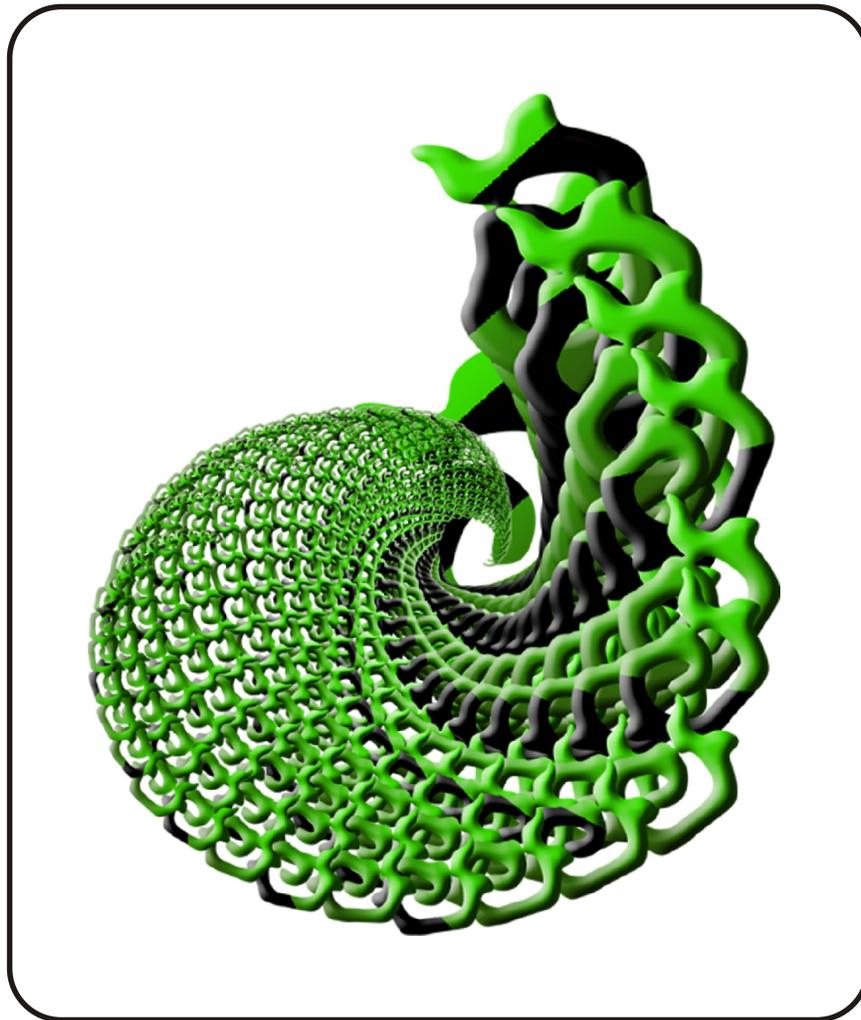


# mixba'al

ISSN:2007-7874

Revista Metropolitana de Matemáticas



Casa abierta al tiempo  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
METROPOLITANA  
VOL VIII, No. 1, JULIO 2017



**UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA  
METROPOLITANA**

Dr. Salvador Vega y León  
*Rector General.*

Dr. José Octavio Nateras Domínguez  
*Rector de la Unidad Iztapalapa.*

Dr. José Gilberto Córdoba Herrera  
*Director de la División de Ciencias Básicas  
e Ingeniería, UAM-Iztapalapa.*

Dr. Roberto Quezada Batalla  
*Jefe del Departamento de Matemáticas,  
UAM-Iztapalapa.*

Revista del Departamento de Matemáticas de la

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
Unidad Iztapalapa**

#### **Editor Responsable**

Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro  
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

#### **Comité Editorial**

Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez  
Área de Matemáticas Básicas, CIMAT - A. C.

Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia  
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Dr. Jorge Alberto León Vázquez  
Departamento de Control Automático, CINVESTAV.

Dr. Mario Pineda Ruelas  
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

Dr. Roberto Quezada Batalla  
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

#### **Editor Técnico**

Dr. Constancio Hernández García  
Departamento de Matemáticas, UAM - I.

#### **Diseño Portada**

Srita. Michael Rivera Arce.

MIXBA'AL. Vol. VIII, No. 1, julio de 2017 a julio de 2018, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas.

Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México y Av. San Rafael Atlixco, No. 186, Edificio AT, tercer piso, Col. Vicentina, Delegación Iztapalapa, C.P. 09340, México, Ciudad de México. Tel. 5804 4658.

Página electrónica de la revista:

<http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revista-mixba-al>.

Correos electrónicos:

[mixbaal2009@gmail.com](mailto:mixbaal2009@gmail.com), [mixb@xanum.uam.mx](mailto:mixb@xanum.uam.mx).

**Editor Responsable:** Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro.

Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No.

04-2010-072017382600-203, ISSN:

2007-7874, ambos otorgados por el Instituto

Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro, División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas, Av. San Rafael Atlixco No. 186, Edificio AT, tercer piso, Coonia Vicentina, Delegación Iztapalapa, C.P. 09340, México, Ciudad de México.

Fecha de última modificación 7 de julio de 2017. Tamaño del archivo 1.4 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

#### **Contacto:**

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Tel: (01) 55 5804 4654 .

Fax: (01) 55 5804 4660.

e-mail: [mixbaal2009@gmail.com](mailto:mixbaal2009@gmail.com).

Web revista: <http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revista-mixba-al>.

#### **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**



Una Universidad asentada en la tradición



Abierta



Interdisciplinaria y Autónoma



Flexible



Casa abierta al tiempo.



Posgrados:  
Maestría y Doctorado en Matemáticas  
[pmat@xanum.uam.mx](mailto:pmat@xanum.uam.mx)  
<http://pmat.izt.uam.mx/>

## LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Teoría de anillos y módulos.  
Teoría de conjuntos y lógica.  
Geometría algebraica.  
Geometría diferencial y Riemanniana.  
Teoría de números.  
Teoría de códigos y criptografía.  
Análisis geométrico.  
Física matemática.  
Análisis diferencial.  
Matemáticas discretas, combinatoria y gráficas.  
Dinámica de fluidos computacional.  
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.  
Métodos matemáticos en finanzas y economía.  
Control y sistemas dinámicos.  
Mecánica celeste, sistemas hamiltonianos y aplicaciones a la física.  
Control, estabilidad y robustez de sistemas estocásticos.  
Metodología estadística.  
Estadística asintótica.  
Topología de conjuntos, grupos topológicos y Cp-teoría.  
Métodos geométricos en mecánica. Dinámica de vórtices. Mecánica celeste.

Maestría en Ciencias Matemáticas  
Aplicadas e Industriales (MACMAI)  
[mvmg@xanum.uam.mx](mailto:mvmg@xanum.uam.mx)  
<http://mcmαι.izt.uam.mx>

## LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Códigos y Criptografía.  
Control y Sistemas Dinámicos.  
Combinatoria y Optimización.  
Estadística.  
Métodos Matemáticos en Finanzas.  
Modelación y Simulación Computacional.



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**  
**Unidad Iztapalapa**

---

## **CONTENIDO**

**7 ALGUNAS DEFINICIONES DE INTEGRAL ESTOCÁSTICA**

JORGE A. LEÓN

**29 SUCESIONES DE NÚMEROS REALES, SERIES Y  
LA PARADOJA DE ZENÓN**

EVGUENI GORDIENKO

**m**ixba'al



Revista Metropolitana de Matemáticas



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**



## A LOS AUTORES

Mixba'al es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Está dirigida a la comunidad matemática.

Esta publicación está dedicada primordialmente a la divulgación, por lo que los artículos que se presenten deberán ser accesibles a estudiantes de posgrado y/o licenciatura versados en el tema. Los trabajos pueden ser sobre cualquier tópico de las matemáticas; por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos, artículos panorámicos sobre un área de investigación, la presentación de una visión distinta de algún tema vinculado con la docencia, notas de cursos avanzados, aplicaciones de las matemáticas, historia y filosofía de las matemáticas y aspectos lúdicos de las mismas, entre otros

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español, aunque en casos excepcionales podrán aceptarse artículos en inglés. El comité editorial tiene la responsabilidad de cuidar la calidad de la revista, tanto en su contenido como en su presentación, de acuerdo a los lineamientos, tipografía y corrección de lenguaje (ortografía, estilo, etcétera). Asimismo, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista, y en caso de que así sea, lo enviara a arbitraje, sin excepción.

La versión preliminar de los trabajos sometidos a la revista deberá enviarse en formato pdf. al correo electrónico [mixbaal2009@gmail.com](mailto:mixbaal2009@gmail.com). Puesto que la presentación final de los trabajos se hará en  $\text{Latex}2\epsilon$ , aquellos autores cuyos trabajos sean aceptados, deberán enviarlos, para su publicación final, con el formato y macros que la revista les proporcionará. Las fotografías o gráficos que acompañen al texto deberán ser enviados, por separado, en formato pdf con la calidad y resolución adecuados para una buena reproducción impresa, además deberán contar con los correspondientes derechos de autor. Se recomienda que la extensión de los trabajos no exceda de 20 páginas.

*Gustavo Izquierdo Buenrostra*  
Coordinador



## PRESENTACIÓN

Mixba'al es una revista de divulgación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana.

El primer artículo de este número es un trabajo del profesor Dr. Jorge A. León Vázquez en el que se presentan diferentes tipos de integrales estocásticas esenciales.

El segundo artículo es una colaboración del profesor Dr. Evgueni Gordienko en la que discute de manera intuitiva los conceptos de convergencia de sucesiones y series en el contexto de la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga.

La intención es continuar con este formato y la revista invita a someter contribuciones de esta índole en el idioma español, aunque ocasionalmente pueden aceptarse contribuciones en inglés. Inicialmente se publicará al menos un número al año.

Toda comunicación debe ser dirigida al comité editorial, al correo electrónico: [mixbaal2009@gmail.com](mailto:mixbaal2009@gmail.com).





## ALGUNAS DEFINICIONES DE INTEGRAL ESTOCÁSTICA

JORGE A. LEÓN

RESUMEN. El propósito de este trabajo es dar una idea de las integrales que se utilizan en el área del cálculo estocástico. La dificultad principal para definir este tipo de integrales es que, en general, el integrador no es de clase  $C^1$  (i.e., no tiene derivada continua en todos los puntos), ni es de variación acotada. En general, en aplicaciones que surgen en problemas prácticos, los integradores presentan este problema. Para definir estas integrales nos basaremos en las propiedades que tiene el movimiento browniano fraccionario ya que en la actualidad es un proceso utilizado como integrador, debido a que estas propiedades lo convierten en un proceso adecuado para modelar fenómenos naturales o problemas prácticos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Hablando burdamente, los fenómenos naturales o las aplicaciones del conocimiento humano a la vida cotidiana se representan mediante funciones  $x$  que satisfacen una ecuación (digamos) integral de la forma

$$(1) \quad x_t = x_0 + \int_0^t a(s, x_s) ds + \int_0^t b(s, x_s) dg_s, \quad t \in [0, T],$$

donde  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que modela los factores externos que afectan al sistema y/o es una corrección del sistema debido a que no se puede estimar todos los parámetros involucrados ya que, en general, se tiene poca información del problema en cuestión debido a los costos, que es imposible de realizar experimentos (ya sea por ética o por efectos indeseables), no se cuenta con la tecnología necesaria, etc. En la literatura, un proceso utilizado para representar esta perturbación es el movimiento browniano fraccionario  $B^H$ , con parámetro de Hurst  $H \in (0, 1)$ . El movimiento browniano fraccionario  $B^H = \{B_t^H : t \in [0, T]\}$  es un proceso gaussiano (ver Observación 2.i)) con media cero y función de covarianza

$$R_H(t, s) = E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad t, s \in [0, T].$$

Algunas propiedades de  $B^H$  son:

- $B^H$  es un movimiento browniano para  $H = 1/2$  (ver Definición 3). Además,  $B^H$  es una semimartingala (ver Bojdecki [3] o Protter [23]), si y sólo si,  $H = 1/2$ . Así, para estudiar fenómenos gobernados por  $B^H$ , el cálculo clásico de Itô es únicamente útil para  $H = 1/2$ .
- $B^H$  tiene incrementos estacionarios. Es decir,

$$E(|B_t^H - B_s^H|^2) = |t - s|^{2H}, \quad t, s \in [0, T].$$

- El teorema de continuidad de Kolmogorov implica que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una variable aleatoria  $G_{\varepsilon, T}$  tal que

$$|B_t^H - B_s^H| \leq G_{\varepsilon, T} |t - s|^{H-\varepsilon}, \quad t, s \in [0, T].$$

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60H05, 60-02.

*Palabras clave.* Espacios de probabilidad; fórmula de integración por partes; integrales en el sentido de Itô, Young, hacia adelante y fraccionaria; movimiento browniano fraccionario; semimartingalas; sumas de Riemann-Stieltjes; teorema de convergencia dominada.

Parcialmente apoyado por el proyecto CONACyT 220303.

En otras palabras, las funciones  $B^H(\omega) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  (i.e., las trayectorias de  $B^H$ ) son Hölder continuas para cualquier exponente menor que  $H$ , para casi toda  $\omega \in \Omega$ .

- $B^H$  es un proceso autosimilar con índice  $H$ . Esto es,  $\{B_t^H : t \geq 0\}$  y  $\{a^{-H} B_{at}^H : t \geq 0\}$  tienen la misma distribución.
- $\{B_t^H : t \in [0, T]\}$  no tiene trayectorias de variación acotada, pero tiene trayectorias de  $1/H$ - variación finita (ver Sección 3).
- La covarianza sobre intervalos decae asintóticamente como una potencia negativa de la distancia entre los intervalos.
- $B^H$  tiene representaciones integrales que permiten usar el cálculo de Malliavin (ver libro de Nualart[21])

Para ver otras propiedades de  $B^H$ , el lector puede consultar Nualart [20]. Lo anterior hace del movimiento browniano fraccionario un proceso estocástico conveniente para modelar la evolución de fenómenos en la naturaleza mediante ecuaciones de la forma (1), con  $g = B^H$ .

Para fijar ideas, en este trabajo trataremos con integrales con respecto a integradores que cumplen ciertos rasgos del movimiento browniano fraccionario  $B^H$ . Explicaremos claramente que propiedades de  $B^H$  permiten introducir el concepto de integral en cuestión, para que el lector interesado en otros integradores pueda considerar dicho enfoque de integral. Cuando se considera un proceso  $Y$  en  $[0, T]$  está involucrado un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (ver libro de Bojdecki [3]). Así pues,  $B^H$  está definido de  $\Omega \times [0, T]$  a  $\mathbb{R}$ . En la teoría de la probabilidad, los elementos de  $\Omega$  representan los factores que afectan al sistema,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra cuyos elementos son subconjuntos de  $\Omega$  que modelan la información con que se cuenta y  $P$  es una medida que indica que tan probable es que ocurra un evento en relación a otro. Recordemos que  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra, si y sólo si,  $\Omega \in \mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}$  es cerrada bajo complementos y uniones numerables. Las trayectorias de  $B^H$  (i.e., las funciones  $B^H(\omega) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  para casi toda  $\omega \in \Omega$ ) no tienen derivadas en todos los instantes  $t \in [0, T]$  y por lo tanto no son de variación acotada en  $[0, T]$  ya que estas últimas tienen derivadas en casi todos los puntos  $t \in [0, T]$  (ver Royden [24], Sección 12).

Ahora la pregunta interesante es ¿Cómo defino una integral con respecto a  $B^H$ ? Una respuesta natural es usando sumas de Riemann-Stieltjes como sigue.

Sean  $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  una partición de  $[0, T]$  y un conjunto  $\rho = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$  con  $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . La norma  $|\pi|$  de  $\pi$  se define como  $|\pi| = \sup_{0 \leq i \leq n-1} \{t_{i+1} - t_i\}$ . Como veremos más adelante (Ver Sección 3), hay diferentes formas de definir la integral de Riemann-Stieltjes, de  $f$  con respecto a  $g$ , para  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones acotadas. Una de ellas es la siguiente, la cual usamos aquí para simplificar la exposición.

**Definición 1.** Se define la *suma de Riemann-Stieltjes para  $f$  con respecto a  $g$* , mediante la partición  $\pi$  y el conjunto  $\rho$ , como:

$$(2) \quad S_{RS}(f, g, \pi, \rho) = \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(g(t_{i+1}) - g(t_i)).$$

Decimos que  $f$  es *Riemann-Stieltjes integrable con respecto a  $g$* , si y sólo si,  $S_{RS}(f, g, \pi, \rho)$  converge cuando  $|\pi| \rightarrow 0$ . En este caso, el límite es denotado por  $MRS - \int_0^T f dg$ .

