Mixba'al
Revista Metropolitana de Matateáticas
No. 1, Vol. IX, Junio de 2018, 13–26

ALGUNOS ASPECTOS HISTÓRICOS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO.

KARLA ADRIANA ORTEGA GALLEGOS Y GUSTAVO N. IZQUIERDO BUENROSTRO

Resumen. En este trabajo presentamos la relación entre el cálculo de cuerdas en un círculo y las funciones seno y coseno.

1. Introducción

Existen al menos dos preguntas que un estudiante no tiene manera de responder cuando estudia las funciones trigonométricas. Una de ellas es ¿ porqué no quedarse con la mera definición del seno y el coseno en un triángulo rectángulo? La otra tiene que ver con el cálculo de sus valores ¿cómo le hace uno para calcular el seno y el coseno de un ángulo? Tal vez una de las formas de dar una respuesta a estas interrogantes de manera elemental sea a través de la Historia.

La intención en este trabajo es presentar a las funciones seno y coseno desde una perspectiva "histórica". Desde este punto de vista, uno puede ver que los primeros avances en trigonometría están relacionados con las propiedades y el cálculo de las cuerdas determinadas por los ángulos centrales en un círculo. Así pues nos proponemos presentar a las funciones seno y coseno, no a partir de la definición actual, sino a partir de su relación con las cuerdas en un círculo.

Como la intención de este texto es ofrecer una lectura optativa para los alumnos de Cálculo, a lo largo del texto se dejan ejercicios para que el lector los resuelva.

2. Los primeros avances en trigonometría. Las cuerdas

Los primeros avances importantes en la trigonometría se dieron en la antigua Grecia y el primer compendio escrito que se conserva hasta nuestros días es el Almagesto de Claudio Ptolomeo[1]. En dicho trabajo, se destacan las aportaciones del matemático y astrónomo griego Hiparco de Nicea (190 a.C.-120 a.C.) a quien se le atribuyen un gran número de resultados y la elaboración de una primera tabla de valores relacionados con el cálculo de senos y cosenos.

Antes de continuar debemos señalar que en un principio no se consideraban las funciones seno y coseno tal y como las estudiamos ahora. Para Hiparco, Ptolomeo y sus discípulos el problema era el siguiente: dado un círculo de radio predeterminado y un ángulo central x, determinar la longitud de la cuerda comprendida por el ángulo. En términos de la Figura 1 el problema es determinar la longitud de segmento AB en términos del ángulo x.

Palabras clave. Funciones trigonométricas, cuerda de un ángulo central, seno y coseno.

[1]Ptolomeo nació en Egipto en el año 85 después de cristo

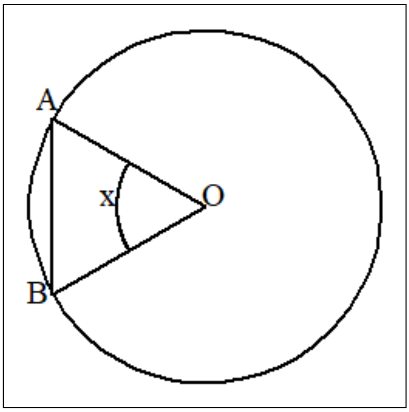

Figura 1

Al problema que acabamos de mencionar se le llamó problema del cálculo de cuerdas. Más adelante veremos cómo se relaciona este problema con el cálculo de los valores del seno y el coseno, por el momento concentremos nuestra atención en algunas de las ideas y resultados presentados en el Almagesto para el cálculo de cuerdas.

Debemos empezar por destacar que para medir ángulos Ptolomeo usa los grados tal y como los conocemos ahora, esto es, divide el círculo en 360 partes iguales a las que llama grados, luego divide en 60 partes iguales cada grado y a dichas divisiones les llama minutos, finalmente, al dividir en 60 partes iguales los minutos obtiene los segundos.

En los capítulos 10 y 11 del primer libro del Almagesto, estudia algunas propiedades de las cuerdas en un círculo y nos presenta una tabla con los valores de las cuerdas. Aquí se considera un círculo de diámetro 120 y se dan los valores de las cuerdas en dicho círculo para ángulos que van de los 14° a los 180° con incremento de medio grado en medio grado. En la tabla de Ptolomeo se hace uso del sistema de numeración sexagesimal babilónico o base 60, en conjunción con el sistema griego en el que cada letra del alfabeto se le asigna un valor numérico: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y así sucesivamente. Esto hace que la lectura de su tabla sea un poco engorrosa.

2.1. Algunas propiedades de las cuerdas. Antes de ver como construir una tabla como esta, es necesario estudiar cuáles son las propiedades de las cuerdas. Con este fin, Ptolomeo hace uso extensivo de varias propiedades geométricas de las figuras inscritas en un círculo.

Un primer ejemplo es la siguiente relación entre la cuerda de un ángulo a y la cuerda de su suplementario, $180° - a$.

Proposición 1. *Para cualquier ángulo central a se cumple que*

$$\mathrm{crd}^2\,[a] + \mathrm{crd}^2\,[180° - a] = \mathrm{crd}^2\,[180°] \tag{1}$$

En esta fórmula y en muchos de los resultados que enuncia Ptolomeo

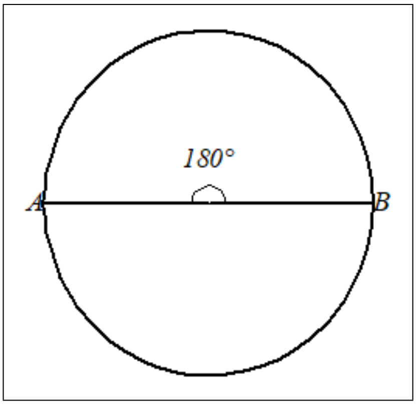

Figura 2

se refiere al diámetro del círculo como la cuerda del ángulo de 180° (ver Figura 2). Así $\operatorname{crd}[180°]$ corresponde al valor del diámetro de la circunferencia, en particular si el radio es r, $\operatorname{crd}[180°] = 2r$.

