phi(x)dx = \int_{y}^{\infty} K(x,y)\mathcal{L}\phi(x)dx = \\ &= -\phi(y)p(y)\frac{\partial K}{\partial x}(y^+,y) + \int_y^{\infty}\phi(x)\mathcal{L}K(x,y)dx = \phi(y)\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que $K(x,y)=0$ si $x<y$, $K(y^+,y)=0$ $\dfrac{\partial K}{\partial x}(y^+,y) = -\dfrac{1}{p(y)}$ y que $\mathcal{L}K(x,y)=0$ si $x>y$, lo que demuestra que la función continua $K(x,y)$ es una solución fundamental particular para $\mathcal{L}$, llamada solución fundamental causal del operador diferencial $\mathcal{L}$. Su construcción se hará en el ejemplo 6.

Observe que si K es una solución fundamental del operador diferencial $\mathcal{L}$ y v es una solución de $\mathcal{L}(u)=0$ entonces $K+v$ es solución fundamental de $\mathcal{L}$. Inversamente si $\bar{K}$ es cualquier otra solución fundamental de $\mathcal{L}$ entonces $v=\bar{K}-K$ satisface la ecuación $\mathcal{L}(u)=0$, de esta manera toda solución fundamental de $\mathcal{L}$ es la suma de K y una solución v de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(u)=0$.

8. Funciones de Green

Ahora se generaliza el concepto de solución fundamental asociado al operador diferencial $\mathcal{L}$ de manera que se satisfagan tanto condiciones iniciales en $t_0\in\mathbb{R}$ como condiciones de frontera en $[a,b]$.

Definición 18. Sea $t_0\in\mathbb{R}$. Una distribución $G_1(t,s)$ que satisface

i) $G_1(t,s)=0 \quad \text{si} \quad t_0<t<s.$
ii) $\mathcal{L}G_1(t,s)=\delta(t-s)$,

donde $\mathcal{L}(u) = -\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u$, $p,q\in\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, $p\neq 0$ en $\mathbb{R}$ se llama función de Green causal del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones iniciales $u(t_0)=0$, $u'(t_0)=0$.

De acuerdo a la descripción que se hizo respecto a las soluciones fundamentales de $\mathcal{L}$ en el ejemplo 4, la función $K_1(t,s)$ que cumple con las siguientes propiedades

i) $K_1(t,s)=0$ si $t_0<t<s$,
ii) $\mathcal{L}K_1(t,s)=0$ si $t>s$,
iii) $K_1(s^+,s)=0$
iv) $\dfrac{\partial K_1}{\partial t}(s^+,s) = -\dfrac{1}{p(s)}$

es función de Green causal del operador diferencial $\mathcal{L}$ que satisface las condiciones iniciales $u(t_0)=0$, $u'(t_0)=0$

Ejemplo 5. Encuentre la función de Green causal para el operador diferencial

$$Mu = -\frac{d^2u}{dt^2}$$

con las condiciones iniciales $u(0)=0$, $u'(0)=0$.

En este ejemplo se consideran las soluciones fundamentales de M que se encontraron en el ejemplo 3. Haciendo $A=B=0$, se tiene que

$$G_1(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0<t<s \\ -t+s, & \text{si} \quad t\geq s \end{cases} = -(t-s)H(t-s)$$

es la función de Green causal para M que satisface las condiciones iniciales $u(0)=0$, $u'(0)=0$.

Ejemplo 6. Encuentre la función de Green causal para el operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones iniciales $u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0$.

De acuerdo a (7) del ejemplo 4, sea $G_1(t, s)$ definida como

$$G_1(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t_0 < t < s \\ c_1(s)y_1(t) + c_2(s)y_2(t) & \text{si} \quad t > s \end{cases}$$

donde $y_1(t), y_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de $\mathcal{L}(u) = 0$.

Aplicando las condiciones iniciales en (7) se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} G_1(s^+, s) &= c_1(s)y_1(s) + c_2(s)y_2(s) = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial t}(s^+, s) &= c_1(s)y_1'(s) + c_2(s)y_2'(s) = -\frac{1}{p(s)} \end{aligned}$$

cuya solución está dada por:

$$c_1(s) = \frac{y_2(s)}{p(s)W(y_1, y_2)(s)} \quad \text{y} \quad c_2(s) = -\frac{y_1(s)}{p(s)W(y_1, y_2)(s)}$$

donde $W(y_1, y_2)(s)$ denota el Wronskiano de y_1 y y_2.

