Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. VII, Julio de 2016, 13–33

LOS TEOREMAS DE FELLER-MIYADERA-PHILLIPS Y HILLE-YOSIDA PARA SEMIGRUPOS POSITIVOS

ALFREDO REYES VAZQUEZ

Resumen. Desarrollamos una introducción a los espacios de Banach ordenados, introducimos el concepto de semigrupo positivo y demostramos las versiones de los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y Hille-Yosida, que caracterizan a los generadores infinitesimales de esta clase de semigrupos, en términos de la noción de operador disipativo respecto de una media norma.

Introducción

Siguiendo a Charles J. K. Batty y Derek W. Robinson [1], en el presente trabajo damos una introducción a los espacios de Banach ordenados, establecemos el concepto de semigrupo positivo y presentamos los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y Hille-Yosida, que caracterizan a los generadores infinitesimales de semigrupos positivos usando el concepto de operador disipativo con respecto a una media-norma.

En la sección 1 definimos un orden en un espacio de Banach real mediante un cono positivo convexo. En su espacio dual, el orden entre funcionales se establece mediante la condición de preservar la positividad. También analizamos las consecuencias de este orden tanto en el espacio de Banach como en su dual y su relación con las normas.

En la sección 2 introducimos el concepto de disipatividad con respecto a una media-norma, desarrollamos algunos ejemplos de operadores disipativos con respecto a distintas media-normas y normas. Además, discutimos la relación entre operadores positivos en un espacio de Hilbert y el concepto de disipativiad con respecto a una media-norma.

Finalmente, en la sección 3 demostramos los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y Hille-Yosida para semigrupos positivos.

1. Espacios de Banach Ordenados

En esta sección discutimos la estructura de orden en espacios de Banach B, y en sus espacios duales B^*. En particular, nos enfocaremos en ciertas propiedades de la norma en relación al orden introducido.

Denotaremos por B_α la bola cerrada de radio $\alpha > 0$ y centro en 0, es decir,

$$B_\alpha = \{x \in B : \|x\| \leq \alpha\}.$$

Recordemos que la norma de un funcional lineal se define mediante

$$\|\omega\|_{B^*} = \sup\{|\omega(a)| : a \in B_1\}.$$

1.1. Conos positivos. La teoría de los espacios de Banach ordenados se basa en la de los espacios clásicos de funciones reales. Por ejemplo, en el espacio de funciones continuas, acotadas y real valuadas definidas en un espacio topológico X con la norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

el cual denotamos por $C(X)$, tenemos una relación de orden definida para cada $f, g \in C(X)$ mediante $f \geq g$, si y sólo si $(f - g)(x) \geq 0$ para toda $x \in X$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60J99.
Palabras clave. Espacio de Banach Ordenado, Cono Positivo, Semigrupo de Operadores Positivos, Generador Infinitesimal, Operador Disipatvo, Media Norma.

Además, si consideramos $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, entonces para cualquier $p \in [1, \infty)$, fija, se cumple que en el espacio de funciones real valuadas y medibles en X con la condición $\int |f|^p \, d\mu < \infty$, y con la norma

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

el cual denotamos por $L^p(X, d\mu)$, podemos definir una relación de orden mediante, $f \geq g$ si y sólo si $(f - g)(x) \geq 0$ para toda $x \in X$, salvo un conjunto de μ-medida cero.

Sin embargo, podemos definir estas relaciones de orden de una manera más geométrica, que resulta ser más conveniente para su generalización.

Definición 1. Un *espacio de Banach ordenado* es una terna, $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$, donde B es un espacio de Banach real con norma $\|\cdot\|_B$ y B_+ es un cono positivo, i. e. B_+ es un subconjunto no vacío y cerrado en la norma de B que satisface

$$\lambda B_+ + \mu B_+ \subset B_+ \tag{1}$$

para cada $\lambda, \mu \geq 0$.

De esta manera, siempre se cumple que $0 \in B_+$.

Teorema 2. *Sea $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ un espacio de Banach ordenado. Entonces en su espacio dual $(B^*, \|\cdot\|_{B^*})$ el conjunto dado por*

$$B_+^* \quad = \quad \{\omega \in B^* : \omega(a) \geq 0, \forall a \in B_+\}, \tag{2}$$

es un cono positivo que es cerrado en la topología débil$-*$ a la cual denotamos por $\sigma(B^*, B)$.

Demostración. Para ver que B_+^* es $\sigma(B^*, B)$-cerrado tengamos presente que la topología débil$-*$ se define como la topología más débil en B^* que hace continuas a las aplicaciones $(\phi_a)_{a \in B}$ definidas mediante: $\phi_a \colon B^* \to \mathbb{R}$ y $\omega \mapsto \phi_a(\omega) := \omega(a)$ para cada $a \in B$.

En consecuencia,

$$B_+^* = \bigcap_{a \in B^+} \phi_a^{-1}\big([0, \infty)\big)$$

Por lo tanto, B_+^* es $\sigma(B^*, B)$-cerrado por ser la intersección de conjuntos $\sigma(B^*, B)$-cerrados y claramente se cumple que $\lambda B_+^* + \mu B_+^* \subset B_+^*$ para todo $\lambda, \mu \geq 0$. □

Como consecuencia del teorema 2, la terna $(B^*, B_+^*, \|\cdot\|_{B^*})$ es un espacio de Banach ordenado, al cual llamamos *espacio dual ordenado* de $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ y al conjunto B_+^* le llamaremos *cono dual positivo* de B^*.

Definición 3. En un espacio de Banach ordenado $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ definimos una *relación de orden* mediante

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in B_+ \tag{3}$$

para todo $a, b \in B$.

De esta manera, tenemos que $a \geq 0$ es equivalente a tener que $a \in B_+$.

Proposición 4. *En un espacio de Banach ordenado, la relación dada en* (3) *es reflexiva, transitiva y para cualesquiera $a, b, c \in B$ con $a \geq b$, se cumple que $a + c \geq b + c$. Además, si $a \geq 0$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda a \geq 0$.*

Demostración. Sean $a, b, c \in B$, entonces $a \geq a$ pues $a - a = 0 \in B_+$. De esta manera (3) determina una relación reflexiva.

Para la transitividad, supongamos que $a \geq b$ y $b \geq c$, luego $a - b, b - c \in B_+$. Entonces se cumple que $(a - b) + (b - c) \in B_+$, es decir, $a - c \in B_+$, con lo cual concluimos que $a \geq c$.

Ahora bien, para $a \geq b$, se tiene que $a + c - (b + c) \in B_+$ para toda $c \in B$. Por lo tanto, $a + c \geq b + c$. Por último, si $a \geq 0$ y $\lambda \geq 0$, entonces $a \in B_+$ y por definición de cono positivo, concluimos que $\lambda a \in B_+$, es decir, $\lambda a \geq 0$. □

El estudio de cierta clase de espacios de Banach ordenados, se puede realizar a partir de su cono positivo.

Definición 5. Decimos que el cono positivo B_+ *genera débilmente al espacio de Banach* B, si el conjunto $B_+ - B_+$ es denso bajo la norma de B. Es decir, cada $a \in B$ es el límite en norma de una sucesión $\{b_n - c_n\}_{n\geq 1}$ tal que $b_n, c_n \in B_+$. Similarmente, decimos que el cono dual positivo B^*_+ *genera* $*$*−débilmente a* B^*, si el conjunto $B^*_+ - B^*_+$ es $\sigma(B^*, B)$-denso en B^*.

Observación 1. El conjunto $B_+ - B_+$ es un subespacio vectorial real de B.

Demostración. Primero notemos que $0 \in B_+ \subset B_+ - B_+$. Luego, si $a, b \in B_+ - B_+$, entonces existen $c, d, e, f \in B_+$ tales que $a = c - d$ y $b = e - f$. Con lo cual $a + b = (c + e) - (d + f) \in B_+ - B_+$.

Por último, si $a = b - c \in B_+ - B_+$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda a = \lambda b - \lambda c \in B_+ - B_+$. Mientras que si $\lambda < 0$, entonces $\lambda a = \lambda b - \lambda c = -(-\lambda b) + (-\lambda c) = (-\lambda c) - (-\lambda b) \in B_+ - B_+$. □

Definición 6. Decimos que el cono positivo B_+ es *propio o puntiagudo*, si $B_+ \cap (-B_+) = \{0\}$.

Observación 2. La propiedad de que el cono B_+ es propio es equivalente a que el orden dado en (3) cumpla la anti-simetría, i.e., para todo $a, b \in B$ vale que $a \geq b$ y $b \geq a \Rightarrow a = b$.

Demostración. Si el cono B_+ es propio, entonces dados $a, b \in B$ tales que $a \geq b$ y $b \geq a$, se cumple que $a-b \geq 0$ y $b-a \geq 0$. Es decir, $a-b, b-a \in B_+$ con lo cual $a-b \in B_+\cap(-B_+) = \{0\}$. Por lo tanto, $a = b$.

Recíprocamente, si el orden es anti-simétrico y tomamos $a \in B_+ \cap (-B_+)$, entonces $a \geq 0$ y $-a \geq 0$. De aquí que $a \geq 0$ y $0 \geq a$. Por lo tanto $a = 0$ para todo $a \in B_+ \cap (-B_+)$. □

1.2. Normas monótonas. En esta parte, estudiamos algunas relaciones entre el orden y la norma de un espacio de Banach ordenado $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$.

Definición 7. Decimos que la *norma es* α*-monótona* si se cumple que

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \alpha\|b\|.$$

Si $B_+ \neq \{0\}$, entonces $\alpha \geq 1$ y en el caso de que $\alpha = 1$, simplemente decimos que la norma es monótona.

Observación 3. Si la norma es α-monótona, entonces B_+ es propio.

Demostración. Sean $a, b \in B$ tales que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $0 \leq b - a \leq 0$. Luego, $0 \leq \|b - a\| \leq \alpha\|0\| = 0$. Por lo tanto, $\|b - a\| = 0$, es decir, $a = b$. Esto prueba que B_+ es propio en virtud de la observación 2. □

Ejemplo 1. Sean $B = L^p(X, d\mu)$ para algún espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ con $p \in [1, \infty]$ y B_+ el cono de las funciones no negativas salvo un conjunto μ-medida cero. Entonces la norma en B es monótona.