Veámos como se demuestra la proposición 1:

Demostración. La prueba se basa en el famoso teorema del triángulo semi-inscrito en un círculo. Este resultado nos dice que si un lado de un triángulo es el diámetro de un círculo y sus vértices están sobre dicho círculo, entonces, el triángulo es un triángulo rectángulo.

Regresando a la relación entre $\operatorname{crd}[a]$ y $\operatorname{crd}[180° - a]$, obsérvese (ver figura 3) que la cuerda de a, AB, la cuerda de $180° - a$, BC, y la cuerda de 180°, AC, forman un triángulo semi-inscrito y, por el teorema ya mencionado, se tiene que nuestro triángulo, $\Delta(A, B, C)$, es un triángulo rectángulo.

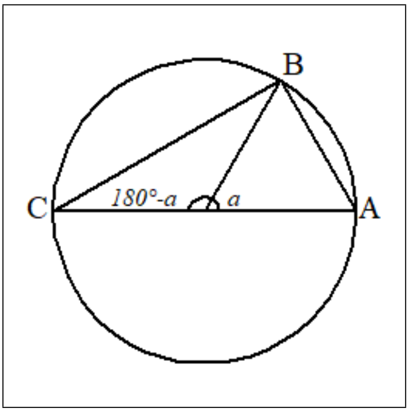

Figura 3

Si ahora aplicamos el teorema de Pitágoras a nuestro triángulo, concluimos que

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

esto es,

$$\operatorname{crd}^2[a] + \operatorname{crd}^2[180° - a] = \operatorname{crd}^2[180°]$$

o si se quiere

$$\operatorname{crd}^2[a] + \operatorname{crd}^2[180° - a] = 4r^2$$

□

Una de las primeras propiedades de las cuerdas que aparece en el Almagesto es la siguiente proposición:

Proposición 2. *Sean a y b dos ángulos centrales de un circulo de radio r, entonces:*

$$\operatorname{crd}[a - b]\operatorname{crd}[180°] = \operatorname{crd}[a]\operatorname{crd}[180^o - b] - \operatorname{crd}[b]\operatorname{crd}[180^o - a] \tag{2}$$

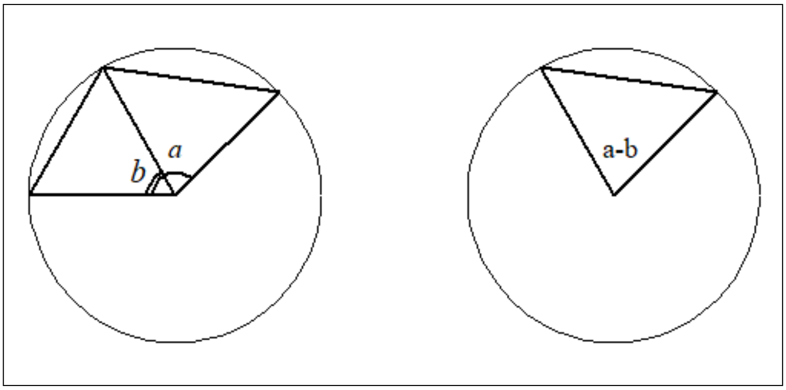

Figura 4

Por supuesto, al igual que la proposición 1, la demostración de este resultado hace uso de las propiedades de los polígonos inscritos en un círculo. En este caso el resultado a partir del cual se puede demostrar nuestra proposición es el llamado Teorema de Ptolomeo, el cual nos dice lo siguiente:

Teorema 3 (Ptolomeo). *El producto de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en un círculo es igual a la suma de los productos de lados opuesto. En términos de la Figura 5 este teorema nos dice que*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

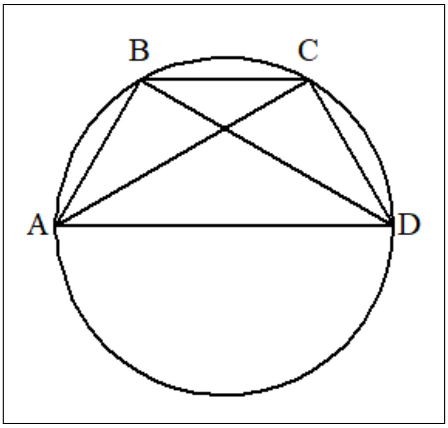

Figura 5

2.1.1. Demostración de la proposición 2. Veamos como se relaciona el teorema de Ptolomeo con la demostración de la proposición.

Tracemos sobre un círculo los ángulos a, b y $a - b$ (ver Figura 6).