Así, para $t > s$

$$G_1(t,s) = \frac{y_2(s)y_1(t) - y_1(s)y_2(t)}{p(s)W(y_1, y_2)(s)}.$$

Por lo tanto

$$G_1(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t_0 < t < s \\ \\ \dfrac{y_2(s)y_1(t) - y_1(s)y_2(t)}{p(s)W(y_1, y_2)(s)}, & \text{si} \quad t \geq s \end{cases}$$

es función de Green causal para el operador diferencial $\mathcal{L}$ que satisface las condiciones iniciales $u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0$.

Observe que la función de Green causal no depende de t_0, ni de la base y_1, y_2 del espacio solución de $\mathcal{L}(u) = 0$, dado que es cero para $t < s$ y para $t > s$ es solución de un problema con valores iniciales.

Definición 19. Una distribución $G_2(x, y)$ que satisface

$$\mathcal{L}G_2(x,y) = \delta(x-y) \quad \text{si} \quad a < x, y < b$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ B_2(u) &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}(u) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)u$, $p, q \in \mathcal{C}^\infty[a, b]$ con $p \neq 0$ en $[a, b]$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ y $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ se llama función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = 0, B_2(u) = 0$.

Nota. Se mostrará que si existe la función de Green $G_2(x, y)$ para el operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = 0, B_2(u) = 0$, entonces es una función continua en $[a, b]$.

Ejemplo 7. Encuentre la función de Green $G_2(x, y)$ para el operador

$$Mu = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{en} \quad (0,1)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Si la función de Green $G_2(x,y)$ existe, ésta satisface

$$-\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x,y) = \delta(x-y) \qquad 0 < x, y < 1,$$

$$\begin{aligned} G_2(0,y) &= 0, \\ G_2(1,y) &= 0. \end{aligned}$$

Del ejemplo 3. las soluciones fundamentales del operador M restringidas al intervalo $(0,1)$ estan dadas por

$$K(x,y) = \begin{cases} Ax + B, & \text{si} \quad 0 < x < y \\ -x + y + Ax + B, & \text{si} \quad y < x < 1 \end{cases}.$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene la función de Green

$$G_2(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si} \quad 0 \leq x < y, \\ y(1-x) & \text{si} \quad y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Otro procedimiento para construir la función de Green del operador M, se obtiene del siguiente análisis intuitivo.

Dado que $\delta(x-y) = 0$, si $x \neq y$, para $x < y$, $G(x,y)$ se define como un múltiplo de una solución de $Mu = 0$ que satisface la condición de frontera en $x = 0$, es decir, $G(x,y) = A(y)x$ y para $x > y$ como un múltiplo de una solución de $Mu = 0$ que satisface la condición de frontera en $x = 1$, es decir $G(x,y) = B(y)(1-x)$, como en el ejemplo 3. G es continua en $x = y$ y $\frac{\partial G}{\partial x}$ tiene una discontinuidad de magnitud -1 en $x = y$, esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} A(y)y &= B(y)(1-y) \\ -B(y) - A(y) &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es $A(y) = 1 - y$ y $B(y) = y$.

Por lo tanto, la función $G(x,y)$ dada por:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \begin{cases} A(y)x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq y \\ B(y)(1-x), & \text{si} \quad y \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x(1-y), & \text{si} \quad 0 \leq x < y \\ y(1-x), & \text{si} \quad y \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= y(1-x)H(x-y) + x(1-y)H(y-x) \end{aligned}$$

coincide con la función de Green G_2 del operador M con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

Observe que la única solución de $Mu = 0$, $u(0) = u(1) = 0$ es la solución trivial, lo que significa que cero no es valor propio del operador M con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

Ahora se verifica directamente que $G_2(x,y) = y(1-x)H(x-y) + x(1-y)H(y-x)$ es la función de Green del operador diferencial M en $[0,1]$ con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$, es decir, se demostrará que

$$-\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x,y) = \delta(x-y) \qquad 0 < x,\ y < 1$$

$$\begin{aligned} G_2(0,y) &= 0 \\ G_2(1,y) &= 0. \end{aligned}$$

Esta verificación se hace de dos maneras.

