Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. VII, Julio de 2016, 7–12

UNA NOTA ACERCA DE LAS ASR-GRÁFICAS

GABRIELA JUAN JOAQUÍN TEY

Resumen. Sea G una gráfica simple y conexa. Denotaremos con $G - e$ (G_e) la gráfica que resulta de eliminar (subdividir) la arista e de G. Como es usual, $\gamma(G)$ denota al número de dominación de G. G es una ASR-gráfica si $\gamma(G-e) \neq \gamma(G_e)$ para toda arista e de G. Con respecto a las ASR-gráficas, en este trabajo daremos una caracterización, cotas para su tamaño mínimo y una cota superior justa para su número de dominación.

1. Introducción

Sea G una gráfica simple y conexa. Denotaremos con $V(G)$ al conjunto de *vértices* de G y con $E(G)$ al conjunto de *aristas* de G. Las cardinalidades de $V(G)$ y $E(G)$ serán el *orden* y el *tamaño* de G, respectivamente. Para $X \subseteq V(G)$, $G[X]$ es la subgráfica inducida por X en G.

Dadas dos gráficas G y H sin vértices en común, la *suma* $G + H$ es la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ y conjunto de aristas

$$E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ y } v \in V(H)\}$$

.

Dado $v \in V(G)$, su *vecindad abierta* es $N(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, su *grado* es $|N(v)|$ y su *vecindad cerrada* es $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. La *vecindad cerrada de* $X \subseteq V(G)$ es $N[X] = \bigcup_{x \in X} N[x]$. Dados $D \subseteq V(G)$ y $v \in D$, la *vecindad privada externa* de v con respecto a D es el conjunto $EPN(v, D) = N(v) - N[D - \{v\}]$ (del inglés External Private Neighborhood).

Diremos que $D \subseteq V(G)$ es un *conjunto dominante* de G si $N[D] = V(G)$ y escribiremos $D \succ G$. La cardinalidad mínima de un conjunto dominante es el *número de dominación*, $\gamma(G)$, de G. Un conjunto dominante de cardinalidad mínima es un γ-*conjunto* de G. Denotaremos con $\Gamma(G)$ al conjunto de todos los γ-conjuntos de G.

Sean $e \in E(G)$ y $D \in \Gamma(G)$; si $|e \cap D| = 1$, entonces con $\overline{e \cap D}$ denotaremos al extremo de e que no está contenido en D.

Para una arista $e = uv$ de G, consideraremos las siguientes modificaciones de G.

1. *Eliminar* la arista e: eliminamos e de G y obtenemos una nueva gráfica, $G - e$.
2. *Subdividir* la arista e: eliminamos e, agregamos un nuevo vértice w y dos nuevas aristas: uw y wv. A la nueva gráfica la denotaremos con G_e.

Definición 1 ([3], [5])**.** Sea G una gráfica. Entonces

1. G es una *DRS-gráfica* (del inglés Domination Remotion Stable) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G - e) = \gamma(G)$.
2. G es una *DSS-gráfica* (del inglés Domination Subdivision Stable) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G_e) = \gamma(G)$.
3. G es una *DSNS-gráfica* (del inglés Domination Subdivision Non-Stable) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G_e) \neq \gamma(G)$.
4. G es una *SR-gráfica* (del inglés Subdivision Remotion) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G - e) = \gamma(G_e)$.
5. G es una *ASR-gráfica* (del inglés Anti-Subdivision Remotion) si para toda $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G - e) \neq \gamma(G_e)$.

Palabras clave. Número de dominación, eliminación y subdivisión de aristas, *ASR*-gráfica.

Las definiciones básicas omitidas aquí se pueden encontrar en [6].

Para $e \in E(G)$, las relaciones entre $\gamma(G)$ y $\gamma(G-e)$, y $\gamma(G)$ y $\gamma(G_e)$ han sido estudiadas por separado en diferentes trabajos. Por ejemplo, en [1] Acharya y Walikar caracterizaron a las DRS-gráficas, en [2] Brigham y Dutton determinaron el tamaño mínimo de las DRS-gráficas y en [4] Karthika y Yamuna caracterizaron a las DSS-gráficas.