Dada una función  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , uno podría pensar que una buena integral con respecto a  $g$  debe estar definida para cualquier función continua. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

**TEOREMA 2.** *Sea  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua por la derecha. Entonces  $MRS - \int_0^T f dg$  existe para toda  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, si y sólo si,  $g$  tiene variación*

acotada en  $[0, T]$ . Además, en este caso

$$(3) \quad \left| MRS - \int_0^T f dg \right| \leq \left( \sup_{t \in [0, T]} |f(t)| \right) V_g(0, T),$$

donde  $V_g(0, T)$  es la variación total de  $g$  en  $[0, T]$ .

- Observaciones 1.*
- i) Si la función  $g$  no tiene variación acotada en  $[0, T]$ , entonces existen funciones continuas  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $MRS - \int_0^T f dg$  no está bien definida.
  - ii) Versiones de este resultado se pueden encontrar en Fichtenholz [6], Kestelman [13] (Teorema 335) o en Stroock [29] (Teorema 1.2.15).
  - iii) En Protter [23] se extiende este teorema para procesos estocásticos y la convergencia de (2) es en probabilidad. La demostración, en este caso, utiliza el teorema de Banach-Steinhaus, el cual puede ser consultado en Rudin [25].

Por otro lado una manera natural para introducir una integral con respecto a  $B^H$  es trayectoria por trayectoria (i.e.  $\omega$  por  $\omega$ ) usando la Definición 1. Pero como ya mencionamos las trayectorias de  $B^H$  no son de variación acotada. Así el Teorema 2 implica que no todas las funciones continuas son integrables con respecto a  $B^H$  trayectorialmente. Otra manera es definir una integral de un proceso, (i.e. una función de  $\Omega \times [0, T]$  en  $\mathbb{R}$ ) con respecto a  $B^H$  mediante el cálculo estocástico. Es bien sabido que  $B^H$  es una semimartingala, si y sólo si,  $H = \frac{1}{2}$ . El conjunto de semimartingalas  $Z$  es considerada como la familia de buenos integradores ya que  $\int_0^T \cdot dZ$  satisface versiones del teorema de convergencia dominada (ver Bojdecki [3] o Protter [23]). Recordemos que el teorema de convergencia dominada nos da criterios para saber si una sucesión  $\left\{ \int_0^T f_n dZ : n \in \mathbb{N} \right\}$  de integrales con respecto a una función o un proceso  $Z$  converge a una integral  $\int_0^T f dZ$ . Por ejemplo si  $\{f_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$  es una familia de funciones continuas que converge uniformemente a  $f$  en  $[0, T]$ , entonces (3) implica que  $\int_0^T f_n dg$  va a  $\int_0^T f dg$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si  $g$  tiene variación acotada en  $[0, T]$ . El objetivo de este trabajo es dar una idea de las integrales que se usan en la actualidad para tratar con  $B^H$  o con procesos que no tienen trayectorias de variación acotada. En la medida de lo posible estudiaremos la relación que hay entre éstas, los teoremas fundamentales del cálculo y las estimaciones (similares a (3)) que cumplen.

Estas notas son parte del curso invitado que el autor impartió en la Escuela CIMPA 2014 “Algebra, Combinatorics and Physics”, de la Universidad de Valparaíso, Chile. El autor también fue invitado a dar este curso en las Jornadas de Probabilidad & Procesos Estocásticos, realizado en la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, en 2015.

La organización del artículo es como sigue. En la Sección 2 analizamos la integral estocástica con respecto al movimiento browniano (i.e., con respecto a  $B^H$ , con  $H = 1/2$ ), definida mediante el cálculo estocástico de Itô. Cabe mencionar que en este caso  $\int_0^T Y dZ$  es una integral de un proceso  $Y$  con respecto al proceso  $Z$  (i.e., no es definido  $\omega$  por  $\omega$ ). En la Sección 3 estudiaremos la integral de Young para funciones de  $p$ -variación finita. La integral hacia adelante en el sentido de Russo y Vallois [27] es dada en la Sección 4. La integral de Young es considerada en las secciones 5 y 6 mediante un enfoque algebraico y vía el cálculo fraccionario, respectivamente. Finalmente, en la Sección 7 trataremos con trayectorias rugosas para definir una integral.

## 2. INTEGRAL ESTOCÁSTICA CON RESPECTO AL MOVIMIENTO BROWNIANO

En esta sección supondremos que todos los procesos estocásticos están definidos en un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Recordemos que un proceso estocástico es una función  $Y : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $Y_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ , para todo abierto  $A$  de  $\mathbb{R}$  y  $t \in [0, T]$ . Para detalles sobre procesos estocásticos, el lector puede consultar Bojdecki[3] o Protter [23].

**2.1. Integral Estocástica en el Sentido de Itô.** En este caso consideramos el movimiento browniano  $W = \{W_t : t \in [0, T]\}$  (i.e., trabajamos con  $B^{\frac{1}{2}}$ , el cual es una martingala). Es bien sabido que  $B^H$  es una semimartingala, si y sólo si,  $H = \frac{1}{2}$ . Así que la integral de Itô sólo se puede usar para  $H = \frac{1}{2}$ , ya que esta última integral sólo se ha definido para semimartingalas (ver Protter [23]). Una forma de definir el movimiento browniano o proceso de Wiener es de la siguiente manera:

**Definición 3.** Decimos que  $W = \{W_t : t \in [0, T]\}$  es un *movimiento browniano*, si y sólo si,

- i)  $P([W_0 = 0]) = 1$ .
- ii) Para  $0 \leq s < t \leq T$  y  $a < b$ ,

$$P([a \leq W_t - W_s \leq b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-x^2/2(t-s)} dx.$$

- iii) Sean  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ , entonces

$$(4) \quad W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son independientes.

- iv)  $P([W \text{ es continuo}]) = 1$ .

*Observaciones 2.* i) El inciso ii) de la definición nos dice que la variable aleatoria  $W_t - W_s$  es gaussiana con media cero y varianza  $t - s$ , y que, junto con iii),  $W$  es un proceso gaussiano.

ii) En probabilidad no se acostumbra escribir a  $\omega$ . Por ejemplo,  $[W_0 = 0]$  denota al conjunto  $\{\omega \in \Omega : W_0(\omega) = 0\}$ . Por el teorema de continuidad de Kolmogorov, i) y ii) implican que  $W$  tiene una versión continua (ver Karatzas y Shreve [12]). Recordemos que  $\tilde{W}$  es una versión de  $W$ , si y sólo si,  $P[W_t = \tilde{W}_t] = 1$ , para toda  $t \in [0, T]$ . Así uno puede omitir iv) y considerar la versión continua.

iii) Intuitivamente, lo que significa el inciso iii) de la definición es que el comportamiento de  $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  no afecta al resto de variables aleatorias en (4), y viceversa.

iv) Para más detalles de la Definición 3, el lector puede consultar Arnold [2], Kuo [14], o Karatzas y Sreve [12].

Como ya mencionamos en la introducción,  $W$  no tiene trayectorias de variación acotada y el Teorema 2 se puede extender para procesos estocásticos. Así que no podemos definir una integral trayectorial que contenga a los procesos continuos como integrandos (i.e., los que tienen trayectorias continuas). Ahora explicamos como Itô [10] resolvió este problema.

**Definición 4.** i) Decimos que una familia  $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} : t \in [0, T]\}$  es una *filtración* si  $\mathcal{F}_t$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ,  $s \leq t$ . Algunas veces denotaremos a  $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} : t \in [0, T]\}$  por  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ .

ii) Un proceso  $h : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es *adaptado a*  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  si  $h_t$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_t$ -medible (i.e.,  $h_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t$ , para  $A \subset \mathbb{R}$  abierto), para toda  $t \in [0, T]$ .

Con estas definiciones en mente, damos el análogo a (2). En la siguiente definición  $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s : s \in [0, t]\}$  (i.e., es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña para la cual  $W_s$  es  $\mathcal{F}_t^W$ -medible para todo  $s \leq t$ ).

**Definición 5.** i) Decimos que  $g : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es un *proceso simple adaptado* a  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$  si tiene la forma:

$$(5) \quad g_s = \sum_{k=0}^{n-1} g_{t_k} 1_{]t_k, t_{k+1}]}(s),$$

donde  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  es una partición del intervalo  $[0, T]$  y  $g_{t_k}$  es  $\mathcal{F}_{t_k}^W$ -medible.

ii) La *integral estocástica de un proceso simple adaptado*  $g$  de la forma (5) con respecto a  $W$  se define como:

$$(6) \quad \int_0^T g_s dW_s = \sum_{k=0}^{n-1} g_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

*Observación 1.* Note que (6) es el análogo a (2) y que, en (6),  $\rho = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ . En Kuo [14] podemos ver que la definición de  $\int_0^T g_s dW_s$  es independiente de la representación de  $g$  como proceso simple.

Una propiedad importante de la integral estocástica (6) es la siguiente relación de isometría.

PROPOSICIÓN 6. *Sea  $g$  como en (5) tal que  $E \left( \int_0^T g_s^2 ds \right) < \infty$ . Entonces,*

$$(7) \quad E \left( \left( \int_0^T g_s dW_s \right)^2 \right) = E \left( \int_0^T g_s^2 ds \right).$$

*Observación 2.* En la teoría de la probabilidad, si  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una variable aleatoria (i.e.,  $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$  para todo abierto  $A \subset \mathbb{R}$ ), entonces  $EX$  representa la integral de  $X$  con respecto a la medida de probabilidad  $P$ , sobre  $\Omega$ .

*Demostración.* Aquí sólo damos una idea de la demostración. Para  $i < j$ , las Propiedades 3.i)-iii) implican

$$E \left( g_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right) = E \left( g_{t_i}^2 \right) (t_{i+1} - t_i)$$

y

$$\begin{aligned} & E \left( g_{t_i} g_{t_j} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right) \\ &= E \left( W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \right) E \left( g_{t_i} g_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right) = 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} & E \left( \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right)^2 \\ &= E \left( \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} E \left( g_{t_i} g_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \right) \\ &= E \left( \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) \right) = E \left( \int_0^T g_s^2 ds \right), \end{aligned}$$

lo cual implica el resultado.  $\square$

La Proposición 6 juega el papel de (3) y permite extender la integral (6) mediante el siguiente resultado.

TEOREMA 7. *Sea  $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  un proceso medible adaptado cuadrado integrable (i.e.,  $E \left( \int_0^T X_s^2 ds \right) < \infty$ ). Entonces lo siguiente se cumple:*

i) Existe una sucesión  $\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$  de procesos simples adaptados tales que

$$(8) \quad E \left( \int_0^T |X_s - X_s^{(n)}|^2 ds \right) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

ii) La sucesión  $\left\{ \int_0^T X_s^{(n)} dW_s : n \in \mathbb{N} \right\}$  es de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ .

El inciso ii) del teorema anterior permite extender la definición de la integral estocástica (2).

**Definición 8.** Sean  $X$  y  $\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$  como en el Teorema 7. Definimos la integral estocástica en el sentido de Itô de  $X$  con respecto a  $W$  (denotada por  $\int_0^T X_s dW_s$ ), como el límite en  $L^2(\Omega)$  de la sucesión  $\left\{ \int_0^T X_s^{(n)} dW_s : n \in \mathbb{N} \right\}$ . Esto es,

$$E \left( \left[ \int_0^T X_s dW_s - \int_0^T X_s^{(n)} dW_s \right]^2 \right) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

*Observaciones 3.* i) La definición de la integral  $\int_0^T X_s dW_s$  es independiente de la sucesión  $\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$  de procesos simples y adaptados para los cuales (8) es válida. Para detalles el lector puede consultar Arnold [2], Bojdecki [3] ó Kuo [14].

ii) La integral  $\int_0^T X_s dW_s$  sigue cumpliendo la relación de isometría (7). Recordemos que esta relación permite usar versiones del teorema de convergencia dominada para la integral estocástica dada en la Definición 8. En efecto, podemos usar dichos teoremas en  $L^2(\Omega \times [0, T])$ .

iii) La integral dada en la Definición 8 se ha construido para una familia más grande. A saber, para procesos medibles y adaptados  $X$  con trayectorias cuadrado integrables. Esto es,  $\int_0^T X_s^2 ds < \infty$  con probabilidad 1 (i.e., existe un conjunto  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  tal que  $P(\tilde{\Omega}) = 1$  y  $\int_0^T X_s^2(\omega) ds < \infty$ , para  $\omega \in \tilde{\Omega}$ ). Para detalles el lector puede consultar [3, 14].

La integral de Itô satisface el siguiente “teorema fundamental del cálculo”, conocido como la fórmula de Itô.

**TEOREMA 9.** Sean  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función en  $C^{1,2}$  (i.e., tiene una derivada parcial continua con respecto a  $t$  y dos derivadas parciales continuas con respecto a  $x$ ) y

$$X_t = x + \int_0^t f_s ds + \int_0^t g_s dW_s, \quad t \in [0, T],$$

donde  $f$  y  $g$  son dos procesos adaptados (a la filtración que genera  $W$ ), con trayectorias en  $L^1([0, T])$  y en  $L^2([0, T])$ , respectivamente. Entonces,

$$(9) \quad \begin{aligned} F(t, X_t) &= F(0, x) + \int_0^t (\partial_t F(s, X_s) + \partial_x F(s, X_s) f_s) ds \\ &+ \int_0^t \partial_x F(s, X_s) g_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{xx} F(s, X_s) g_s^2 ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

*Observaciones 4.* i) Note que la última integral en (9) no aparece en el teorema fundamental del cálculo. Para dar una idea de este hecho, suponga que  $X_t = x + ft + gW_t$ , con  $f, g \in \mathbb{R}$  y  $t \in [0, T]$ . Entonces, para  $t \in [0, T]$  y  $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ , al utilizar la fórmula de Taylor aparece el término

$$g^2 \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2,$$

el cual converge (en probabilidad) a  $g^2 t$ , cuando  $\|\pi\| \rightarrow 0$ . Ahora, si en lugar de  $W$  tenemos una función  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y con variación acotada, se tiene

$$g^2 \sum_{i=1}^n (h(t_i) - h(t_{i-1}))^2 \leq g^2 \left( \sup_{|t-s| \leq \|\pi\|} |h(t) - h(s)| \right) V_h(0, T) \rightarrow 0$$

cuando  $\|\pi\| \rightarrow 0$ . En consecuencia, el teorema fundamental del cálculo no incluye la integral en cuestión.

ii) El hecho de que, en probabilidad,

$$\sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \rightarrow t, \quad \text{cuando } \|\pi\| \rightarrow 0$$

implica, hablando burdamente, que  $W$  tiene trayectorias de 2-variación finita (ver Sección 3 para el significado de esto).

iii) La fórmula de Itô (9) tiene versiones multidimensionales (ver [2, 14]). Éstas implican que el proceso  $x_t = x \exp(\int_0^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s))ds + \int_0^t b(s)dW_s)$ ,  $t \in [0, T]$ , es la única solución de la ecuación

$$x_t = x + \int_0^t a(s)x_s ds + \int_0^t b(s)x_s dW_s, \quad t \in [0, T].$$

Lamentable, la fórmula de Itô es útil en el estudio de la existencia de una única solución en el caso que la ecuación involucrada sea lineal (i.e, como la ecuación anterior).

**2.2. Integral de Skorohod.** En este apartado damos una extensión de la integral de Itô, la cual permite integrar procesos cuadrados integrables no necesariamente adaptados a la filtración que se está considerando. Para una exposición completa ver el libro de Nualart [21].

Para dar la definición de la integral de Skorohod, consideramos la familia de variables aleatorias suaves.

$$\mathcal{S} = \{F = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) : f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n), t_i \in [0, T]\},$$

donde  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  es la familia de todas las funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tales que  $f$  y sus derivadas parciales tienen crecimiento polinomial. No es difícil ver que  $\mathcal{S}$  es un conjunto denso de  $L^2(\Omega)$ .

**Definición 10.** Sea  $F \in \mathcal{S}$  de la forma  $F = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ . La derivada de  $F$  con respecto a  $W$ , denotada por  $DF$ , es el proceso estocástico

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) 1_{[0, t_i]}(t), \quad t \in [0, T].$$

Notemos  $D_t W_{t_i} = 1_{[0, t_i]}(t)$  y que  $DF$  es definido vía la regla de la cadena.

Ahora estamos listos para introducir la integral de Skorohod  $\delta$ .