Primera. Demostrar que G_2 satisface la ecuación $Mu = \delta(x-y)$ equivale a demostrar que:

$$-\left\langle \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}, \phi \right\rangle = \langle \delta x - y), \phi \rangle \Leftrightarrow -\langle G_2(x,y), \phi'' \rangle = \phi(y)$$

para toda $\phi \in D(0,1)$. En efecto, sea $\phi \in D(0,1)$.

$$\begin{aligned} -\langle G_2(x,y), \phi'' \rangle &= -\int_0^1 G_2(x,y)\phi''(x)dx \\ &= -(1-y)\int_0^y x\phi''(x)dx - y\int_y^1 (1-x)\phi''(x)dx \end{aligned}$$

Dado que

$$\int_0^y x\phi''(x)dx = y\phi'(y) - \phi(y)$$

y

$$\int_y^1 (1-x)\phi''(x)dx = (y-1)\phi'(y) - \phi(y),$$

sustituyendo se tiene

$$-\langle G_2(x,y), \phi'' \rangle = -(1-y)\big(y\phi'(y) - \phi(y)\big) - y\big((y-1)\phi'(y) - \phi(y)\big) = \phi(y).$$

Segunda. Se tiene

$$G_2(x,y) = y(1-x)H(x-y) + x(1-y)H(y-x).$$

Calculando

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) &= y(1-x)\delta(x-y) - yH(x-y) - x(1-y)\delta(x-y) + (1-y)H(y-x) \\ &= \delta(x-y)\big[y(1-x) - x(1-y)\big] - yH(x-y) + (1-y)H(y-x) \end{aligned}$$

Dado que $\delta(x-y)\,[y(1-x) - x(1-y)] = 0$ se tiene

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x,y) = -y\delta(x-y) - (1-y)\delta(x-y) = -\delta(x-y).$$

Por lo tanto G_2 es función de Green del operador diferencial M con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

Para el operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$ se tiene la siguiente:

Proposición 20. *La función de Green existe si cero no es valor propio de $\mathcal{L}$.*

demostración. Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad para problemas con valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales existen dos soluciones no triviales u_1 y u_2 definidas en $[a,b]$ de la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$ tales que

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) &=& 0 \\ \beta_1 u_2(b) + \beta_2 u_2'(b) &=& 0 \end{array}.$$

Además u_1 y u_2 son linealmente independientes en $\mathcal{C}^\infty[a,b]$, puesto que si $u_1(x) = cu_2(x)$, con $c \neq 0$ entonces $u_1(x)$ satisface ambas condiciones de frontera, que contradice el hecho de que cero no es valor propio de $\mathcal{L}$.

De acuerdo al ejemplo 7. un candidato para una función de Green es la función

$$G_2(x,y) = \begin{cases} A(y)u_1(x), & \text{si} \quad a \le x < y \\ B(y)u_2(x), & \text{si} \quad y \le x \le b \end{cases}.$$

Para que $G_2(x,y)$ resulte continua y su primera derivada tenga una discontinuidad en $x = y$ de magnitud $-1/p(y)$, $A(y)$ y $B(y)$ deben ser tales que

$$\begin{aligned} B(y)u_2(y) - A(y)u_1(y) &= 0 \\ B(y)u_2'(y) - A(y)u_1'(y) &= -\frac{1}{p(y)} \end{aligned}$$

para toda $y \in (a,b)$.

Observe que el determinante de este sistema es el Wronskiano de u_1 y u_2, al que se denota por $W(u_1,u_2)$, y como u_1, u_2 son linealmente independientes $W(u_1,u_2)(y) \neq 0$

para toda $y \in [a,b]$. De donde el sistema de ecuaciones algebraicas tiene una única solución $A(y)$ y $B(y)$. Por lo tanto, la función $G_2(x,y)$ definida como

$$G_2(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad a \leq x \leq y \\ \\ -\dfrac{u_2(x)u_1(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad y \leq x \leq b \end{cases}$$

se espera sea la función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$, con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$.

Observe que $G_2(x,y) = G_2(y,x)$, es decir, G_2 es una función simétrica en x y y.

Para verificar que $G_2(x,y)$ es función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$ se expresa $G_2(x,y)$ como

$$G_2(x,y) = -\frac{1}{p(y)W(u_1u_2)(y)}\big[H(x-y)u_1(y)u_2(x) + H(y-x)u_1(x)u_2(y)\big]$$

y se calcula $\mathcal{L}G_2(x,y)$ cuyo resultado es $\delta(x-y)$, también $G_2(x,y)$ satisface las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$. Por lo tanto $G_2(x,y)$ es función de Green del operador diferencial $\mathcal{L}$ con las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$.