Recientemente en [5] Lemańska, Tey y Zuazua estudiaron la relación entre $\gamma(G-e)$ y $\gamma(G_e)$, allí se caracterizaron a los SR-árboles y se demostró que toda ASR-gráfica es también una DRS-gráfica.

El objeto de estudio de este trabajo son las ASR-gráficas. En la Sección 2 damos una versión corregida de una caracterización de las DSS-gráficas propuesta en [4], caracterizamos a las ASR-gráficas y proponemos condiciones suficientes para la existencia de estas, más comprometidas con su estructura. Con respecto a las ASR-gráficas, en la Sección 3 se proponen cotas para su tamaño mínimo y damos una cota superior justa para su número de dominación.

2. Caracterización

Comenzaremos esta sección con un resultado bien conocido.

Lema 2. *Sean G una gráfica y $e \in E(G)$. Entonces*

$$\gamma(G) \leq \gamma(G_e) \leq \gamma(G) + 1.$$

Lema 3 ([5]). *Si G es una ASR-gráfica, entonces para todo $D \in \Gamma(G)$ y $v_i, v_j \in D$, $i \neq j$, se tiene que $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$.*

Teorema 4 ([5]). *Toda ASR-gráfica es una DRS-gráfica.*

Observemos que por el Teorema 4, una ASR-gráfica es simultáneamente DRS-gráfica y DSNS-gráfica.

En [1] se puede encontrar la siguiente caracterización de las DRS-gráficas.

Teorema 5 ([1]). *G es una DRS-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ existe $D \in \Gamma(G)$ tal que se cumple una de las siguientes condiciones:*
rm 1. $e \cap D = e$.
rm 2. $e \cap D = \emptyset$.
rm 3. $|e \cap D| = 1$ y $\overline{e \cap D} \notin EPN(e \cap D, D)$.

En [4] se propuso una caracterización de las DSS-gráficas, desafortunadamente esta es imprecisa. El siguiente teorema es una versión corregida de dicha caracterización.

Teorema 6. *G es una DSS-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ existe $D \in \Gamma(G)$ tal que se cumple una de las siguientes condiciones:*
rm 1. $e \cap D = e$.
rm 2. $|e \cap D| = 1$ y $\overline{e \cap D} \notin EPN(e \cap D, D)$.
rm 3. $|e \cap D| = 1$ y $EPN(e \cap D, D) = \{\overline{e \cap D}\}$.

Demostración. Sean G una DSS-gráfica, $e = uv$ una arista de G, w el nuevo vértice que se obtiene al subdividir la arista e y $D^* \in \Gamma(G_e)$. Consideraremos dos casos.
Caso 1. $w \in D^*$. Si $e \cap D^* \neq \varnothing$, entonces $D = D^* - \{w\}$ es un conjunto dominante de G con $|D| < |D^*|$, lo cual es imposible pues estamos suponiendo que $\gamma(G_e) = \gamma(G)$. Luego, $e \cap D^* = \varnothing$ y es claro que $D = (D^* - \{w\}) \cup \{u\}$ es un γ-conjunto de G. Si $v \notin EPN(u, D)$, entonces D cumple la Condición 2 del teorema. En otro caso, en G_e, $N(w) = \{u, v\}$ luego en G, $EPN(u, D) = \{v\}$ y así D cumple la Condición 3 del teorema.
Caso 2. $w \notin D^*$. En este caso $e \cap D^* \neq \varnothing$ y $D^* \succ G$. Si $e \cap D^* = e$, entonces D^* cumple la Condición 1 del teorema. De lo contrario podemos suponer, sin pérdida de

generalidad, que $e \cap D^* = \{u\}$ y como en G_e, el vértice v debe ser dominado por algún otro vértice distinto de u, en G se tiene que $v \notin EPN(u, D^*)$, cumpliendo D^* la Condición 2 del teorema.