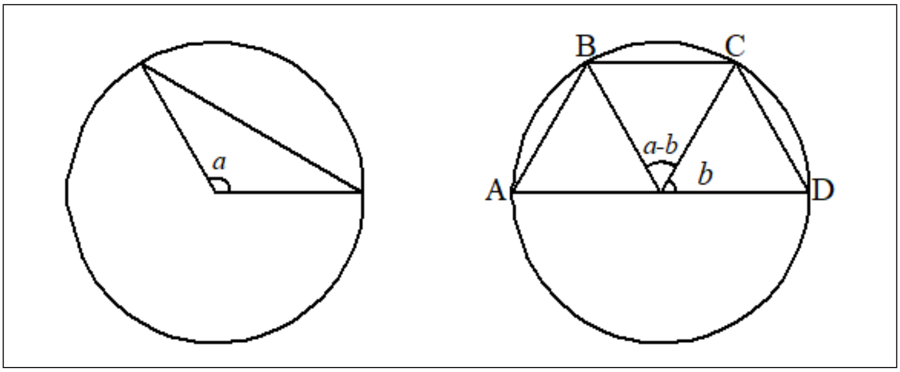

Figura 6

las cuerdas de los ángulos b, $a-b$, $180° - a$ junto con el diámetro forman el cuadrilátero $\square\,(ABCD)$ que está inscrito en nuestro círculo. Las diagonales de dicho cuadrilátero

BD y AC son, justamente, las cuerdas de a y de $180° - b$, respectivamente. En otros términos (ver Figura 7), tenemos que, para el cuadrilátero inscrito, los lados son

$$AB = \text{crd}\,[180° - a]\,, AC = \text{crd}\,[180° - b]\,, BC = \text{crd}\,[a - b] \text{ y } AD = \text{crd}\,[180°]$$

mientras que las diagonales son

$$BD = \text{crd}\,[a] \text{ y } BD = \text{crd}\,[180 - b]$$

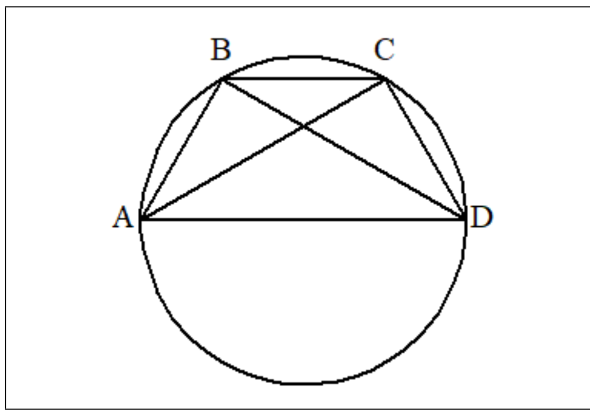

Figura 7

Así, de acuerdo con el teorema de Ptolomeo (teorema 3) se sigue que

$$\text{crd}\,[a] \cdot \text{crd}\,[180° - b] = \text{crd}\,[b] \cdot \text{crd}\,[180° - a] + \text{crd}\,[a - b] \cdot \text{crd}\,[180°] \tag{3}$$

Si despejamos la expresión $\text{crd}\,[a - b] \cdot \text{crd}\,[180°]$ en la ecuación (3) se llega a la igualdad

$$\text{crd}\,[a - b]\,\text{crd}\,[180°] = \text{crd}\,[a]\,\text{crd}\,[180^o - b] - \text{crd}\,[b]\,\text{crd}\,[180^o - a]$$

que es justo la fórmula que queríamos obtener.

2.1.2. Más propiedades de las cuerdas. Un resultado análogo a la proposición 2, pero para la cuerda de una suma, se puede obtener si se considera la siguiente figura

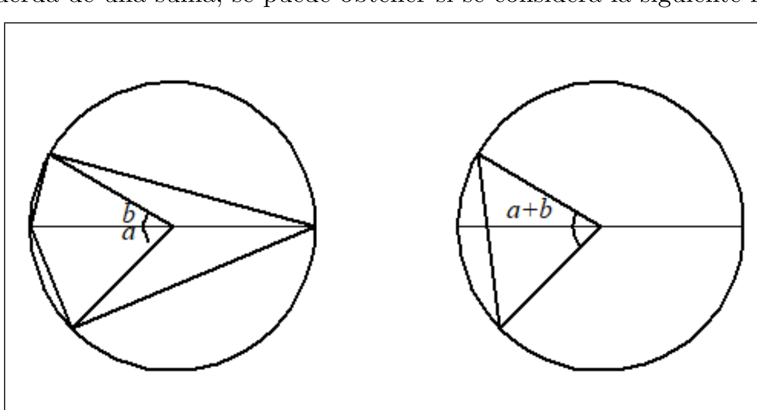

Figura 8

Proposición 4. *Sean a y b dos ángulos centrales de un círculo de radio r, entonces:*

$$\text{crd}\,[a + b]\,\text{crd}\,[180°] = \text{crd}\,[a]\,\text{crd}\,[180^o - b] + \text{crd}\,[b]\,\text{crd}\,[180^o - a] \tag{4}$$

o, si se prefiere

$$2r\,\text{crd}\,[a + b] = \text{crd}\,[a]\,\text{crd}\,[180^o - b] + \text{crd}\,[b]\,\text{crd}\,[180^o - a]$$

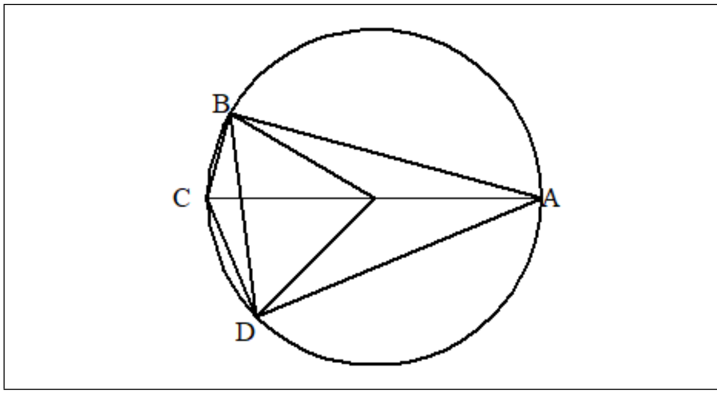

Figura 8B

Ejercicio 1. Use las figuras 8 y 8B y el teorema de Ptolomeo par demostrar la proposición 4.