**Definición 11.** Sea  $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$ . Decimos que  $u$  es *Skorohod integrable*, denotado por  $u \in \text{Dom}\delta$ , si y sólo si, existe  $\delta(u) \in L^2(\Omega)$  tal que

$$E(F\delta(u)) = E\left(\int_0^T (D_s F) u_s ds\right), \quad \text{para toda } F \in \mathcal{S}.$$

A  $\delta(u)$  se le llama *la integral de Skorohod de  $u$  con respecto a  $W$* .

*Observaciones 5.* i)  $\delta : \text{Dom}\delta \subset L^2(\Omega \times [0, T]) \rightarrow L^2(\Omega)$  es el operador adjunto de la extensión cerrada de  $D$ .

ii) Si  $F \in \mathcal{S}$  y  $u \in \text{Dom}\delta$ , entonces  $Fu \in \text{Dom}\delta$  y

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T (D_s F) u_s ds.$$

iii) Sea  $p > 1$ , entonces bajo ciertas condiciones sobre el proceso  $u$ ,

$$(10) \quad \begin{aligned} & \|\delta(u)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq C_p \left( \left( \int_0^T (E(u_t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left\| \left( \int_0^T \int_0^T (D_s u_t)^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Para la demostración de los incisos anteriores, el lector puede consultar el libro de Nualart [21].

En el siguiente resultado  $\int_0^t g_s \delta W_s$  denota a  $\delta(1_{[0,t]}(\cdot)g)$  si esta integral está bien definida.

TEOREMA 12. Sean  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función en  $C^{1,2}$  y

$$X_t = x + \int_0^t f_s ds + \int_0^t g_s \delta W_s, \quad t \in [0, T],$$

donde  $f$  y  $g$  son dos procesos que cumplen condiciones convenientes. Entonces,

$$(11) \quad \begin{aligned} F(t, X_t) &= F(0, x) + \int_0^t (\partial_t F(s, X_s) + \partial_x F(s, X_s) f_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \partial_x F(s, X_s) g_s \delta W_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{xx} F(s, X_s) g_s^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \partial_{xx}(s, X_s) (D^- X)_s g_s ds, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde

$$(D^- X)_t = \int_0^t D_t f_s ds + \int_0^t D_t g_s dW_s, \quad t \in [0, T].$$

*Observación 3.* La igualdad (11) es la fórmula de Itô para la integral de Skorohod. El último sumando en (11) no está incluido en (9). Este sumando aparece debido a la Observación 5.ii). Además, (9) y (11) son iguales si  $f$  y  $g$  son dos procesos adaptados a la filtración que genera  $W$ , ya que  $(D^- X) \equiv 0$  en este caso. Para detalles el lector puede consultar el libro de Nualart [21].

La integral de Skorohod es una extensión de la integral de Itô en el siguiente sentido.

PROPOSICIÓN 13. Sea  $u$  un proceso cuadrado integrable y adaptado a la filtración que genera  $W$ . Entonces  $u \in \text{Dom} \delta$  y

$$\delta(u) = \int_0^T u_s dW_s,$$

donde el lado derecho es la integral de Itô de  $u$  con respecto a  $W$ .

También se han definido otras integrales estocásticas mediante el cálculo de Itô (ver [23]) o por medio del cálculo de Malliavin (ver [21]), como es la integral de Stratonovich. Con  $B^H$  en lugar de  $W$ , el lector puede consultar Nualart [21] para el estudio de la integral de Skorohod y Alós et al. [1] para analizar la integral de Stratonovich. En estos artículos se puede ver la relación que hay entre  $\delta$  y la integral de Stratonovich.

Observemos que la integral de Skorohod con respecto a  $B^H$  se ha usado cuando  $H < 1/2$ , pues en este caso no es fácil usar integrales trayectoriales (i.e.,  $\omega$  por  $\omega$ ) para tratar con soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas gobernadas por el movimiento browniano fraccionario. Un ejemplo de esto es el artículo de León y San Martín [15], donde estudian ecuaciones lineales estocásticas del tipo Skorohod (i.e., la integral involucrada es  $\delta$ ).

3. INTEGRAL DE YOUNG PARA FUNCIONES DE  $p$ -VARIACIÓN FINITA

Aquí estudiamos algunas integrales del tipo Young [30] para funciones de  $p$ -variación finita. Como veremos, estas integrales son extensiones de la integral de Riemann-Stieltjes.

**3.1. Funciones de  $p$ -variación finita.** Para los detalles sobre las funciones de  $p$ -variación finita definidas en el intervalo  $[0, T]$ , ver Dudley y Norvaiša [5].

Sea  $p \geq 1$ . Se dice que una función  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tiene  $p$ -variación finita, si y sólo si,

$$V_T(f, p) := \sup_{\pi \in \Pi} \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right) < \infty,$$

donde  $\Pi$  es la familia de todas las particiones  $\pi$  de  $[0, T]$  de la forma

$$\{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = T\}.$$

La clase de las funciones de  $p$ -variación finita es representada por  $W_p([0, T])$ . Esto es  $f \in W_p([0, T])$ , si y sólo si,  $V_T(f, p) < \infty$ .

Observemos que  $f \in W_1([0, T])$ , si y sólo si,  $f$  tiene variación acotada en  $[0, T]$ . Es bien sabido que  $f \in W_1([0, T])$ , si y sólo si,  $f$  es diferencia de dos funciones no decrecientes en  $[0, T]$ . Así que una pregunta natural es ¿qué forma tienen las funciones en  $W_p([0, T])$ ? La respuesta está dada por el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 14.** *Sean  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p \geq 1$ . Entonces  $f \in W_p([0, T])$ , si y sólo si,  $f = g \circ h$ , donde  $h$  es una función acotada, no negativa y no decreciente en  $[0, T]$  y  $g$  es una función  $\frac{1}{p}$ -Hölder continua sobre  $[h(0), h(T)]$ .*

*Demostración.* Observemos que si  $f$  tiene la forma  $f = g \circ h$  donde  $g$  y  $h$  son como en el enunciado, entonces es trivial que  $f$  tiene  $p$ -variación finita.

Ahora consideramos la suficiencia. Sea  $f \in W_p([0, T])$ . Usemos la notación  $h(x) := V_x(f, p)$ ,  $x \in [0, T]$ . Es claro que  $h$  es una función no decreciente. Finalmente, defina, sobre  $[h(0), h(T)]$ ,

$$g(h(x)) = f(x), \quad x \in [0, T],$$

la cual cumple que, para  $x_1, x_2 \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |g(h(x_1)) - g(h(x_2))| &= (|f(x_1) - f(x_2)|^p)^{1/p} \\ &\leq |h(x_1) - h(x_2)|^{1/p}. \end{aligned}$$

Así, la demostración está completa.  $\square$

Una consecuencia inmediata de la Proposición 14 es el siguiente corolario.

**COROLARIO 15.** *Sea  $f \in W_p([0, T])$ , con  $p \geq 1$ . Entonces  $f$  tiene límites por la derecha y por la izquierda.*

En la siguiente sección usaremos las notaciones:

$$\|f\|_{(p)} := V_T(f, p) \quad \text{y} \quad \|f\|_{[p]} := \|f\|_{(p)} + \|f\|_{\infty},$$

donde  $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$ . Resulta que  $\|\cdot\|_{[p]}$  es una norma en  $W_p([0, T])$ . Además  $W_p([0, T])$  es completo bajo  $\|\cdot\|_{[p]}$ .

**3.2. Integrales de Young para funciones en  $W_p([0, T])$ .** Como comentamos en la Definición 1, hay varias maneras de definir la integral de Riemann-Stiltjes. Otra forma de hacerlo es como sigue.

**Definición 16.** Sean  $f, g, \pi, \rho$  como en la Definición 1. La integral de Riemann-Stiltjes extendida  $RRS - \int_0^T f dg$  de  $f$  con respecto a  $g$ , es definida como  $L$ , si dado  $\epsilon > 0$  existe una partición  $\eta_\epsilon$  de  $[0, T]$  tal que

$$|S_{RS}(f, g, \pi, \rho) - L| \leq \epsilon$$

para toda partición  $\pi$  que contiene a  $\eta_\epsilon$ .

- Observaciones 6.*
- i)  $S_{RS}(f, g, \pi, \rho)$  está dada en Definición 1.
  - ii) La integral  $RSS$  es una extensión de la integral  $MRS$ . En otras palabras, si  $f$  es integrable, con respecto a  $g$  en el sentido de la Definición 1, entonces  $RSS - \int_0^T f dg$  está bien definida y coincide con  $MRS - \int_0^T f dg$ , como es demostrado en Dudley y Norvaisa [5].

Una integral que se está usando cuando se considera al movimiento browniano fraccionario, con  $H > \frac{1}{2}$ , es la integral de Young (ver Nualart y Răşcanu [22]). Para introducir esta integral considere  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , una función con límites por la derecha y por la izquierda. Defina

$$\begin{aligned} \gamma_g(\{0\}) &= g(0+) - g(0), & \gamma_g(\{T\}) &= g(T) - g(T-), \\ \gamma_g(\{x\}) &= g(x+) - g(x-), & \text{para } x &\in (0, T), \end{aligned}$$

y

$$\gamma_g((a, b)) = g(b-) - g(a+), \quad \text{para } 0 \leq a < b \leq T.$$

Es fácil ver que  $\gamma_g$  se extiende de manera única a una función finitamente aditiva definida en los subintervalos de  $[0, T]$ . Una partición de intervalos de  $[0, T]$  es una colección finita  $\lambda = \{I_j \subset [0, T] : j = 1, 2, \dots, n\}$  de intervalos no vacíos disjuntos tal que  $\cup_{j=1}^n I_j = [0, T]$  y  $x < y$  si  $x \in I_i$  y  $y \in I_j$  con  $i < j$ . Observe que  $I_j$  puede ser un intervalo con un punto. Ahora considere la familia  $\rho_\lambda = \{y_1, \dots, y_n\}$ , donde  $y_i \in I_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

- Definición 17.**
- i) Se define la suma de Kolmogorov de  $f$  con respecto a  $g$ , asociada a  $\lambda$  y  $\rho_\lambda$ , como:

$$S_K(f, g, \lambda, \rho_\lambda) = \sum_{i=1}^n f(y_i) \gamma_g(I_i).$$

- ii) Se dice que la integral de Young de  $f$  con respecto a  $g$  existe y es igual a  $L$ , si y sólo sí, dado  $\epsilon > 0$  existe una partición  $\lambda$  de intervalos  $[0, T]$  tal que:

$$|S_K(f, g, \eta, \rho_\eta) - L| < \epsilon$$

para cualquier partición  $\eta$  de intervalos de  $[0, T]$  tal que cualquier elemento en  $\lambda$  es unión de intervalos en  $\eta$ . En este caso usamos la notación:

$$Y - \int_0^T f dg := L.$$

*Observación 4.* En [5] se demuestra que si  $RRS - \int_0^T f dg$  está bien definida, entonces  $Y - \int_0^T f dg$  existe. En este caso, ambas integrales son iguales.

**TEOREMA 18.** Sean  $f \in W_p([0, T])$  y  $g \in W_q([0, T])$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ . Entonces,

- i)  $MRS - \int_0^T f dg$  existe, si y sólo si,  $f$  y  $g$  no tienen discontinuidades en común.
- ii)  $RRS - \int_0^T f dg$  existe, si y sólo si,  $f$  y  $g$  no tienen discontinuidades por la derecha o discontinuidades por la izquierda en común (en un mismo punto).
- iii) La integral  $Y - \int_0^T f dg$  siempre existe.

En cualquiera de los tres casos,

$$(12) \quad \left| \int_0^T f dg \right| \leq C_{p,q} \|f\|_{[p]} \|g\|_{(q)},$$

donde  $C_{p,q} = \zeta(p^{-1} + q^{-1})$  con  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ .

*Observaciones 7.* i) si  $(p, q) = (1, \infty)$  ó  $(p, q) = (\infty, 1)$ , entonces  $Y - \int_0^T f dg$  existe (ver [5]).

ii) Recuerde que el Corolario 15 implica que  $f$  tiene límites por la derecha y por la izquierda si  $f \in W_p([0, T])$ .

La herramienta principal para demostrar el Teorema 18 es el siguiente lema, en donde, dada una sucesión finita  $a = \{a_1, \dots, a_n\}$  de números reales, obtenemos una sucesión  $\tilde{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$  cuando reemplazamos algunas comas por símbolos de suma +. Definimos, para  $a = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $b = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,

$$S_{p,q}(a, b) = \sup \left( \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{a}_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{b}_i|^q \right)^{1/q} \right),$$

donde  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$  son el resultado de cambiar algunas comas por + en el mismo lugar.

LEMA 19. (*Young [30]*) Sean  $a = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $b = \{b_1, \dots, b_n\}$  dos sucesiones finitas de números reales y  $s = p^{-1} + q^{-1}$ , con  $s > 1$ . Entonces,

$$\left| \sum_{1 \leq r \leq t \leq n} a_r b_t \right| \leq \{1 + \zeta(s)\} S_{p,q}(a, b).$$

Para dar una idea de como se usa este lema en la demostración del Teorema 18, observamos que, por ejemplo,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(x_i+) [g(x_i-) - g(x_{i-1}-)] \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i+) [g(x_i-) - g(x_{i-1}-)] - f(a+) \sum_{i=1}^n [g(x_i-) - g(x_{i-1}-)] \\ & \quad + \sum_{i=1}^n f(a+) [g(x_i-) - g(x_{i-1}-)] \\ &= \sum_{1 \leq r \leq i \leq n} [f(x_r+) - f(x_{r-1}+)] [g(x_i-) - g(x_{i-1}-)] \\ & \quad + f(a+) [g(b-) - g(a)]. \end{aligned}$$

#### 4. INTEGRAL HACIA ADELANTE

Ahora consideramos la integral hacia adelante usando el enfoque de Russo y Vallois [27].

**Definición 20.** Sean  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable (con respecto a la medida de Lebesgue) y  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Decimos que  $f$  es integrable hacia adelante con respecto a  $g$  (representado por  $f \in \text{Dom} \delta^{g-}$ ), si y sólo si,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T f(s) (g((s + \varepsilon) \wedge T) - g(s)) ds$$

converge cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . El límite se denota por  $\int_0^T f dg^-$  y es llamado *la integral de  $f$  con respecto a  $g$ , en el sentido de Russo y Vallois (o hacia adelante)*.

La idea de esta definición es extender el dominio de las integrales  $MRS$  y estocástica en el sentido de Itô. En efecto, suponga que  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas con  $g$  de variación acotada. En este caso podemos escribir

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_0^T f(s) (g(s + \varepsilon) \wedge T) - g(s) ds \\ = \varepsilon^{-1} \int_0^T f(s) \int_s^{(s+\varepsilon) \wedge T} dg_r ds. \end{aligned}$$

Entonces el teorema de Fubini para la integral de Riemann-Stieltjes permite escribir

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_0^T f(s) (g(s + \varepsilon) \wedge T) - g(s) ds \\ = \int_0^T \left( \varepsilon^{-1} \int_{(r-\varepsilon) \vee 0}^r f(s) ds \right) dg_r \rightarrow \int_0^T f dg, \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Usando la idea anterior se puede probar el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en Russo y Vallois [27].

**PROPOSICIÓN 21.** *Sea  $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  un proceso medible, cuadrado integrable y adaptado a la filtración que genera el movimiento browniano  $W$ . Entonces,*

$$(13) \quad \int_0^T X_s dW_s^- = \int_0^T X_s dW_s,$$

donde el lado derecho es la integral estocástica de Itô, introducida en la Definición 8.

En [27] podemos ver que la integral hacia adelante cumple la fórmula de Itô (9) y que si  $W$  es una semimartingala con respecto a una filtración  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$  tal que  $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{G}_t$ , para toda  $t \in [0, T]$ , entonces (13) es válida, pero ahora el lado derecho es la integral de Itô de  $X$  con respecto a la  $\mathcal{G}$ -semimartingala  $W$ . El lector puede ver los libros de Bojdecki [3] y Protter [23] para la definición de esta integral en el sentido de Itô. Lamentablemente la integral de Skorohod no tiene esta propiedad pues aparece un término extra que depende de la derivada del integrando, en el sentido del cálculo de Malliavin, debido a la Observación 5.ii). Para entender esto, consideremos el caso en que el integrando es  $W_T 1_{[0, T]}$ . Entonces, dicha observación da

$$\delta(W_T) = W_T \delta(1) - \int_0^T (D_s W_T) ds = W_T^2 - T = \int_0^T W_T dW_s - T.$$

Más adelante, en la Proposición 26, veremos la relación que hay entre la integral hacia adelante y la integral de Young.