Otro procedimiento es como el que se desarrolla en el ejemplo 3, es decir, se expresa a G_2 como:

$$G_2(x,y) = G_1(x,y) + Au_1(x) + Bu_2(x)$$

donde u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$ tales que $B_1(u_1) = 0$ y $B_2(u_2) = 0$ y G_1 es la función de Green Causal en la definición 18.

De esta manera

$$\mathcal{L}G_2(x,y) = \mathcal{L}G_1(x,y) + A\mathcal{L}u_1(x) + B\mathcal{L}u_2(x) = \delta(x-y).$$

9. Método de la función de Green

La función de Green de un operador diferencial lineal con condiciones auxiliares cuando existe, permite obtener información sobre las soluciones (cuando existen) de los problemas asociados, así como también permite formular problemas equivalentes en ecuaciones integrales lo que presenta grandes ventajas. A este enfoque de estudio de los problemas asociados en ecuaciones diferenciales lineales se le llama método de la función de Green.

Ahora se muestra como se adapta el método de la función de Green para obtener soluciones clásicas de los siguientes dos problemas cuando los coeficientes en $\mathcal{L}$ no necesariamente son $\mathcal{C}^\infty[a,b]$.

PROBLEMA I

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\,\frac{du}{dt}\right) + q(t)u = f(t), \quad a \leq t \leq b$$

$$\begin{aligned} u(a) &= 0, \\ u'(a) &= 0, \end{aligned}$$

donde p', q y f son funciones continuas en $[a,b]$ con $p(t) \neq 0$ en $[a,b]$.

PROBLEMA II

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ B_2(u) &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{aligned}$$

donde p', q y $f \in \mathcal{C}[a,b]$ con $p(x) \neq 0$ en $[a,b]$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ y $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Definición 21. Una función $G_3(t,s)$ definida en $[a,b] \times [a,b]$ es función de Green causal del PROBLEMA I si

i) $G_3(t,s) = 0, \quad \text{si} \quad a \leq t < s$

ii) $-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dG_3(t,s)}{dt}\right)+q(t)G_3(t,s)=0 \quad \text{si} \quad s\le t\le b,$

$$\begin{array}{rcl} G_3(s^+,s) &=& 0,\\ \frac{\partial G_3}{\partial t}(s^+,s) &=& -\frac{1}{p(s)}. \end{array}$$

De la Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se concluye que la función de Green causal del PROBLEMA I existe y es única y su construcción es como se hizo en el ejemplo 6.

Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u=0$ se tiene que

$$G_3(t,s)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad a\le t<s\\ \dfrac{y_2(s)y_1(t)-y_1(s)y_2(t)}{p(s)W(y_1,y_2)(s)}, & \text{si} \quad s\le t\le b, \end{cases}$$

es la función de Green causal para el PROBLEMA I, como puede verificarse.

PROPOSICIÓN 22. *Sea $f\in\mathcal{C}[a,b]$, la función $u(t)=\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds$ es la solución clásica del* PROBLEMA I.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{array}{rcl} u(t) &=& \displaystyle\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds=\int_a^t G_3(t,s)f(s)ds\\ u'(t) &=& \displaystyle G_3(t,t)f(t)+\int_a^t \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)f(s)ds=\int_a^t \frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)ds\\ u''(t) &=& \displaystyle\frac{\partial G_3}{\partial t}(t,t)f(t)+\int_a^t \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds\\ &=& \displaystyle -\frac{f(t)}{p(t)}+\int_a^t \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds. \end{array}$$

De donde

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u=-p(t)\frac{d^2u}{dt^2}-p'(t)\frac{du}{dt}+q(t)u=-p(t)\left(-\frac{f(t)}{p(t)}\right)+$$
$$+\int_a^t\left[-p(t)\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(t,s)-p'(t)\frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)+q(t)G_3(t,s)\right]f(s)ds=f(t)$$

también $u(a)=u'(a)=0$. Por lo tanto $u(t)=\displaystyle\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds$ es la solución clásica del PROBLEMA I.

Ahora se expresa el PROBLEMA I en términos de operadores.

Sea $L_4:D_4=\left\{u\in\mathcal{C}^2[a,b]\big|u(a)=u'(a)=0\right\}\longrightarrow\mathcal{C}[a,b]$ definido por

$$L_4(u)=-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right)+q(t)u$$

Así el PROBLEMA I se formula como: $L_4u=f$.

Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales el operador L_4 es uno a uno y por la proposición 10.2 L_4 es sobre. Por lo tanto existe $L_4^{-1}:\mathcal{C}[a,b]\longrightarrow D_4$ definido por:

$$L_4^{-1}(f)=\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds.$$

Así la función de Green causal del PROBLEMA I es el núcleo del operador inverso L_4^{-1} de L_4. De esta manera resolver el PROBLEMA I se reduce a encontrar la función de Green causal del PROBLEMA I. Si el problema que se plantea es la ecuación diferencial del PROBLEMA I con las condiciones iniciales no homogéneas $u(a) = \alpha$ y $u'(a) = \beta$ donde α y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces la solución está dada por

$$u(t) = \int_a^t G_3(t,s)f(s)ds + \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

donde y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea que satisfacen las condiciones iniciales $y_1(a) = 1$, $y_1'(a) = 0$ y $y_2(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$ respectivamente.

Definición 23. Una función $G_4(x,y)$ definida en $[a,b] \times [a,b]$ es función de Green del PROBLEMA II si

i) $G_4(x,y)$ es continua en $[a,b] \times [a,b]$.
ii) $\dfrac{\partial G_4}{\partial x}(y^+y) - \dfrac{\partial G_4}{\partial x}(y^-,y) = -\dfrac{1}{p(y)}$, donde $y \in (a,b)$.
iii) $-\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{G_4}{dx}\right) + q(x)G_4(x,y) = 0$, si $x \neq y$ en $[a,b]$.
iv) $B_1G_4(x,y) = 0; B_2G_4(x,y) = 0$.

En cuanto a la existencia de la función de Green del PROBLEMA II se obtiene de la proposición 20, en cuya construcción se usaron las propiedades i) a iv) y el hecho de que cero no es valor propio del operador correspondiente, y en cuanto a la unicidad, como la diferencia de dos funciones que satisfacen i) a iv) tiene una derivada continua en (a,b) y además es una solución clásica del problema homogéneo y como cero no es valor propio, se tiene que esta diferencia es identicamente cero. Por lo tanto el PROBLEMA II tiene una única solución, si cero no es valor propio del operador diferencial $\mathcal{L}$.

Se recuerda que si $u_1(x)$, $u_2(x)$ son dos soluciones no triviales de la ecuación homogénea tales que $\alpha_1u_1(a) + \alpha_2u_1'(a) = 0$ y $\beta_1u_2(b) + \beta_2u_2'(b) = 0$.

Se tiene que

$$G_4(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad a \leq x \leq y \\ \\ -\dfrac{u_2(x)u_1(y)}{p(y)W(u_1,u_2)(y)}, & \text{si} \quad y \leq x \leq b \end{cases}$$

es la función de Green del PROBLEMA II, como puede verificarse.

PROPOSICIÓN 24. *Sea $f \in \mathcal{C}[a,b]$, la función $u(x) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy$ es la solución clásica del* PROBLEMA II, *si cero no es valor propio del operador diferencial $\mathcal{L}$.*

DEMOSTRACIÓN. Se empieza por expresar a la función de Green $G_4(x,y)$ en términos de la función de Green causal $G_3(x,y)$ y una combinación lineal de las soluciones no triviales u_1 y u_2 de la ecuación homogénea tales que $B_1u_1 = 0$ y $B_2u_2 = 0$, es decir,

$$G_4(x,y) = G_3(x,y) + A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x) = H(x-y)U_y(x) + A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x),$$

$a < x, y < b$ donde $U_y(x)$ es la solución clásica de (7) para toda $x \in [a,b]$.

Observe que

- Si $x < y$, $\quad G_4(x,y) = A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x)$
- Si $x > y$, $\quad G_4(x,y) = U_y(x) + A(y)u_1(x) + B(y)u_2(x)$.

Aplicando las condiciones de frontera se tiene

$$A = -\frac{\beta_1 u_y(b) + \beta_2 u_y'(b)}{\beta_1 u_1(b) + \beta_2 u_1'(b)}, \qquad B = 0$$

De esta manera

$$u(x) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy = \int_a^b G_3(x,y)f(y)dy + u_1(x)\int_a^b A(y)f(y)dy.$$

Ahora por la proposición 22, u es la solución clásica del PROBLEMA II. Ahora se expresa el PROBLEMA II en términos de operadores.