El siguiente resultado relaciona la cuerda de un ángulo a con la cuerda del semiángulo $\frac{a}{2}$.

Proposición 5. *Sean a y b dos ángulos centrales de un círculo de radio r, entonces:*

$$\operatorname{crd}\left[\frac{a}{2}\right]\operatorname{crd}\left[\frac{a}{2}\right]=\frac{1}{2}\{\operatorname{crd}[180°]\operatorname{crd}[180°]-\operatorname{crd}[180°]\operatorname{crd}[180°-a]\}$$

esto es,

$$\operatorname{crd}^2\left[\frac{a}{2}\right]=2r^2-r\operatorname{crd}[180°-a]$$

Demostración. Tracemos en el círculo el ángulo central $a=\angle DOB$ y sea OC la bisectriz de dicho ángulo, entonces, los segmentos BC y CD son iguales. Luego se dibuja el segmento CF perpendicular al diámetro y coloca el punto E sobre AD con $AE=AB$ y finalmente traza el segmento EC como se muestra en la [Figura 9]

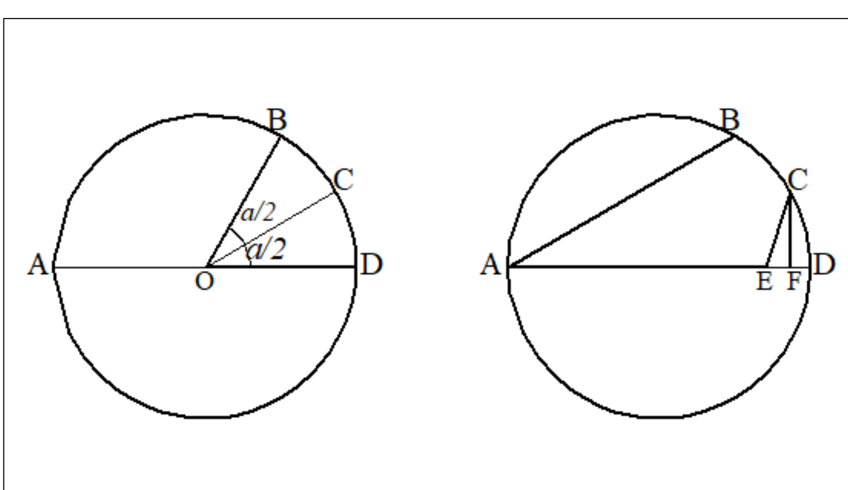

Figura 9

Entonces tenemos que los triángulos ABC y ACE son congruentes. En efecto, como los ángulos centrales $\angle BOC$ y $\angle DOC$ son congruentes (ver Figura 10), los ángulos inscritos $\angle BAC$ y $\angle EAC$ también son congruentes

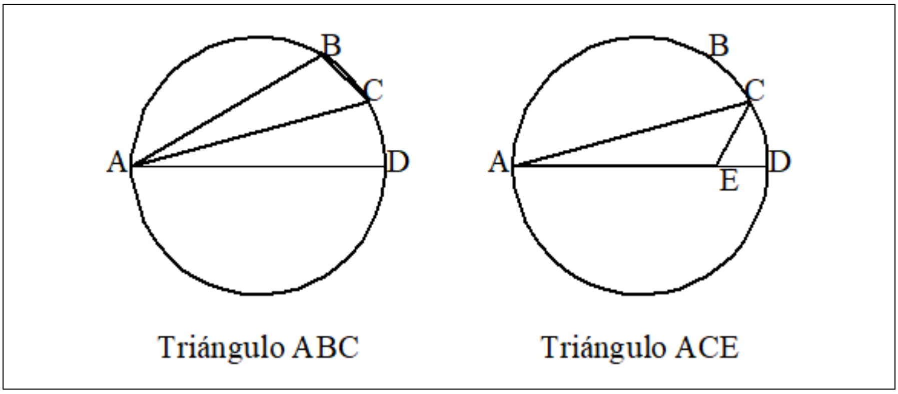

Figura 10

Como el lado AC es común y $AB \equiv BE$ por construcción, por el criterio LAL, concluimos que los triángulos son congruentes y que

$$BC \equiv CE$$

Pero sabemos que $BC \equiv CD$, lo que implica que $CE \equiv CD$. Esto muestra que el triángulo $\triangle CDE$ es isósceles.

Por otra parte, los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle CFD$ son semejantes, ya que los ángulos $\angle ACD$ y $\angle CFD$ son rectos (ver Figura 11)

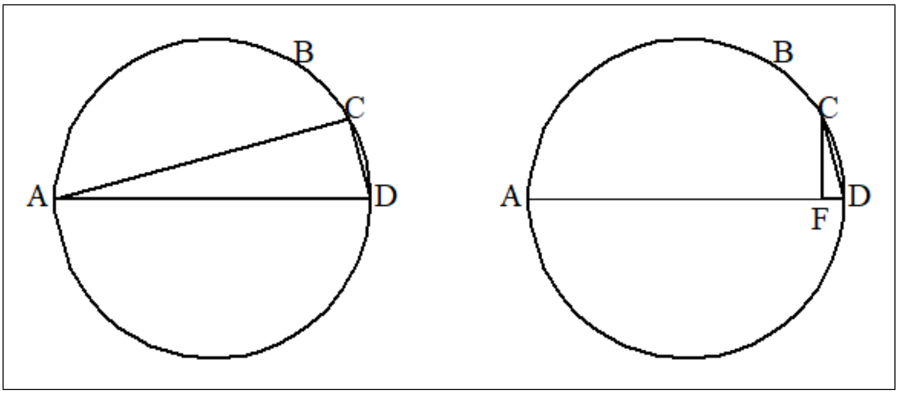

Figura 11

y, por ende, congruentes. Como, además, el ángulo $\angle ADC$ es el mismo que el ángulo $\angle FDC$, podemos concluir, como afirmamos, que los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle CFD$ son semejantes.