Demostración. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ en X salvo un conjunto de μ-medida cero, entonces para cualquier $p \in [1, \infty)$, se cumple que

$$0 \leq |f(x)|^p \leq |g(x)|^p,$$

y en consecuencia,

$$\int |f|^p \, d\mu \leq \int |g|^p \, d\mu.$$

Es decir, $\|f\|_p \leq \|g\|_p$.

Para el caso $p = \infty$, tenemos que

$$0 \leq |f(x)| \leq |g(x)| \leq \|g\|_\infty.$$

Luego, $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Por lo tanto para cualquier $p \in [1, \infty]$ se satisface que si $0 \leq f \leq g$, entonces $\|f\|_p \leq \|g\|_p$, i. e, se cumple la definición 7 con $\alpha = 1$. □

1.3. Operadores positivos. Sean $(A, A_+, \|\cdot\|_A)$ y $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ espacios de Banach ordenados. Entonces en el espacio de Banach

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(A, B) = \Big\{S : A \to B \,|\, S \text{ es acotado y lineal}\Big\}$$

con la norma de operadores, definimos el conjunto

$$\mathcal{L}_+ := \Big\{S \in \mathcal{L} \,|\, SA_+ \subset B_+\Big\}.$$

Veamos que $\mathcal{L}_+$ es un cono positivo, para esto consideremos $(S_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}_+$ tal que $S_n \to S$ en la norma de $\mathcal{L}$, cuando $n \to \infty$. Si $a \in A_+$, entonces $S_n(a) \geq 0$, para cada $n \geq 1$. Luego, $\lim_{n\to\infty} S_n(a) \geq 0$, por ser B_+ cerrado. Por lo tanto, $S(a) \geq 0$.

En consecuencia, $S \in \mathcal{L}_+$, es decir, $\mathcal{L}_+$ es cerrado. Además es inmediato que para $\lambda, \mu \geq 0$, se satisface que $\lambda\mathcal{L}_+ + \mu\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$.

De esta manera, $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_+, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach ordenado con la norma de operadores. A los elementos $S \in \mathcal{L}_+$ se les conoce como *operadores positivos*. Consideremos la asignación definida para cada $S \in \mathcal{L}(A, B)$ mediante

$$\|S\|_+ := \sup\{\|Sa\| \,|\, a \in A_1 \cap A_+\}.$$

Claramente, $\|S\|_+ \leq \|S\|$.

Definición 8. Cuando se tiene que $\|S\|_+ = \|S\|$ para cada $S \in \mathcal{L}_+$, decimos que la *norma es positivamente alcanzada.*

2. Semigrupos positivos

En esta sección, desarrollamos una brevísima introducción a la teoría de semigrupos positivos en espacios de Banach ordenados y de operadores disipativos con respecto a una media-norma y a una norma.

2.1. C_o-semigrupos.

Definición 9. En un espacio de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$, una familia $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados de B en B es un *C_o-semigrupo* si se cumplen las siguientes condiciones:

1) $S_s S_t = S_{s+t}$ para cada $s, t \geq 0$ (condición de semigrupo)
2) $S_0 = I$
3) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S_t a - a\| = 0$, para cada $a \in B$.

Además, si B está ordenado mediante un cono positivo, B_+, entonces decimos que S es un *C_o-semigrupo positivo* si además se cumple que

4) $S_t B_+ \subset B_+$, para todo $t > 0$.

Similarmente, si $(B^*, \|\cdot\|_{B^*})$ es el espacio dual de $(B, \|\cdot\|_B)$, entonces una familia $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados de B^* en B^* es un *C_o^*-semigrupo* si se cumplen las propiedades 1 y 2 con T_t en lugar de S_t y junto con

3*) a.- La aplicación definida en $[0, \infty)$ mediante $t \mapsto (T_t\omega)(a)$ es continua para todo $\omega \in B^*$ y $a \in B$,
b.- La aplicación definida sobre B^* mediante $\omega \mapsto (T_t\omega)(a)$ es $\sigma(B^*, B)$-continua para cada $t \geq 0$ y $a \in B$.

Y si el espacio dual B^*, está ordenado mediante un cono dual positivo, B^*_+, entonces decimos que T es un *C_o^*-semigrupo positivo* si además se cumple la siguiente propiedad

4*) $T_t B^*_+ \subset B^*_+$, para todo $t > 0$.

La relación entre estos dos tipos de semigrupos está dada por la dualidad, es decir, si $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ es un C_o-semigrupo en B, entonces definiendo

$$S^* = \{S_t^* : S_t^* \text{ es el operador adjunto de } S_t\}_{t\geq 0}$$

obtenemos un C_o^*-semigrupo en B^*.

Para verificar esto último, recordemos que para todo $\omega \in B^*$, el adjunto de S se define como el funcional $S_t^*(\omega)$ definido mediante $(S_t^*\omega)(a) = \omega(S_t(a))$, para cada $a \in B$.

De aquí que si $s, t \geq 0$, $a \in B$ y $\omega \in B^*$, entonces

$$S_0^*(\omega)(a) = \omega(S_0(a)) = \omega(Ia) = \omega(a) = (I\omega)(a).$$

Además,

$$(S_{s+t}^*\omega)(a) = \omega(S_{s+t}(a)) = \omega(S_s S_t a) = S_s^*(\omega(S_t a)) = S_s^* S_t^*(\omega)(a).$$

Esto demuestra que $\{S_t^*\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo.

Por último, tenemos que

$$\lim_{t\to 0^+} (S_t^*\omega)(a) = \lim_{t\to 0^+} \omega(S_t(a)) = \omega\left(\lim_{t\to 0^+} S_t(a)\right) = \omega(a),$$

pues $\omega \in B^*$ y $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo, i. e.,

$$\lim_{t\to 0^+} S_t^*\omega = \omega, \quad \forall \omega \in B^*.$$

Con lo cual,

$$\lim_{t\to 0^+} S_t^* - I = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que S_t^* es continuo para cada $t \geq 0$ en la topología $\sigma(B^*, B)$.

Recíprocamente, si $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$ es un C_o^*-semigrupo en B^*, entonces se tiene que existe un C_o-semigrupo $T^* = \{T_t^*\}_{t\geq 0}$ en B, cuyo adjunto es $(T_t^*)^* = T_t$ para cada $t \geq 0$. Ver [1].

Ahora bien, para cada C_o-semigrupo tenemos la siguiente definición.

Definición 10. El *generador infinitesimal de un C_o-semigrupo $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$* en B es el operador lineal H, con dominio $D(H)$ donde

$$D(H) = \left\{a \in B : \text{ existe } b \in B \text{ tal que } \lim_{t\to 0^+} \left\|\frac{(I - S_t)a}{t} - b\right\| = 0\right\} \quad \text{y}$$

$$Ha = b\ , \forall a \in D(H).$$

Por otra parte, el *generador infinitesimal de un C_o^*-semigrupo $T = \{T_t\}_{t\geq 0}$* en B^* se define de manera similar pero con la $\sigma(B^*, B)$-derivada, es decir, es un operador lineal K, con dominio $D(K)$ donde

$$D(K) = \left\{\omega \in B^* : \text{ existe } \eta \in B^* \text{ tal que } \lim_{t\to 0^+} \frac{\big((I - T_t)\omega\big)}{t}(a) = \eta(a)\ , \text{ para cada } a \in B\right\} \quad \text{y}$$

$$K\omega = \eta\ , \ \forall \omega \in D(K).$$

El generador infinitesimal H de un C_o-semigrupo tiene dominio denso en B, es decir, $\overline{D(H)} = B$. Además, el generador infinitesimal resulta ser un operador lineal cerrado. Para ver los detalles, puede consultarse [2].

Para ver la relación entre los generadores infinitesimales de un C_o-semigrupo y un C_o^*-semigrupo, requerimos del concepto de operador adjunto de un operador lineal no acotado.

Definición 11. Sean X un espacio de Banach y T un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$ denso. Definimos el *operador adjunto de T* mediante el operador T^* con dominio

$$D(T^*) = \big\{\omega \in X^* : \text{ existe } \xi \in X^* \text{ tal que } \omega(Ta) = \xi(a), \ \forall a \in D(T)\big\},$$

y la acción de T^*, está dada por $T^*\omega = \xi$, para cada $\omega \in D(T^*)$.

Proposición 12. *Si S es un C_o-semigrupo con generador H, entonces su C_o^*-semigrupo dual S^* tiene como generador al operador adjunto de H, i. e., al operador H^*.*

Demostración. Sean K el generador de S^* y H^* el operador adjunto del generador H de S. Debemos mostrar que $D(K) = D(H^*)$ y $K\omega = H^*\omega$, para toda $\omega \in D(K)$.

Sea $\omega \in D(K)$, entonces para cada $a \in D(H)$ se tiene por la definición 10 que

$$\omega(Ha) = \omega\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{I - S_t}{t}(a)\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\omega\big((I - S_t)(a)\big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big(I - S_t^*\big)\omega(a) = \eta(a), \quad \text{para algún } \eta \in B^*.$$

De esta manera, para cada $\omega \in D(K)$, existe $\eta \in B^*$ tal que $H^*\omega(a) = \omega(Ha) = \eta(a)$, para toda $a \in D(H)$. Es decir, $\omega \in D(H^*)$ con $K\omega = \eta = H^*\omega$. Con lo cual, tenemos que K es restricción de H^*. Ahora bien, para la otra contención tomamos $\omega \in D(H^*)$, en consecuencia existe $\xi \in B^*$ tal que

$$\xi(a) = \omega(Ha) = \omega\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{I - S_t}{t}(a)\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\omega\big((I - S_t)(a)\big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big(I - S_t^*\big)\omega(a).$$

De aquí que $\omega \in D(K)$ y $K\omega = \xi$. Por lo tanto, H^* es una restricción de K y como K es restricción de H^*, concluimos que $K = H^*$. □

Entre las clases más interesantes de semigrupos están los semigrupos de contracciones.