Sea $L_5 : D_5 = \{u \in \mathcal{C}^2[a,b] \big| B_1 u = B_2 u = 0\} \longrightarrow \mathcal{C}[a,b]$ definido por:

$$L_5 u = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right) + q(x)u.$$

Así el PROBLEMA II se formula como: $L_5 u = f$. El operador L_5 es uno a uno debido a que se está suponiendo que cero no es valor propio de L_5 y por la proposición anterior L_5 es sobre.

Por lo tanto existe $L_5^{-1} : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow D_5$ definido por:

$$L_5^{-1}(f) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy.$$

De esta manera la función de Green del PROBLEMA II es el núcleo del operador inverso L_5^{-1} de L_5. Así resolver el PROBLEMA II cuando cero no es el valor propio de L_5 se reduce a encontrar su función de Green.

Si el problema que se plantea es la ecuación diferencial en el PROBLEMA II con las condiciones de frontera no homogéneas $B_1 u = \alpha$ y $B_2 u = \beta$ donde α y $\beta \in \mathbb{R}$ entonces se descompone en dos.

En el primero se considera la ecuación diferencial no homogénea con las condiciones de frontera homogéneas y en el segundo se considera la ecuación diferencial homogénea con las condiciones de frontera no homogéneas. La solución del primero se da en la proposición 24. y el segundo tiene la solución

$$v(x) = \frac{\beta}{B_2 u_1} u_1(x) + \frac{\alpha}{B_1 u_2} u_2(x)$$

donde u_1 y u_2 son soluciones no triviales de la ecuación homogénea tales que $B_1 u_1 = 0$ y $B_2 u_2 = 0$.

Por lo tanto, por el principio de superposición, el problema

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \qquad a \leq x \leq b$$

$$\begin{aligned} B_1 u &= \alpha, \\ B_2 u &= \beta, \end{aligned}$$

donde p', q y $f \in \mathcal{C}[a,b]$ con $p \neq 0$ en $[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tiene la solución única

$$u(x) = \int_a^b G_4(x,y)f(y)dy + \frac{\beta}{B_2 u_1} + \frac{\alpha}{B_1 u_2} u_2(x).$$

Referencias

[1] Coddington, E.A., and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw Hill, New York, 1955.
[2] Griffel, D.H., Applied Functional Analysis, John Wiley and Sons, 1981.
[3] Guelfand, J.M., and Shilov, G.E., Generalized Functions, Vol. 1, Academic Press, New York, 1964.
[4] Kesavan, S., Topics in Functional Analysis and Applications, John Wiley and Sons, 1989.
[5] López, G.G, y Martínez O.F.H., Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales, Universidad Autónoma Metropolitana -Iztapalapa, 2014.
[6] Stakgold, I., Green's Functions and Boundary Value Problems, John Wiley, 1979.
[7] Renardy, M., Roger, C.R., An Introduction to Partial Differential Equations, Second Edition, Springer Verlag, New York, 2004.

Dirección del autor:
Francisco Hugo Martínez Ortiz
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `fcoh@xanum.uam.mx`

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

Posgrados:
Maestría y Doctorado en Matemáticas

pmat@xanum.uam.mx
http://pmat.izt.uam.mx/

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Teoría de anillos y módulos.
Teoría de conjuntos y lógica.
Geometría algebraica.
Geometría diferencial y Riemanniana.
Teoría de números.
Teoría de códigos y criptografía.
Análisis geométrico.
Física matemática.
Análisis diferencial.
Matemáticas discretas, combinatoria y gráficas.
Dinámica de fluidos computacional.
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.
Métodos matemáticos en finanzas y economía.
Control y sistemas dinámicos.
Mecánica celeste, sistemas hamiltonianos y aplicaciones a la física.
Control, estabilidad y robustez de sistemas estocásticos.
Metodología estadística.
Estadística asintótica.
Topología de conjuntos, grupos topológicos y Cp-teoría.
Métodos geométricos en mecánica. Dinámica de vórtices. Mecánica celeste.

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales (MACMAI)

mlss@xanum.uam.mx
http://mcmai.izt.uam.mx

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Códigos y Criptografía.
Control y Sistemas Dinámicos.
Combinatoria y Optimización.
Estadística.
Métodos Matemáticos en Finanzas.
Modelación y Simulación Computacional.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA, UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, EDIFICIO ANEXO DEL T, 3ER PISO, TEL. 58044654 FAX. 5804 4660
AV. SAN RAFAEL ATLIXCO No 186, COL. VICENTINA, IZTAPALAPA, MÉXICO, D.F.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Contenido