Como consecuencia de esto se tiene que

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DF}$$

luego

$$CD \cdot CD = AD \cdot DF \tag{5}$$

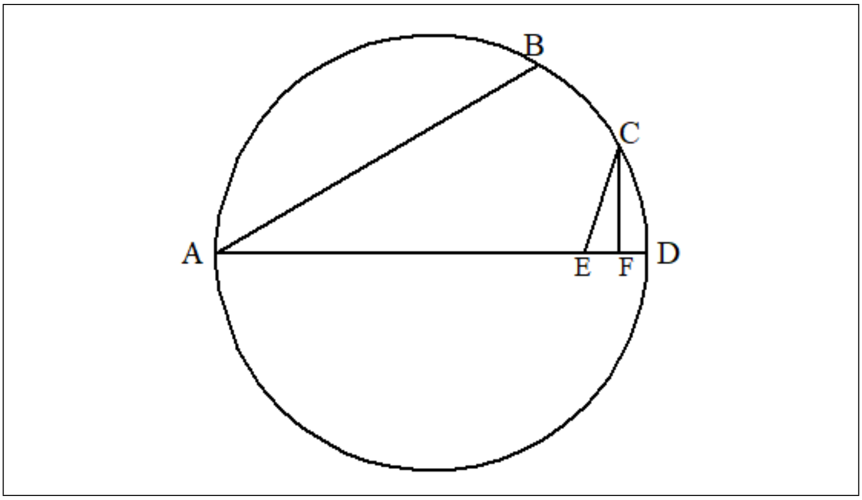

Figura 12

Finalmente, como

$$ED = AD - AE = AD - AB$$

y F es el punto medio del lado ED, se tiene que

$$DF = \frac{1}{2}\,(AD - AB)$$

Al sustituir en (5) se tiene que

$$CD^2 = AD \cdot \left[\frac{1}{2}\,(AD - AB)\right]$$

$$CD^2 = \frac{1}{2}(AD^2 - AD \cdot AB) \tag{6}$$

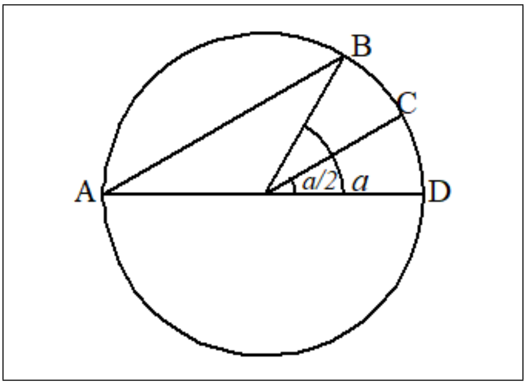

Figura 13

Puesto que $CD = \operatorname{crd}[a/2]\,, AD = \operatorname{crd}180^\circ$ y $AB = \operatorname{crd}[180^\circ - a]$, se sigue de la igualdad (6) que

$$\operatorname{crd}^2\left[\frac{a}{2}\right] = \frac{1}{2}[\operatorname{crd}^2[180^\circ] - \operatorname{crd}[180^\circ]\operatorname{crd}[180^\circ - a]]$$

o, si se prefiere,

$$\operatorname{crd}^2\left[\frac{a}{2}\right] = 2r^2 - r\operatorname{crd}[180^\circ - a]$$

□

Ejemplo 1. Muestre que si a y b son ángulos centrales de un círculo de radio r, entonces:

$$\operatorname{crd}[180^\circ]\operatorname{crd}[180^\circ - (a+b)] = \operatorname{crd}[180^\circ - a]\operatorname{crd}[180^\circ - b] - \operatorname{crd}[a]\operatorname{crd}[b] \tag{7}$$

esto es,

$$2r\,\mathrm{crd}\,[180^\circ - (a+b)] = \mathrm{crd}\,[180^\circ - a]\,\mathrm{crd}\,[180^\circ - b] - \mathrm{crd}\,[a]\,\mathrm{crd}\,[b]\,.$$

(Sugerencia: Use la fórmula (2) para la resta de los ángulos $180^\circ - a$ y b.)

Ejercicio 2. Muestre que si a y b son ángulos centrales de un círculo de radio r, entonces:

$$\mathrm{crd}\,[180^\circ]\,\mathrm{crd}\,[180^\circ - (a-b)] = \mathrm{crd}\,[180^\circ - a]\,\mathrm{crd}\,[180^\circ - b] + \mathrm{crd}\,[a]\,\mathrm{crd}\,[b]$$

(Sugerencia: Ahora podría usar la fórmula (4).)