Definición 13. Un C_0 semigrupo $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ en B es de *contracciones* si

$$\|S_t\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Los resultados clásicos para caracterizar los operadores $H\colon D(H) \subset B \to B$ que son generadores infinitesimales de C_o-semigrupos son los siguientes:

Teorema 14. ***(Feller-Miyadera-Phillips)***
En un espacio de Banach B, son equivalentes:

1) *H genera un C_o-semigrupo $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ con*
$$\|S_t\| \leq Me^{\gamma t}, \quad \forall t \geq 0,$$
para algún $M \geq 1, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$ con $\beta\gamma < 1$.
2) *H es un operador lineal norma cerrado y definido norma denso con*
   - i) *$R(I + \beta H) = B$, es decir, el rango del operador $I + \beta H$ es B.*
   - ii) *$\|(I + \alpha H)^n a\| \geq (1 - \alpha\gamma)^n M^{-1}\|a\|$, para cualesquiera $\alpha \in (0, \beta]$, $a \in D(H^n)$ y $n \geq 1$.*

Aquellos operadores H que satisfacen la condición en el inciso (II) de 2 con $n = 1$, se llaman disipativos. Para los semigrupos de contracciones, tenemos

Teorema 15. ***(Hille-Yosida)***
En un espacio de Banach B, son equivalentes:

1) *H genera un C_o-semigrupo de contracciones.*
2) *H es un operador lineal norma cerrado y definido norma denso con*
   - i) *$R(I + \beta H) = B$, es decir, el rango del operador $I + \beta H$ es B, para algún $\beta > 0$.*
   - ii) *$\|(I + \alpha H)^n a\| \geq \|a\|$, para cada $\alpha \in (0, \beta]$ y para toda $a \in D(H^n)$.*

Estos resultados pueden consultarse en [1].

A continuación, estudiamos condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un operador lineal es el generador de un C_0-semigrupo positivo de contracciones, para este fin introducimos el concepto de *disipatividad respecto de una media-norma.*

2.2. Operadores disipativos respecto de una media-norma. A lo largo de esta subsección, H denotará un operador lineal en un espacio de Banach real con dominio $D(H)$ denso en la norma y consideraremos $p\colon B \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal en B, es decir, una función p que satisface

$$\begin{cases} p(a + b) \leq p(a) + p(b) & ; \quad \forall a, b \in B, \\ p(\lambda a) = \lambda p(a) & ; \quad \forall a \in B, \forall \lambda \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Definición 16. Decimos que $p : B \to \mathbb{R}$ es una *media-norma* (por Half-Norm en inglés) en un espacio de Banach B, si es un funcional sublineal continuo.

En particular, por ser p funcional sublineal tenemos que $0 = p(0) \leq p(a) + p(-a)$, por lo que $p(a) \geq 0$, o bien $p(-a) \geq 0$. La continuidad de p equivale a la existencia de una constante k tal que $|p(a)| \leq k\|a\|$, para toda $a \in B$.

Observación 4. Una media-norma p es tal que $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, para toda $\alpha \geq 0$ y para cada $x \in B$, mientras que una semi-norma ν satisface que $\nu(\alpha x) = |\alpha|\nu(x)$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y para cada $x \in B$. Con lo cual, toda norma es una semi-norma y una semi-norma es una media-norma en B pero una media norma no es necesariamente una semi-norma.

Definición 17. Decimos que una media-norma $p : B \to \mathbb{R}$ es *propia* si

$$\text{máx}\{p(a), p(-a)\} > 0,$$

para toda $a \in B \backslash \{0\}$.

Observación 5. Para cada media-norma propia p en B, la función $\|\cdot\|_p : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|a\|_p := \text{máx}\{p(a), p(-a)\}$$

define una norma en B.

Demostración. Por ser p una media-norma propia tenemos que $\text{máx}\{p(a), p(-a)\} \geq 0$ para todo $a \in B$, de aquí que $\|a\|_p \geq 0$ para todo $a \in B$. Además,

$$\|a\|_p = 0 \Leftrightarrow p(a) = p(-a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Ahora bien, si $\alpha \geq 0$, entonces $p(\alpha a) = \alpha p(a)$ y $p(-\alpha a) = \alpha p(-a)$ para toda $a \in B$. En consecuencia,

$$\|\alpha a\|_p = \text{máx}\{p(\alpha a), p(-\alpha a)\} = \alpha\, \text{máx}\{p(a), p(-a)\} = \alpha \|a\|_p = |\alpha| \|a\|_p.$$

Mientras que si $\alpha < 0$, entonces $p(\alpha a) = p(-\alpha(-a)) = -\alpha p(-a)$ y $p(-\alpha a) = -\alpha p(a)$. De está manera,

$$\|\alpha a\|_p = \text{máx}\{p(\alpha a), p(-\alpha a)\} = -\alpha\, \text{máx}\{p(-a), p(a)\} = |\alpha| \|a\|_p.$$

Es decir, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que $\|\alpha a\|_p = |\alpha| \|a\|_p, \forall a \in B$.

Finalmente, si $a, b \in B$, entonces $p(a + b) \leq p(a) + p(b)$ y $p(-a - b) \leq p(-a) + p(-b)$. Luego,

$$\|a + b\|_p = \text{máx}\{p(a + b), p(-a - b)\} \leq \text{máx}\{p(a), p(-a)\} + \text{máx}\{p(b), p(-b)\} = \|a\|_p + \|b\|_p.$$

□

Definición 18. El *subdiferencial de una media-norma* p en $a \in B$ es el conjunto

$$dp(a) = \{\omega \in B^* : \omega \leq p, \omega(a) = p(a)\}.$$

Por el teorema de Hahn-Banach en [1], tenemos que $dp(a)$ es no vacío. Además, dados $b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $\omega \in dp(a)$ tal que $\omega(b) = \lambda$ si y sólo si

$$\frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lambda \leq \frac{p(a + tb) - p(a)}{t} \tag{5}$$

para cada $t > 0$.

Observación 6. Si p es una media-norma en B, entonces para cada $a, b \in B$ la aplicación $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = p(a + tb)$ es convexa.

Demostración. Sean $s, t \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in (0, 1)$, entonces por ser p una media-norma tenemos

$$\begin{aligned} f\big(\gamma s + (1 - \gamma)t\big) &= p\big(a + (\gamma s + (1 - \gamma)t)b\big) \\ &= p\big(\gamma a + (1 - \gamma)a + (\gamma s + (1 - \gamma)t)b\big) \\ &\leq \gamma p(a + sb) + (1 - \gamma)p(a + tb) \\ &= \gamma f(s) + (1 - \gamma)f(t). \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es convexa. □

Lema 19. *Para cada $b \in B$, y toda $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que la desigualdad* (5) *es equivalente a*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lambda \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{p(a + tb) - p(a)}{t}. \tag{6}$$

Demostración. Sean $b \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, así para cada $t > 0$, por [5] se cumple

$$\frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \frac{p(a + sb) - p(a)}{s}.$$

El cociente del lado izquierdo determina una función monótona creciente de $t > 0$, y el lado derecho es decreciente como función de $s > 0$. Por lo tanto,

$$\frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tb)}{t} \leq \lim_{s \to 0^+} \frac{p(a + sb) - p(a)}{s} \leq \frac{p(a + sb) - p(a)}{s}.$$

De aquí que $\lambda \in \mathbb{R}$, cumple (5) si y sólo si satisface (6). □

Teorema 20. *Sea $H : D(H) \to B$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Banach real B y consideremos una media-norma p en B. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *Para cada $\alpha > 0$, $p((I + \alpha H)a) \geq p(a)$, para toda $a \in D(H)$,*
2) *Para cada $a \in D(H)$, existe $\omega \in dp(a)$ tal que $\omega(Ha) \geq 0$,*
3) *Para cada $a \in D(H)$ y para cualquier $\omega \in dp(a)$, $\omega(Ha) \geq 0$.*

Demostración. La implicación 3) $\Rightarrow$ 2) es obvia y para ver que 2) $\Rightarrow$ 1) basta tomar en (5) $b = Ha$, con $a \in D(H)$, así la condición 2) implica que

$$\frac{p(a + tHa) - p(a)}{t} \geq 0 \quad , \forall t > 0$$

De esta manera, para toda $t > 0$,

$$p(a + tHa) - p(a) \geq 0, \quad \forall a \in D(H).$$

Mientras que para 1) $\Rightarrow$ 3), tomamos $a, b \in D(H)$ y $t > 0$, entonces por ser p una media-norma, tenemos

$$\begin{aligned} p(a - tHa) &\leq p(a - tb) + tp(b - Ha) \\ &\leq p((I + tH)(a - tb)) + tp(b - Ha) \\ &\leq p(a) + tp(Ha - b) + tp(b - Ha) + t^2 p(-Hb). \end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tHa)}{t} \geq -p(Ha - b) - p(b - Ha).$$

Luego, por ser $D(H)$ denso y p continua, el lado derecho de está última desigualdad puede hacerse arbitrariamente pequeño al tomar una sucesión $(b_n) \subset D(H)$ que converja a Ha.

Con lo cual,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p(a) - p(a - tHa)}{t} \geq 0.$$

Finalmente, dado $\omega \in dp(a)$, al hacer $b = Ha$, tenemos por (5) que $\omega(Ha) = \lambda \geq 0$. □

De hecho, en el teorema 20 basta verificar la condición (1) en algún intervalo $(0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ y extender por convexidad a todo el intervalo $(0, \infty)$. A partir de el teorema 20, damos la siguiente definición.

Definición 21. Decimos que un operador lineal H densamente definido en un espacio de Banach real B, es *p-disipativo* si cumple alguna de las condiciones del teorema 20.