## 5. INTEGRAL DE YOUNG PARA FUNCIONES HÖLDER CONTINUAS

En lo que sigue,  $C_k$  representa el espacio de todas las funciones continuas  $g : [0, T]^k \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g_{t_i, \dots, t_k} = 0$  si  $t_i = t_{i+1}$  para algún  $i \leq k-1$ . Para  $k=1$ ,  $C_1$  es la familia de todas las funciones continuas de  $[0, T]$  en  $\mathbb{R}$ .

La herramienta principal en esta sección es el operador

$$\delta : C_k \rightarrow C_{k+1}$$

dado por

$$(\delta g)_{t_i, \dots, t_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k-i} g_{t_1, \dots, \widehat{t}_i, \dots, t_{k+1}}.$$

Aquí  $\widehat{t}_i$  significa que se omite  $t_i$ . Es fácil ver que  $\delta\delta = 0$  y que  $\mathcal{Z}C_k = \mathcal{B}C_k$ , para  $k \geq 2$ , donde

$$(14) \quad \mathcal{Z}C_k = C_k \cap \ker \delta \quad \text{y} \quad \mathcal{B}C_k = C_k \cap \text{Im} \delta.$$

Notemos que si  $g \in C_1$  y  $h \in C_2$ , entonces

$$(15) \quad (\delta g)_{s,t} = g_t - g_s \quad y \quad (\delta h)_{s,u,t} = h_{s,t} - h_{s,u} - h_{u,t}.$$

El siguiente cálculo lo usaremos más adelante. Para  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , defina  $I \in C_2$  como

$$I_{s,t} = \int_s^t df_v \int_s^v dg_u, \quad \text{para } s, t \in [0, T].$$

Entonces (15) da

$$(16) \quad \begin{aligned} (\delta I)_{s,u,t} &= \int_u^t df_v \int_s^v dg_r - \int_u^t df_v \int_u^v dg_r \\ &= \int_u^t df_v \int_s^u dg_r = (g_u - g_s)(f_t - f_u). \end{aligned}$$

Para  $f \in C_2$  y  $\mu > 0$ , sean

$$\|f\|_\mu := \sup_{r,t \in [0,T]} \frac{|f_{r,t}|}{|t-r|^\mu}$$

y  $C_2^\mu := \{f \in C_2 : \|f\|_\mu < \infty\}$ . Observe que  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es Hölder continua con exponente  $\mu$ , si y sólo si,  $\|\delta g\|_\mu < \infty$ . En este caso existe  $M > 0$  tal que

$$|g_t - g_s| \leq M |t - s|^\mu, \quad t, s \in [0, T].$$

Cuando  $\mu > 1$ , se tiene que  $g$  es una función constante ya que  $g$  sería una función de clase  $C^1$  con derivada nula.

En lo que sigue  $C^\mu([0, T])$  denota la familia de todas las funciones Hölder continuas en  $[0, T]$  con exponente  $\mu$ . Similarmente, para  $h \in C_3$  y  $\gamma, \rho > 0$ , definimos

$$\begin{aligned} \|h\|_{\gamma,\rho} &= \sup_{s,u,t \in [0,T]} \frac{|h_{sut}|}{|u-s|^\gamma |t-u|^\rho}, \\ \|h\|_\mu &= \inf \left\{ \sum_i \|h_i\|_{\rho_i, \mu - \rho_i} : h = \sum_i h_i, 0 < \rho_i < \mu \right\}, \end{aligned}$$

y

$$C_3^\mu = \{h \in C_3 : \|h\|_\mu < \infty\}.$$

En el siguiente resultado usaremos la notación

$$C_i^+ = \bigcup_{\mu > 1} C_i^\mu, \quad i = 2, 3, \quad y \quad \mathcal{Z}C_3^{1+} = C_3^{1+} \cap \text{Ker} \delta.$$

**PROPOSICIÓN 22.** *Existe un único operador lineal continuo  $\Lambda : \mathcal{Z}C_3^{1+} \rightarrow C_2^{1+}$  tal que*

$$\delta \Lambda = \text{Id}_{\mathcal{Z}C_3^{1+}}$$

y

$$(17) \quad \|\Lambda h\|_\mu \leq C_\mu \|h\|_\mu, \quad \text{para } h \in \mathcal{Z}C_3^\mu \text{ con } \mu > 1.$$

*Observaciones 8.* i) Note que si  $h \in C_3^{1+}$  es tal que  $\delta h = 0$ , entonces existe un único  $g = \Lambda(h) \in C_2^{1+}$  tal que  $\delta g = h$ .

ii) En Gubinelli [8] está la demostración original de este resultado, la cual es muy técnica. La que presentamos aquí es una adaptación de la demostración del Lema 4.2 en el libro de Friz y Hairer [7]. Así el lector puede consultar este libro para los detalles.

*Demostración.* Sea  $h \in C_3^{1+}$  tal que  $\delta h = 0$ . Entonces, (14) implica que existe  $\Xi \in C_2$  tal que  $h = \delta \Xi$ . Ahora sean  $P_0 = \{s, t\}$ ,  $(I^\circ \Xi)_{s,t} = \Xi_{s,t}$ , con  $s, t \in [0, T]$ , y  $\rho_n$  la partición diádica de orden  $n$  del intervalo  $[s, t]$ , la cual contiene  $2^n$  intervalos de longitud  $2^{-n}(t-s)$ . Defina

$$(I^n \Xi)_{s,t} = \sum_{[u,v] \in \rho_n} \Xi_{u,v}.$$

Así podemos ver que

$$\left| (I^{n+1} \Xi)_{s,t} - (I^n \Xi)_{s,t} \right| \leq 2^{n(1-\beta)} \|\delta \Xi\|_\beta |t-s|^\beta,$$

para algún  $\beta > 1$ , lo cual se sigue del hecho de que  $h = \delta \Xi$ . Consecuentemente, el límite

$$(I \Xi)_{s,t} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I^n \Xi)_{s,t}$$

está bien definido y

$$\begin{aligned} \left| (I \Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t} \right| &\leq \sum_{n \geq 0} \left| (I^{n+1} \Xi)_{s,t} - (I^n \Xi)_{s,t} \right| \\ (18) \qquad \qquad \qquad &\leq C \|\delta \Xi\|_\beta |t-s|^\beta. \end{aligned}$$

Uno puede ver que la definición de  $I \Xi$  es independiente de  $\rho_n$ . Esto es, en lugar de  $\rho_n$  podemos usar una partición arbitraria  $\bar{\rho}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $\bar{\rho}_{n+1}$  es más fina que  $\bar{\rho}_n$  y  $\|\bar{\rho}_n\| \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Ahora usemos la convención  $\Lambda h = \Xi - I \Xi$ . Note que (18) implica  $\Lambda h \in C_2^{1+}$  y que

$$\begin{aligned} (\delta \Lambda h)_{s,u,t} &= (\delta \Xi)_{s,u,t} - (\delta I \Xi)_{s,u,t} \\ &= h_{s,u,t} - I \Xi_{s,t} + I \Xi_{s,u} + I \Xi_{u,t} = h_{s,u,t}. \end{aligned}$$

Finalmente, suponga que existe otro operador  $\tilde{\Lambda}$  que cumple el resultado. Entonces

$$\delta (\Lambda h - \tilde{\Lambda} h) = h - h = 0,$$

y por lo tanto (14) y (15) permiten encontrar  $f \in C^\beta([0, T])$ , con  $\beta > 1$ , tal que

$$f(t) - f(s) = \Lambda_{s,t} h - \tilde{\Lambda}_{s,t} h,$$

pero  $f$  es constante debida a que  $\beta > 1$ . Así  $\Lambda_{s,t} h = \tilde{\Lambda}_{s,t} h$  y la demostración está completa.  $\square$

Para definir la integral de Young mediante la herramienta anterior, supongamos que por el momento  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones suaves (o al menos de clase  $C^1$ ). Entonces,

$$\begin{aligned} \int_s^t f dg &= f_s (\delta g)_{s,t} + \int_s^t (\delta f)_{su} dg_u \\ (19) \qquad \qquad &= f_s (\delta g)_{s,t} + \mathcal{J}_{s,t} (\delta f dg), \quad s, t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{J}_{s,t} (\delta f dg)$  representa a la integral  $\int_s^t (\delta f)_{s,u} dg_u$ . Observe que (16) da

$$h_{s,u,t} = (\delta (\mathcal{J} (\delta f dg)))_{s,u,t} = (\delta f)_{s,u} (\delta g)_{u,t}.$$

Consecuentemente,  $h \in C_3^{1+}$  es tal que  $\delta h \equiv 0$ , debido a que  $\delta \delta \equiv 0$ . Por lo que

$$\mathcal{J} (\delta f dg) = \Lambda (h) = \Lambda (\delta f \delta g),$$

lo cual, junto con (19) implica

$$\int_s^t f dg = f_s (\delta g)_{s,t} + \Lambda_{s,t} (\delta f \delta g).$$

Esto motiva el siguiente resultado

TEOREMA 23. Sean  $f \in C^\kappa([0, T])$  y  $g \in C^\gamma([0, T])$ , con  $\kappa + \gamma > 1$ . Defina

$$(20) \quad \int_s^t f dg = f_s (\delta g)_{s,t} + \Lambda_{s,t} (\delta f \delta g), \quad s, t \in [0, T].$$

Entonces:

- i) Si  $f$  y  $g$  son funciones suaves,  $\int_s^t f dg$  coincide con la integral usual de Riemann.
- ii) La integral  $\int_s^t f dg$  satisface, para  $s < t$ ,

$$(21) \quad \left| \int_s^t f dg \right| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\gamma (t-s)^\gamma + c_{\gamma,\kappa} \|f\|_\kappa \|g\|_\gamma (t-s)^{\gamma+\kappa}.$$

iii) Tenemos que

$$\int_s^t f dg = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i} (\delta g)_{t_i, t_{i+1}},$$

donde  $\pi = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  es una partición del intervalo  $[0, T]$ .

Observación 5. Note que la Proposición 14 implica que  $f \in W_{\frac{1}{\kappa}}([0, T])$  y  $g \in W_{\frac{1}{\gamma}}([0, T])$ . Consecuentemente, el Teorema 18 implica que  $Y - \int_0^T f dg$  existe y su definición, junto con iii), da que  $Y - \int_0^T f dg = \int_0^T f dg$ .

Note que la demostración de los incisos i) y ii) del teorema anterior son una consecuencia inmediata de la Definición (20). El inciso iii) también es una consecuencia inmediata del siguiente resultado.

LEMA 24. Sea  $g \in C_2$  tal que  $\delta g \in C_3^{1+}$ . Defina  $h = (Id - \Lambda \delta)g$ . Entonces, existe  $f \in C_1$ , tal que  $h = \delta f$  y

$$h_{s,t} = f(t) - f(s) = \lim_{|\pi_{s,t}| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i, t_{i+1}},$$

donde  $\pi_{s,t} = \{s = t_0 < t_i < \dots < t_n = t\}$  es una partición del intervalo  $[s, t]$ .

Demostración. Note que  $\delta h = \delta g - \delta \Lambda \delta g = \delta g - \delta g = 0$ . Por lo que (14) permite encontrar  $f \in C_1$  tal que  $h = \delta f$ . Finalmente

$$\begin{aligned} (\delta h)_{s,t} &= \sum_{i=0}^{n-1} (f_{t_{i+1}} - f_{t_i}) = \lim_{|\pi_{s,t}| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} h_{t_i, t_{i+1}} \\ &= \lim_{|\pi_{s,t}| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i, t_{i+1}} - \lim_{|\pi_{s,t}| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (\Lambda \delta g)_{t_i, t_{i+1}} \\ &= \lim_{\pi_{s,t} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i, t_{i+1}}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que (17) implica que existe  $\beta > 1$  tal que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (\Lambda \delta g)_{t_i, t_{i+1}} \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |(\Lambda \delta g)_{t_i, t_{i+1}}| \leq C_\beta \|\delta g\|_\beta \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^\beta \\ &\leq C_\beta \|\delta g\|_\beta |\pi_{s,t}|^{\beta-1} T. \end{aligned}$$

Así hemos terminado la demostración.  $\square$

Ahora estamos listos para la demostración del inciso iii) del Teorema 23.

Demostración. Sólo hay que observar que  $\delta(f \delta g) = -\delta f \delta g$  y  $\mathcal{J}(f dg) = [Id - \Lambda \delta](f \delta g)$ . Así el resultado se sigue del Lemma 24, y por lo tanto la demostración está terminada.  $\square$

La integral de Young satisface el siguiente teorema fundamental del cálculo, cuya demostración se encuentra en Zähle (Teorema 4.3.1).

**TEOREMA 25.** Sean  $f \in C^\gamma([0, T])$  and  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  tal que  $F' \circ f \in C^\kappa([0, T])$ , con  $\kappa + \gamma > 1$ . Entonces,

$$F(f(t)) = F(f(0)) + \int_0^t F'(f) df, \quad t \in [0, T].$$

*Observación 6.* En este caso no hay términos extras ya que, para  $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  y  $\gamma > 1/2$ , se tiene que

$$\sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \leq C \sum_{i=1}^n |t_i - t_{i-1}|^{2\gamma} \leq C \|\pi\|^{2\gamma-1} T,$$

lo cual converge a cero cuando  $\|\pi\| \rightarrow 0$ .

Finalmente observamos que el siguiente resultado fue demostrado por Russo y Vallois [26].

**PROPOSICIÓN 26.** Sean  $f \in C^\kappa([0, T])$  y  $g \in C^\gamma([0, T])$  con  $\kappa + \gamma > 1$ . Entonces,  $\int_0^T f dg^-$  existe y

$$\int_0^T f dg^- = \int_0^T f dg.$$

## 6. INTEGRAL DE YOUNG VÍA EL CÁLCULO FRACCIONARIO

En esta sección vamos a estudiar la integral definida en (20) utilizando las técnicas del cálculo fraccionario. El lector interesado en este cálculo puede consultar el libro de Samko et al. [28].

Para  $f \in L^1([0, T])$  y  $\alpha > 0$ , las integrales fraccionarias, de Riemann-Liouville, a la izquierda y a la derecha de  $f$  de orden  $\alpha$  están dadas por

$$(I_{0+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad t \in [0, T],$$

y

$$(I_{T-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (y-t)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad t \in [0, T],$$

respectivamente. Aquí  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-r} dr$ . Cabe mencionar que estas integrales fraccionarias están definidas para casi toda  $t \in [0, T]$ , lo cual es una consecuencia del teorema de Fubini. En efecto, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int_0^T |(I_{0+}^\alpha f)(t)| dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} |f(y)| dy dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |f(y)| \int_y^T (t-y)^{\alpha-1} dt dy \\ &= \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T |f(y)| dy < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra afirmación se cumple.

Para  $p \geq 1$ ,  $I_{0+}^\alpha(L^p)$  (resp.  $I_{T-}^\alpha(L^p)$ ) es la imagen de  $L^p([0, T])$  bajo  $I_{0+}^\alpha$  (resp.  $I_{T-}^\alpha$ ). Esto es, por ejemplo,  $f \in I_{0+}^\alpha(L^p)$ , si y sólo si, existe  $\phi \in L^p([0, T])$  tal que  $f = I_{0+}^\alpha(\phi)$ . Además, esta  $\phi$  es única en  $L^p([0, T])$  (ver Samko et al. [28]). Los operadores inversos de  $I_{0+}^\alpha$  y  $I_{T-}^\alpha$  son llamadas derivadas fraccionarias. Estas derivadas fraccionarias son definidas a continuación. Para  $f \in I_{0+}^\alpha(L^p)$  y  $t \in [0, T]$ , denotamos

$$(22) \quad (D_{0+}^\alpha f)(t) = L^p([0, T]) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(t)}{t^\alpha} + \alpha \int_0^{t-\varepsilon} \frac{f(t) - f(r)}{(t-r)^{1+\alpha}} dr \right),$$

donde usamos la convención  $f(t) = 0$  en  $[0, T]^c$ . De la misma forma, para  $f \in I_{T-}^{\alpha}(L^p)$  y  $t \in [0, T]$ , introducimos

$$(23) \quad (D_{T-}^{\alpha} f)(t) = L^p([0, T]) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(t)}{(T-t)^{\alpha}} + \alpha \int_{t+\varepsilon}^T \frac{f(t) - f(r)}{(r-t)^{1+\alpha}} dr \right).$$

En [28] (Teorema 13.2) demuestran que, para  $p > 1$ ,  $f \in I_{0+}^{\alpha}(L^p)$  (resp.  $f \in I_{T-}^{\alpha}(L^p)$ ), si y sólo si,  $f \in L^p([0, T])$  y el límite en (22) (resp. (23)) existe. Si  $p = 1$ , y  $f \in I_{0+}^{\alpha}(L^1)$  (resp.  $f \in I_{T-}^{\alpha}(L^1)$ ), únicamente tenemos la existencia del límite en (22) (resp. (23)). En ambos casos, tenemos que  $f = I_{0+}^{\alpha}(D_{0+}^{\alpha} f)$  (resp.  $f = I_{T-}^{\alpha}(D_{T-}^{\alpha} f)$ ). Para detalles, el lector puede consultar [28] (Teorema 13.2 y Observación 13.2).