Ejercicio 3. a) Muestre que en un círculo de radio r

$$\mathrm{crd}\left[\frac{a}{2}\right] = \sqrt{2r^2 - r\,\mathrm{crd}\,[180^\circ - a]}$$

b) Use la relación (1) para concluir que

$$\mathrm{crd}\left[\frac{a}{2}\right] = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \mathrm{crd}^2\,a}} \tag{8}$$

Ejercicio 4. a) Muestre que

$$\mathrm{crd}^2\left[180^\circ - \frac{a}{2}\right] = 2r^2 + r\,\mathrm{crd}\,[180^\circ - a]$$

b) Muestre que

$$\mathrm{crd}\left[180^\circ - \frac{a}{2}\right] = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \mathrm{crd}^2\,[a]}}$$

2.1.3. Como usar las propiedades de las cuerdas para construir una tabla como la de Ptolomeo. Para empezar, en sus cálculos Ptolomeo usa un círculo de radio 60, por lo que en nuestras fórmulas r debe ser 60.

El otro aspecto a tomar en cuenta es, el ángulo del que partimos. En la tabla que construimos a continuación partimos del ángulo 60° pues para dicho ángulo, sus lados junto con la cuerda forman un triángulo equilátero (ver Figura 14) y por ende

$$\mathrm{crd}\,[60^\circ] = 60$$

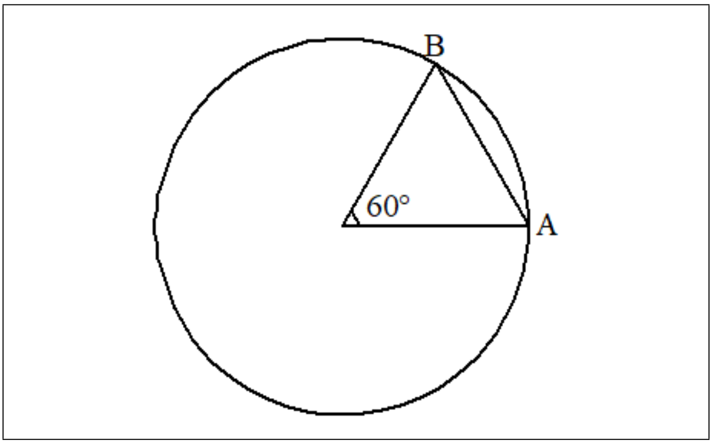

Figura 14

Con esto en mente uno puede calcular la $\mathrm{crd}\,[30^\circ]$usando la identidad (8) como sigue: De la identidad obtenida en el problema 4-b) se tiene que

$$\mathrm{crd}\,[30^\circ] = \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (\mathrm{crd}\,[60^\circ])^2}}$$

y como $\mathrm{crd}\,[60^\circ] = 60$

$$\mathrm{crd}\,[30^\circ] = \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (60)^2}} = 31{,}058\,285$$

Una vez calculado el valor de crd [30°]podemos obtener el valor de la crd [15°]aplicando nuevamente la identidad (8)

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}[15^\circ] &= \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (\operatorname{crd}\,[30^\circ\,])^2}} \\ &= \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (31.058\,285)^2}} = 15{,}663\,143\end{aligned}$$

Con el valor de crd [15°]y nuestra identidad para la cuerda de la mitad del ángulo, podemos calcular crd [7,5°]

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}[7{,}5^\circ] &= \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (\operatorname{crd}[15^\circ])^2}} \\ &= \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (15.663\,143)^2}} = 7{,}848\,375\end{aligned}$$

De modo similar, podemos calcular la crd [3,75°]

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}[3{,}75^\circ] &= \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (\operatorname{crd}[7{,}5^\circ\,])^2}} \\ &= \sqrt{2*60^2 - 60\sqrt{4*60^2 - (7.848\,375)^2}} = 3.926\,289\end{aligned}$$

y, procediendo de esta forma, podemos construir una tabla como la siguiente

ángulo	cuerda
60°	60,000 000
30°	31. 058 285
15°	15. 663 143
7,5°	7. 848 375
3,75°	3. 926 289
1,875°	1. 963 407
0,9375°	0,981 736
0,46875°	0,490 872

La relevancia de esta tabla es que con estos valores y las identidades obtenidas para las cuerdas, uno puede obtener una tabla mucho más completa. Por ejemplo para calcular la crd [60,9375°] notemos que

$$\operatorname{crd}[60{,}9375^\circ] = \operatorname{crd}[60^\circ + 0{,}9375^\circ]$$

por lo que uno puede usar primero la identidades (4) para llegar a que

$$120\operatorname{crd}[60{,}9375^\circ] = \operatorname{crd}[60^\circ]\operatorname{crd}[180^\circ - 0{,}9375^\circ] + \operatorname{crd}[180^\circ - 60^\circ]\operatorname{crd}[0{,}9375^\circ]$$

y luego usar (1) para ver que

$$\begin{aligned}\operatorname{crd}[60{,}9375^\circ] = \frac{1}{120}\operatorname{crd}[60^\circ]\left(\sqrt{120^2 - \operatorname{crd}^2[0{,}9375^\circ]}\right) \\ + \frac{1}{120}\left(\sqrt{120^2 - \operatorname{crd}^2[60^\circ]}\right)\operatorname{crd}[0{,}9375^\circ]\end{aligned}$$

Finalmente, substituyendo los valores de la tabla y haciendo las operaciones indicadas se tiene que

$$\operatorname{crd}[60{,}9375^\circ] = 60{,}848\,201$$

(Note que $61^\circ \approx 60{,}9375^\circ$, así que $\operatorname{crd}[61^\circ] \approx 60{,}848\,201$)

Ejercicio 5. Use una calculadora para obtener los valores de crd [0,9375°]y crd [0,46875°]a partir de la identidad (8).

Ejercicio 6. Use las identidades para las cuerdas, los valores de la tabla y una calculadora para ver que

$$\mathrm{crd}\,[59{,}53875°] = 59{,}574\,389$$

(Sugerencia: $59{,}53875° = 60° - 0{,}46875°$ y recuerde la identidad (2).)