El término "disipativo", aparece en el contexto de C_o-semigrupos. La disipatividad es una forma infinitesimal de la condición de contractibilidad. Para ver esto, sea S un C_o-semigrupo con generador H y supongamos que S es p-contractivo, es decir,

$$p(S_t a) \leq p(a)$$

para toda $t \geq 0$ y $a \in B$. Entonces, dado $\omega \in dp(a)$, se cumple que

$$\omega(S_t a) \leq p(S_t a) \leq p(a) = \omega(a).$$

Por lo tanto, para toda $a \in D(H)$, por definición de generador,

$$\omega(Ha) = \lim_{t\to 0^+} \omega\left(\frac{(I - S_t)a}{t}\right) \geq 0.$$

Es decir, H es un operador p-disipativo.

Como H es el generador de un C_0-semigrupo, entonces por el teorema 3.1.10 en [3] para semigrupos de contracciones y el teorema 11.6.6 en [4] para una clase más general de semigrupos, se tiene que para cada $a \in B$,

$$S_t a = \lim_{n\to\infty} (I + tH/n)^{-n} a.$$

De aquí que

$$p\,(S_t a) = \lim_{n\to\infty} p((I + tH/n)^{-n} a).$$

Supongamos que H es p-disipativo, por el teorema 20 tenemos que

$$p((I + \alpha H)a) \geq p(a).$$

Luego,

$$p((I + \alpha H)^2 a) \geq p((I + \alpha H)a) \geq p(a).$$

Por lo que de manera inductiva, concluimos que

$$p((I + \alpha H)^n a) \geq p(a)\ ,\ \forall n \geq 1.$$

Consecuentemente,

$$p((I + tH/n)^{-n} a) \leq p(a)\ ,\ \forall n \geq 1.$$

Así,

$$p\,(S_t a) \leq p(a),$$

para toda $a \in B$. Con lo cual, S es p-contractivo.

De acuerdo a lo anterior, notemos que un C_0-semigrupo es de contracciones si y sólo si su generador infinitesimal es $\|\cdot\|$-disipativo. Este hecho, forma parte de lo establecido por el teorema de Hille-Yosida [2] por que la $\|\cdot\|$-disipatividad corresponde a la estimación

$$\|(I + \alpha H)a\| \geq \|a\|$$

para toda $a \in D(H)$ y toda $\alpha > 0$ pequeña.

Observación 7. A los operadores norma-disipativos, también se les conoce simplemente como operadores disipativos.

A continuación, estudiamos algunas propiedades de los operadores p-disipativos. Por ejemplo, encontramos operadores H para los cuales existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $(H + \gamma I)$ es p-disipativo. En este contexto, el siguiente resultado es útil.

Proposición 22. *Sea* $\gamma \in \mathbb{R}$*, entonces son equivalentes:*

1) $(H + \gamma I)$ *es p-disipativo.*

2) Para toda $\alpha > 0$ *tal que* $1 - \alpha\gamma > 0$*, se cumple que* $p((I + \alpha H)a) \geq (1 - \alpha\gamma)p(a)$*, para cada* $a \in D(H)$*.*

Demostración. Primero observamos que si $\alpha > 0$ es tal que $1 - \alpha\gamma > 0$ y $a \in D(H)$, se cumple que

$$p((I + \alpha H)a) = (1 - \alpha\gamma)p\Big((I + \alpha(1 - \alpha\gamma)^{-1}(H + \gamma I))a\Big). \tag{7}$$

Ahora bien, si suponemos la condición 1) tenemos por el teorema 20 aplicado al lado derecho de está igualdad que

$$p((I + \alpha H)a) \geq (1 - \alpha\gamma)p(a).$$

Esto demuestra 1) $\Rightarrow$ 2).

Para ver que 2) $\Rightarrow$ 1), suponemos que

$$p((I + \alpha H)a) \geq (1 - \alpha\gamma)p(a),$$

para toda $\alpha > 0$ tal que $1 - \alpha\gamma > 0$ y cada $a \in D(H)$.
Entonces por (7), tenemos que

$$(1-\alpha\gamma)p\Big((I+\alpha(1-\alpha\gamma)^{-1}(H+\gamma I))a\Big) \geq (1-\alpha\gamma)p(a)$$

para toda $\alpha > 0$ tal que $1 - \alpha\gamma > 0$ y cada $a \in D(H)$.
Es decir,

$$p\Big((I+\alpha(1-\alpha\gamma)^{-1}(H+\gamma I))a\Big) \geq p(a).$$

Por lo tanto, al tomar $\beta = \alpha(1-\alpha\gamma)^{-1} > 0$, concluimos que

$$p\Big((I+\beta(H+\gamma I))a\Big) \geq p(a)$$

Lo cual significa que $(H + \gamma I)$ es p-disipativo en virtud del teorema 20. □

Para establecer que los operadores p-disipativos tienen un buen comportamiento con respecto a la topología inducida por la norma, requerimos de las siguientes definiciones.

Definición 23. Sean B un espacio de Banach real y $D(A) \subset B$ un subespacio. Definimos la *gráfica de un operador lineal* $A\colon D(A) \to B$, como el conjunto

$$\mathcal{G}(A) = \Big\{(x, Ax) \in B \times B\colon\, x \in D(A)\Big\}.$$

Definición 24. Sea B un espacio de Banach real y consideremos $A_i\colon D(A_i) \to B$ operadores lineales con $D(A_i)$ subespacios B con $i = 1, 2$. Decimos que A_2 es *extensión de* A_1, lo cual lo denotamos por $A_1 \subset A_2$, si $D(A_1) \subset D(A_2)$ y $A_2x = A_1x$, para cada $x \in D(A_1)$.

Definición 25. Sea B un espacio de Banach. Decimos que un operador lineal $A\colon D(A) \subset B \to B$ es *cerrado* si su gráfica $\mathcal{G}(A)$ es un conjunto cerrado en $B \times B$.

Definición 26. Sea B un espacio de Banach real. Decimos que un operador lineal $A\colon D(A) \subset B \to B$ es *cerrable* si dadas $b \in B$ y $(a_n)_{n\geq 1} \subset D(A)$ con $a_n \to 0$ y $Ha_n - b \to 0$, conforme $n \to \infty$, entonces $b = 0$.

Teorema 27. *Sea H un operador p-disipativo, donde p es una media-norma propia en B. Entonces, H es un operador cerrable y su mínima extensión cerrada denotada por $\overline{H}$ también es p-disipativo.*

Demostración. Supongamos que H es p-disipativo y veamos primero que H es cerrable, para esto consideramos $(a_n)_{n\geq 1} \subset D(H)$ y $b \in B$ tales que $a_n \to 0$ y $Ha_n - b \to 0$, si $n \to \infty$. Para demostrar que $b = 0$, tomemos $b' \in D(H)$, luego para cada $t > 0$, tenemos por el teorema 20 que

$$\begin{aligned} p(a_n - tb) &\leq p(a_n - tb') + tp(b' - b)\\ &\leq p((I + tH)(a_n - tb')) + tp(b' - b)\\ &\leq p(a_n) + tp(b - b') + tp(b' - b) + tp(Ha_n - b) + t^2p(-Hb'). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ y usando que p es continua, concluimos

$$\begin{aligned} tp(-b) &\leq tp(b - b') + tp(b' - b) + t^2p(-Hb')\\ \Rightarrow\quad p(-b) &\leq p(b - b') + p(b' - b) + tp(-Hb') \end{aligned}$$

para cada $t > 0$. Y al tomar límite cuando $t \to 0^+$,

$$p(-b) \leq p(b - b') + p(b' - b).$$

Por ser $D(H)$ norma-denso y p continua, el lado derecho de está desigualdad, puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando $b' = (b_n)_{n\geq 1}$ tal que $b_n \to b$.

Por lo tanto, $p(-b) = 0$ y de manera análoga, vemos que $p(b) = 0$. Con lo cual $b = 0$, por ser p propia. De aquí que H es cerrable.

Finalmente, $\overline{H}$ es p-disipativo por la condición 1) del teorema 20 y la continuidad de p. □

Definición 28. Definimos la *media-norma canónica en* $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ con B_+ propio mediante

$$N(a) = \operatorname{ínf}\{\|b\| : b \in B, b \geq a\}.$$

Veamos que $N\colon B \to [0,\infty)$ es una media-norma ya que si $a, c, b_1, b_2 \in B$ son tales que $b_1 \geq a$ y $b_2 \geq c$, entonces $b_1 + b_2 \geq a + c$.
De está manera,

$$N(a+c) \leq \|b_1 + b_2\| \leq \|b_1\| + \|b_2\|.$$

Por lo tanto,

$$N(a+c) \leq N(a) + N(c).$$

Además, si $\alpha > 0$, entonces para $a, b \in B$ se cumple que

$$\begin{aligned} N(\alpha a) &= \inf\{\|b\| : b \geq \alpha a\} \\ &= \inf\{\|\alpha b\| : b \geq a\} \\ &= \alpha \inf\{\|b\| : b \geq a\} \\ &= \alpha N(a). \end{aligned}$$

Finalmente, notamos que $0 \leq N(a) \leq \|a\|$, lo cual se obtiene tomando $b = a$ en la definición 28. Por lo tanto, N es una media-norma. Además, se tiene la propiedad de que $N(a) = 0$, si y sólo si $a \leq 0$.

Lema 29. *Sea ω un funcional lineal en $(B, B_+, \|\cdot\|)$ y $\alpha \geq 0$. Entonces, son equivalentes*

1) $\omega \in B_+^* \cap B_\alpha^*$
2) $\omega(a) \leq \alpha N(a)$*, para cada $a \in B$.*

Demostración. Primero supongamos que $\omega \in B_+^* \cap B_\alpha^*$ y tomemos $a, b \in B$ tales que $b \geq a$, entonces

$$\omega(a) \leq \omega(b) \leq \|\omega\|\|b\| \leq \alpha\|b\|.$$

Así, por definición de media-norma canónica, $\omega(a) \leq \alpha N(a)$.

