Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No.1 , Vol. VIII, Julio de 2017, 29-43

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES, SERIES Y LA PARADOJA DE ZENÓN

EVGUENI GORDIENKO

Resumen. Repasamos algunas nociones básicas relacionadas con las sucesiones de números reales y sucesiones sumables (series convergentes). Se presentan varias definiciones informales, ejemplos y argumentos convincentes. Mostramos cómo las sumas que involucran un número infinito de sumandos sirven en aplicaciones, particularmente para resolver la famosa paradoja de Zenón, basada en la creencia de que tales sumas no pueden ser números finitos. También ilustramos algunas relaciones entre ciertas series convergentes y los prominentes números reales e y π.

1. Números reales y su representación geométrica

Se asume que el conjunto (sistema) $\mathbb{R}$ de números reales y sus propiedades básicas son familiares para el lector, así como el conocimiento (por lo menos intuitivo) de la noción geométrica de línea recta.

Como se muestra en cursos avanzados de geometría, hay una correspondencia uno a uno entre los números reales x en $\mathbb{R}$ y los puntos en una línea recta fija (a veces llamada "recta real").
De esta manera, cada número real x es representado por el punto (admitiendo la misma notación) x en la recta real. (Véase figura 1).

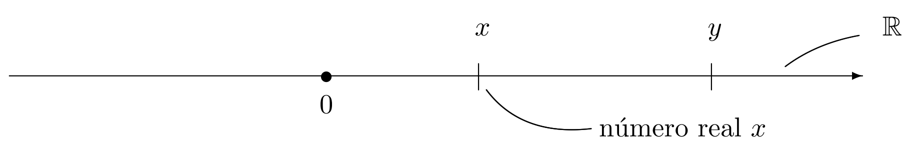

Figura 1. Recta real.

Las cuatro operaciones aritméticas: adición, multiplicación, sustracción y división están definidas para los números reales, denotados por $\mathbb{R}$.
Cualquier operación, digamos, la adición, es una regla que asigna a cada par de números reales x, y el número z, denotado por $z = x + y$. Por ejemplo, 3.5+2=5.5, y 1.7+(-1.7)=1.7-1.7=0.
El número "0"(cero) es especial para la adición en el sentido de que para cualquier número real x tenemos que $x + 0 = 0 + x = x$. Además $x + (-x) = x - x = 0$.
El número "1"(uno) juega un rol específico en la multiplicación: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ y $x \cdot 1/x = x/x = 1$ para todo número real $x \neq 0$.

En la Figura 1, todos los números en el lado derecho del 0 son llamados **positivos** y todos los números en el lado izquierdo son negativos. Tenemos $y > x$ si y sólo si

2010 *Mathematics Subject Classification.* 97130, 01-06.
Palabras clave. Sucesiones, series, números reales, Zenón .

la diferencia $y - x$ es un número positivo. En este caso, el punto y está ubicado a la derecha de x (Figura 1).
Sean x y y números reales cualesquiera. La **distancia** $d(x, y)$ entre x y y es la longitud del segmento de recta que conecta a los puntos x y y.

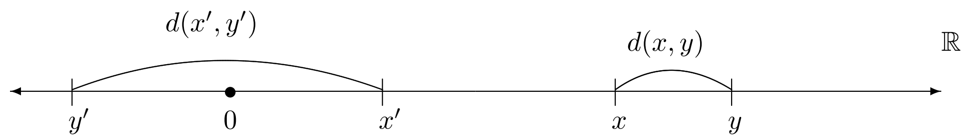

Figura 2. Distancia entre puntos.

Es claro que $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, x) = 0$.

Definimos el **valor absoluto** $|x|$ de un número x como x si $x \geq 0$ y como $-x$ si $x < 0$. Por ejemplo, si en la Figura 2 $x = 3$, $y' = -1$, entonces $|x| = |3| = 3$ y $|y'| = |-1| = -(-1) = 1$.
La prueba simple de que $d(x, y) = |x - y| \equiv |y - x|$ se deja al lector. Por ejemplo, escogiendo (Figura 2) $x = 3$, $y = 4$ obtenemos que $d(x, y) = |y - x| = |4 - 3| = |1| = 1$, y tomando $x' = 1$, $y' = -1$, se tiene $d(x', y') = |x' - y'| = |1 - (-1)| = |1 + 1| = |2| = 2$ (igual a la suma de las longitudes de los segmentos que conectan a y' con 0 y 0 con x'). Nótese que para cualesquiera números $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

La importante noción de *ε-vecindad* de un punto (un número) x nos permite considerar el conjunto de puntos (números) localizados en "la proximidad directa"al punto x.
Dado un número real x y un número positivo $\varepsilon > 0$, la **$\boldsymbol{\varepsilon}$-vecindad de $\boldsymbol{x}$** es el conjunto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ compuesto de todos los números y tales que $d(x, y) < \varepsilon$, es decir, la vecindad $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ incluye a todos los puntos y para los que la distancia a x es menor que ε.
Alternativamente, podemos especificar la ε-vecindad $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ como la colección de todos los puntos y tales que $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$.

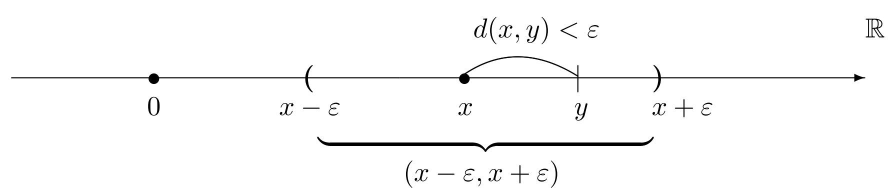

Figura 3. *ε-vecindad.*

Debemos recalcar que para un x dado y $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ la ε-vecindad $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ es una parte propia (más pequeña) de la ε_1-vecindad $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ como se muestra en la Figura 4.