3. El origen de las funciones seno y coseno que conocemos

3.1. Avances de Johannes Müller. Como ocurrió durante la edad media con todo el desarrollo de la ciencia, muchos de los trabajos relacionados con trigonometría de los griegos, fueron preservados y ampliados por los pueblos musulmanes, en particular destacan las aportaciones del escritor islámico Nasi Edin (1201-1274).

La primera publicación europea que terminaría por convertirse en referencia básica para el estudio de la trigonometría en Europa, es el trabajo de Johannes Müller (1436-1476) titulado Regiomontanus, sobre triángulos de todo tipo, publicado en Nuremberg en el año de 1533.

El tema principal de este trabajo, el cual se divide en 5 tomos, es el estudio de las razones entre los lados de los triángulo rectángulo con un mismo ángulo agudo, esto es, el estudio de las funciones trigonométricas tal y como nos las enseñaban en la secundaria.

Por supuesto, J. Müller en el Regiomontanus, busca establecer desde el principio la relación entre las razones trigonométricas y las cuerdas de un círculo. Así, en el primer tomo, uno de sus primeros resultados es el siguiente:

Teorema 6. *(Teorema 20) En todos los triángulos rectángulos, si describimos un círculo con su centro en un vértice de un ángulo agudo y su radio de longitud la del lado más largo (lo que ahora llamamos hipotenusa), entonces el lado que subtiende este ángulo agudo es el seno de el arco adyacente a ese lado y opuesto al ángulo dado; el tercer lado es igual al seno del complemento del arco.*

En términos un poco más modernos uno podría enunciar el teorema de la siguiente manera: Si en cualquier triángulo rectángulo ABC en donde A es uno de los ángulos agudos, se traza un círculo con radio AB (la hipotenusa) con centro en A (ver Figura 15). Entonces, el lado BC, que subtiende el ángulo A, es el seno del arco BE. Además, el tercer lado, AC, es el seno del complemento del arco BE.

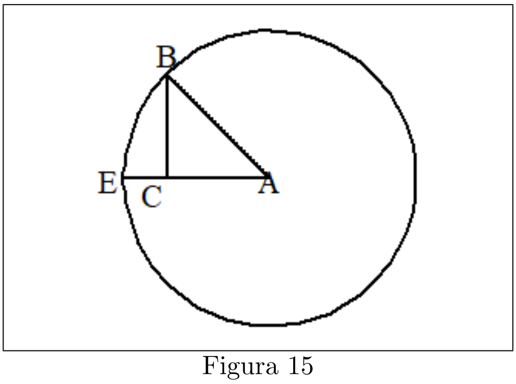

Figura 15

En otras palabras, el seno del arco BE es el lado opuesto (cateto opuesto) al vértice A, a saber el lado BC.

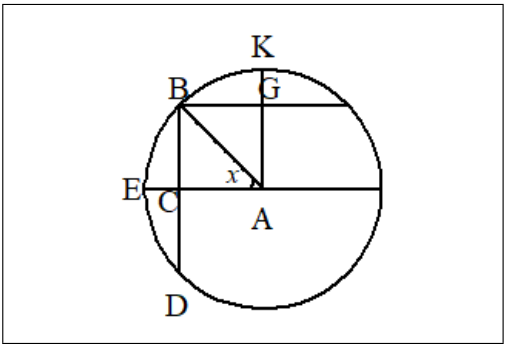

Figura 16

Si usamos la definición moderna de las funciones seno y coseno, denotamos por x el ángulo determinado por el arco BE y por R el radio del círculo, la resultado nos dice que

$$R \operatorname{sen} x = BC \tag{9}$$

En la segunda parte nos afirma que el seno del arco complementario BK es igual al tercer lado a saber, el lado AC.

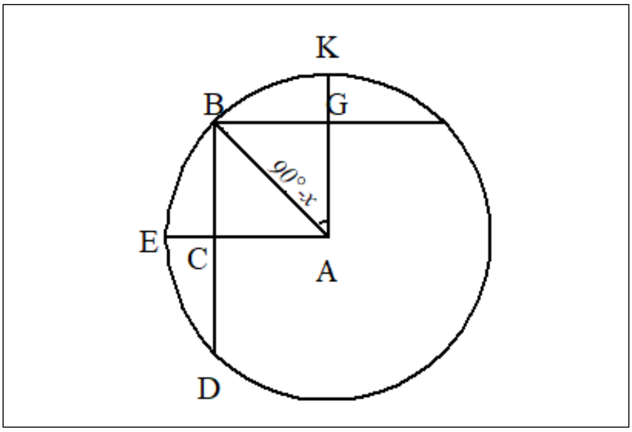

Figura 17

Para entender esta afirmación recordemos que en términos modernos $AC = R\cos\theta$ y que el ángulo determinado por el arco complementario BK es $90° - x$, por lo que la segunda afirmación nos dice que

$$R \operatorname{sen}[90° - x] = R\cos x \tag{10}$$

Así pues, el teorema 20 del libro I del Regiomontanus, establece la relación entre el seno, el coseno y los arcos de un círculo.

Por supuesto, más adelante J. Müller señala que BC es la mitad de la cuerda comprendida por el arco BD y que dicho arco es el doble del arco BE. En otros términos, si denotamos por x ángulo determinado por el arco BE y usamos (9), entonces, esta observación de J. Müller nos dice que para un círculo de radio R

$$R \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{crd}[2x] \tag{11}$$

Esta igualdad nos da la relación entre las cuerdas definidas por Ptolomeo y la definición del seno de J. Müller.