Recíprocamente, si $\omega(a) \leq \alpha N(a)$, para cada $a \in B$, entonces $\omega(a) \leq \alpha\|a\|$. Luego, $\|\omega\| \leq \alpha$. Por último, para verificar que $\omega \in B_+^*$, consideramos $x \geq 0$, entonces $N(-x) = 0$. Luego, se cumple que $\omega(-x) \leq \alpha N(-x) = 0$. Por lo tanto, $\omega(x) \geq 0$, es decir, $\omega \in B_+^*$. □

Una consecuencia inmediata del lema 29, es el hecho de que el subdiferencial con respecto de N está caracterizado mediante

$$dN(a) = \{\omega \in B_+^* \cap B_1 : \omega(a) = N(a)\},$$

para cada $a \in B$. Otra propiedad importante de la media-norma canónica es que nos da una forma de determinar cuándo la norma es monótona. Este hecho se concentra en el siguiente teorema.

Teorema 30. *En $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$, son equivalentes*

1) $\|\cdot\|$ *es monótona*
2) $N(a) = \|a\|$ *para cada* $a \in B_+$

Demostración. Si tenemos que $\|\cdot\|$ es monótona en B, entonces para cada $a, b \in B$ tales que $0 \leq a \leq b$ se cumple que $\|a\| \leq \|b\|$. Luego, $\|a\| \leq N(a)$ y siempre se vale que $N(a) \leq \|a\|$. Con lo cual, $N(a) = \|a\|$.

Recíprocamente, sean $a, b \in B$ tales que $0 \leq a \leq b$, entonces $a, b \in B_+$. Así, $\|a\| = N(a) \leq \|b\|$. De está manera, obtenemos que $\|a\| \leq \|b\|$, es decir, $\|\cdot\|$ es monótona. □

Ahora, consideremos un espacio de Banach ordenado $(B, B_+, \|\cdot\|)$ con B_+ propio y tal que $\mathrm{int}B_+ \neq \emptyset$, en consecuencia para H densamente definido, tenemos que existe $u \in D(H) \cap \mathrm{int}B_+$.

Así, dada $u \in \mathrm{int}B_+$ y $b \in B_+$, se cumple que $\lambda u + b \in \mathrm{int}B_+$, para toda $\lambda > 0$. Luego, $\mathrm{int}B_+$ es un conjunto denso en B_+.

Por otra parte, para cada $u \in \mathrm{int}B_+$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{a \in B : \|a - u\| < \varepsilon\} \subset B_+$. Por lo que si $a \in B$, entonces $-\lambda u \leq a \leq \lambda u$, para toda $\lambda > \|a\|/\varepsilon$, ya que $\|u - (u \pm a/\lambda)\| = \|a\|/\lambda < \varepsilon$. Con lo cual, $u \pm a/\lambda \in B_+$, es decir, $\lambda u \pm a \in B_+$.

Lema 31. *Sean $u \in \mathrm{int}B_+$ y $\omega \in B_+^*$ tales que $\omega(u) = 0$. Entonces $\omega = 0$.*

Demostración. Sea $a \in B$, entonces por ser u punto interior de B_+, existe $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda u \geq a$. De aquí que $\omega(\lambda u) \geq \omega(a)$, luego $0 \geq \omega(a)$.

Mientras que para $-a$, existe $\gamma \geq 0$ tal que $\gamma u \geq -a$, con lo cual $\omega(\gamma u) \geq \omega(-a)$, así $0 \geq -\omega(a)$. Finalmente, $0 \leq \omega(a) \leq 0$, para cada $a \in B$. Por lo tanto $\omega = 0$. □

Además, tenemos las siguientes medias-normas.

Definición 32. Para cada $u \in \mathrm{int}B_+$, definimos *dos medias-normas en B asociadas a u*, mediante

$$N_u(a) = \text{ínf}\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \leq \lambda u\},$$

$$\hat{N}_u(a) = \text{ínf}\{\lambda \in \mathbb{R} : a \leq \lambda u\},$$

con $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$.

En efecto, N_u es una media-norma en B, pues dados $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tales que $\lambda_1 u \geq a$ y $\lambda_2 u \geq b$, entonces $(\lambda_1 + \lambda_2)u \geq a + b$.
De aquí que $N_u(a + b) \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Por lo tanto, $N_u(a + b) \leq N_u(a) + N_u(b)$.
Además, para $\alpha, \lambda > 0$ se tiene que $\alpha\lambda u \geq \alpha a$ si y sólo si $\lambda u \geq a$. Con lo cual, $N_u(\alpha a) = \alpha N_u(a)$.

De manera análoga, se demuestra que $\hat{N}_u$ es una media-norma en B. También es importante notar que si $b \leq 0$, entonces $N_u(b) = 0$ y para toda $a \in B$, se verifica que $a \leq N_u(a)u$.

Así, por la observación 5, cuando N_u es propia obtenemos una nueva norma en B dada por

$$\|a\|_u = \text{máx}\{N_u(a), N_u(-a)\}.$$

Proposición 33. *Para cada $u \in intB_+$ y $a \in B$, se cumple que*

$$\|a\|_u = \text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \in [-\lambda u, \lambda u]\right\}$$

donde $a \in [-\lambda u, \lambda u]$ si y sólo si, $-\lambda u \leq a \leq \lambda u$.

Demostración. Sean $a \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tales que $a \in [-\lambda u, \lambda u]$, entonces $-\lambda u \leq a$ y $a \leq \lambda u$. Es decir, $-a \leq \lambda u$ y $a \leq \lambda u$. Luego, $N_u(-a) \leq \lambda$ y $N_u(a) \leq \lambda$.

Por lo tanto,

$$\|a\|_u \leq \text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \in [-\lambda u, \lambda u]\right\}.$$

Para establecer la otra desigualdad, observamos que para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $\lambda_\varepsilon \geq 0$ tal que $a \leq \lambda_\varepsilon u$ y $\lambda_\varepsilon < \|a\|_u + \varepsilon$.

Esto implica que $a < (\|a\|_u + \varepsilon)u$ para todo $\varepsilon > 0$. De aquí que, $a \leq \|a\|_u u$. De manera análoga, se demuestra que $-a \leq \|a\|_u u$.

Con lo cual, $a \in [-\|a\|_u u, \|a\|_u u]$. Se sigue entonces

$$\text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : a \in [-\lambda u, \lambda u]\right\} \leq \|a\|_u.$$

□

A continuación demostraremos la equivalencia de varias propiedades, que nos permitirán definir el concepto de operador disipativo respecto de una media-norma. Para esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 34. *Para cada $u \in intB_+$ y $a \in B$, se cumple que*

$$dN_u(a) = \{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\}$$

Demostración. Si $\omega \in dN_u(a)$, entonces $\omega \in B^*$ con $\omega(a) = N_u(a)$ y $\omega(b) \leq N_u(b)$ para todo $b \in B$.
En particular, si $b \in B_+$, entonces

$$\omega(-b) \leq N_u(-b) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \lambda u \geq -b\} = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \lambda u + b \geq 0\} = 0.$$

con lo cual, $-\omega(b) \leq 0$. Se sigue que, $\omega \in B_+^*$.

Además, $\omega(u) \leq N_u(u) = 1$. Por lo tanto, $\omega \in B_+^*$, $\omega(u) \leq 1$ y $\omega(a) = N_u(a)$. Es decir,

$$dN_u(a) \subset \{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\}.$$

Para ver la otra contención, sea $\omega \in \{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\}$, entonces, para $b \in B$ y $\lambda \geq 0$ tales que $\lambda u \geq b$, se cumple que $\lambda u - b \geq 0$. Así, $\omega(\lambda u - b) \geq 0$, es decir, $\lambda\omega(u) \geq \omega(b)$.

De está manera, usando que $1 \geq \omega(u)$, tenemos que $\lambda \geq \lambda\omega(u) \geq \omega(b)$ para todo $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda u \geq b$ y por la definición de N_u, concluimos que $\omega(b) \leq N_u(b)$.

En consecuencia,

$$\{\omega \in B_+^* : \omega(u) \leq 1, \omega(a) = N_u(a)\} \subset dN_u(a).$$

□

Proposición 35. *Sea $u \in D(H) \cap intB_+$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *Para cada $\alpha > 0$, suficientemente pequeña, si $a \in D(H)$ y $(I + \alpha H)a \in B_+$, entonces $a \in B_+$.*
2) *Para algún $\gamma \geq \hat{N}_u(-Hu)$, el operador $(H + \gamma I)$ es N_u-disipativo.*
3) *Si $a \in D(H) \cap B_+$ y $\omega \in B_+^*$ es tal que $\omega(a) = 0$, entonces $\omega(Ha) \leq 0$.*

Demostración. Primero veamos que 1) $\Rightarrow$ 2). Sea $\gamma \geq \hat{N}_u(-Hu)$, entonces por definición de $\hat{N}_u$, tenemos que $-Hu \leq \gamma u$, equivalentemente, $(I + \alpha H)u \geq (1 - \alpha\gamma)u$ para cada $\alpha > 0$.

De aquí que para toda $\lambda \geq 0$ y $\alpha \geq 0$ suficientemente pequeña, se cumple que

$$\lambda u \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u \tag{8}$$

Por otro lado, sea $a \in D(H)$, entonces

$$N_u\Big((I + \alpha H)a\Big) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 \colon (I + \alpha H)a \leq \lambda u\}$$

y por la desigualdad (8) tenemos que

$$\{\lambda \geq 0 \colon (I + \alpha H)a \ \leq \lambda u\} \subset \{\lambda \geq 0 \colon (I + \alpha H)a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} N_u\Big((I + \alpha H)a\Big) &\geq \text{ínf}\{\lambda \geq 0 \colon (I + \alpha H)a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u\} \\ &\geq \text{ínf}\{\lambda \geq 0 \colon a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}u\}. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue del hecho de que $(I + \alpha H)a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}(I + \alpha H)u$ implica que

$$(I + \alpha H)\Big(\lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}u - a\Big) \geq 0$$

y por la hipótesis (1) esto a su vez implica que $\lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}u - a \geq 0$, equivalentemente, $a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}u$.

Entonces,

$$N_u\Big((I + \alpha H)a\Big) \geq \text{ínf}\{\lambda \geq 0 \colon a \leq \lambda(1 - \alpha\gamma)^{-1}u\} = N_u\Big((1 - \alpha\gamma)a\Big) = (1 - \alpha\gamma)N_u(a).$$

Por la proposición 22, concluimos que $(H + \gamma I)$ es N_u-disipativo.