Si $\varepsilon > 0$ es "pequeña"y un número y está en la ε-vecindad $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, entonces la distancia $d(x, y)$ es menor que ε, eso da significado al concepto de "cercanía"de y a x.
Por ejemplo, sea $x = 1$, $\varepsilon = 0.001$. Entonces, para cada y que pertenece a $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) =$

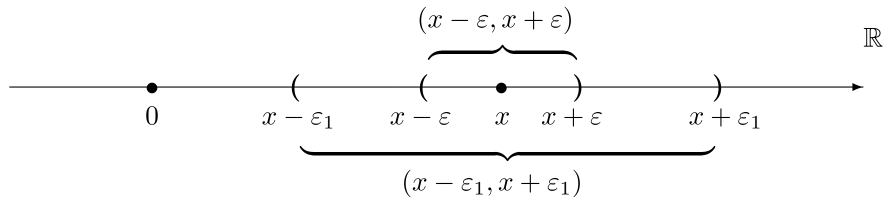

FIGURA 4. Comparación de ε-*vecindades*.

(1-0.001,1+0.001)=(0.999,1.001) se tiene que $d(y,1) < 0.001$.

El número $y = 0.9995$ está en la ε-vecindad $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ con $\varepsilon = 0.001$, pero $y' = 0.998$ no está (porque $d(y',1) = |1-0.998| = 0.002 > \varepsilon$).

2. Sucesiones de números reales. Sucesiones convergentes y sus límites

Ya hemos señalado un rol especial del número "1"(uno) en el sistema de números reales. Ahora veremos a este número como el primer "número natural". El segundo número natural "2"puede ser expresado en términos del "1"como $1+1=2$. Luego, $3 = 2+1$ y continuando de esta manera obtenemos el conjunto infinito de **números naturales** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
Usualmente denotaremos a un elemento de este conjunto por n o N. Por ejemplo, $n = 125394$ es un número natural, pero $x = 500.001$ no lo es.

Una **sucesión** (de números reales) es un conjunto $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\rangle$ de números reales numerados por los naturales $1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$. Es conveniente utilizar la notación abreviada $\langle x_n\rangle$ o $\langle x_n, n = 1, 2, \ldots\rangle$ para la sucesión $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\rangle$.
Así, podemos hablar del primer término x_1 de la sucesión $\langle x_n\rangle$, después del segundo término x_2, y más generalmente, del n-ésimo termino x_n de la sucesión $\langle x_n\rangle$.

Consideremos algunos ejemplos de sucesiones.

(a) Sea $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, es decir, consideramos a la sucesión $\langle 1/n, n = 1, 2, \ldots\rangle$, o $\langle 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, 1/n+1, \ldots\rangle$.

(b) Sea $x_n = 2 + \dfrac{sen(n)}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, esto es, tratamos con la sucesión

$$\left\langle 2 + \frac{sen(n)}{n}, n = 1, 2, \ldots \right\rangle$$

o

$$\left\langle 2 + sen(1), 2 + \frac{sen(2)}{2}, \ldots, 2 + \frac{sen(n)}{n}, 2 + \frac{sen(n+1)}{n+1}, \ldots \right\rangle$$

.

(c) Para $x_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, tenemos la sucesión $\langle n^2, n = 1, 2, \ldots\rangle$, o $\langle 1, 4, 9, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots\rangle$.

(d) Dados números arbitrarios a y r, sea $x_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $(r^0 = 1)$. La sucesión correspondiente

$$\left\langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \ldots \right\rangle = \left\langle a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, ar^n, \ldots \right\rangle$$

es conocida como una **sucesión geométrica** (o progresión geométrica) con el **primer término** a y la **razón común** r.

(d$*$) Escogiendo $a = 1$, $r = 0.5$ en el ejemplo (d), obtenemos la siguiente sucesión geométrica particular $\Big\langle 1,\, 0.5,\, 0.25, \ldots, (0.5)^{n-1},\, (0.5)^n, \ldots \Big\rangle$.

(e) Sea $x_n = 1 + (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. En este caso tenemos la sucesión $\langle 1 + (-1)^n, n = 1, 2, \ldots \rangle = \big\langle 0, 2, 0, 2, \ldots, 1 + (-1)^n, 1 + (-1)^{n+1}, \ldots \big\rangle$.

El propósito principal de esta sección es introducir la noción de **sucesión convergente**, es decir, la sucesión cuyos términos se vuelven cada vez más cercanos a algún número real x cuando n se incrementa. El número mencionado x es llamado **límite de la sucesión**.

Primero, en los ejemplos de arriba examinamos el comportamiento de x_n cuando n crece.

(aa) Es fácil ver que en el ejemplo (a) los términos $x_n = 1/n$ se aproximan a cero cuando n aumenta. En efecto, para $n = 100$, $x_n = 1/100$, y digamos, para $n = 1000000$, $x_n = 1/1000000$. (El último número es bastante pequeño).

(bb) En $\left\langle x_n = 2 + \dfrac{sen(n)}{n}, n = 1, 2, \ldots \right\rangle$, $|sen(n)| \leq 1$ siempre; y por lo tanto, el segundo sumando tiende a cero a medida que n aumenta. Consecuentemente, para n "grandes", todos los términos $x_n = 2 + \dfrac{sen(n)}{n}$ se acercan a 2.