Ahora sean  $\alpha \in (0, 1)$  y dos funciones  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f \in I_{0+}^{\alpha}(L^p)$  y  $g^{T-} \in I_{T-}^{1-\alpha}(L^{\tilde{p}})$ , donde  $g_r^{T-} = g(r) - g(T-)$  y  $p, \tilde{p} > 1$ . En este caso Zähle [31] define la integral de  $f$  con respecto a  $g$  como

$$(24) \quad \int_0^T f dg = \int_0^T (D_{0+}^{\alpha} f)(r) (D_{T-}^{1-\alpha} g^{T-})(r) dr$$

si la integral del lado derecho existe. Zähle [32] ha estudiado fórmulas de integración por partes para una extensión de la integral (24). Observemos que estamos usando la misma notación de la Sección 5 para esta integral porque vamos a ver que si  $f \in C^{\kappa}([0, T])$  y  $g \in C^{\gamma}([0, T])$ , con  $\kappa + \gamma > 1$ , las integrales (20) y (24) son iguales.

Usando las propiedades de las derivadas fraccionarias, Zähle [31] (Proposición 2.1) demuestra que la integral (24) es independiente de  $\alpha$ . En particular, bajo condiciones convenientes (dadas en el Teorema 2.4 en [31]), si  $g$  es de variación acotada, se tiene

$$\int_0^T f dg = LS - \int_0^T f dg,$$

donde el lado derecho es la integral de  $f$  con respecto a la medida asociada a  $g$ . Para detalles de esta medida el lector puede ver el libro de Royden [24].

En el siguiente resultado usamos la notación

$$f_{\pi}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t), \quad t \in [0, T].$$

Como siempre  $\pi$  es una partición del intervalo  $[0, T]$ , como en la Definición 1.

**TEOREMA 27.** Sean  $f \in C^{\kappa}([0, T])$  y  $g \in C^{\gamma}([0, T])$  con  $\kappa + \gamma > 1$ . Entonces,

i)

$$\int_0^T f_{\pi} dg = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (g(t_{i+1}) - g(t_i)).$$

ii)

$$\int_0^T f dg = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \int_0^T f_{\pi} dg.$$

*Demostración.* La prueba de i) es una consecuencia de la Definición (24) y de la forma de las derivadas fraccionarias involucradas (ver (22) y (23)).

La demostración de ii) se sigue de [31] (Teorema 4.1.1), el cual establece

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \|f_{\pi} - f\|_{L^{\infty}([0, T])} = 0$$

y

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \|D^{\alpha} f_{\pi}^{T-} - D^{\alpha} f^{T-}\|_{L^1([0, T])} = 0,$$

para cualquier  $\alpha < \kappa$ . □

Para establecer una cota para la integral dada en (24), introducimos los siguientes espacios.

**Definición 28.** Fijemos  $\alpha \in (0, 1)$ . Denotemos por  $W_T^{1-\alpha}$  al espacio de funciones  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\|g\|_{1-\alpha, \infty, T} = \sup_{0 < s < t < T} \left( \frac{|g(t) - g(s)|}{(t-s)^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|g(y) - g(s)|}{(y-s)^{2-\alpha}} dy \right) < \infty.$$

*Observación 7.* Si  $g \in W_T^{1-\alpha}$ , entonces (23) da

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(g) &:= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sup_{0 < s < t < T} |(D_{t-}^{1-\alpha} g^{t-})(s)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \|g\|_{1-\alpha, \infty, T} < \infty. \end{aligned}$$

**Definición 29.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$ .  $W_0^{\alpha,1}(0, T)$  es el espacio de todas las funciones medibles (con respecto a la  $\sigma$ -álgebra de Borel), tales que

$$\|f\|_{\alpha,1} := \int_0^T \frac{|f(s)|}{s^\alpha} ds + \int_0^T \int_0^s \left( \frac{f(s) - f(y)}{(s-y)^{\alpha+1}} \right) dy ds < \infty.$$

Para terminar esta sección, notemos que (24) implica

$$\left| \int_0^T f dg \right| \leq \Lambda_\alpha(g) \|f\|_{\alpha,1},$$

para  $g \in W_T^{1-\alpha}$  y  $f \in W_0^{\alpha,1}(0, T)$ , para algún  $\alpha \in (0, 1)$ . Esta desigualdad ha sido usada por Nualart y Răşcanu [22] para estudiar la existencia de una única solución para la ecuación (1).

## 7. TRAYECTORIAS RUGOSAS

Aquí sólo daremos una idea de la teoría de trayectorias rugosas (“*Rough paths*” en inglés).

Supongamos que queremos estudiar la ecuación

$$(25) \quad y_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma(y) dx, \quad t \in [0, T],$$

donde  $x \in C^\gamma([0, T])$ , con  $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ . Pero la solución  $y$  hereda las propiedades de  $x$ . Esto es, la desigualdad (21) nos dice que  $y \in C^\gamma([0, T])$ . Por lo que no podemos definir la integral (25) usando los resultados de las Secciones 5 y 6, pues  $2\gamma < 1$ , aunque  $\sigma$  tenga una derivada acotada o sea del tipo Lipschitz.

La teoría de trayectorias rugosas fue iniciada por Lyons [18] para resolver el problema anterior. Esta teoría es difícil de emplear y hay que suponer la existencia de ciertas funciones, como veremos abajo. Para dar una idea de esta teoría sólo consideramos el caso  $\gamma \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ , y usaremos el enfoque de Gubinelli [8]. El caso general puede involucrar más funciones relacionadas con  $x$ . El lector interesado en la teoría de trayectorias rugosas puede estudiar el libro de Friz y Hairer [7], o el libro de Lyons y Qian [19].

En lo que sigue suponemos que  $\gamma \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ . La ecuación (25) nos lleva a considerar una función de la forma

$$y_t = \xi_0 + \int_0^t \hat{\sigma} dx, \quad t \in [0, T],$$

con  $\hat{\sigma}, x \in C^\gamma([0, T])$ . Supongamos por el momento que  $\hat{\sigma}$  y  $x$  son funciones suaves. Entonces, con la notación de la Sección 5,

$$\begin{aligned} (\delta y)_{s,t} &= \hat{\sigma}_s(\delta x)_{s,t} + \int_s^t (\delta \hat{\sigma})_{s,u} dx_u \\ (26) \quad &= \hat{\sigma}_s(\delta x)_{s,t} + \rho_{s,t}. \end{aligned}$$

Recordemos que (21) nos dice que  $\rho \in C_2^{2\gamma}$ . Así (26) nos lleva a escribir

$$(27) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}(ydx) &= y\delta x + \mathcal{J}(\delta ydx) \\ &= y\delta x + \mathcal{J}(\widehat{\sigma}(\delta x)dx) + \mathcal{J}(\rho dx). \end{aligned}$$

Observemos que

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_{s,t}(\widehat{\sigma}(\delta x)dx) &= \widehat{\sigma}_s \int_s^t (\delta x)_{s,u} dx_u \\ &= \widehat{\sigma}_s \int_{0 < s < u < t} dx_{u_1} dx_{u_2} = \widehat{\sigma}_s x_{s,t}^2, \end{aligned}$$

con  $(\delta x^2)_{s,u,t} = (\delta x)_{s,u}(\delta x)_{u,t}$  debido a (16). También tenemos que la demostración del Teorema 23.iii) implica que es fácil ver que  $\delta(\mathcal{J}(ydx)) = 0$ . Por lo tanto (26) y (27) dan

$$\begin{aligned} (\delta(\mathcal{J}(\rho dx)))_{s,u,t} &= (\delta y)_{s,u}(\delta x)_{u,t} + (\delta\widehat{\sigma})_{su}x_{ut}^2 - \widehat{\sigma}_s(\delta x^2)_{s,u,t} \\ &= \widehat{\sigma}_s(\delta x)_{su}(\delta x)_{u,t} + \rho_{s,u}(\delta x)_{u,t} \\ &\quad + (\delta\widehat{\sigma})_{s,u}x_{u,t}^2 - \widehat{\sigma}_s(\delta x)_{s,u}(\delta x)_{u,t} \\ &= \rho_{s,u}(\delta x)_{u,t} + (\delta\widehat{\sigma})_{s,u}x_{u,t}^2. \end{aligned}$$

Estos cálculos motivan la siguiente:

**Definición 30.** Supongamos que existe una función  $x^2 \in C_2^{2\gamma}$ , formalmente definida como  $\mathcal{J}(dxdx)$  tal que  $\delta(x^2)_{s,u,t} = (\delta x)_{s,u}(\delta x)_{u,t}$ . Además supongamos que existen  $\widehat{\sigma} \in C_1^\gamma([0, T])$  y  $\rho \in C_2^{2\gamma}$  tales que

$$(\delta y)_{s,t} = \widehat{\sigma}_s(\delta x)_{s,t} + \rho_{s,t}, \quad s, t \in [0, T].$$

Entonces *definimos la integral de y con respecto a x* como

$$(29) \quad \mathcal{J}_{s,t}(ydx) := y_s(\delta x)_{s,t} + \widehat{\sigma}_s x_{s,t}^2 + \Lambda_{s,t}(\rho\delta x + (\delta\widehat{\sigma})x^2).$$

*Observaciones 9.* i) A diferencia del Teorema 23.iii), ahora la suma de Riemann-Stieltjes (2) tiene un término extra. En efecto, el Lema 24 implica

$$\mathcal{J}_{s,t}(ydx) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{t_i}(\delta x)_{t_i, t_{i+1}} + \widehat{\sigma}_{t_i} x_{t_i, t_{i+1}}^2).$$

En efecto, sólo hay que observar que

$$\begin{aligned} \delta(y\delta x)_{s,u,t} &= y_s(\delta x)_{s,t} - y_s(\delta x)_{s,u} - y_u(\delta x)_{u,t} \\ &= -(\delta y)_{s,u}(\delta x)_{u,t} \\ &= -(\widehat{\sigma}_s\delta x + \rho)_{s,u}(\delta x)_{u,t} \\ &= -\widehat{\sigma}_s(\delta x^2)_{s,u,t} - \rho_{s,u}(\delta x)_{u,t} \end{aligned}$$

y

$$\delta(\widehat{\sigma}x^2)_{s,u,t} = (\widehat{\sigma}_s - \widehat{\sigma}_u)x_{u,t}^2 + \widehat{\sigma}_s(\delta x^2)_{s,u,t}.$$

- ii) Uno puede utilizar (17) para obtener una desigualdad análoga a (21).
- iii) Hu y Nualart [9] han combinado la teoría de trayectorias rugosas con el calculo fraccionario para analizar la existencia de una única solución de (25), cuando  $\gamma \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ .
- iv) La definición de la integral  $\mathcal{J}(ydx)$  impone la existencia de  $x^2$  y  $\rho$ , relacionados con  $x$  y  $y$ , respectivamente. Para  $\gamma < \frac{1}{3}$ , hay que encontrar mas términos que dependen de  $x$  y  $y$  como puede verse en Lyons y Qian[19].

Para ver la versión del teorema fundamental del cálculo que cumple la integral definida en (29), suponga que tenemos

$$(30) \quad y_t = \int_0^t y'_s dx_s + \Gamma_t, \quad t \in [0, T],$$

donde  $\Gamma \in C_1^{2\gamma}([0, T])$  y

$$(31) \quad (\delta y')_{s,t} = y''_s (\delta x)_{s,t} + \tilde{\rho}_{s,t}.$$

Aquí  $y'' \in C_1^\gamma([0, T])$  y  $\tilde{\rho} \in C_2^{2\gamma}([0, T])$ .

**TEOREMA 31.** Sean  $F \in C_b^3(\mathbb{R})$  (i.e.,  $F^{(i)}$  es continua y acotada, para  $i = 0, 1, 2, 3$ ), y  $y$  tal que (30) y (31) se cumplen. Suponga que existe  $x^2$  como en la Definición 30. Entonces

$$\begin{aligned} F(y_t) &= F(y_0) + \int_0^t F'(y_s) y'_s dx_s + \int_0^t F'(y_s) d\Gamma_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t F''(y_s) (y'_s)^2 d[x]_s, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

con  $[x]_s = (\delta x)_{0,s} \otimes (\delta x)_{0,s} - 2x_{0,s}^2$ .

*Observación 8.* Si  $x$  es el movimiento browniano  $W$  definido en Sección 2, se puede tomar

$$x_{s,t}^2 = \int_s^t (\delta W)_{s,r} dW_r, \quad s, t \in [0, T].$$

Por lo tanto

$$[x]_t = (W_t)^2 - 2 \int_0^t W_r dW_r = t, \quad t \in [0, T],$$

donde la última igualdad se sigue del Teorema 9. Consecuentemente, uno recobra la fórmula de Itô (9), para  $F$  independiente del tiempo.

## 8. CONCLUSIONES

En la actualidad, en el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas, se está usando integradores que no tienen estructura de semimartingala, por lo que la teoría clásica de Itô ya no es útil en este caso. Esto es, necesitamos tratar con integrales no consideradas por el cálculo estocástico de Itô. Sin embargo, otras integrales son difíciles de manipular debido a su naturaleza. Por ejemplo, (10) implica que si en la ecuación (1),  $g$  es el movimiento browniano y la segunda integral del lado derecho es en el sentido de Skorohod, entonces  $\|x\|_{L^2(\Omega)}$  depende de  $Dx$  y la norma  $\|Dx\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}$  está en términos de  $D^2x$ , y así sucesivamente. Esto es, no se tiene un argumento cerrado.

Un operador lineal sobre una familia de funciones definidas en  $[0, T]$  debe cumplir versiones del teorema de convergencia dominada para merecer el nombre de integral. Las estimaciones que dimos en las diferentes definiciones de integral permiten obtener versiones del teorema de convergencia dominada, lo cual es útil en aplicaciones de ecuaciones gobernadas por funciones que no tienen derivadas. Incluso las integrales estudiadas en este manuscrito satisfacen versiones del teorema fundamental del cálculo, como puede verse en las diferentes secciones de este artículo.

El movimiento browniano fraccionario  $B^H$  tiene trayectorias en  $C^\gamma([0, T])$ , para cualquier  $\gamma \in (0, H)$  (ver Nualart [20]). Consecuentemente uno puede usar las Secciones 3, 5 y 6 para tratar ecuaciones gobernadas por  $B^H$  con  $H > \frac{1}{2}$ , como puede verse en Nualart y Răşcanu [22], León et al. [16], etc. Para una aplicación de la integral hacia adelante con respecto a  $B^H$ ,  $H > \frac{1}{2}$ , el lector puede mirar León y Tudor [17].

Para  $H < \frac{1}{2}$  uno puede usar la integral de Skorohod o de Stratonovich para tratar ecuaciones diferenciales (ver por ejemplo Alós et al. [1], Jien y Ma [11], y León y San Martín [15]). También se puede ver [9] para aplicaciones de la teoría de trayectorias rugosas a ecuaciones diferenciales.

El caso  $H = 1/2$  (i.e., para el movimiento browniano), el lector puede consultar Kuo [14] para el caso adaptado y Buckdahn [4] para trabajar con la integral de Skorohod.