Recíprocamente, sea $e \in E(G)$ y supongamos que existe $D \in \Gamma(G)$ tal que se cumple alguna de las tres condiciones citadas en el enunciado. Si $e \cap D = e$, entonces $D \succ G_e$. Si $|e \cap D| = 1$ y $\overline{e \cap D} \notin EPN(e \cap D, D)$, también $D \succ G_e$. Si $|e \cap D| = 1$ y $EPN(e \cap D, D) = \{\overline{e \cap D}\}$, entonces $\{(D - \{e \cap D\}) \cup \{w\}\} \succ G_e$. Por lo tanto, por el Lema 2, en cualquiera de los tres casos tenemos que $\gamma(G_e) = \gamma(G)$. □

Una consecuencia directa del Teorema 6 es el siguiente teorema.

Teorema 7. *G es una DSNS-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ y todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las siguientes condiciones:*
rm 1. $e \cap D = \emptyset$.
rm 2. $|e \cap D| = 1$, $\overline{e \cap D} \in EPN(e \cap D, D)$ y $EPN(e \cap D, D) \neq \{\overline{e \cap D}\}$.

Los Teoremas 6 y 7 constituyen la base de la siguiente caracterización de las ASR-gráficas.

Teorema 8. *G es una ASR-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D^* = \emptyset$ y para todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las siguientes condiciones:*
rm 1. $e \cap D = \emptyset$.
rm 2. $|e \cap D| = 1$, $\overline{e \cap D} \in EPN(e \cap D, D)$ y $EPN(e \cap D, D) \neq \{\overline{e \cap D}\}$.

Demostración. Supongamos que G es una gráfica tal que para toda $e \in E(G)$ existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D^* = \emptyset$. Entonces por el Teorema 5, G es una DRS-gráfica. Si además, para todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las dos condiciones citadas en el enunciado teorema, entonces por el Teorema 7, G es DSNS-gráfica. Así $\gamma(G-e) = \gamma(G) \neq \gamma(G_e)$ para toda $e \in E(G)$. Por lo tanto, G es una ASR-gráfica.

Recíprocamente, supongamos que G es una ASR-gráfica y sea $e \in E(G)$. Entonces por el Teorema 4, G es una DSNS-gráfica y por el Teorema 7, para la arista e y todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple una de las condiciones del teorema. Por otra parte, por el Teorema 4, G es una DRS-gráfica, luego por el Teorema 5, existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que la Condición 2 del teorema no se cumple. Finalmente, como G es simultáneamente DSNS-gráfica y DRS-gráfica, por los Teoremas 5 y 7 se tiene que $e \cap D^* = \varnothing$.

□

A continuación daremos condiciones suficientes para que una gráfica sea ASR-gráfica, esta vez más comprometidos con la estructura de la misma.

Proposición 9. *Sea G una gráfica tal que*
rm 1. G tiene al menos tres γ-conjuntos disjuntos.
rm 2. Para todo $D \in \Gamma(G)$ y $v_i, v_j \in D$, $i \neq j$, se tiene que $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$.
Entonces G es una ASR-gráfica.

Demostración. Mostraremos que se cumplen las condiciones suficientes del Teorema 8 para que G sea una ASR-gráfica. Sea $e = uv$ una arista de G. Como G tiene al menos tres γ-conjuntos disjuntos, existe $D^* \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D^* = \emptyset$. Ahora, si existe $D \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D = e$, entonces $N[u] \cap N[v] \neq \emptyset$, lo cual contradice la Condición 2 de la proposición. Por lo tanto, para todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple alguna de las siguientes condiciones.
A. $e \cap D = \emptyset$.
B. $|e \cap D| = 1$. En este caso podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $e \cap D = \{u\}$ y $\overline{e \cap D} = \{v\}$. Entonces, $EPN(u, D) = N(u) - N[D - \{u\}] = N(u)$, por la Condición 2 de la proposición. Observemos que $|N(u)| > 1$ por la Condición 1 de la proposición. Luego $\{v\} \in EPN(u, D) = N(u) \neq \{v\}$. Así, por el Teorema 8, G es una ASR-gráfica. □

Observemos que las condiciones de la Proposición 9 por sí solas no aseguran que G sea una ASR-gráfica. Por ejemplo, para la gráfica G de la Figura 1, $D_1 = \{x_1, x_2\}, D_2 = \{y_1, y_2\}$ y $D_3 = \{z_1, z_2\}$ son tres γ-conjuntos disjuntos, pero G no es una ASR-gráfica. De igual manera, para la gráfica G de la Figura 2 (tomada de [5]), $D = \{v_1, v_2\}$ es el único γ-conjunto y $N[v_1] \cap N[v_2] = \emptyset$, pero G no es una ASR-gráfica.

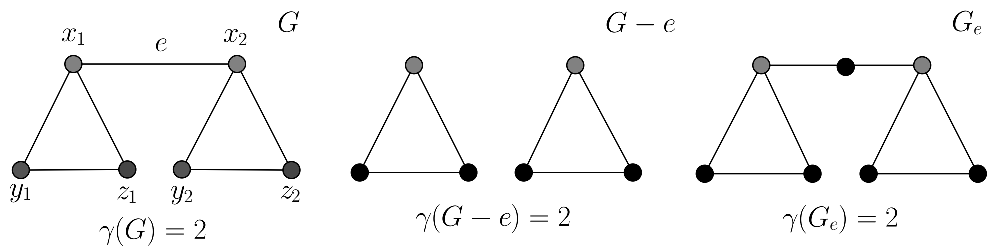

Figura 1. G tiene tres γ-conjuntos disjuntos, pero no es una ASR-gráfica.

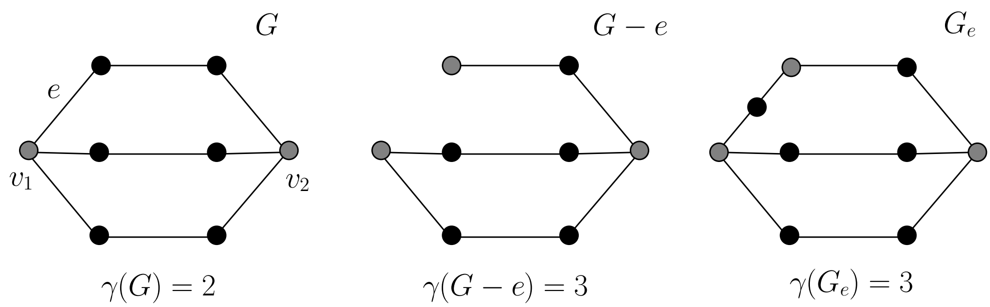

Figura 2. $N[v_1] \cap N[v_2] = \emptyset$, pero G no es una ASR-gráfica.

Por otra parte, por el Lema 3, la Condición 2 de la Proposición 9 es necesaria para que una gráfica sea ASR-gráfica. Luego, si la Condición 1 de la Proposición 9 fuera también necesaria, se tendría una caracterización de las ASR-gráficas menos abstracta que la que se tiene por el Teorema 8.

Conjetura 10. *Toda ASR-gráfica tiene al menos tres γ-conjuntos disjuntos.*

Teorema 11 ([5]). *Una gráfica G con $\gamma(G) = 1$ es una ASR-gráfica si y sólo si existe una gráfica (posiblemente nula) H tal que $G = K_3 + H$.*

La siguiente observación es consecuencia directa del teorema anterior.