(cc) Los términos $\langle x_n = n^2, n = 1, 2, \ldots \rangle$ de la sucesión en este ejemplo se incrementan ilimitadamente y no se aproximan a ningún número real. (Digamos, $x_{10} = 10^2 = 100$, $x_{100} = 100^2 = 10000$, etc.)

(dd) El comportamiento de las sucesiones geométricas en el Ejemplo (d) *depende fuertemente* del valor de la razón r.

(1) Para $r = 1$, $r^{n-1} = 1$ y $x_n = a$ para toda $n = 1, 2, \ldots$.

(2) Para $r > 1$ (y digamos, $a > 0$), los términos $x_n = ar^{n-1}$ crecen ilimitadamente ya que $r^{n-1} = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{\text{n-1 veces}}$ es un número grande para cada n grande.

(3) Asumiendo que r es un número positivo menor que 1, los términos $x_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ se aproximan a cero a medida que n se incrementa. De hecho, para una n grande, la potencia $r^{n-1} = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{\text{n-1 veces}}$ es un número muy pequeño.

En el ejemplo (d$*$), para $a = 1$, $r = 0.5$, $n = 50$, $x_{50} = ar^{49} = (0.5)^{49} \approx 1.776356839 \times 10^{-15}$ que es un número extremadamente pequeño.

(ee) En el Ejemplo (e), los términos x_n de la sucesión "oscilan"entre los valores 0 y 2, y por lo tanto, no pueden aproximarse a un número único.

Echando un vistazo a los comentarios de arriba, podemos deducir intuitivamente que:

(a) La sucesión $\langle x_n \rangle$ en el Ejemplo (a) "converge a cero".

(b) La sucesión $\langle x_n \rangle$ en el Ejemplo (b) "converge al número 2".

(c) La sucesión $\langle x_n \rangle$ en el Ejemplo (c) "no converge"(es no convergente).

(d) La sucesión $\langle x_n \rangle$ en el Ejemplo (d) "converge a cero"si r es menor que 1; y no converge si r es mayor que 1.

(e) En el Ejemplo (e) la sucesión $\langle x_n \rangle$ no converge.

La definición de convergencia (y de una sucesión convergente) es como sigue:
Decimos que una sucesión (de números reales) $\langle x_n \rangle$ **converge** a un número real x, si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, todos los términos x_n de $\langle x_n \rangle$, excepto posiblemente un número finito de ellos, pertenecen a la ε-vecindad $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del punto x.
En este caso $\langle x_n \rangle$ se llama una **sucesión convergente** siendo x su **límite**, que se denota $\boldsymbol{x_n \longrightarrow x}$.

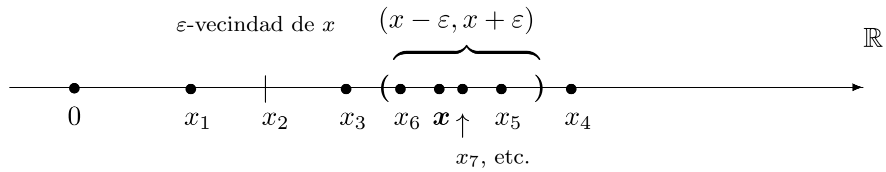

FIGURA 5. Convergencia $x_n \longrightarrow x$

La frase clave en esta definición es "dado $\varepsilon > 0$ arbitrario". Esto significa que no importa cuán pequeño sea ε, **todos los términos** x_n de $< x_n >$ con n "suficientemente grande"se encuentran en la **ε-vecindad de x**, *es decir*, "están cerca de x"(véase la Figura 5).

La convergencia $x_n \longrightarrow x$ puede ser expresada diciendo que los términos x_n se acercan cada vez más al *punto límite* x (cuando n "crece a infinito"). De manera equivalente, la distancia $d(x_n, x)$ *converge a cero.*
Por ejemplo, para la sucesión en el Ejemplo (b) el límite es $x = 2$. En efecto, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario,

$$\begin{aligned} d(x_n, x) \equiv d(x_n, 2) &= d\left(2 + \frac{sen(n)}{n}, 2\right) = d\left(\frac{sen(n)}{n}, 0\right) \\ &= \left|\frac{sen(n)}{n}\right| \leq 1/n < \varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

para **todo** $n \geq 1/\varepsilon$. Por ejemplo, si $\varepsilon = 0.001$, entonces la desigualdad (1) se cumple para todo $n > 1/0.001 = 1000$. Consecuentemente, $x_n = 2 + \dfrac{sen(n)}{n} \longrightarrow 2$ (converge a 2 o su límite es igual a 2; véase la Figura 6).

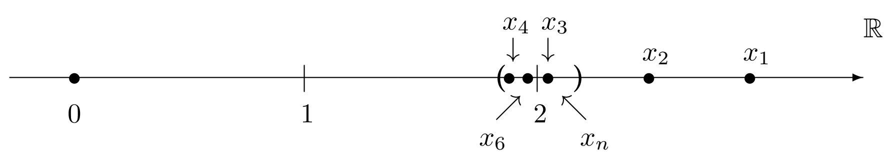

FIGURA 6. $x_n = 2 + \frac{sen(n)}{n} \longrightarrow 2$

Ahora consideramos un ejemplo menos trivial de una sucesión convergente.

Quizás los más famosas números en matemáticas son

$$\pi \approx 3.141592654 \tag{2}$$

y

$$e \approx 2.718281828. \tag{3}$$

En partícular, el último está asociado con la noción del logaritmo natural $ln(x)$ de un número x, de tal manera que se cumple la igualdad

$$ln(e) = 1. \tag{4}$$

El siguiente argumento deja ver que el número e es el límite de la sucesión

$$\left\langle x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \;\; n = 1, 2 \ldots \right\rangle. \tag{5}$$

Esto es

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e. \tag{6}$$

La manera más simple de verificar (6) es calcular x_n para varios valores de n (particularmente, para n "suficientemente grande") , y comparar los resultados con (3). Con una calculadora uno puede obtener, por ejemplo, la tabla siguiente:

$n = 5$	$x_n = 2.48832;$
$n = 20$	$x_n = 2.653297705;$
$n = 200$	$x_n = 2.691588029;$
$n = 1000$	$x_n = 2.716923932;$
$n = 10^6 = 1000000$	$x_n = 2.718280469.$

Comparando estos valores de x_n con la aproximación para e dada en (3), vemos que de hecho como está indicado en (6) $x_n \to e$.

Otra manera de justificar (6) es tomar el logaritmo:

$$ln(x_n) = ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = nln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx n\frac{1}{n} = 1, \tag{7}$$

gracias a que $\log(1 + z) \approx z$ para todo z cerca de cero. (Que es fácil de verificar con calculadora). La aproximación en (7) permite establecer que $ln(x_n) \longrightarrow 1$. Finalmente, $x_n \longrightarrow e$ por (4).

3. Sucesiones sumables (series convergentes): sumas de un número infinito de términos

Considere una sucesión $\langle x_n \rangle \equiv \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ de números reales y para un natural arbitrario fijo $N \geq 1$ calcule la suma S_N de los primeros N terminos:

$$S_N = x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} + x_N. \tag{8}$$

Siendo en (8) $N = 1, 2, \ldots$ obtenemos valores sucesivos de las sumas parciales $S_1, S_2, \ldots, S_N, \ldots$.
De esta manera hemos obtenido una nueva sucesión numérica

$$\langle S_N \rangle = \langle S_1, S_2, \ldots, S_N, S_{N-1}, \ldots \rangle$$

llamada la **sucesión de sumas parciales** de la sucesión original $\langle x_n \rangle$.
Hacemos uso de la sucesión $\langle S_N \rangle$ tratando de definir la suma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} + x_N + \ldots, \tag{9}$$

que involucra un número **infinito** de términos de $\langle x_n \rangle$. Informalmente, (9) viene de S_N en (8) cuando el número de sumandos N **se incrementa ilimitadamente**. Con esto en mente introducimos la siguiente definición.
Se dice que una sucesión $\langle x_n \rangle$ es **sumable** si la sucesión $\langle S_N \rangle$ de sus sumas parciales **converge** al número real S, esto es,

$$S_N = x_1 + x_2 + \cdots + x_N \longrightarrow S. \tag{10}$$

El límite S, por definición es el valor de la suma en (9).
En una terminología alternativa (o incluso más común), la expresión en (9) es llamada una **serie**. Cuando

$$\langle x_n, n = 1, 2, \dots \rangle, \tag{11}$$

es una sucesión sumable, *es decir*, $S_N = x_1 + x_2 + \cdots + x_N \longrightarrow S$ decimos que la serie correspondiente en (9) es **convergente**, y S es su suma. Esto da significado a (9) permitiéndonos escribir:

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_N + x_{N+1} + \dots. \tag{12}$$

No toda sucesión $\langle x_n \rangle$ es sumable ya que el límite en (10) puede no existir. Por ejemplo, para $x_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, obtenemos que $S_N = x_1 + x_2 + \cdots + x_N = 1 + 2 + \cdots + N = \dfrac{N(N+1)}{2}$ que se incrementa ilimitadamente cuando N (el número de sumandos) aumenta. Por lo tanto, $\langle S_N \rangle$ no es una sucesión convergente y la suma $x_1 + x_2 + \cdots + x_N + \dots$ no existe (como un número real).
Otro ejemplo es $\langle x_n \rangle$ con $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$. Aquí

$$S_N = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^N = \begin{cases} 0, & \text{si } N \text{ es par}, \\ -1, & \text{si } N \text{ es impar}, \end{cases}$$

es una sucesión no convergente.

Si $\langle x_n \rangle$ no es una sucesión sumable (*i.e.* $\langle S_N, N = 1, 2, \dots \rangle$ no converge) la serie en (9) es llamada **divergente**, y la igualdad (12) no es relevante.

De la definición (10) se sigue que una condición necesaria (¡pero no suficiente!) para la sumabilidad de la sucesión $\langle x_n \rangle$ es que $x_n \longrightarrow 0$ ($\langle x_n \rangle$ converge a cero).
El siguiente ejemplo de una sucesión sumable está relacionado con el número $e \approx 2.718281828$. Para cada número natural n su **factorial** es otro número natural denotado por $n!$ y definido como:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n \tag{13}$$

(el producto de todos los números naturales de 1 a n).
Obsérvese que cuando n se incrementa, $n!$ crece muy rápido. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} &5! = 120; \\ &10! = 3628800; \\ &15! = 1307674368000. \end{aligned}$$

Consecuentemente, la sucesión $\langle x_n \rangle$ con términos $x_n = 1/n!$, $n = 1, 2, \dots$ converge a cero: $1/n! \longrightarrow 0$.

Por cálculos numéricos mostramos que esta sucesión es sumableble y la suma correspondiente es igual a $e - 1$, esto es

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!} + \cdots = e - 1, \text{ o bien,}$$

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!} + \dots. \tag{14}$$

De acuerdo a la defínción (10) para establecer (14) tenemos que mostrar que

$$S_N = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{N!} \longrightarrow e - 1 \approx 1.718281828182815. \tag{15}$$

Seleccionando, por ejemplo, $N = 5, 10, 20$ y usando una computadora, calculamos

$$\begin{aligned} S_5 &\approx 1.716666666666667, \\ S_{10} &\approx 1.718281801146384, \\ S_{20} &\approx 1.718281828459045. \end{aligned}$$

Los datos obtenidos nos convencen de que las relaciones (15) y así (14) son verdaderas.
Reescribiendo (14) podemos afirmar que

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots . \end{aligned}$$

Por otra parte, es natural preguntarse: ¿Qué significa la *expresión decimal* del número $e = 2.718281828\dots$?
Lo anterior simplemente significa que

$$e = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{(10)^2} + \frac{8}{(10)^3} + \frac{2}{(10)^4} + \frac{8}{(10)^5} + \frac{1}{(10)^6} + \frac{8}{(10)^7} + \frac{2}{(10)^8} + \dots \tag{16}$$

En otras palabras, el número e también es la suma (serie) de la sucesión sumable

$$\left\langle 2, \frac{7}{10}, \frac{1}{100}, \frac{8}{1000}, \dots \right\rangle .$$

Los ejemplos más transparentes son $0.111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$, y digamos, $0.1 = 1/10$, $0.01 = 1/10^2 = 1/100$, $0.001 = 1/10^3 = 1/1000$, etc. Entonces

$$0.111\dots = 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

En la Sección 4 mostraremos que $0.111\dots = 1/9$. Por lo tanto, es un **número racional**. Por otro lado, es posible probar que no hay enteros k y m tales que $e = k/m$. Esto significa que e (así como π) es un **número irracional**.

4. Sumas de sucesiones geométricas

Como un ejemplo de aplicaciones de sumas con un número infinito de sumandos (series), examinamos ahora la sumabilidad de sucesiones geométricas y calculamos sus sumas. Una sucesión geométrica

$$\langle x_n \rangle = \langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle \tag{17}$$

fue introducida en el Ejemplo (d) de la Sección 2. Asumimos que en (17) a y r son *números positivos* arbitrarios pero fijos. También excluimos el caso trivial: $r = 1$ (cuando $\langle x_n \rangle = a$ para todo n).
La fórmula simple para x_n nos permite calcular explícitamente las sumas parciales

$$S_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N = a + ar + \dots + ar^{N-1}. \tag{18}$$

Proposición 1. *Para cada $N = 1, 2, \dots$*

$$S_N = a\frac{1 - r^N}{1 - r}. \tag{19}$$

Probamos (19) por **inducción**. Primero para $N = 1$ (18) nos da $S_N = S_1 = a$ y eso coincide con $S_1 = a\frac{1-r^1}{1-r} = a\frac{1-r}{1-r} = a$, calculado por la fórmula (19).
Segundo, suponiendo que (19) se cumple para un $N \geq 1$ **arbitrario pero fijo** mostramos que esta suposición resulta en que la misma fórmula (19) es válida para $N + 1$. Habiendo hecho esto, establecemos (19) para **toda** $N = 1, 2, 3, \dots$. De hecho, (19) se cumple para $N = 1$, y entonces (19) es correcta para $N + 1 = 1 + 1 = 2$. Pero si la fórmula (19) es correcta para $N = 2$, entonces, del "paso inductivo"mostrado abajo se sigue que (19) se cumple para $N + 1 = 2 + 1 = 3$.
La repetición de este argumento implica las correcciones de la fórmula (19) para **todos**

los números naturales $N = 1, 2, 3, \dots$
Ahora por (18),

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= \underbrace{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{N-1}}_{S_N} + ar^N \\ &= S_N + ar^N. \end{aligned}$$

Por nuestra hipótesis de inducción S_N está dada por (19). Por lo tanto

$$S_{N+1} = a\frac{1 - r^N}{1 - r} + ar^N = a\left[\frac{1 - r^N + r^N - r^{N+1}}{1 - r}\right] = a\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

La última ecuación $S_{N+1} = a\dfrac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$ es la versión de (19) con N siendo reemplazada por $N + 1$. Consecuentemente, la hipótesis de inducción de que (19) se cumple para N implica el cumplimiento de la fórmula (19) para $N + 1$.
Reescribiendo (19) como $S_N = a\dfrac{r^N - 1}{r - 1}$, observamos que para $r > 1$, S_N se incrementa ilimitadamente cuando N crece (ya que $r^N = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{N \text{ veces}}$ crece al “infinito”). Así, una sucesión geométrica $\langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$ con razón $r > 1$ *no es sumable.* No es sorprendente ya que en tal caso, la sucesión $\langle x_n = ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$ no converge a cero (véase la Sección 3).
La situación es completamente diferente si la razón r es menor que 1. En este caso $x_n = ar^{n-1} \longrightarrow 0$, y estamos en posición de mostrar que $\langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$ es una sucesión sumable e incluso de calcular su suma.

PROPOSICIÓN 2. *Dados a y r arbitrarios tales que* $0 < r < 1$,

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{N-1} + ar^N + \cdots = \frac{a}{1 - r}. \tag{20}$$

Demostración. Como r es menos que 1, en (19) $r^N = \underbrace{r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{N \text{ veces}} \longrightarrow 0$ cuando N se incrementa, y así, por (19)
$S_N = a\dfrac{1 - r^N}{1 - r} \longrightarrow S = a\dfrac{1 - 0}{1 - r} = \dfrac{a}{1 - r}.$
Tomando en cuenta la definición (10) de la suma de una serie: $S_N \longrightarrow S$ y la igualdad (20) se sigue. □

Para alguien que confía más en los cálculos numéricos presentamos S_N para $N = 5, 10$ y 20 (seleccionando por ejemplo, $a = 1$, $r = 0.5$).
Por (19) y una calculadora:

$$\begin{aligned} S_5 &= 1.9375 \\ S_{10} &= 1.998046875 \\ S_{20} &= 1.999998093. \end{aligned}$$

Comparando estos números con la suma S (el valor límite de S_N!) dado en (20): $S = \dfrac{a}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - 0.5} = 2$, uno puede incrementar su confianza en el razonamiento de los argumentos matemáticos basados en la noción de convergencia.
Para ofrecer una aplicacion simple de la fórmula (20) mostramos que

$0.111\ldots = 1/9$ (como se enunció en la página 11). Como $0.111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{(10)^2} + \frac{1}{(10)^3} + \cdots + \frac{1}{(10)^N} + \cdots = \frac{1}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^{N-1} + \ldots\right]$, la expresión en corchetes es una suma de la sucesión geométrica con $a = 1$, $r = 1/10$. Aplicando (20) obtenemos:

$$0{,}111 \cdots = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1 - 1/10}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{10}{9}\right) = 1/9.$$

En la Sección 6 consideraremos un ejemplo más interesante de aplicación de la fórmula (20).

5. Falacia de Euler

El científico suizo Leonhard Euler (1707-1783) es uno de los matemáticos más sobresalientes de todos los tiempos. Hizo muchas contribuciones importantes en ramas de las matemáticas como la topología, la teoría de números y el análisis matemático. También es conocido por sus investigaciones en mecánica, óptica y dinámica de fluidos.

En la última sección de este artículo comentaremos uno de sus resultados brillantes que relaciona al número número π con la suma de ciertas series convergentes.
Vale la pena mencionar que a pesar de los numerosos descubrimientos matemáticos importantes en el siglo XVIII, la fundamentación lógica de algunas nociones aún no estaba bien desarrollada. Particularmente, no estaba completamente claro el significado de convergencia de series. El siguiente ejemplo de una falacia se le atribuye a L. Euler. Él presentó la siguiente "paradoja".
Sea r un número positivo diferente de 1. Considérese la sucesión geométrica $\langle x_n \rangle$ con el primer término $a = r$ y la razón r, que es, $\big\langle x_n = r \times r^{n-1}, n = 1, 2, \ldots \big\rangle$.
Sea también $\langle y_n \rangle$ la sucesión geométrica con $a = 1$ y la razón $\widetilde{r} = 1/r$, *i.e.* $\big\langle y_n = \widetilde{r}^{n-1} = (1/r)^{n-1}, n = 1, 2, \ldots \big\rangle$.
Una aplicación descuidada de la ecuación (20) da los siguientes valores de las sumas de ambas sucesiones:

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 + \cdots + x_N + \ldots \\ &= r + r \cdot r + r \cdot r^2 + \cdots + r \cdot r^{n-1} + \ldots \\ &= \frac{r}{1-r}, \text{ y} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &= y_1 + y_2 + \cdots + y_N + \ldots \\ &= 1 + 1\frac{1}{r} + 1\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \cdots + 1\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - 1/r} = \frac{r}{r-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Así $S + \widetilde{S} = \dfrac{r}{1-r} + \dfrac{r}{r-1} = \dfrac{r}{1-r} - \dfrac{r}{1-r} = 0$, y esto contradice el hecho de que *todos* los sumandos en (21) y (22) son *números positivos* y por lo tanto $S + \widetilde{S}$ debería ser positivo.

El error cometido fue obvio (¡para los matemáticos de los siglos XIX-XXI!). Si $r < 1$, entonces $\widetilde{r} = 1/r > 1$ (mayor que 1) y la sucesión $\langle y_n \rangle$ no es sumable. Así que la suma (serie) escrita en las primeras dos líneas de (22) no existe (como un número real), y la fórmula (20) no es aplicable. En el caso cuando $r > 1$, la sucesión $\langle x_n \rangle$ no es sumable y entonces, la última igualdad en (21) es falsa.

6. La paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga

Zenón de Elea fue un filósofo Griego que vivió entre 490 A.C. y 430 A.C. Inventó varias paradojas famosas una de las cuales describiremos abajo.
En la mitología griega, Aquiles era un héroe griego de la guerra Troyana. Además de sus otras capacidades fantásticas (ser casi invulnerable es la más famosa) no era mal corredor. Algo que no puede decirse sobre una tortuga. El razonamiento de Zenón era el siguiente.

Supóngase que al mismo tiempo, digamos $t_0 = 0$, Aquiles y la tortuga empiezan a correr en la misma dirección a lo largo de un camino recto. Aquiles empieza corriendo de cierto punto p_0 con la velocidad $V = 5m/s$, mientras que la tortuga empieza en el punto $p_1 = p_0 + 50$ metros (*i.e.* $x_1 = 50$ metros adelante) con la velocidad $v = 1$ m/s. Entonces, al tiempo $t_1 = \frac{50}{V} = \frac{50}{5} = 10$ segundos Aquiles debería alcanzar el punto de partida de la tortuga p_1. (Véase la Figura 7 abajo).
Durante este tiempo $t_1 = 10$ segundos la tortuga habría recorrido la distancia $x_2 = vt_1 = 1 \cdot 10 = 10$ metros y habría alcanzado el punto $p_2 = p_1 + x_2$ (véase la Figura 7). Aquiles tendría que usar el tiempo $t_2 = x_2/V = 10/5 = 2$ segundos para llegar al punto p_2.

