Mixba'al
Revista Metropolitana de Matateáticas
No. 1, Vol. IX, Julio de 2018, 7–12

EL ESPECTRO DE GELFAND DEL ÁLGEBRA CIRCULANTE

AURA CARINA MÁRQUEZ MARTÍNEZ Y ROBERTO QUEZADA

Resumen. Calculamos el espectro de Gelfand del álgebra de las matrices circulantes. Describimos la correspondiente transformada de Gelfand y demostramos que ésta coincide con la transformada de Fourier discreta.

1. Introducción

La generalización de Gelfand de la transformada de Fourier, originalmente definida en el álgebra conmutativa $L_1(\mathbb{R}^n)$ de las funciones integrables con valores complejos, al caso de un álgebra conmutativa arbitraria es muy abstracta y en cursos introductorios es conveniente ilustrarla con varios ejemplos. En la literatura es usual que algunas nociones de esta generalización se ilustren con el álgebra $C(X)$ de todas las funciones continuas sobre un compacto X, o bien, con el álgebra de Wiener $\mathcal{W}$ de todas las funciones continuas sobre la circunferencia unitaria cuya serie de Fourier converge absolutamente, véase por ejemplo [1].

Es sorprendente que el álgebra de todas las matrices circulantes (o álgebra circulante), un álgebra probablemente más simple que las dos anteriores, aparentemente no se ha utilizado para ilustrar esta bella y profunda generalización de Gelfand, no obstante que el concepto de matriz circulante se usa ampliamente en varias áreas de las matemáticas y aún fuera de ella, véase por ejemplo el libro de Davis [2]. En esta nota ilustramos los conceptos de espectro y trasformada de Gelfand en el caso del álgebra conmutativa de las matrices circulantes, calculando explícitamente su espectro de Gelfand y mostrando cómo en este caso, la transformada de Gelfand se reduce a la transformada de Fourier discreta.

2. El álgebra circulante

Una matriz compleja de tamaño $p \times p$, $c = (c_{ij})_{0 \leq i,j \leq p-1}$, es circulante si y sólo si $c_{ij} = c_{j-i}$, para cada $0 \leq i, j \leq p-1$, las operaciones en los subíndices son módulo p, $(c_{(j-i) \ mod \ p})$. Es decir,

$$c = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} \\ c_{p-1} & c_0 & \cdots & c_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Usualmente, una matriz circulante c se denota por $c = circ(c_0, c_1, \cdots, c_{p-1})$ o simplemente por $c = (c_0, c_1, \cdots, c_{p-1})$. Un cálculo sencillo permite mostrar que cada matriz circulante c es una combinación lineal de potencias de la matriz de permutación primaria J,

$$c = \sum_{k=0}^{p-1} c_k J^k \tag{1}$$

Palabras clave. Matrices circulantes, espectro de Gelfand.

donde $J = circ(0, 1, 0, \cdots, 0)$. Así mismo J es una combinación lineal de operadores de rango uno (proyecciones),

$$J = \sum_{k=0}^{p-1} |e_k\rangle\langle e_{k+1}|$$

donde $\{e_i\}_{i=0}^{p-1}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^p$ y $|e_k\rangle\langle e_{k+1}|$ es el operador de rango uno en $\mathbb{C}^p$ definido mediante $|e_k\rangle\langle e_{k+1}|v = \langle e_{k+1}, v\rangle e_k$, $v \in \mathbb{C}^p$, con operaciones en los subíndices módulo p. El símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota al producto interno usual en $\mathbb{C}^p$.

El conjunto de matrices circulantes de tamaño $p \times p$, $\mathscr{C}_p$, tiene estructura de álgebra conmutativa sobre los complejos con las operaciones de suma y multiplicación de matrices y multiplicación por escalares; de hecho, es un álgebra de Von Neumann con la operación de involución definida como la toma de adjuntos.

En vista de la representación (1), la aplicación $c \mapsto (c_0, c_1, \cdots, c_{p-1})$ define un isomorfismo del álgebra de von Neumann de las matrices circulantes en el álgebra de von Neumann $(\mathbb{C}^p, *)$, donde $\mathbb{C}^p$ se provee con su estructura natural de espacio vectorial junto con la conjugación coordenada a coordenada y la multiplicación de vectores definida mediante la convolución:

$$c * c' := ((c * c')_0, (c * c')_1, \cdots, (c * c')_{p-1})$$

donde $(c * c')_i = \sum_{j=0}^{p-1} c_j c'_{i-j}$, con operaciones módulo p en los subíndices. Dejamos como un ejercicio para el lector demostrar que en efecto, la aplicación de $\mathscr{C}_p$ en $(\mathbb{C}^p, *)$ definida por $c \mapsto (c_0, c_1, \cdots, c_{p-1})$ es un $*$-isomorfismo.