## REFERENCIAS

- [1] Alòs, E., León, J.A. y Nualart, D., *Stochastic Stratonovich calculus for fractional Brownian motion with Hurst parameter less than 1/2*. Taiwanese Journal of Mathematics 5, no. 3, 609-632, 2001.
- [2] Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [3] Bojdecki, T., *Teoría General de Procesos e Integración Estocástica*. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 6, S. M. M., 2004.
- [4] Buckdahn, R., *Skorohod stochastic differential equations of diffusion type*. Probab. Theory Relat. Fields 93, 297-323, 1992.
- [5] Dudley, R. M. y Norvaiša, R., *An introduction to p-Variation and Young integrals. With Emphasis on Sample Functions of Stochastic Processes*. Tech. Rep. 1, MaPhySto, Center for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus, Concentrated Advance Course, 1998.
- [6] Fichtenholz, G.M., *Differential-und Integralrechnung III*. Hochschulbuecher fuer Mathematik, Bd. 63, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1992.
- [7] Friz, P.K. y Hairer, M., *A Course on Rough Paths. With an Introduction to Regularity Structures*. Universitext, Springer, 2014.
- [8] Gubinelli, M., *Controlling rough paths*. Journal of Functional Analysis 216, no. 1, 86-140, 2004.
- [9] Hu, Y. y Nualart, D., *Rough path analysis via fractional calculus*. Transactions of the American Mathematical Society 361, no. 5, 2689-2718, 2009.
- [10] Itô K., *Stochastic integral*. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 519-524, 1944.
- [11] Jien, Y.-J. y Ma, J., *Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motions*. Bernoulli 15, no. 3, 846-870, 2009.
- [12] Karatzas, I. y Shreve, S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Second Edition. Springer-Verlag, 1991.
- [13] Kestelman, H., *Modern Theories of integration*. Dover Publications, Inc., New York, 1960.
- [14] Kuo, H.-H., *Introduction to Stochastic Integration*. Springer, Universitext, 2006.
- [15] León, J.A. y San Martín, J., *Linear stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion with Hurst parameter less than 1/2*. Stochastic Analysis and Applications 25, no 1, 105-126, 2007.
- [16] León, J.A., Nualart, D. y Tindel, S., *Young differential equations with power type nonlinearities*. Stochastic Processes and their Applications. Por aparecer.
- [17] León, J.A. y Tudor, C., *Semilinear fractional stochastic differential equations*. Bol. Soc. Mat. Mexicana 8, 205-226, 2002.
- [18] Lyons, T.J., *Differential equations driven by rough signals*. Revista Matemática Iberoamericana 14, no. 2, 215-310, 1998.
- [19] Lyons, T.J. y Qian, Z., *System Control and Rough Paths*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, 2002.
- [20] Nualart, D., *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications*. En *Stochastic Models* (Editores J.M. González-Barrios, J.A. León y A. Meda), Contemporary Mathematics 336, Amer. Math. Soc., 3-39, 2003.
- [21] Nualart, D., *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer, 2006.
- [22] Nualart, D. y Răşcanu, A., *Differential equations driven by fractional Brownian motion*. Collect. Math. 53, no. 1, 55-81, 2002.
- [23] Protter, P.E., *Stochastic Integration and Differential Equations*. Second Edition. Springer, 2004.
- [24] Royden, H.L., *Real Analysis*. Third Edition. Macmillan Publishing Company, 1988.
- [25] Rudin, W., *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1973.
- [26] Russo, F. y Vallois, P., *Elements of Stochastic calculus via regularization*. Séminaire de Probabilités XL, LNM 1899, 147-185, 2007.
- [27] Russo, F. y Vallois, P., *Forward, backward and symmetric stochastic integration*. Probability Theory and Related Fields 97, no. 3, 403-421, 1993.
- [28] Samko, S.G., Kilbas, A.A. y Marichev, O.I., *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [29] Stroock, D. W., *Essentials of Integration Theory for Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 262. Springer, 2011.
- [30] Young, L.C., *An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration*. Acta Math. 67, 251-282, 1936.
- [31] Zähle, M., *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I*. Probab. Theory and Relat. Fields 111, 333-374, 1998.
- [32] Zähle, M., *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus II*. Math. Nachr. 225, 145-183, 2001.

*Dirección del autor:*

Jorge A. León  
Departamento de Control Automático,  
Cinvestav del IPN,  
Apartado Postal 14-740  
07000 Ciudad de México, México  
e-mail: [jleon@ctrl.cinvestav.mx](mailto:jleon@ctrl.cinvestav.mx)



## SUCESIONES DE NÚMEROS REALES, SERIES Y LA PARADOJA DE ZENÓN

EVGUENI GORDIENKO

RESUMEN. Repasamos algunas nociones básicas relacionadas con las sucesiones de números reales y sucesiones sumables (series convergentes). Se presentan varias definiciones informales, ejemplos y argumentos convincentes. Mostramos cómo las sumas que involucran un número infinito de sumandos sirven en aplicaciones, particularmente para resolver la famosa paradoja de Zenón, basada en la creencia de que tales sumas no pueden ser números finitos. También ilustramos algunas relaciones entre ciertas series convergentes y los prominentes números reales  $e$  y  $\pi$ .

### 1. NÚMEROS REALES Y SU REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Se asume que el conjunto (sistema)  $\mathbb{R}$  de números reales y sus propiedades básicas son familiares para el lector, así como el conocimiento (por lo menos intuitivo) de la noción geométrica de línea recta.

Como se muestra en cursos avanzados de geometría, hay una correspondencia uno a uno entre los números reales  $x$  en  $\mathbb{R}$  y los puntos en una línea recta fija (a veces llamada “recta real”).

De esta manera, cada número real  $x$  es representado por el punto (admitiendo la misma notación)  $x$  en la recta real. (Véase figura 1).

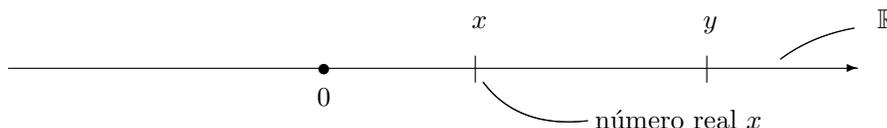


FIGURA 1. Recta real.

Las cuatro operaciones aritméticas: adición, multiplicación, sustracción y división están definidas para los números reales, denotados por  $\mathbb{R}$ .

Cualquier operación, digamos, la adición, es una regla que asigna a cada par de números reales  $x, y$  el número  $z$ , denotado por  $z = x + y$ . Por ejemplo,  $3.5+2=5.5$ , y  $1.7+(-1.7)=1.7-1.7=0$ .

El número “0” (cero) es especial para la adición en el sentido de que para cualquier número real  $x$  tenemos que  $x + 0 = 0 + x = x$ . Además  $x + (-x) = x - x = 0$ .

El número “1” (uno) juega un rol específico en la multiplicación:  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$  y  $x \cdot 1/x = x/x = 1$  para todo número real  $x \neq 0$ .

En la Figura 1, todos los números en el lado derecho del 0 son llamados **positivos** y todos los números en el lado izquierdo son negativos. Tenemos  $y > x$  si y sólo si

la diferencia  $y - x$  es un número positivo. En este caso, el punto  $y$  está ubicado a la derecha de  $x$  (Figura 1).

Sean  $x$  y  $y$  números reales cualesquiera. La **distancia**  $d(x, y)$  entre  $x$  y  $y$  es la longitud del segmento de recta que conecta a los puntos  $x$  y  $y$ .



FIGURA 2. Distancia entre puntos.

Es claro que  $d(x, y) = d(y, x)$  y  $d(x, x) = 0$ .

Definimos el **valor absoluto**  $|x|$  de un número  $x$  como  $x$  si  $x \geq 0$  y como  $-x$  si  $x < 0$ . Por ejemplo, si en la Figura 2  $x = 3$ ,  $y' = -1$ , entonces  $|x| = |3| = 3$  y  $|y'| = |-1| = -(-1) = 1$ .

La prueba simple de que  $d(x, y) = |x - y| \equiv |y - x|$  se deja al lector. Por ejemplo, escogiendo (Figura 2)  $x = 3$ ,  $y = 4$  obtenemos que  $d(x, y) = |y - x| = |4 - 3| = |1| = 1$ , y tomando  $x' = 1$ ,  $y' = -1$ , se tiene  $d(x', y') = |x' - y'| = |1 - (-1)| = |1 + 1| = |2| = 2$  (igual a la suma de las longitudes de los segmentos que conectan a  $y'$  con 0 y 0 con  $x'$ ). Nótese que para cualesquiera números  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ .

La importante noción de  $\varepsilon$ -vecindad de un punto (un número)  $x$  nos permite considerar el conjunto de puntos (números) localizados en “la proximidad directa” al punto  $x$ .

Dado un número real  $x$  y un número positivo  $\varepsilon > 0$ , la  $\varepsilon$ -vecindad de  $x$  es el conjunto  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  compuesto de todos los números  $y$  tales que  $d(x, y) < \varepsilon$ , es decir, la vecindad  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  incluye a todos los puntos  $y$  para los que la distancia a  $x$  es menor que  $\varepsilon$ .

Alternativamente, podemos especificar la  $\varepsilon$ -vecindad  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  como la colección de todos los puntos  $y$  tales que  $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$ .

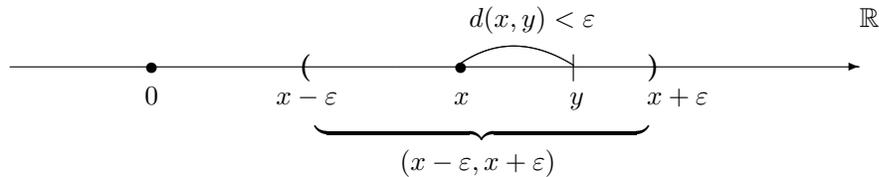


FIGURA 3.  $\varepsilon$ -vecindad.

Debemos recalcar que para un  $x$  dado y  $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$  la  $\varepsilon$ -vecindad  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  es una parte propia (más pequeña) de la  $\varepsilon_1$ -vecindad  $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$  como se muestra en la Figura 4.

Si  $\varepsilon > 0$  es “pequeña” y un número  $y$  está en la  $\varepsilon$ -vecindad  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , entonces la distancia  $d(x, y)$  es menor que  $\varepsilon$ , eso da significado al concepto de “cercanía” de  $y$  a  $x$ .

Por ejemplo, sea  $x = 1$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . Entonces, para cada  $y$  que pertenece a  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) =$

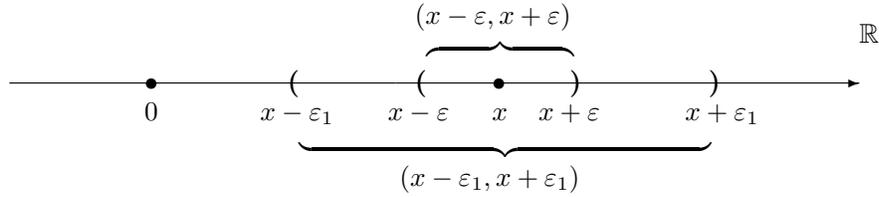


FIGURA 4. Comparación de  $\varepsilon$ -vecindades.

$(1-0.001, 1+0.001) = (0.999, 1.001)$  se tiene que  $d(y, 1) < 0.001$ .

El número  $y = 0.9995$  está en la  $\varepsilon$ -vecindad  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  con  $\varepsilon = 0.001$ , pero  $y' = 0.998$  no está (porque  $d(y', 1) = |1 - 0.998| = 0.002 > \varepsilon$ ).

2. SUCCESIONES DE NÚMEROS REALES. SUCCESIONES CONVERGENTES Y SUS LÍMITES

Ya hemos señalado un rol especial del número “1” (uno) en el sistema de números reales. Ahora veremos a este número como el primer “número natural”. El segundo número natural “2” puede ser expresado en términos del “1” como  $1 + 1 = 2$ . Luego,  $3 = 2 + 1$  y continuando de esta manera obtenemos el conjunto infinito de **números naturales**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots\}$ .

Usualmente denotaremos a un elemento de este conjunto por  $n$  o  $N$ . Por ejemplo,  $n = 125394$  es un número natural, pero  $x = 500.001$  no lo es.

Una **sucesión** (de números reales) es un conjunto  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \rangle$  de números reales numerados por los naturales  $1, 2, \dots, n, n + 1, \dots$ . Es conveniente utilizar la notación abreviada  $\langle x_n \rangle$  o  $\langle x_n, n = 1, 2, \dots \rangle$  para la sucesión  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \rangle$ .

Así, podemos hablar del primer término  $x_1$  de la sucesión  $\langle x_n \rangle$ , después del segundo término  $x_2$ , y más generalmente, del  $n$ -ésimo término  $x_n$  de la sucesión  $\langle x_n \rangle$ .

Consideremos algunos ejemplos de sucesiones.

(a) Sea  $x_n = 1/n, n = 1, 2, \dots$ , es decir, consideramos a la sucesión  $\langle 1/n, n = 1, 2, \dots \rangle$ , o  $\langle 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 1/n + 1, \dots \rangle$ .

(b) Sea  $x_n = 2 + \frac{\text{sen}(n)}{n}, n = 1, 2, \dots$ , esto es, tratamos con la sucesión

$$\left\langle 2 + \frac{\text{sen}(n)}{n}, n = 1, 2, \dots \right\rangle$$

o

$$\left\langle 2 + \text{sen}(1), 2 + \frac{\text{sen}(2)}{2}, \dots, 2 + \frac{\text{sen}(n)}{n}, 2 + \frac{\text{sen}(n + 1)}{n + 1}, \dots \right\rangle$$

(c) Para  $x_n = n^2, n = 1, 2, \dots$ , tenemos la sucesión  $\langle n^2, n = 1, 2, \dots \rangle$ , o  $\langle 1, 4, 9, \dots, n^2, (n + 1)^2, \dots \rangle$ .

(d) Dados números arbitrarios  $a$  y  $r$ , sea  $x_n = ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots, (r^0 = 1)$ . La sucesión correspondiente

$$\langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle = \langle a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, ar^n, \dots \rangle$$

es conocida como una **sucesión geométrica** (o progresión geométrica) con el **primer término**  $a$  y la **razón común**  $r$ .

- (d\*) Escogiendo  $a = 1$ ,  $r = 0.5$  en el ejemplo (d), obtenemos la siguiente sucesión geométrica particular  $\langle 1, 0.5, 0.25, \dots, (0.5)^{n-1}, (0.5)^n, \dots \rangle$ .
- (e) Sea  $x_n = 1 + (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . En este caso tenemos la sucesión  $\langle 1 + (-1)^n, n = 1, 2, \dots \rangle = \langle 0, 2, 0, 2, \dots, 1 + (-1)^n, 1 + (-1)^{n+1}, \dots \rangle$ .

El propósito principal de esta sección es introducir la noción de **sucesión convergente**, es decir, la sucesión cuyos términos se vuelven cada vez más cercanos a algún número real  $x$  cuando  $n$  se incrementa. El número mencionado  $x$  es llamado **límite de la sucesión**.

Primero, en los ejemplos de arriba examinamos el comportamiento de  $x_n$  cuando  $n$  crece.

- (aa) Es fácil ver que en el ejemplo (a) los términos  $x_n = 1/n$  se aproximan a cero cuando  $n$  aumenta. En efecto, para  $n = 100$ ,  $x_n = 1/100$ , y digamos, para  $n = 1000000$ ,  $x_n = 1/1000000$ . (El último número es bastante pequeño).
- (bb) En  $\langle x_n = 2 + \frac{\text{sen}(n)}{n}, n = 1, 2, \dots \rangle$ ,  $|\text{sen}(n)| \leq 1$  siempre; y por lo tanto, el segundo sumando tiende a cero a medida que  $n$  aumenta. Consecuentemente, para  $n$  “grandes”, todos los términos  $x_n = 2 + \frac{\text{sen}(n)}{n}$  se acercan a 2.
- (cc) Los términos  $\langle x_n = n^2, n = 1, 2, \dots \rangle$  de la sucesión en este ejemplo se incrementan ilimitadamente y no se aproximan a ningún número real. (Digamos,  $x_{10} = 10^2 = 100$ ,  $x_{100} = 100^2 = 10000$ , etc.)
- (dd) El comportamiento de las sucesiones geométricas en el Ejemplo (d) *depende fuertemente* del valor de la razón  $r$ .
- (1) Para  $r = 1$ ,  $r^{n-1} = 1$  y  $x_n = a$  para toda  $n = 1, 2, \dots$ .
  - (2) Para  $r > 1$  (y digamos,  $a > 0$ ), los términos  $x_n = ar^{n-1}$  crecen ilimitadamente ya que  $r^{n-1} = \underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n-1 \text{ veces}}$  es un número grande para cada  $n$  grande.
  - (3) Asumiendo que  $r$  es un número positivo menor que 1, los términos  $x_n = ar^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  se aproximan a cero a medida que  $n$  se incrementa. De hecho, para una  $n$  grande, la potencia  $r^{n-1} = \underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n-1 \text{ veces}}$  es un número muy pequeño.
- En el ejemplo (d\*), para  $a = 1$ ,  $r = 0.5$ ,  $n = 50$ ,  $x_{50} = ar^{49} = (0.5)^{49} \approx 1.776356839 \times 10^{-15}$  que es un número extremadamente pequeño.
- (ee) En el Ejemplo (e), los términos  $x_n$  de la sucesión “oscilan” entre los valores 0 y 2, y por lo tanto, no pueden aproximarse a un número único.