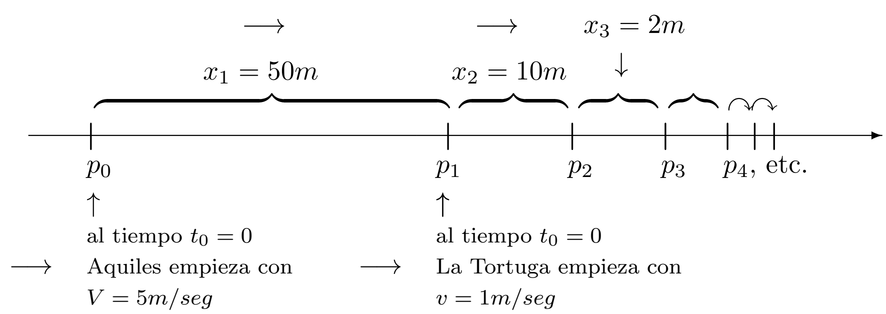

Figura 7. La carrera de Aquiles y la tortuga

Pero para esos 2 segundos la tortuga se movería al punto $p_3 = p_2 + x_3$, donde $x_3 = vt_2 = 1 \cdot 2 = 2$ metros. De nuevo a Aquiles le llevaría el tiempo $t_3 = 2/V = 2/5$ segundos alcanzar el punto p_3, mientras que la tortuga continua avanzando adelante. Uno puede repetir estos argumentos infinitamente para obtener la sucesión de puntos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ por los que Aquiles tendría que pasar antes de alcanzar a la tortuga.

Zenón afirmó que el número infinito de dichos puntos y el número infinito de correspondientes intervalos de tiempo $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ para correr un número infinito de segmentos de longitud $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ llevan a la conclusión de que Aquiles nunca alcanza a la tortuga. Esta conclusión evidentemente contradice a la realidad y ésta es la esencia de la paradoja.

Esta paradoja no es tan trivial como podría parecer a primera vista. Tiene que ver con la relación entre el movimiento físico y su descripción matemática y con el problema de continuidad (o discretización) del espacio y la divisibilidad infinita del tiempo. La **solución matemática** simple (y estándar) de la paradoja se da abajo.
Obsérvese que la sucesión de porciones $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ que tiene que cubrir Aquiles especificada arriba es una **sucesión geométrica** con el primer término $a = 50$ y la razón común $r = 1/5$. Claramente, en este ejemplo $x_1 = 50 = a$. Como ya vimos,

$$x_2 = Vt_1 = v\frac{50}{V} = \frac{50}{5} = 50\frac{1}{5} = ar.$$

También

$$x_3 = vt_2 = v\frac{x_2}{V} = \frac{x_2}{5} = 50\left(\frac{1}{5}\right)^2 = ar^2.$$

No es difícil verificar (por ejemplo, por inducción) que para $n \geq 1$ arbitrario , $x_n = ar^{n-1}$ con $a = 50$ y $r = 1/5$.

Es claro que para alcanzar a la tortuga, Aquiles debería cubrir la distancia

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \ldots \\ &= 50 + 50\left(\frac{1}{5}\right) + 50\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + 50\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \ldots \quad , \end{aligned}$$

que es la suma de la correspondiente sucesión geométrica. Aplicando la fórmula (20) obtenemos:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{50}{1-1/5} = 62.5 \text{ metros.}$$

Consecuentemente, habiendo corrido 62.5 metros Aquiles alcanza a la tortuga y para esto ocupa $T = S/V = 62.5/5 = 12.5$ segundos.

Podemos obtener este resultado de otra manera, pero de nuevo, aplicando la suma de una sucesión geométrica. Nótese que

$$\begin{aligned} &T = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n \ldots, \text{ donde} \\ &t_1 = \frac{x_1}{V} = \frac{50}{5} = 10, \\ &t_2 = \frac{x_2}{V} = \frac{t_1 v}{V} = 10\left(\frac{1}{5}\right), \\ &t_3 = \frac{x_3}{V} = \frac{t_2 v}{V} = 10\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = 10\left(\frac{1}{5}\right)^2, \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Así $\langle t_n \rangle$ es la sucesión geométrica con $a = 10$ y $r = 1/5$. Por (20) $T = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{10}{1-1/5} = 12.5$ segundos.

Hay que remarcar que si dejamos del lado la casuística de Zenón, podemos encontrar los valores de arriba de S y T de una manera muy simple. Tenemos:

$$\begin{cases} S = TV \\ S - 50 = Tv, \text{ o} \end{cases}$$
$$\begin{cases} S = 5V \\ S - 50 = T, \quad . \end{cases}$$

(ver la Figura 8)

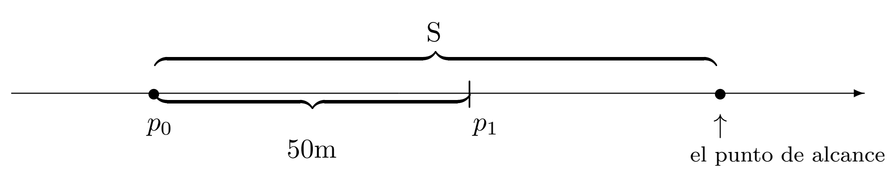

Figura 8

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con dos variables desconocidas S y T, encontramos que $S = 62.5$ metros, $T = 12.5$ segundos, que, por supuesto, coincide con las sumas de las sucesiones geométricas ya calculadas.
A pesar de las matemáticas simples empleadas arriba, la paradoja de Zenón despierta preguntas que tienen que ver con la relación entre el mundo físico (digamos, con los movimientos mecánicos) y su modelación matemática. Por ejemplo: ¿Qué sentido físico tiene la suma de un número infinito de términos que se acercan cada vez más a cero y tarde o temprano se convierten en valores tan pequeños que no pueden ser medidos por ningún método físico?
De hecho, este tipo de preguntas también están relacionadas con la impactante eficiencia de las llamadas ecuaciones diferenciales en la representación de las leyes físicas.
En mecánica, por ejemplo, estas ecuaciones involucran derivadas de una posición $x(t)$ como una función del tiempo t, y la velocidad instantánea se define como el valor límite del cociente $\dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ cuando el intervalo de tiempo Δt se aproxima a cero (y así se vuelve un número arbitrariamente pequeño).

7. El número π y algunas series

El origen del número (constante) $\pi \approx 3.14159265$ es puramente geométrico. Está definido como el cociente de la circunferencia de un círculo con su diámetro.

Algunas civilizaciones antiguas intentaron medir el valor de π usando estimaciones encontradas para propósitos prácticos (en construcción, por ejemplo).
Las tablillas de arcilla de Babilonia de 1900-1600 A.C. contienen escritos que aproximan π a $25/8 = 3.125$.

En 1761 el matemático francés J.H. Lambert probó que π es un número irracional (es decir, no es cociente de enteros).
A pesar de sus raíces geométricas, el número π aparece sorpresivamente y con frecuencia en muchas ramas de las matemáticas, la física y otras ciencias.
Nos gustaría ilustrar un resultado fino de Euler, que relaciona al número π con la suma de la sucesión (serie) $\langle x_n = 1/n^2, n = 1, 2, \dots \rangle$.
Euler mostró que esta sucesión es sumable y, además,

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{23}$$

De la ecuación (23) podemos expresar π como sigue

$$\pi = \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} + \dots\right)}. \tag{24}$$

En lugar de tratar de probar estas ecuaciones calculamos numéricamente las sumas parciales:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}$$

para $N = 100, 1000$ y 10000. Los resultados obtenidos por computadora son los siguientes:

$$S_{100} \approx 1.634983900$$
$$S_{1000} \approx 1.643934567$$
$$S_{10000} \approx 1.644834072.$$

Notando que $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1.644934067$, y comparándolo con los valores de arriba de S_N podemos concluir que es plausible que $S_N \longrightarrow \pi^2/6$, y así la igualdad (23) se cumple.

Además, claculando

$$\Pi_N = \sqrt{6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\right)}$$
$$= \sqrt{6S_N},$$

para la los mismos valores de $N = 100, 1000$ y 10000 se obtiene que:

$$\Pi_{100} \approx 3.132076532,$$
$$\Pi_{1000} \approx 3.140638064,$$
$$\Pi_{10000} \approx 3.141497164.$$

Comparando estos datos con el valor $\pi \approx 3.141592654$ nos convencemos de la validez de (24).
Puesto que la serie en (23) es convergente (*i.e.*, la sucesión $\langle x_n = 1/n^2, n = 1, 2, \dots \rangle$ es sumable), los términos $1/n^2$ se anulan "lo suficientemente rápido" cuando n incrementa. En la Sección 3 ya hemos subrayado que la condición $x_n \longrightarrow 0$ es necesaria para que una sucesión sea sumable (o equivalentemente, para que una serie sea convergente). Ahora mostramos que esta condición *no es suficiente*. Hay sucesiones no sumables $\langle x_n \rangle$ con $x_n \longrightarrow 0$.

Consideremos la sucesión $\langle x_n = 1/n, n = 1, 2, \dots \rangle$.
L. Euler en 1734 estableció que para todos los N grandes

$$S_N = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N} \approx ln(N)+\gamma, \tag{25}$$

donde $\gamma \approx 0.5772456649$ es la llamada constante de Euler.

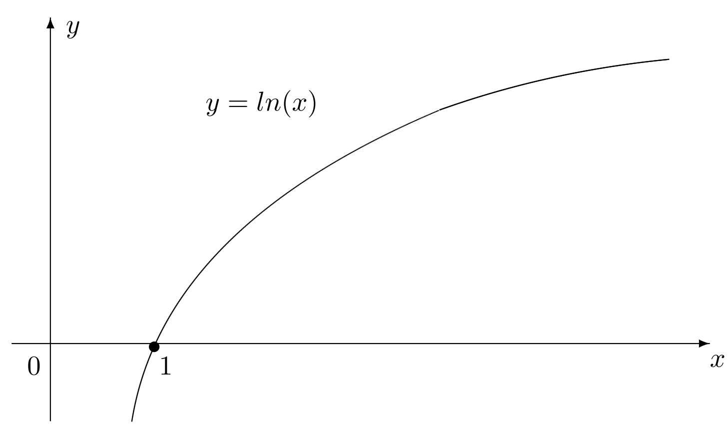

Figura 9. La gráfica de $y = ln(x)$.

Sabemos que la función $y = ln(x)$, $x > 0$ es *no acotada*, *i.e,* crece ilimitadamente cuando x se incrementa (Véase la Figura 9). Consecuentemente, la aproximación (25) nos dice que la sucesión de sumas parciales $\langle S_N, N = 1, 2, \dots \rangle$ crece ilimitadamente y entonces, no converge a ningún número real. Esto último significa que $\langle 1/n, n = 1, 2, \dots \rangle$ no es una sucesión sumable (o que la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}+\dots$ no es convergente).

Hay una manera aún más simple de ver que la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ es *infinita.* Obsérve que

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots \text{ es mayor que}\\
&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\dots\\
=&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots,
\end{aligned}
$$

donde la última suma (serie) es evidentemente infinita.

Para concluir, ofrecemos al lector verificar por cálculos en computadora que

$$\pi = 4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots\right].$$

El autor agradece a los estudiantes Patricia Vásquez y Diego López por su ayuda en la preparación de este artículo.

Dirección del autor:
Evgueni Gordienko
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas,
Oficina AT-315
e-mail: `gord@xanum.uam.mx`