3. El espectro de Gelfand del álgebra circulante

Si A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad e, se denota por $\hom(A, \mathbb{C})$ al conjunto de todos los homomorfismos $w : A \longrightarrow \mathbb{C}$ de A en los complejos, es decir, $w \in \hom(A, \mathbb{C})$ si w es un funcional lineal complejo tal que

$$w(xy) = w(x)w(y), \text{ para cada } x, y \in A.$$

El **espectro de Gelfand** de A se define como el conjunto

$$sp(A) = \{w \in \hom(A, \mathbb{C}) : w \neq 0\}$$

de todos los homomorfismos complejos no triviales de A. En ocasiones también se le llama **espacio de ideales máximos** de A, pues existe una biyección natural de $sp(A)$ sobre el conjunto de todos los ideales máximos de A.

El espectro de Gelfand satisface lo siguiente:

1. Cada $w \in sp(A)$ satisface $w(e) = 1$.
2. Cada $w \in sp(A)$ es continuo, mejor aún, $\|w\| = 1$.
3. Para cada $w \in sp(A)$, $\ker(w)$ es un ideal de A.

Teorema 1. *Existe una biyección entre los subconjuntos $sp(\mathscr{C}_p)$ y $\{\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1}\}$, donde ξ es una raíz primitiva de la unidad de orden p.*

Demostración. Sean $w \in sp(\mathscr{C}_p)$ y J la matriz de permutación primaria. Como w es un homomorfismo, tenemos que

$$w(J^k) = w(J)^k \in \mathbb{C}$$

para cada $k \geq 0$. En particular, $w(J^p) = w(I) = 1$ y en consecuencia $w(J)^p = 1$, por lo que $w(J)$ es una raíz de la unidad de orden p.

Si ξ es una raíz primitiva de la unidad de orden p, existe un único $\lambda = \lambda(w)$ con $0 \leq \lambda \leq p - 1$ tal que $w(J) = \xi^\lambda$. Defínase $\phi : sp(\mathscr{C}_p) \longrightarrow \{\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1}\}$, mediante $\phi(w) = \xi^\lambda$ para $w \in sp(\mathscr{C}_p)$ con $w(J) = \xi^\lambda$.

La aplicación ϕ es una biyección entre $sp(\mathscr{C}_p)$ y $\{\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1}\}$. Para demostrar esto nótese primero que ϕ es inyectiva. En efecto, si para $w_1, w_2 \in sp(\mathscr{C}_p)$, $\phi(w_1) =$

$\phi(w_2)$, entonces existen únicos $0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le p-1$ tales que $\phi(w_1) = \xi^{\lambda_1}, \phi(w_2) = \xi^{\lambda_2}$ y así

$$\xi^{\lambda_1} = \xi^{\lambda_2} \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \ mod\, p \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow w_1 = w_2$$

donde hemos usado que cada λ_j, $j = 1, 2$, está asociado de manera biunívoca con su respectivo w_j. Y ϕ es sobreyectiva, ya que para cada $\xi^k \in \{\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1}\}$, la aplicación $w_k : \mathscr{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ definida para cada $c = \sum_{j=0}^{p-1} c_j J^j$ mediante

$$w_k(c) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j \xi^{kj}$$

define un elemento $w_k \in \hom(\mathscr{C}_p, \mathbb{C})$. En efecto, sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $c = \sum_{j=0}^{p-1} c_j J^j$, $d = \sum_{j=0}^{p-1} d_j J^j \in \mathscr{C}_p$. Para la matriz circulante

$$\alpha c + d = \sum_{j=0}^{p-1} (\alpha c_j + d_j) J^j$$

se tiene que

$$w_k(\alpha c + d) = \sum_{j=0}^{p-1} (\alpha c_j + d_j) \xi^{kj} = \alpha \sum_{j=0}^{p-1} c_j \xi^{kj} + \sum_{j=0}^{p-1} d_j \xi^{kj} = \alpha\ w_k(c) + w_k(d)$$

Entonces w_k es un funcional. Además se observa que

$$w_k(I) = w_k(J^0) = \xi^{k \cdot 0} = 1$$

Ahora, la multiplicación de dos matrices circulantes $c, d \in \mathscr{C}_p$ es la matriz circulante

$$cd = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} c_j d_{(p-j+i)} J^i.$$