Observación 12. *Toda ASR-gráfica con número de dominación uno tiene al menos tres γ-conjuntos disjuntos.*

3. Cotas para el tamaño mínimo

Teorema 13 ([5]). *Las ASR-gráficas no tienen vértices de grado uno.*

Lema 14. *Sea G una ASR-gráfica de orden n. Entonces $\gamma(G) \leq \dfrac{n}{3}$.*

Demostración. Sean G una ASR-gráfica con $\gamma(G) = k$ y $D = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un γ-conjunto de G. Por el Teorema 13, tenemos que $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$ para toda $i \neq j$, y por el Lema 3, $|N[v_i]| \geq 3$ para toda $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto, $n = \sum_{i=1}^{k} |N[v_i]| \geq 3k$. $\square$

Sea $\phi(n,\gamma)$ el tamaño mínimo de una ASR-gráfica conexa, de orden n y número de dominación γ. Note que por el Lema 14, $\phi(n,\gamma)$ no está bien definida para $n < 3\gamma$. A partir de ahora asumiremos que $n \geq 3\gamma$.

PROPOSICIÓN 15. *Sea $\gamma \geq 1$. Entonces $\phi(n,\gamma) \leq 3n - 6\gamma$.*

Demostración. Para la prueba, construiremos una ASR-gráfica conexa, de orden $n \geq 3\gamma$ y tamaño $3n - 6\gamma$.

Sean $C_{3\gamma}$ un ciclo de orden 3γ con $V(C_{3\gamma}) = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, ..., v_{3(\gamma-1)}\}$, $P_3 = C_{3\gamma}[\{u_1, u_2, u_3\}]$ una trayectoria de orden 3 en $C_{3\gamma}$ y $H_{n-3\gamma}$ un conjunto independiente (posiblemente vacío) de $n - 3\gamma$ vértices $\{x_1, x_2, ..., x_{n-3\gamma}\}$. Enseguida, realizaremos la suma $P_3 + H_{n-3\gamma}$ y definimos $G(n,\gamma) = C_{3\gamma} \cup (P_3 + H_{n-3\gamma})$ (ver Figura 3).

Claramente $G(n,\gamma)$ es conexa, de orden n y tamaño $3n - 6\gamma$. Veamos que es una ASR-gráfica.

Observe que $D_i = \{u_i\} \cup \left\{ \bigcup_{j=0}^{\gamma-2} \{v_{i+3j}\} \right\}$ con $1 \leq i \leq 3$, es un γ-conjunto de $G(n,\gamma)$ y $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Luego, $G(n,\gamma)$ satisface la Condición 1 de la Proposición 9.

Por otra parte, si $|V(H_{n-3\gamma})| \neq 1$, entonces $\Gamma(G(n,\gamma)) = \{D_1, D_2, D_3\}$. En otro caso, $V(H_{n-3\gamma}) = \{x_1\}$, e intercambiar x_1 con u_2 y dejar fijos a los vértices restantes, determina un automorfismo de $G(n,\gamma)$. Por lo tanto, $\Gamma(G(n,\gamma)) = \{D_1, D_2, D_3\}$ (salvo automorfismos).

Finalmente, se puede comprobar que para $G(n,\gamma)$ también se satisface la Condición 2 de la Proposición 9 y podemos concluir que $G(n,\gamma)$ es una ASR-gráfica. $\square$

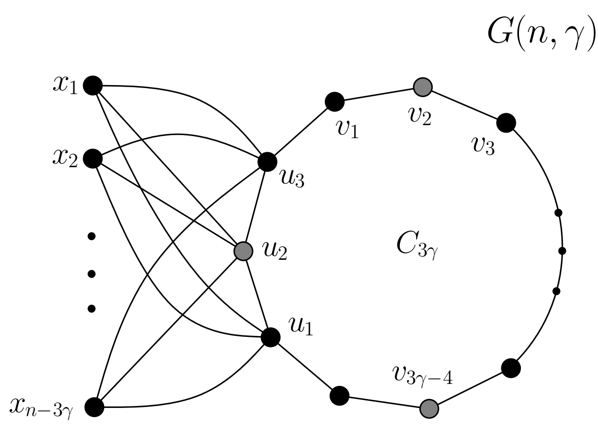

FIGURA 3. Una ASR-gráfica conexa, de orden n y tamaño $3n - 6\gamma$.

PROPOSICIÓN 16. *Sea G una ASR-gráfica de orden n. Entonces $\gamma(G) \leq \dfrac{n}{3}$ y dicha cota superior para γ es justa.*

Demostración. Por el Lema 14, $\gamma(G) \leq \dfrac{n}{3}$. Sean $\gamma \geq 1$ y $n = 3\gamma + r$ con $r \in \{0, 1, 2\}$. Entonces la ASR-gráfica $G(n,\gamma)$ construida en la prueba de la Proposición 15 tiene orden n y número de dominación $\gamma = \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$. $\square$

En [2] se determinó el tamaño mínimo de las DRS-gráficas conexas, de orden n y número de dominación γ, al cual lo denominaron $E(n,\gamma)$.

TEOREMA 17 ([2]). *Sea $\gamma \geq 2$. Entonces $E(n,\gamma) = 2n - 3\gamma$.*

Como toda ASR-gráfica es DRS-gráfica, por la Proposición 15 y el Teorema 17, se tienen las siguientes cotas para $\phi(n,\gamma)$.

PROPOSICIÓN 18. *Sea $\gamma \geq 2$. Entonces $2n - 3\gamma \leq \phi(n,\gamma) \leq 3n - 6\gamma$.*

La siguiente observación remarca el interés por demostrar la Conjetura 10.

OBSERVACIÓN 19. *Si la Conjetura 10 es cierta, entonces* $\phi(n,\gamma) = 3n - 6\gamma$.

Demostración. Sea G una ASR-gráfica conexa, de orden n y número de dominación γ. Si la Conjetura 10 es cierta, existen tres γ-conjuntos disjuntos D_1, D_2 y D_3 de G. Sea $X = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Entonces, todo vértice en $G[X]$ tiene grado al menos dos y todo vértice de G que no está en X, es adyacente al menos a tres vértices en X. Luego, $|E(G)| \geq |X| + 3(n - |X|) = 3n - 6\gamma$ y por la Proposición 15, se tiene que $\phi(n,\gamma) = 3n - 6\gamma$. □

Para finalizar, mostramos algunos valores exactos para $\phi(n,\gamma)$.

COROLARIO 20. $\phi(n,1) = 3n - 6$.

Demostración. Consecuencia directa de las Observaciones 12 y 19. □

COROLARIO 21. *Sea* $\gamma \geq 1$. *Entonces* $\phi(3\gamma,\gamma) = 3\gamma$ *y la única gráfica que realiza a* ϕ *es el ciclo de orden* 3γ.

Demostración. Para $\gamma = 1$, $\phi(3,1) = 3$ por el Corolario 20. Para $\gamma \geq 2$, $\phi(3\gamma,\gamma) = 3\gamma$ por la Proposición 18. Finalmente, por el Teorema 13, la única gráfica conexa que realiza a ϕ es el ciclo de orden 3γ. □

REFERENCIAS

[1] Acharya B. D. & Walikar H. B. *Domination critical graphs.* Nat. Acad. Sci. Lett. 2 (1979) 70-72.
[2] Brigham R. C. & Dutton R. D. *An extremal problem for edge domination insensitive graphs.* Discrete Applied Mathematics 20 (1998) 113-125.
[3] Haynes T. W., Hedetniemi S. T. & Slater P. J. *Fundamentals of domination in graphs.* MARCEL DEKKER, INC (1998).
[4] Karthika K. & Yamuna M. *Domination subdivision stable graphs.* International Journal of Mathematical Archive-3(4) (2012) 1467-1471.
[5] Lemańska M., Tey J. & Zuazua R. *Relations between edge removing and edge subdivision concerning domination number of a graph.* (Enviado) http://arxiv.org/abs/1409.7508
[6] West D. *Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall (1996).

Dirección de los autores:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: gaby_juga@hotmail.com, jtey@xanum.uam.mx