Notemos además que, de la ecuación (11), se sigue

$$R\cos x = R \operatorname{sen}[90° - x] = \frac{1}{2} \operatorname{crd}[2(90° - x)]$$

eso es,

$$R\cos x = \frac{1}{2} \operatorname{crd}[180° - 2x] \tag{12}$$

lo que establece la relación entre el coseno y la cuerda del suplementario.

Un detalle curioso es que mientras que Ptolomeo usa un círculo de radio $R = 60$ para sus cálculos, Müller usa un círculo de radio $R = 60\ 000$.

3.2. La definición de Euler. A pesar de los trabajos de Johannes Müller la notación y el radio del círculo usados para la caracterización del seno y el coseno, no se estandarizaron hasta los trabajos del celebrado científico y filósofo Leonhard Euler (Suiza 1707-1783).

Euler en su famoso libro *Introductio in analysin infinitorum* publicado en 1748, definió las funciones trigonométricas de la siguiente manera: $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ denotan el seno y el coseno en el círculo unitario para el ángulo central que subtiende un arco de longitud x. Esto equivale a decir que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son, justamente, las funciones seno y el coseno tal y como son definidas en los cursos de Cálculo y que el ángulo x se mide en radianes.

Nosotros terminaremos este trabajo señalando cómo se pueden obtener las propiedades de seno y coseno en términos de lo que hemos visto sobre las cuerdas.

4. El estudio de las funciones seno y coseno a partir de las propiedades de las cuerdas

Nuestro punto de partida en esta sección son las relaciones

$$R \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{crd}[2x] \text{ y } R\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{crd}[180° - 2x]$$

obtenidas por Johannes Müller. Por supuesto, en lo que sigue el radio R del círculo que se considera para definir las cuerdas y las funciones seno y coseno es 1. Así las relaciones entre las cuerdas y las funciones trigonométricas son

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\operatorname{crd}[2x\ ] \text{ y } \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{crd}[180° - 2x] \tag{13}$$

o, en forma equivalente,

$$\operatorname{crd}[2x] = 2\operatorname{sen} x \text{ y } \operatorname{crd}[180° - 2x] = 2\cos x \tag{14}$$

Una de las primeras propiedades sobre cuerdas que vimos es la proposición 1 la cual nos da la siguiente identidad

$$\operatorname{crd}^2[a] + \operatorname{crd}^2[180° - a] = \operatorname{crd}^2 180°$$

Si hacemos $a = 2x$ y usamos (14) obtenemos que

$$4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x = \operatorname{crd}^2[180°]$$

Puesto que se considera el círculo de radio 1, se tiene que su diámetro, la $\operatorname{crd}[180°]$, es 2 y por ende

$$4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x = 4$$

lo que nos lleva a la famosa identidad

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

De modo similar, si en la identidad dada en la proposición 2

$$\operatorname{crd}[a - b]\operatorname{crd} 180° = \operatorname{crd}[a]\operatorname{crd}[180^o - b] - \operatorname{crd}[b]\operatorname{crd}[180^o - a]$$

hacemos

$$a = 2x \text{ y } b = 2y$$

nos queda que

$$\operatorname{crd}[2(x - y)]\operatorname{crd} 180° = \operatorname{crd}[2x]\operatorname{crd}[180^o - 2y] - \operatorname{crd}[2y]\operatorname{crd}[180^o - 2x]$$

y usando (14) nos queda que

$$2\operatorname{sen}[x - y] \cdot 2 = (2\operatorname{sen} x)(2\cos y) - (2\operatorname{sen} y)(2\cos x)$$

esto es

$$\operatorname{sen}[x-y] = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$$

Para la identidad dada en la proposición 5

$$\operatorname{crd}^2\left[\frac{a}{2}\right] = 2r^2 - r\operatorname{crd}[180^\circ - a]$$

se obtiene la identidad

$$\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x$$

la cual también podemos escribir en la forma

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Ejercicio 7. ¿Qué otras identidades trigonométricas podría obtener a partir de las identidades obtenidas en las proposiciones 4 y 5?

Ejercicio 8. ¿Qué otras identidades trigonométricas podría obtener a partir de las identidades obtenidas en los problemas 1, 2, 3 y 4?

Proposición 7. *Las funciones seno y coseno cumplen las siguientes identidades trigonométricas*

I) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
II) $\cos[x-y] = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
III) $\cos[x+y] = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
IV) $\operatorname{sen}[x-y] = \cos x \operatorname{sen} y - \cos y \operatorname{sen} x$
V) $\operatorname{sen}[x+y] = \cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x$
VI) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos y$
VII) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
VIII) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
IX) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
X) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
XI) $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Y las tres identidades sigientes:

XII) $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos[x-y] + \cos[x+y]]$
XIII) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos[x-y] - \cos[x+y]]$
XIV) $\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}[x-y] + \operatorname{sen}[x+y]]$

Ejercicio 9. Deduzca las identidades enunciadas en la proposición 7. (Sugerencias: Para el inciso a) se utiliza la propiedad (4) tomando a $a = 2x$ y $b = 2y$, de igual manera se resuelve el inciso b, tomando a $a = 2x$ y $b = 2y$ en la propiedad (7), partiendo de $a = 2x$ y $b = 2y$ en la ecuación (2) se resuelve el inciso c y el inciso d se resuelve tomando $a = 2x$ y $b = 2y$ en el 2.)

Referencias

[1] Struik D.J., *A Source Book in Mathematics 1200-1800*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1969.
[2] Morris R. Cohen, I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1948.
[3] Edwards C. H., *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag 1979.