Por lo tanto, como $\xi^{kp} = 1$, haciendo $m + j = i\, mod\, p$, equivalentemente, $m = (p - j + i)\ mod\, p$, se obtiene

$$w_k(c) w_k(d) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} c_j d_m \xi^{k(m+j)} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} c_j d_{(p-j+i)} \xi^{ki} = w_k(cd)$$

Lo cual demuestra que w_k es un homomorfismo no trivial, i.e., $w_k \in sp(\mathscr{C}_p)$. Esto concluye la demostración. □

4. La tranformada de Gelfand del álgebra circulante

De ahora en adelante identificaremos al conjunto $sp(\mathscr{C}_p)$ con las raíces de la unidad $\{\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1}\}$.

Cada elemento $c \in \mathscr{C}_p$ da lugar a una función

$$\hat{c} : \{\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1}\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\hat{c}(\xi^k) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j \xi^{jk}, \quad 0 \le k \le p-1 \tag{2}$$

La función $\hat{c}$ se llama la **transformada de Gelfand de c** y la aplicación $c \longrightarrow \hat{c}$ es la **transformada de Gelfand**.

Nótese que cada función $\hat{c}$ se puede identificar con el vector de todos sus valores: $\hat{c} = \big(\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \cdots, \hat{c}(\xi^{p-1})\big)$. Esta identificación nos permite escribir a la transformada de

Gelfand como una aplicación lineal $\hat{\cdot}$ que asocia con cada matriz (vector) circulante $c = (c_0, \cdots, c_{p-1})$, la función (vector) $\hat{c} = \big(\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \cdots, \hat{c}(\xi^{p-1})\big)$, de manera que

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \cdots & \xi^{p-2} & \xi^{p-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \cdots & \xi^{2(p-2)} & \xi^{2(p-1)} \\ 1 & \xi^3 & \xi^6 & \cdots & \xi^{3(p-2)} & \xi^{3(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi^{p-2} & \xi^{(p-2)2} & \cdots & \xi^{(p-2)(p-2)} & \xi^{(p-2)(p-1)} \\ 1 & \xi^{p-1} & \xi^{(p-1)2} & \cdots & \xi^{(p-1)(p-2)} & \xi^{(p-1)(p-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{p-2} \\ c_{p-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Es decir, la transformada de Gelfand es el operador

$$\hat{\cdot} = \sum_{0 \le k,l \le p-1} \xi^{kl} |e_k\rangle\langle e_l|$$

cuya matriz asociada aparece arriba.

A esta transformación también se le conoce como **transformada de Fourier discreta** y tiene una gran cantidad de aplicaciones en varias áreas de las matemáticas y otras ciencias, véase por ejemplo el artículo *Discrete Fourier Transform* en Wikipedia [3] y los artículos ahí citados. Usualmente se le denota por F en lugar de $\hat{\cdot}$. De hecho el propósito de Gelfand al definir su transformada fue precisamente generalizar el concepto de transformada de Fourier, originalmente definida en $L_1(\mathbb{R}^n)$, al caso de álgebras conmutativas arbitrarias. Aquí observamos cómo la extensión de Gelfand se reduce al concepto original de Fourier. Dejamos al lector el ejercicio de verificar que F es la transformada de Fourier sobre el espacio $L_1(P)$, donde $P = \{0, 1, \cdots p-1\}$, con la medida de conteo normalizada.

5. Diagonalización de matrices circulantes

En esta sección demostraremos que la transformada de Gelfand diagonaliza a cualquier matriz circulante. Por comodidad, usaremos la notación de F en lugar de $\hat{\cdot}$.

Es conveniente introducir una constante de normalización. Denotaremos con el mismo símbolo F a la transformada de Fourier normalizada

$$F = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{0 \le k,l \le p-1} \xi^{kl} |e_k\rangle\langle e_l|$$

La transformada de Fourier discreta es un operador unitario, i.e., $FF^* = F^*F = I$, donde F^* es el adjunto (transpuesta conjugada) de F, lo cual se demuestra fácilmente usando la matriz (3) o, equivalentemente, con el siguiente cálculo,

$$\begin{aligned} FF^* &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{ij} |e_i\rangle\langle e_j| \sum_{i'j'=0}^{p-1} \bar{\xi}^{i'j'} |e_{j'}\rangle\langle e_{i'}| = \frac{1}{p} \sum_{i,j=0}^{p-1} \sum_{i',j'=0}^{p-1} \xi^{ij-i'j'} \delta_{jj'} |e_i\rangle\langle e_{i'}| \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i,i'=0}^{p-1} \Big(\sum_{j=0}^{p-1} \xi^{j(i-i')}\Big) |e_i\rangle\langle e_{i'}| = \frac{1}{p} \sum_{i,i'=0}^{p-1} p\delta_{ii'} |e_i\rangle\langle e_{i'}| = \sum_{i=0}^{p-1} |e_i\rangle\langle e_i| = I \end{aligned} \tag{4}$$