Echando un vistazo a los comentarios de arriba, podemos deducir intuitivamente que:

- (a) La sucesión  $\langle x_n \rangle$  en el Ejemplo (a) “converge a cero”.
- (b) La sucesión  $\langle x_n \rangle$  en el Ejemplo (b) “converge al número 2”.
- (c) La sucesión  $\langle x_n \rangle$  en el Ejemplo (c) “no converge” (es no convergente).
- (d) La sucesión  $\langle x_n \rangle$  en el Ejemplo (d) “converge a cero” si  $r$  es menor que 1; y no converge si  $r$  es mayor que 1.
- (e) En el Ejemplo (e) la sucesión  $\langle x_n \rangle$  no converge.

La definición de convergencia (y de una sucesión convergente) es como sigue: Decimos que una sucesión (de números reales)  $\langle x_n \rangle$  **converge** a un número real  $x$ , si dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario, todos los términos  $x_n$  de  $\langle x_n \rangle$ , excepto posiblemente un número finito de ellos, pertenecen a la  $\varepsilon$ -vecindad  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  del punto  $x$ .

En este caso  $\langle x_n \rangle$  se llama una **sucesión convergente** siendo  $x$  su **límite**, que se denota  $x_n \rightarrow x$ .

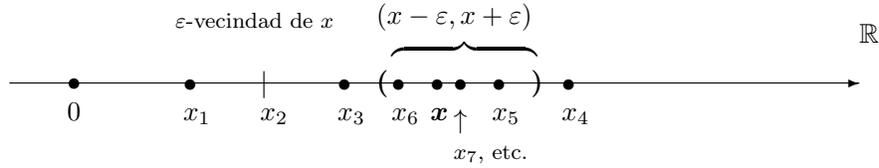


FIGURA 5. Convergencia  $x_n \rightarrow x$

La frase clave en esta definición es “dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario”. Esto significa que no importa cuán pequeño sea  $\varepsilon$ , **todos los términos**  $x_n$  de  $\langle x_n \rangle$  con  $n$  “suficientemente grande” se encuentran en la  **$\varepsilon$ -vecindad de  $x$** , es decir, “están cerca de  $x$ ” (véase la Figura 5).

La convergencia  $x_n \rightarrow x$  puede ser expresada diciendo que los términos  $x_n$  se acercan cada vez más al *punto límite*  $x$  (cuando  $n$  “crece a infinito”). De manera equivalente, la distancia  $d(x_n, x)$  *converge a cero*.

Por ejemplo, para la sucesión en el Ejemplo (b) el límite es  $x = 2$ . En efecto, dado un  $\varepsilon > 0$  arbitrario,

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x) &\equiv d(x_n, 2) = d\left(2 + \frac{\text{sen}(n)}{n}, 2\right) = d\left(\frac{\text{sen}(n)}{n}, 0\right) \\
 (1) \qquad &= \left|\frac{\text{sen}(n)}{n}\right| \leq 1/n < \varepsilon,
 \end{aligned}$$

para **todo**  $n \geq 1/\varepsilon$ . Por ejemplo, si  $\varepsilon = 0.001$ , entonces la desigualdad (1) se cumple para todo  $n > 1/0.001 = 1000$ . Consecuentemente,  $x_n = 2 + \frac{\text{sen}(n)}{n} \rightarrow 2$  (converge a 2 o su límite es igual a 2; véase la Figura 6).

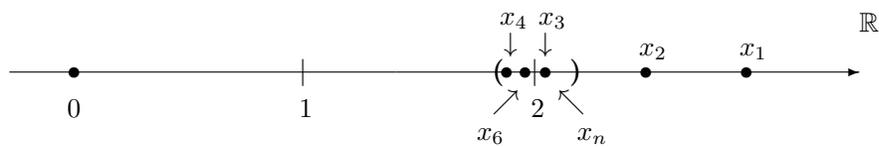


FIGURA 6.  $x_n = 2 + \frac{\text{sen}(n)}{n} \rightarrow 2$

Ahora consideramos un ejemplo menos trivial de una sucesión convergente.

Quizás los más famosas números en matemáticas son

$$(2) \qquad \pi \approx 3.141592654$$

y

$$(3) \qquad e \approx 2.718281828.$$

En particular, el último está asociado con la noción del logaritmo natural  $\ln(x)$  de un número  $x$ , de tal manera que se cumple la igualdad

$$(4) \qquad \ln(e) = 1.$$

El siguiente argumento deja ver que el número  $e$  es el límite de la sucesión

$$(5) \quad \left\langle x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \right\rangle.$$

Esto es

$$(6) \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e.$$

La manera más simple de verificar (6) es calcular  $x_n$  para varios valores de  $n$  (particularmente, para  $n$  “suficientemente grande”), y comparar los resultados con (3). Con una calculadora uno puede obtener, por ejemplo, la tabla siguiente:

$n = 5$	$x_n = 2.48832;$
$n = 20$	$x_n = 2.653297705;$
$n = 200$	$x_n = 2.691588029;$
$n = 1000$	$x_n = 2.716923932;$
$n = 10^6 = 1000000$	$x_n = 2.718280469.$

Comparando estos valores de  $x_n$  con la aproximación para  $e$  dada en (3), vemos que de hecho como está indicado en (6)  $x_n \rightarrow e$ .

Otra manera de justificar (6) es tomar el logaritmo:

$$(7) \quad \ln(x_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx n \frac{1}{n} = 1,$$

gracias a que  $\log(1+z) \approx z$  para todo  $z$  cerca de cero. (Que es fácil de verificar con calculadora). La aproximación en (7) permite establecer que  $\ln(x_n) \rightarrow 1$ . Finalmente,  $x_n \rightarrow e$  por (4).

### 3. SUCESIONES SUMABLES (SERIES CONVERGENTES): SUMAS DE UN NÚMERO INFINITO DE TÉRMINOS

Considere una sucesión  $\langle x_n \rangle \equiv \langle x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rangle$  de números reales y para un natural arbitrario fijo  $N \geq 1$  calcule la suma  $S_N$  de los primeros  $N$  términos:

$$(8) \quad S_N = x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} + x_N.$$

Siendo en (8)  $N = 1, 2, \dots$  obtenemos valores sucesivos de las sumas parciales  $S_1, S_2, \dots, S_N, \dots$ .

De esta manera hemos obtenido una nueva sucesión numérica

$$\langle S_N \rangle = \langle S_1, S_2, \dots, S_N, S_{N-1}, \dots \rangle$$

llamada la **sucesión de sumas parciales** de la sucesión original  $\langle x_n \rangle$ .

Hacemos uso de la sucesión  $\langle S_N \rangle$  tratando de definir la suma

$$(9) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} + x_N + \dots,$$

que involucra un número **infinito** de términos de  $\langle x_n \rangle$ . Informalmente, (9) viene de  $S_N$  en (8) cuando el número de sumandos  $N$  **se incrementa ilimitadamente**. Con esto en mente introducimos la siguiente definición.

Se dice que una sucesión  $\langle x_n \rangle$  es **sumable** si la sucesión  $\langle S_N \rangle$  de sus sumas parciales **converge** al número real  $S$ , esto es,

$$(10) \quad S_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N \longrightarrow S.$$

El límite  $S$ , por definición es el valor de la suma en (9).

En una terminología alternativa (o incluso más común), la expresión en (9) es llamada una **serie**. Cuando

$$(11) \quad \langle x_n, n = 1, 2, \dots \rangle,$$

es una sucesión sumable, *es decir*,  $S_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N \rightarrow S$  decimos que la serie correspondiente en (9) es **convergente**, y  $S$  es su suma. Esto da significado a (9) permitiéndonos escribir:

$$(12) \quad S = x_1 + x_2 + \dots + x_N + x_{N+1} + \dots$$

No toda sucesión  $\langle x_n \rangle$  es sumable ya que el límite en (10) puede no existir. Por ejemplo, para  $x_n = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , obtenemos que  $S_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N = 1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$  que se incrementa ilimitadamente cuando  $N$  (el número de sumandos) aumenta. Por lo tanto,  $\langle S_N \rangle$  no es una sucesión convergente y la suma  $x_1 + x_2 + \dots + x_N + \dots$  no existe (como un número real).

Otro ejemplo es  $\langle x_n \rangle$  con  $x_n = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Aquí

$$S_N = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^N = \begin{cases} 0, & \text{si } N \text{ es par,} \\ -1, & \text{si } N \text{ es impar,} \end{cases}$$

es una sucesión no convergente.

Si  $\langle x_n \rangle$  no es una sucesión sumable (*i.e.*  $\langle S_N, N = 1, 2, \dots \rangle$  no converge) la serie en (9) es llamada **divergente**, y la igualdad (12) no es relevante.

De la definición (10) se sigue que una condición necesaria (¡pero no suficiente!) para la sumabilidad de la sucesión  $\langle x_n \rangle$  es que  $x_n \rightarrow 0$  ( $\langle x_n \rangle$  converge a cero).

El siguiente ejemplo de una sucesión sumable está relacionado con el número  $e \approx 2.718281828$ . Para cada número natural  $n$  su **factorial** es otro número natural denotado por  $n!$  y definido como:

$$(13) \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$$

(el producto de todos los números naturales de 1 a  $n$ ).

Obsérvese que cuando  $n$  se incrementa,  $n!$  crece muy rápido. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5! &= 120; \\ 10! &= 3628800; \\ 15! &= 1307674368000. \end{aligned}$$

Consecuentemente, la sucesión  $\langle x_n \rangle$  con términos  $x_n = 1/n!$ ,  $n = 1, 2, \dots$  converge a cero:  $1/n! \rightarrow 0$ .

Por cálculos numéricos mostramos que esta sucesión es sumable y la suma correspondiente es igual a  $e - 1$ , esto es

$$(14) \quad \begin{aligned} 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{N!} + \dots &= e - 1, \text{ o bien,} \\ e &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{N!} + \dots \end{aligned}$$

De acuerdo a la definición (10) para establecer (14) tenemos que mostrar que

$$(15) \quad S_N = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{N!} \rightarrow e - 1 \approx 1.718281828182815.$$

Seleccionando, por ejemplo,  $N = 5, 10, 20$  y usando una computadora, calculamos

$$\begin{aligned} S_5 &\approx 1.716666666666667, \\ S_{10} &\approx 1.718281801146384, \\ S_{20} &\approx 1.718281828459045. \end{aligned}$$

Los datos obtenidos nos convencen de que las relaciones (15) y así (14) son verdaderas.

Reescribiendo (14) podemos afirmar que

$$\begin{aligned} e &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots \end{aligned}$$

Por otra parte, es natural preguntarse: ¿Qué significa la *expresión decimal* del número  $e = 2.718281828\dots$ ?

Lo anterior simplemente significa que

$$(16) \quad e = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{(10)^2} + \frac{8}{(10)^3} + \frac{2}{(10)^4} + \frac{8}{(10)^5} + \frac{1}{(10)^6} + \frac{8}{(10)^7} + \frac{2}{(10)^8} + \dots$$

En otras palabras, el número  $e$  también es la suma (serie) de la sucesión sumable

$$\left\langle 2, \frac{7}{10}, \frac{1}{100}, \frac{8}{1000}, \dots \right\rangle.$$

Los ejemplos más transparentes son  $0.111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$ , y digamos,  $0.1 = 1/10$ ,  $0.01 = 1/10^2 = 1/100$ ,  $0.001 = 1/10^3 = 1/1000$ , etc. Entonces

$$0.111\dots = 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

En la Sección 4 mostraremos que  $0.111\dots = 1/9$ . Por lo tanto, es un **número racional**. Por otro lado, es posible probar que no hay enteros  $k$  y  $m$  tales que  $e = k/m$ . Esto significa que  $e$  (así como  $\pi$ ) es un **número irracional**.

#### 4. SUMAS DE SUCESIONES GEOMÉTRICAS

Como un ejemplo de aplicaciones de sumas con un número infinito de sumandos (series), examinamos ahora la sumabilidad de sucesiones geométricas y calculamos sus sumas. Una sucesión geométrica

$$(17) \quad \langle x_n \rangle = \langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$$

fue introducida en el Ejemplo (d) de la Sección 2. Asumimos que en (17)  $a$  y  $r$  son *números positivos* arbitrarios pero fijos. También excluimos el caso trivial:  $r = 1$  (cuando  $\langle x_n \rangle = a$  para todo  $n$ ).

La fórmula simple para  $x_n$  nos permite calcular explícitamente las sumas parciales

$$(18) \quad S_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N = a + ar + \dots + ar^{N-1}.$$

PROPOSICIÓN 1. *Para cada  $N = 1, 2, \dots$*

$$(19) \quad S_N = a \frac{1 - r^N}{1 - r}.$$

Probamos (19) por **inducción**. Primero para  $N = 1$  (18) nos da  $S_N = S_1 = a$  y eso coincide con  $S_1 = a \frac{1-r^1}{1-r} = a \frac{1-r}{1-r} = a$ , calculado por la fórmula (19).

Segundo, suponiendo que (19) se cumple para un  $N \geq 1$  **arbitrario pero fijo** mostramos que esta suposición resulta en que la misma fórmula (19) es válida para  $N + 1$ . Habiendo hecho esto, establecemos (19) para **toda**  $N = 1, 2, 3, \dots$ . De hecho, (19) se cumple para  $N = 1$ , y entonces (19) es correcta para  $N + 1 = 1 + 1 = 2$ . Pero si la fórmula (19) es correcta para  $N = 2$ , entonces, del “paso inductivo” mostrado abajo se sigue que (19) se cumple para  $N + 1 = 2 + 1 = 3$ .

La repetición de este argumento implica las correcciones de la fórmula (19) para **todos**

los números naturales  $N = 1, 2, 3, \dots$

Ahora por (18),

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= \underbrace{a + ar + ar^2 + \dots + ar^{N-1}}_{S_N} + ar^N \\ &= S_N + ar^N. \end{aligned}$$

Por nuestra hipótesis de inducción  $S_N$  está dada por (19). Por lo tanto

$$S_{N+1} = a \frac{1 - r^N}{1 - r} + ar^N = a \left[ \frac{1 - r^N + r^N - r^{N+1}}{1 - r} \right] = a \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

La última ecuación  $S_{N+1} = a \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$  es la versión de (19) con  $N$  siendo reemplazada por  $N + 1$ . Consecuentemente, la hipótesis de inducción de que (19) se cumple para  $N$  implica el cumplimiento de la fórmula (19) para  $N + 1$ .

Reescribiendo (19) como  $S_N = a \frac{r^N - 1}{r - 1}$ , observamos que para  $r > 1$ ,  $S_N$  se incrementa ilimitadamente cuando  $N$  crece (ya que  $r^N = \underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{N \text{ veces}}$  crece al “infinito”). Así,

una sucesión geométrica  $\langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$  con razón  $r > 1$  *no es sumable*. No es sorprendente ya que en tal caso, la sucesión  $\langle x_n = ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$  no converge a cero (véase la Sección 3).

La situación es completamente diferente si la razón  $r$  es menor que 1. En este caso  $x_n = ar^{n-1} \rightarrow 0$ , y estamos en posición de mostrar que  $\langle ar^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$  es una sucesión sumable e incluso de calcular su suma.

PROPOSICIÓN 2. *Dados  $a$  y  $r$  arbitrarios tales que  $0 < r < 1$ ,*

$$(20) \quad S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{N-1} + ar^N + \dots = \frac{a}{1 - r}.$$

*Demostración.* Como  $r$  es menos que 1, en (19)  $r^N = \underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{N \text{ veces}} \rightarrow 0$  cuando  $N$  se

incrementa, y así, por (19)

$$S_N = a \frac{1 - r^N}{1 - r} \rightarrow S = a \frac{1 - 0}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

Tomando en cuenta la definición (10) de la suma de una serie:  $S_N \rightarrow S$  y la igualdad (20) se sigue.  $\square$

Para alguien que confía más en los cálculos numéricos presentamos  $S_N$  para  $N = 5, 10$  y  $20$  (seleccionando por ejemplo,  $a = 1, r = 0.5$ ).

Por (19) y una calculadora:

$$\begin{aligned} S_5 &= 1.9375 \\ S_{10} &= 1.998046875 \\ S_{20} &= 1.99998093. \end{aligned}$$

Comparando estos números con la suma  $S$  (el valor límite de  $S_N$ !) dado en (20):  $S = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - 0.5} = 2$ , uno puede incrementar su confianza en el razonamiento de los argumentos matemáticos basados en la noción de convergencia.

Para ofrecer una aplicación simple de la fórmula (20) mostramos que

$0.111\dots = 1/9$  (como se enunció en la página 11). Como  $0.111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{(10)^2} + \frac{1}{(10)^3} + \dots + \frac{1}{(10)^N} + \dots = \frac{1}{10} [1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \dots + (\frac{1}{10})^{N-1} + \dots]$ , la expresión en corchetes es una suma de la sucesión geométrica con  $a = 1, r = 1/10$ . Aplicando (20) obtenemos:

$$0.111\dots = \frac{1}{10} \left( \frac{1}{1 - 1/10} \right) = \frac{1}{10} \left( \frac{10}{9} \right) = 1/9.$$

En la Sección 6 consideraremos un ejemplo más interesante de aplicación de la fórmula (20).

## 5. FALACIA DE EULER

El científico suizo Leonhard Euler (1707-1783) es uno de los matemáticos más sobresalientes de todos los tiempos. Hizo muchas contribuciones importantes en ramas de las matemáticas como la topología, la teoría de números y el análisis matemático. También es conocido por sus investigaciones en mecánica, óptica y dinámica de fluidos.

En la última sección de este artículo comentaremos uno de sus resultados brillantes que relaciona al número número  $\pi$  con la suma de ciertas series convergentes.

Vale la pena mencionar que a pesar de los numerosos descubrimientos matemáticos importantes en el siglo XVIII, la fundamentación lógica de algunas nociones aún no estaba bien desarrollada. Particularmente, no estaba completamente claro el significado de convergencia de series. El siguiente ejemplo de una falacia se le atribuye a L. Euler. Él presentó la siguiente “paradoja”.

Sea  $r$  un número positivo diferente de 1. Considérese la sucesión geométrica  $\langle x_n \rangle$  con el primer término  $a = r$  y la razón  $r$ , que es,  $\langle x_n = r \times r^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$ .

Sea también  $\langle y_n \rangle$  la sucesión geométrica con  $a = 1$  y la razón  $\tilde{r} = 1/r$ , i.e.  $\langle y_n = \tilde{r}^{n-1} = (1/r)^{n-1}, n = 1, 2, \dots \rangle$ .

Una aplicación descuidada de la ecuación (20) da los siguientes valores de las sumas de ambas sucesiones:

$$(21) \quad \begin{aligned} S &= x_1 + x_2 + \dots + x_N + \dots \\ &= r + r \cdot r + r \cdot r^2 + \dots + r \cdot r^{n-1} + \dots \\ &= \frac{r}{1-r}, \text{ y} \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \tilde{S} &= y_1 + y_2 + \dots + y_N + \dots \\ &= 1 + 1 \frac{1}{r} + 1 \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \dots + 1 \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + \dots \\ &= \frac{1}{1-1/r} = \frac{r}{r-1}. \end{aligned}$$

Así  $S + \tilde{S} = \frac{r}{1-r} + \frac{r}{r-1} = \frac{r}{1-r} - \frac{r}{1-r} = 0$ , y esto contradice el hecho de que *todos* los sumandos en (21) y (22) son *números positivos* y por lo tanto  $S + \tilde{S}$  debería ser positivo.

El error cometido fue obvio (¡para los matemáticos de los siglos XIX-XXI!). Si  $r < 1$ , entonces  $\tilde{r} = 1/r > 1$  (mayor que 1) y la sucesión  $\langle y_n \rangle$  no es sumable. Así que la suma (serie) escrita en las primeras dos líneas de (22) no existe (como un número real), y la fórmula (20) no es aplicable. En el caso cuando  $r > 1$ , la sucesión  $\langle x_n \rangle$  no es sumable y entonces, la última igualdad en (21) es falsa.

## 6. LA PARADOJA DE ZENÓN DE ÁQUILES Y LA TORTUGA

Zenón de Elea fue un filósofo Griego que vivió entre 490 A.C. y 430 A.C. Inventó varias paradojas famosas una de las cuales describiremos abajo.

En la mitología griega, Aquiles era un héroe griego de la guerra Troyana. Además de sus otras capacidades fantásticas (ser casi invulnerable es la más famosa) no era mal corredor. Algo que no puede decirse sobre una tortuga. El razonamiento de Zenón era el siguiente.

Supóngase que al mismo tiempo, digamos  $t_0 = 0$ , Aquiles y la tortuga empiezan a correr en la misma dirección a lo largo de un camino recto. Aquiles empieza corriendo de cierto punto  $p_0$  con la velocidad  $V = 5m/s$ , mientras que la tortuga empieza en el punto  $p_1 = p_0 + 50$  metros (*i.e.*  $x_1 = 50$  metros adelante) con la velocidad  $v = 1 m/s$ . Entonces, al tiempo  $t_1 = \frac{50}{V} = \frac{50}{5} = 10$  segundos Aquiles debería alcanzar el punto de partida de la tortuga  $p_1$ . (Véase la Figura 7 abajo). Durante este tiempo  $t_1 = 10$  segundos la tortuga habría recorrido la distancia  $x_2 = vt_1 = 1 \cdot 10 = 10$  metros y habría alcanzado el punto  $p_2 = p_1 + x_2$  (véase la Figura 7). Aquiles tendría que usar el tiempo  $t_2 = x_2/V = 10/5 = 2$  segundos para llegar al punto  $p_2$ .

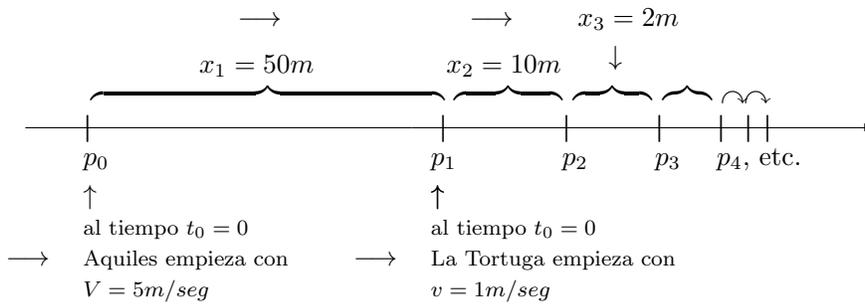


FIGURA 7. La carrera de Aquiles y la tortuga

Pero para esos 2 segundos la tortuga se movería al punto  $p_3 = p_2 + x_3$ , donde  $x_3 = vt_2 = 1 \cdot 2 = 2$  metros. De nuevo a Aquiles le llevaría el tiempo  $t_3 = 2/V = 2/5$  segundos alcanzar el punto  $p_3$ , mientras que la tortuga continua avanzando adelante. Uno puede repetir estos argumentos infinitamente para obtener la sucesión de puntos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$  por los que Aquiles tendría que pasar antes de alcanzar a la tortuga.

Zenón afirmó que el número infinito de dichos puntos y el número infinito de correspondientes intervalos de tiempo  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$  para correr un número infinito de segmentos de longitud  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  llevan a la conclusión de que Aquiles nunca alcanza a la tortuga. Esta conclusión evidentemente contradice a la realidad y ésta es la esencia de la paradoja.

Esta paradoja no es tan trivial como podría parecer a primera vista. Tiene que ver con la relación entre el movimiento físico y su descripción matemática y con el problema de continuidad (o discretización) del espacio y la divisibilidad infinita del tiempo. La **solución matemática** simple (y estándar) de la paradoja se da abajo. Obsérvese que la sucesión de porciones  $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \rangle$  que tiene que cubrir Aquiles especificada arriba es una **sucesión geométrica** con el primer término  $a = 50$  y la razón común  $r = 1/5$ . Claramente, en este ejemplo  $x_1 = 50 = a$ . Como ya vimos,

$$x_2 = Vt_1 = v \frac{50}{V} = \frac{50}{5} = 50 \frac{1}{5} = ar.$$

También

$$x_3 = vt_2 = v \frac{x_2}{V} = \frac{x_2}{5} = 50 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = ar^2.$$

No es difícil verificar (por ejemplo, por inducción) que para  $n \geq 1$  arbitrario,  $x_n = ar^{n-1}$  con  $a = 50$  y  $r = 1/5$ .

Es claro que para alcanzar a la tortuga, Aquiles debería cubrir la distancia

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \dots \\ &= 50 + 50 \left(\frac{1}{5}\right) + 50 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + 50 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \dots, \end{aligned}$$

que es la suma de la correspondiente sucesión geométrica. Aplicando la fórmula (20) obtenemos:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{50}{1-1/5} = 62.5 \text{ metros.}$$

Consecuentemente, habiendo corrido 62.5 metros Aquiles alcanza a la tortuga y para esto ocupa  $T = S/V = 62.5/5 = 12.5$  segundos.

Podemos obtener este resultado de otra manera, pero de nuevo, aplicando la suma de una sucesión geométrica. Nótese que

$$\begin{aligned} T &= t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n \dots, \text{ donde} \\ t_1 &= \frac{x_1}{V} = \frac{50}{5} = 10, \\ t_2 &= \frac{x_2}{V} = \frac{t_1 v}{V} = 10 \left(\frac{1}{5}\right), \\ t_3 &= \frac{x_3}{V} = \frac{t_2 v}{V} = 10 \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{5}\right) = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^2, \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Así  $\langle t_n \rangle$  es la sucesión geométrica con  $a = 10$  y  $r = 1/5$ . Por (20)  $T = \frac{a}{1-r} = \frac{10}{1-1/5} = 12.5$  segundos.

Hay que remarcar que si dejamos del lado la casuística de Zenón, podemos encontrar los valores de arriba de  $S$  y  $T$  de una manera muy simple. Tenemos:

$$\begin{cases} S = TV \\ S - 50 = Tv, \text{ o} \\ S = 5V \\ S - 50 = T, \text{ .} \end{cases}$$

(ver la Figura 8)

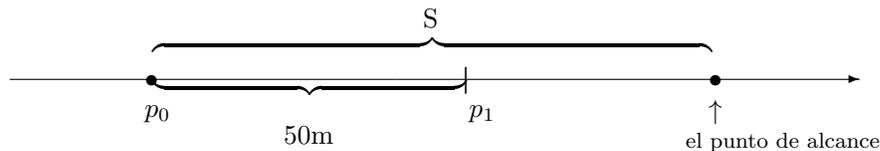


FIGURA 8

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con dos variables desconocidas  $S$  y  $T$ , encontramos que  $S = 62.5$  metros,  $T = 12.5$  segundos, que, por supuesto, coincide con las sumas de las sucesiones geométricas ya calculadas.

A pesar de las matemáticas simples empleadas arriba, la paradoja de Zenón despierta preguntas que tienen que ver con la relación entre el mundo físico (digamos, con los movimientos mecánicos) y su modelación matemática. Por ejemplo: ¿Qué sentido físico tiene la suma de un número infinito de términos que se acercan cada vez más a cero y tarde o temprano se convierten en valores tan pequeños que no pueden ser medidos por ningún método físico?

De hecho, este tipo de preguntas también están relacionadas con la impactante eficiencia de las llamadas ecuaciones diferenciales en la representación de las leyes físicas.

En mecánica, por ejemplo, estas ecuaciones involucran derivadas de una posición  $x(t)$  como una función del tiempo  $t$ , y la velocidad instantánea se define como el valor límite del cociente  $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$  cuando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se aproxima a cero (y así se vuelve un número arbitrariamente pequeño).

## 7. EL NÚMERO $\pi$ Y ALGUNAS SERIES

El origen del número (constante)  $\pi \approx 3.14159265$  es puramente geométrico. Está definido como el cociente de la circunferencia de un círculo con su diámetro.

Algunas civilizaciones antiguas intentaron medir el valor de  $\pi$  usando estimaciones encontradas para propósitos prácticos (en construcción, por ejemplo).

Las tablillas de arcilla de Babilonia de 1900-1600 A.C. contienen escritos que aproximan  $\pi$  a  $25/8 = 3.125$ .

En 1761 el matemático francés J.H. Lambert probó que  $\pi$  es un número irracional (es decir, no es cociente de enteros).

A pesar de sus raíces geométricas, el número  $\pi$  aparece sorpresivamente y con frecuencia en muchas ramas de las matemáticas, la física y otras ciencias.

Nos gustaría ilustrar un resultado fino de Euler, que relaciona al número  $\pi$  con la suma de la sucesión (serie)  $\langle x_n = 1/n^2, n = 1, 2, \dots \rangle$ .

Euler mostró que esta sucesión es sumable y, además,

$$(23) \quad S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{N^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

De la ecuación (23) podemos expresar  $\pi$  como sigue

$$(24) \quad \pi = \sqrt{6 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{N^2} + \dots \right)}.$$

En lugar de tratar de probar estas ecuaciones calculamos numéricamente las sumas parciales:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{N^2}$$

para  $N = 100, 1000$  y  $10000$ . Los resultados obtenidos por computadora son los siguientes:

$$S_{100} \approx 1.634983900$$

$$S_{1000} \approx 1.643934567$$

$$S_{10000} \approx 1.644834072.$$

Notando que  $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934067$ , y comparándolo con los valores de arriba de  $S_N$  podemos concluir que es plausible que  $S_N \rightarrow \pi^2/6$ , y así la igualdad (23) se cumple.

Además, calculando

$$\begin{aligned}\Pi_N &= \sqrt{6 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} \right)} \\ &= \sqrt{6S_N},\end{aligned}$$

para los mismos valores de  $N = 100, 1000$  y  $10000$  se obtiene que:

$$\begin{aligned}\Pi_{100} &\approx 3.132076532, \\ \Pi_{1000} &\approx 3.140638064, \\ \Pi_{10000} &\approx 3.141497164.\end{aligned}$$

Comparando estos datos con el valor  $\pi \approx 3.141592654$  nos convencemos de la validez de (24).

Puesto que la serie en (23) es convergente (*i.e.*, la sucesión  $\langle x_n = 1/n^2, n = 1, 2, \dots \rangle$  es sumable), los términos  $1/n^2$  se anulan “lo suficientemente rápido” cuando  $n$  incrementa. En la Sección 3 ya hemos subrayado que la condición  $x_n \rightarrow 0$  es necesaria para que una sucesión sea sumable (o equivalentemente, para que una serie sea convergente). Ahora mostramos que esta condición *no es suficiente*. Hay sucesiones no sumables  $\langle x_n \rangle$  con  $x_n \rightarrow 0$ .

Consideremos la sucesión  $\langle x_n = 1/n, n = 1, 2, \dots \rangle$ .

L. Euler en 1734 estableció que para todos los  $N$  grandes

$$(25) \quad S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \approx \ln(N) + \gamma,$$

donde  $\gamma \approx 0.5772456649$  es la llamada constante de Euler.

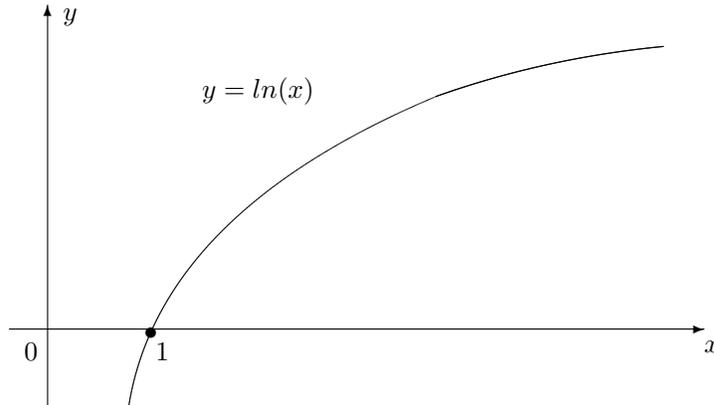


FIGURA 9. La gráfica de  $y = \ln(x)$ .

Sabemos que la función  $y = \ln(x)$ ,  $x > 0$  es *no acotada*, *i.e.*, crece ilimitadamente cuando  $x$  se incrementa (Véase la Figura 9). Consecuentemente, la aproximación (25) nos dice que la sucesión de sumas parciales  $\langle S_N, N = 1, 2, \dots \rangle$  crece ilimitadamente y entonces, no converge a ningún número real. Esto último significa que  $\langle 1/n, n = 1, 2, \dots \rangle$  no es una sucesión sumable (o que la serie  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} + \cdots$  no es convergente).

Hay una manera aún más simple de ver que la suma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  es *infinita*. Obsérve que

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ es mayor que} \\ &1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots, \end{aligned}$$

donde la última suma (serie) es evidentemente infinita.

Para concluir, ofrecemos al lector verificar por cálculos en computadora que

$$\pi = 4 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right].$$

El autor agradece a los estudiantes Patricia Vásquez y Diego López por su ayuda en la preparación de este artículo.

*Dirección del autor:*

Evgueni Gordienko

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,

Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas,

Oficina AT-315

e-mail: [gord@xanum.uam.mx](mailto:gord@xanum.uam.mx)