Ahora bien, la implicación 2) $\Rightarrow$ 1), se sigue del hecho de que si $(I + \alpha H)a \in B_+$, entonces por la hipótesis y la definición de N_u,

$$0 = N_u(-(I + \alpha H)a) \geq (1 - \alpha\gamma)N_u(-a)$$

con $1 - \alpha\gamma > 0$, por la proposición 22. Así, tenemos que $-a \leq 0$, es decir, $a \in B_+$.

Para ver que 2) $\Rightarrow$ 3) usamos el lema 34. Por lo que si $a \in D(H) \cap B_+$ y $\omega \in B_+^*$ con $\omega(a) = 0$, entonces $\omega(u) \geq 0$ y también se cumple que $\text{ínf}\{\lambda \geq 0 \colon \lambda u \geq -a\} = N_u(-a) = 0$.

Basta considerar el caso en que $\omega \neq 0$ y por el lema 31, podemos suponer que $\omega(u) > 0$, entonces por el lema 34 tenemos que

$$\frac{\omega}{\omega(u)} \in dN_u(-a)$$

Por lo tanto, en virtud del teorema 20, concluimos que

$$\frac{\omega}{\omega(u)}((H + \gamma I)(-a)) \geq 0.$$

De aquí que $\omega((H + \gamma I)(-a)) \geq 0$, luego $\omega(-Ha) \geq \gamma\omega(a)$=0. Se sigue que, $\omega(Ha) \leq 0$.

Finalmente, para establecer que 3) $\Rightarrow$ 2), tomamos $\gamma \geq \hat{N}_u(-Hu)$, de aquí que $Hu \geq -\gamma u$. Por lo que si $a \in D(H), \omega \in dN_u(a)\backslash\{0\}$, entonces podemos suponer que $\omega(u) > 0$ en virtud del lema 31.

Luego, por el lema 34,

$$b := \frac{N_u(a)u}{\omega(u)} - a \in B_+,$$

pues $a \leq N_u(a)u \leq (1/\omega(u))N_u(a)u$, ya que $\omega(u) \leq 1$ en virtud del lema 34. En consecuencia,

$$\frac{N_u(a)u}{\omega(u)} - a \geq 0.$$

Además, $\omega \in B_+^*$ y $\omega(b) = N_u(a) - \omega(a) = 0$, por ser ω elemento de la subdiferencial de N_u.

Por lo tanto, por la hipótesis 3) deducimos que $0 \geq \omega(Hb)$ y

$$\omega(Hb) = \omega\left(\frac{N_u(a)Hu}{\omega(u)} - Ha\right) = \frac{N_u(a)}{\omega(u)}\omega(Hu) - \omega(Ha) \geq -\gamma N_u(a) - \omega(Ha) = -\omega((H + \gamma I)a).$$

Con lo cual $\omega((H + \gamma I)a) \geq 0$. Y por el teorema 20, tenemos que $(H + \gamma I)$ es un operador N_u-disipativo. □

La condición (1) de la proposición 35 establece la positividad del operador $(I + \alpha H)^{-1}$, cuando este exista. Mientras que la condición (3), se conoce como la propiedad de que H tiene elementos negativos fuera de la diagonal. Más adelante, en el ejemplo 2, justificaremos este nombre.

Por otro lado, si N es la media-norma canónica, entonces dado H un operador N-disipativo este tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal ya que por el lema 29, obtenemos

$$dN(a) = \{\omega \in B_+^* \cap B_1^* : \omega(a) = N(a)\}.$$

Así, dada $a \in D(H) \cap B_+, \omega \in B_+^* \cap B_1^*$ con $\omega(a) = 0$. Tenemos que $\omega \in dN(-a)$ pues $N(-a) = 0$, por ser $-a \leq 0$ y por la N-disipatividad, concluimos que $\omega(-Ha) \geq 0$.

Cabe mencionar que estas afirmaciones carecen de sentido, si $D(H) \cap B_+ = \emptyset$, lo cual se evita al suponer que int$B_+ \neq \emptyset$, pues de esta manera, $D(H)$ contiene elementos positivos por ser un subconjunto denso.

Corolario 36. *Para cada $u \in D(H) \cap intB_+$, son equivalentes:*

1) *H es N_u-disipativo.*
2) *H es $\|\cdot\|_u$-disipativo y tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.*
3) *$Hu \geq 0$ y H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.*

Demostración. Primero supongamos que $Hu \geq 0$ y que H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal. Entonces por la definición de $\hat{N}_u$, se tiene que $\hat{N}_u(-Hu) \leq 0$. Así, por la proposición 35, H es N_u-dispativo. Esto demuestra que 3) implica 1).

Veamos ahora que que 1) implica 2). Como H es N_u-disipativo por hipótesis, consideremos $a \in D(H) \cap B_+$ y $\omega \in B_+$, tales que $\omega(u) > 0$ con $\omega(a) = 0$. Entonces, por el lema 34 y dado que $N_u(-a) = 0$, tenemos que

$$\frac{\omega}{\omega(u)} \in dN_u(-a).$$

De esta manera,

$$\frac{\omega}{\omega(u)}(-Ha) \geq 0.$$

Luego, $\omega(-Ha) \geq 0$, es decir, $\omega(Ha) \leq 0$.

En el caso en que $\omega(u) = 0$, entonces $\omega \in dN_u(-a)$ y $\omega(-Ha) \geq 0$. Con lo cual $\omega(Ha) \leq 0$. Esto demuestra que H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Para establecer que H es $\|\cdot\|_u$-disipativo, consideramos $a \in D(H)$ y $\alpha > 0$. Entonces se tiene que

$$\|(I + \alpha H)a\|_u = \text{máx}\Big\{N_u((I + \alpha H)a), N_u(-(I + \alpha H)a)\Big\}.$$

Por el teorema 20, concluimos que $N_u((I+\alpha H)a) \geq N_u(a)$ y $N_u(-(I+\alpha H)a)) = N_u((I+\alpha H)(-a)) \geq N_u(-a)$.

Así,

$$\text{máx}\Big\{N_u((I+\alpha H)a), N_u(-(I+\alpha H)a)\Big\} \geq \text{máx}\Big\{N_u(a), N_u(-a)\Big\}.$$

De aquí que para toda $a \in D(H)$ y para toda $\alpha > 0$, se cumple que

$$\|(I+\alpha H)a\|_u \geq \|a\|_u.$$

Es decir, el operador H es $\|\cdot\|_u$-disipativo .

Por último, si suponemos la condición 2) entonces el operador H es $\|\cdot\|_u$-disipativo y concluimos que $\|(I+\alpha H)u\|_u \geq \|u\|_u = 1$, para cada $\alpha > 0$.

De esta manera, para toda $\alpha > 0$, se cumple que $(u + \alpha Hu) \in [-u, u]$, por lo cual $-u \leq u + \alpha Hu \leq u$, en consecuencia $-2u \leq \alpha Hu$.

Consecuentemente $-2\alpha^{-1}u \leq Hu$, para toda $\alpha > 0$. Por lo tanto, $Hu \geq 0$, al hacer $\alpha \to \infty$, pues el cono positivo B_+ es cerrado por definición. Esto demuestra que 2) implica 3). □

Similarmente, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 37. *Para cada $u \in D(H) \cap intB_+$, son equivalentes:*

1) H es $\hat{N}_u$-disipativo.
2) H es $\|\cdot\|_u$-disipativo y $Hu \leq 0$.
3) H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal y $Hu = 0$.

2.3. Ejemplos de operadores disipativos. El primer ejemplo de operadores disipativos a tratar hace referencia al espacio $\mathbb{R}^n$, con $\{e_j\}_{j=1}^n$ su base canónica y los funcionales de Riesz dados por $\omega_j(\cdot) := \langle e_j, \cdot\rangle$, con $j = 1, \dots, n$, forman la base del espacio dual. El inciso (I) de este ejemplo justifica el nombre dado a la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Ejemplo 2. Sean $B = \mathbb{R}^n$, $B_+ = \mathbb{R}^n_+$ el cono positivo de los vectores con entradas no negativas y consideremos $H = (H_{i,j})$ una matriz de tamaño n x n con entradas reales, luego $D(H) = \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $u = (u_i) \in \text{int}B_+$, se tiene que $u_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ y además se cumplen las siguientes propiedades:

I) La N_u-disipatividad del operador H es equivalente a que $(Hu)_i \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $H_{i,j} \leq 0$ para cada $i \neq j$.

Demostración. Por el Corolario 36, tenemos que si $u \in \text{int}B_+ \cap D(H)$, entonces H es N_u-disipativo si y sólo si $Hu \geq 0$ y H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Primero supongamos que H es N_u-disipativo, entonces $(Hu)_i \geq 0$, para toda $i = 1, \dots, n$. Además, si $a \in D(H) \cap B_+$, con $\omega \in B_+^*$ tal que $\omega(a) = 0$, entonces $\omega(Ha) \leq 0$.

Ahora bien, como $H_{i,j} = \langle e_i, He_j\rangle$ con $i, j = 1, \dots, n$ y usando que $\omega_i(\cdot) \in B_+^*$ es tal que $\omega_i(e_j) = 0$, cuando $i \neq j$. Obtenemos que $\omega_i(He_j) \leq 0$, es decir, $H_{i,j} \leq 0$, para cada $i \neq j$. Esto demuestra que la N_u-disipatividad de H implica que $Hu \geq 0$ y $H_{ij} \leq 0$ para cada $i \neq j$.

Recíprocamente si $Hu \geq 0$ y $H_{ij} \leq 0$ con $i \neq j$, entonces dados $a \in B_+$ y $\omega \in B_+^*$ tales que $\omega(a) = 0$.

Tenemos que $a = \sum_{j=1}^n a_j e_j$ con $a_j \geq 0$ y

$$\omega_i(Ha) = \langle e_i, \sum_{j=1}^n a_j He_j\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle e_i, He_j\rangle = \sum_{j=1}^n a_j H_{i,j}.$$

Por otro lado, como $\omega \in B_+^*$, entonces $\omega(\cdot) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i(\cdot)$. Luego, se cumple que

$$0 \leq \omega(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \lambda_i$$

para toda $i = j$. Además,

$$0 = \omega(a) \Leftrightarrow \lambda_i a_i = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Ya que $\omega_i(a) = a_i$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Finalmente,

$$\omega(Ha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i(Ha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j H_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i a_i H_{i,i} + \sum_{i \neq j} \lambda_i a_j H_{i,j} \right) \leq 0.$$

Por lo tanto, H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

De está manera, tenemos por el corolario 36 que H es N_u-disipativo. □

II) Para $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, se cumple que H es N_u-disipativo si y sólo si

$$H_{i,j} \leq 0, \text{ con } i \neq j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} H_{i,j} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Como $u = \sum_{j=1}^{n} e_j$, obtenemos que $Hu = \sum_{j=1}^{n} He_j$. Luego,

$$(Hu)_i = \langle e_i, Hu \rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} He_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, He_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} H_{i,j}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

De aquí que H es N_u-disipativo si y sólo si $\sum_{j=1}^{n} H_{i,j} \geq 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $H_{i,j} \leq 0$ con $i \neq j$. □

III) Para $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que H es $\hat{N}_u$-disipativo si y sólo si

$$H_{i,j} \leq 0, \text{ con } i \neq j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} H_{i,j} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Por Corolario 37, sabemos que H es $\hat{N}_u$-disipativo si y sólo si $Hu = 0$ y H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal. Por lo que si H es $\hat{N}_u$-disipativo,

$$0 = (Hu)_i = \langle e_i, Hu \rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} He_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, He_j, \rangle = \sum_{j=1}^{n} H_{i,j}$$

para toda $i = 1, \ldots n$.

Además, para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $\omega_i(He_j) \leq 0$ pues $\omega_i(\cdot) \in B_+^*$ y $\omega_i(e_j) = 0$ cuando $i \neq j$. Es decir, $H_{i,j} \leq 0$ cuando $i \neq j$.

Recíprocamente, si suponemos que $H_{i,j} \leq 0$ con $i \neq j$. Entonces, para cualquier $\omega \in B_+^*$ y $a \in B_+$, tales que $\omega(a) = 0$ tenemos por la demostración de (I) que

$$\omega(Ha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i(Ha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j H_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i a_i H_{i,i} + \sum_{i \neq j} \lambda_i a_j H_{i,j} \right) \leq 0$$

Con lo cual, concluimos que H tiene la propiedad de tener elementos negativos fuera de la diagonal.

Además,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} H_{i,j} = (Hu)_i$$

para toda $i = 1, \ldots, n$, es decir, $Hu = 0$. Por lo tanto, H es $\hat{N}_u$-disipativo. □

IV) Cuando $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que la norma $\|\cdot\|_u$ coincide con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. Primero, observemos que si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces por la proposición 33, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|a\|_u &= \inf \{\lambda \geq 0 : a \in [-\lambda u, \lambda u]\} \\ &= \inf \{\lambda \geq 0 : -\lambda u \leq a \leq \lambda u\} \\ &= \inf \{\lambda \geq 0 : a + \lambda u \geq 0 \text{ y } \lambda u - a \geq 0\} \end{aligned}$$

Y como $\lambda u = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$, tenemos que

$$\lambda u - a \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - a_i \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq a_i \quad \text{y} \quad a + \lambda u \geq 0 \Leftrightarrow a_i + \lambda \geq 0 \Leftrightarrow a_i \geq -\lambda$$

para toda $i = 1, \ldots, n$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|a\|_u &= \inf\{\lambda \geq 0 : |a_i| \leq \lambda, \forall i = 1, \ldots, n\} \\ &= \max\{|a_i| : i = 1, \ldots, n\} \\ &= \|a\|_\infty \end{aligned}$$

□

v) Sea S una matriz sub-estocástica de tamaño $n \times n$ con entradas reales, es decir, una matriz S tal que $S_{i,j} \geq 0$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^n S_{i,j} \leq 1$. Si $c \geq n$, entonces la matriz $H = cI + S$ es tal que para $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ el operador definido por H es $\|\cdot\|_u$-disipativo.

Demostración. Primero, se cumple que

$$H_{i,i} = c + S_{i,i} \quad \text{y} \quad H_{i,j} = S_{i,j} \text{ con } i \neq j.$$

Ahora bien, dada $a \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $\omega \in d\|a\|_u$, si y sólo si $\omega \in d\|a\|_\infty$. Además $\omega \in d\|a\|_\infty$ si y sólo si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ es tal que $0 \leq \omega_i \leq 1$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $\omega(a) = \|a\|_\infty$.

En consecuencia,

$$\omega(Ha) = c\omega(a) + \omega(Sa) = c\|a\|_\infty + \omega(Sa)$$

pero

$$\omega(Sa) = \sum_{i,j} \omega_i S_{i,j} a_j = \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) a_j \geq -\sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) |a_j|.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \omega(Ha) &\geq c\|a\|_\infty - \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) |a_j| \\ &\geq c\|a\|_\infty - \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) \|a\|_\infty \\ &= \left(c - \sum_j \left(\sum_i \omega_i S_{i,j} \right) \right) \|a\|_\infty \\ &\geq (c - n)\|a\|_\infty \geq 0. \end{aligned}$$

Ya que, $0 \leq \sum_j \sum_i \omega_i S_{i,j} \leq \sum_j \sum_i S_{i,j} \leq \sum_i 1 = n$.

Finalmente, por el teorema 20, concluimos que H es $\|\cdot\|_\infty$-disipativo. □

Definición 38. Un espacio vectorial normado es *estrictamente convexo* si para cualesquiera vectores a, b distintos con $\|a\| = \|b\| = 1$, se cumple que $\|ta + (1-t)b\| < 1$, para toda $t \in (0, 1)$.

Ejemplo 3. Sea B un espacio de Hilbert real. Entonces el subdiferencial de la norma en cada $a \in B$ con $\|a\| = 1$, consta de a como único elemento. Además, H es $\|\cdot\|$-disipativo si y sólo si $\langle a, Ha \rangle \geq 0$ para cada $a \in D(H)$.

Demostración. Primero observamos que

$$d\|a\| = \left\{ \omega \in B_1^* : \omega(a) = \|a\| \right\}$$

Pues $\omega \in d\|a\|$ si y sólo si $\omega \in B^*$ tal que $\omega(a) = \|a\|$ y $\omega(b) \leq \|b\|$ para todo $b \in B$. De está manera, $\|\omega\| \leq 1$.

Recíprocamente, si $\|\omega\| \leq 1$, entonces $\omega(b) \leq \|\omega\| \|b\| \leq \|b\|$ para toda $b \in B$. Además, dado que $\|a\| = 1$, tenemos que si $\omega \in d\|a\|$, entonces $\|\omega\| = 1$.

Por ser B espacio de Hilbert, B^* es isomorfo a B y es estrictamente convexo. Por lo cual dados $\omega, \eta \in d\|a\|$ con $\omega \neq \eta$ tenemos que $\|\omega\| = \|\eta\| = 1$ y $\omega(a) = \eta(a) = 1$.

Así para cada $\alpha \in (0,1)$ se cumple que

$$1 > \|\alpha\omega + (1-\alpha)\eta\| \geq |\alpha\omega(a) + (1-\alpha)\eta(a)| = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

Lo cual es una contradicción. De aquí que existe un único elemento en $d\|a\|$. Como, $\|\omega\| = \|a\| = 1$ y $\omega(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|^2 = \|a\|$. Entonces, el único elemento de $d\|a\|$ es $\omega(x) = \langle a, x\rangle$. Finalmente, H es $\|\cdot\|$-disipativo si y sólo si $\omega(Ha) \geq 0$ para cada $\omega \in d\|a\|$ y $a \in D(H)$. Por lo anterior, esto es equivalente a tener que $\langle a, Ha\rangle \geq 0$ para cada $a \in D(H)$. □

3. Los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y Hille-Yosida para semigrupos positivos

A continuación, damos las versiones de los teoremas de Feller-Miyadera-Phillips y de Hille-Yosida para C_o-semigrupos positivos.

Para esto, consideramos $H\colon D(H) \subset B \to B$ un operador lineal densamente definido, el cual denota al generador infinitesimal del C_0-semigrupo $S = \{S_t\}_{t\geq 0}$ en B, y notamos que si $a \in B_+$ y definimos

$$a_\varepsilon := \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon S_t a\, dt.$$

Entonces $a_\varepsilon \in D(H) \cap B_+$ y además, $a_\varepsilon \to a$ según la norma en B conforme $\varepsilon \to 0$. Por lo tanto, $D(H) \cap B_+$ es norma-denso en B_+.

Luego, siendo H el generador infinitesimal del C_0-semigrupo, entonces bajo las hipótesis de los teoremas abajo enunciados, el conjunto resolvente de $-H$,

$$\rho(-H) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \colon (\lambda I - (-H))^{-1} \text{ es un operador lineal acotado en } B\},$$

contiene al intervalo $(0,\infty)$. De aquí que $I + \alpha H$, con $\alpha > 0$, es invertible y por el teorema 5.3 de 1.5 en [2] sabemos que para cada $n \geq 1$,

$$(I + \alpha H)^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} S_{\alpha t}\, dt. \tag{9}$$

Con lo cual, $(I + \alpha H)^{-1}$ es positivo, es decir, las resolventes son positivas.

Recíprocamente, si las resolventes son positivas, entonces por la igualdad:

$$S_t a = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n} H\right)^{-n} a.$$

Concluimos que el semigrupo S generado por H es positivo.

Teorema 39. *Sea $(B, B_+, \|\cdot\|_B)$ un espacio de Banach ordenado para el cual la norma es monótona y la norma de operadores en $\mathcal{L}(B,B)$ es positivamente alcanzada. Además, consideremos N la media-norma canónica en B, junto con $M, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $M \geq 1, \beta > 0$ y $\beta\gamma < 1$. Entonces son equivalentes:*

1) *H es el generador de un C_o-semigrupo positivo S con $\|S_t\| \leq Me^{\gamma t}$, para toda $t > 0$.*
2) *H es un operador lineal densamente definido y cerrado según la norma tal que cumple las condiciones del rango y de disipatividad, dadas por:*
    i) *$R(I + \beta H) = B$.*
    ii) *$N((I + \alpha H)^n a) \geq (1 - \alpha\gamma)^n M^{-1} N(a)$.*

para cada $a \in D(H^n)$, para toda $n \geq 1$ y para cualquier $\alpha \in (0, \beta]$.

Demostración. Primero supongamos la condición 1) así las propiedades de ser H densamente definido, cerrado según la norma y la condición del rango, $R(I + \beta H) = B$, se siguen directo del teorema de Feller-Miyadera-Phillips estándar, véase teorema 14. Por otro lado, usando que S es positivo, obtenemos que

$$\begin{aligned} N(S_t a) &= \inf\{\|b\| : b \geq S_t a\} \\ &\leq \inf\{\|S_t c\| : c \geq a\} \\ &\leq Me^{\gamma t} \inf\{\|c\| : c \geq a\} \\ &= Me^{\gamma t} N(a). \end{aligned}$$

Donde la primer desigualdad se da al tomar $b = S_t c$ con $c \geq a$, pues de está manera $b \geq S_t a$.

Sea $0 < \alpha \leq \beta$, en consecuencia para cada $a \in D(H)$, al utilizar (9) obtenemos para cada $n \geq 1$,

$$(I + \alpha H)^{-n} a = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} S_{\alpha t} a \, dt.$$

Luego, utilizando la sublinealidad y continuidad de la media-norma canónica N, tenemos

$$\begin{aligned} N\left((I + \alpha H)^{-n} a\right) &\leq \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} N(S_{\alpha t} a) \, dt \\ &\leq M(1 - \alpha\gamma)^{-n} N(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N\left((I + \alpha H)^n a\right) \geq \frac{(1 - \alpha\gamma)^n N(a)}{M}.$$

Ahora bien, partiendo de la condición 2) si $(I + \beta H)a = 0$, entonces

$$0 = N(\pm(I + \beta H)a) \geq \frac{(1 - \beta\gamma) N(\pm a)}{M} \geq 0.$$

Luego, $N(\pm a) = 0$. De aquí que $a = 0$, ya que la norma es monótona por hipótesis y esto implica que el cono convexo positivo B_+ es propio.

De aquí que, $(I + \beta H)$ es un operador lineal inyectivo y suprayectivo por la hipótesis 2) inciso I), por lo tanto es un operador invertible.

Además, dada $a \in B_+$ implica que $N(-a) = 0$ y al usar el inciso II) con $(I + \beta H)^n((I + \beta H)^{-n}(-a)) = -a$, tenemos que

$$0 = N(-a) \geq \frac{(1 - \beta\gamma)^n N(-(I + \beta H)^{-n} a)}{M} \geq 0.$$

Por lo cual,$-(I + \beta H)^{-n} a \leq 0$, es decir, $(I + \beta H)^{-n} a \in B_+$. Es decir, $(I + \beta H)^{-n}$ es un operador positivo para cada $n \geq 1$.

Ahora bien, usando que $a \in B_+$ y la norma, $\|\cdot\|_B$, es monótona en B, concluimos que

$$\begin{aligned} \|(I + \beta H)^{-n} a\| &= N((I + \beta H)^{-n} a) \\ &\leq M(1 - \beta\gamma)^{-n} N(a) \\ &= M(1 - \beta\gamma)^{-n} \|a\|. \end{aligned}$$

Aquí estamos utilizando la hipótesis II) y la equivalencia dada por el teorema 30

Por lo tanto, por ser la norma de operadores positivamente alcanzada (ver definición 8) tenemos

$$\|(I + \beta H)^{-n}\| \leq M(1 - \beta\gamma)^{-n}.$$

Por último, para establecer que $R(I + \alpha H) = B$ y que las resolventes $(I + \alpha H)^{-n}$ existen, son positivas y satisfacen

$$\|(I + \alpha H)^{-n}\| \leq M(1 - \alpha\gamma)^{-n}$$

para toda $\alpha \in (0, \beta]$, usamos un argumento de perturbación. Basta demostrar que existe $\delta > 0$, tal que la condición del rango $R(I + \alpha H) = B$ se cumple para $\left|\beta - \alpha\right| < \delta$, ya que el intervalo $(0, \beta]$ puede ser cubierto por una cantidad finita de intervalos de longitud menor o igual a δ.

Primero, observamos que el operador $\beta H(I + \beta H)^{-1}$ es acotado, para cada $\beta > 0$. Como la siguiente identidad se cumple:

$$\beta H(I + \beta H)^{-1} = \left(-I + (I + \beta H)\right)\left(I + \beta H\right)^{-1} = -(I + \beta H)^{-1} + I.$$

Para cada $b \in B$,

$$\left\|\beta H(I + \beta H)^{-1} b\right\| = \left\|I - (I + \beta H)^{-1} b\right\| \leq \|b\| + M(1 - \beta\gamma)^{-1}\|b\| = \left(1 + M(1 - \beta\gamma)^{-1}\right)\|b\|.$$

Consecuentemente, el operador $H(I + \beta H)^{-1}$ es acotado, con

$$\|H(I + \beta H)^{-1}\| \leq \beta^{-1}\left(1 + M(1 - \beta\gamma)^{-1}\right)$$

Por otro lado, para $\alpha \in (0,\beta]$, se tiene que

$$\begin{aligned} I+\alpha H &= I+\beta H-\beta H+\alpha H \\ &= I+\beta H+(\alpha-\beta)H \\ &= \left(I+(\alpha-\beta)H\left(I+\beta H\right)^{-1}\right)\left(I+\beta H\right). \end{aligned}$$

De aquí que $(I+\alpha H)$ es invertible si y sólo si $\left(I+(\alpha-\beta)H\left(I+\beta H\right)^{-1}\right)$ es invertible. Ahora bien, tenemos que el inverso de un operador de la forma $(I+tA)$ tiene la forma

$$(I+tA)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-tA)^n,$$

y la serie converge si $\|tA\|<1$, es decir, si $\|A\|<1/t$, lo cual es equivalente a tener $t<\|A\|^{-1}$.

Entonces, el operador

$$\left(I+(\alpha-\beta)H\left(I+\beta H\right)^{-1}\right)$$

es invertible si se satisface que

$$\left|\beta-\alpha\right|<\beta\left(1+M(1-\beta\gamma)^{-1}\right)^{-1}<\left\|H(I+\beta H)^{-1}\right\|^{-1}.$$

Con lo cual basta definir $\delta=\beta\left(1+M(1-\beta\gamma)^{-1}\right)^{-1}$.

Esto demuestra que existe el operador $(I+\alpha H)^{-1}$ y que se cumple la condición, $R(I+\alpha H)=B$. Además, se tiene que $(I+\alpha H)^{-n}$ es positivo para cada $n\geq 1$, ya que si $a\in B_+$, entonces

$$0=N(-a)\geq(1-\alpha\gamma)^nM^{-1}N(-(I+\alpha H)^{-n}a)\geq 0.$$

De esta manera, $-(I+\alpha H)^{-n}a\leq 0$, es decir, $(I+\alpha H)^{-n}a\in B_+$.

Más aún, para cada $a\in B_+$, por ser la norma monótona y el inciso II) tenemos

$$\begin{aligned} \|(I+\alpha H)^{-n}a\| &= N((I+\alpha H)^{-n}a) \\ &\leq M(1-\alpha\gamma)^{-n}N(a) \\ &= M(1-\alpha\gamma)^{-n}\|a\|. \end{aligned}$$

Con lo cual, como la norma de operadores es positivamente alcanzada, obtenemos

$$\|(I+\alpha H)^{-n}\|\leq M(1-\alpha\gamma)^{-n},$$

para cada $\alpha\in(0,\beta]$.

Por lo tanto, H genera un C_o-semigrupo S tal que $\|S_t\|\leq Me^{\gamma t}$, en virtud del teorema 14 de Feller-Miyadera-Phillips, con S positivo pues las resolventes $(I+\alpha H)^{-n}$ son positivas para toda $n\geq 1$. □

Observación 8. Ninguna hipótesis sobre el espacio de Banach ordenado, $(B,B_+,\|\cdot\|_B)$, se utiliza en la implicación 1) $\Rightarrow$ 2).

A partir del teorema 39, obtenemos una consecuencia inmediata para los semigrupos de contracciones que es análoga al teorema 15 de Hille-Yosida.

Corolario 40. *Sea $(B,B_+,\|\cdot\|_B)$ un espacio de Banach ordenado para el cual la norma es monótona y la norma de operadores en $\mathcal{L}(B,B)$ es positiva alcanzada. Entonces, son equivalentes:*

1) *H genera un C_o-semigrupo positivo de contracciones.*
2) *H es (norma cerrado) densamente definido según la norma, N-disipativo y*

$$R(I+\alpha H)=B$$

para alguna $\alpha>0$.

Demostración. Por el teorema 39, basta tomar $M = 1$ y $\gamma = 0$. Así la N-disipatividad es equivalente a:

$$N((I + \alpha H)a) \geq N(a) \quad , \quad a \in D(H).$$

Por lo que iterando, concluimos que

$$N((I + \alpha H)^n a) \geq N(a) \quad , \quad a \in D(H^n), n \geq 1.$$

Con lo cual, tenemos la equivalencia de las condiciones 1) y 2). □

Referencias

[1] Charles J. K. Batty and Derek W. Robinson, *Positive One-Parameter Semigroups on Ordered Banach Spaces*, Acta Applicandae Mathematicae 1984, vol. 1, pages: 221-296.

[2] A Pazy, *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*, Springer 1983, vol. 44, series: Applied Mathematical Sciences.

[3] Ola Bratteli and Derek W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1: C^*- and W^*-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*, Springer 2002 second edition.

[4] Einar Hill and Ralph S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Colloqium Publications 1957, vol. 31.

[5] Robert R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlarg, 1st edition, 1989

Dirección del autor:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: alfreduamizt@gmail.com