donde hemos usado la identidad

$$\sum_{j=0}^{p-1} \xi^{j(i-i')} = \begin{cases} p & \text{if } i - i' = 0 \bmod p \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \tag{5}$$

la cual que se sigue de

$$\sum_{j=0}^{p-1} \xi^{j(i-i')} = \Big(\frac{\xi^{p(i-i')} - 1}{\xi^{(i-i')} - 1}\Big) = 0$$

si $i \neq i'$ con $0 \leq i, i' \leq p-1$ y observando que la suma es igual a p si $i = i'$. De manera análoga se muestra que $F^*F = I$. En particular, hemos demostrado que la inversa de F es F^*.

Por otra parte, si c es una matriz circulante, F^*cF es una matriz diagonal, en efecto, demostraremos lo siguiente.

Proposición 2. *$F^*JF = diag(\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1})$ En particular, los valores propios de J son las coordenadas del vector $(\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1})$. Consecuentemente, para cada matriz circulante c, F^*cF es la matriz diagonal*

$$F^*cF = diag\big(\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \cdots, \hat{c}(\xi^{p-1})\big)$$

donde $\hat{c}$ es la transformada de Gelfand de c dada por (2); los valores propios de c son las coordenadas del vector $\hat{c} = \big(\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \cdots, \hat{c}(\xi^{p-1})\big)$.

Demostración. Tenemos que

$$F^*J = \frac{1}{p}\sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{-ij}|e_j\rangle\langle e_i| \sum_k |e_k\rangle\langle e_{k+1}| = \frac{1}{p}\sum_{i,jk=0}^{p-1} \xi^{-ij}\delta_{ik}|e_j\rangle\langle e_{k+1}| = \frac{1}{p}\sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{-ij}|e_j\rangle\langle e_{i+1}|$$

de manera que, usando (5), se obtiene

$$\begin{aligned}
F^*JF =& \frac{1}{p^2}\sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{-ij}|e_j\rangle\langle e_{i+1}| \sum_{i',j'=0}^{p-1} \xi^{i'j'}|e_{i'}\rangle\langle e_{j'}| = \frac{1}{p^2}\sum_{i,j,i',j'=0}^{p-1} \xi^{i'j'-ij}\delta_{i+1,i'}|e_j\rangle\langle e_{j'}| \\
(6) \quad =& \frac{1}{p^2}\sum_{i,j,j'=0}^{p-1} \xi^{(i+1)j'-ij}|e_j\rangle\langle e_{j'}| = \frac{1}{p^2}\sum_{j,j'=0}^{p-1} \Big(\sum_{i=0}^{p-1} \xi^{i(j'-j)}\Big)\xi^{j'}|e_j\rangle\langle e_{j'}| \\
=& \frac{1}{p^2}\sum_{j,j'=0}^{p-1} p\delta_{jj'}\xi^{j'}|e_j\rangle\langle e_{j'}| = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \xi^j|e_j\rangle\langle e_j| = \mathrm{diag}(\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1})
\end{aligned}$$

Esto demuestra la primera afirmación de la proposición, el resto es consecuencia de la identidad

$$c = \sum_{k=0}^{p-1} c_k J^k$$

□

De acuerdo con el resultado de la proposición anterior, los valores propios (espectro) de cada matriz circulante c, se obtienen mediante los valores $\{\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \cdots, \hat{c}(\xi^{p-1})\}$ de la transformada de Gelfand en cada elemento del espectro de Gelfand $\{\xi^0, \xi, \cdots, \xi^{p-1}\}$ del álgebra circulante. Esta es una propiedad general de la transformada de Gelfand en cualquier álgebra conmutativa, véase por ejemplo el Teorema 1.9.5 de [1].

Concluimos esta nota invitando al lector interesado a identificar otras propiedades y nociones de la teoría de Gelfand en el álgebra circulante.

6. Agradecimientos

Este trabajo se realizó parcialmente con el apoyo de CONACYT a través de una ayudantía de Investigador Nivel III.

Referencias

[1] Arveson W., A Short Course on Spectral Theory, Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics 209), (2002)
[2] Davis P. J., Circulant Matrices, Wiley-Interscience, NY, (1979)
[3] Discrete Fourier Transform, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform