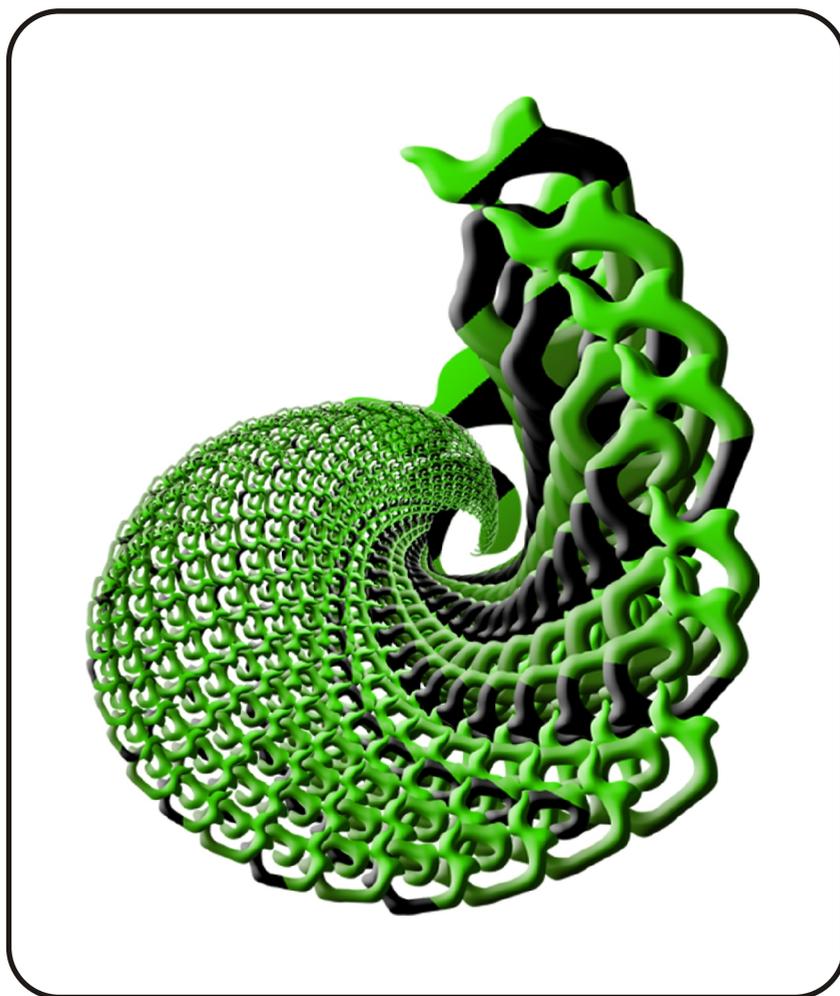


mixba'al

ISSN:2007-7874

Revista Metropolitana de Matemáticas



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA
VOL IX, No. 1, JULIO 2018



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**

Dr. Eduardo Abel Peñalosa Castro
Rector General.

Dr. Rodrigo Díaz Cruz
Rector de la Unidad Iztapalapa.

Dr. José Gilberto Córdoba Herrera
*Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
UAM-Iztapalapa.*

Dr. Roberto Quezada Batalla
*Jefe del Departamento de Matemáticas,
UAM-Iztapalapa.*

Revista del Departamento de Matemáticas de la

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Unidad Iztapalapa

Editor Responsable

Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro
Departamento de Matemáticas, UAM - Iztapalapa.

Comité Editorial

Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez
Área de Matemáticas Básicas, CIMAT - A. C.

Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia
Departamento de Matemáticas, UAM - Iztapalapa.

Dr. Jorge Alberto León Vázquez
Departamento de Control Automático, CINVESTAV.

Dr. Mario Pineda Ruelas
Departamento de Matemáticas, UAM - Iztapalapa.

Dr. Roberto Quezada Batalla
Departamento de Matemáticas, UAM - Iztapalapa.

Editor Técnico

Dr. Constancio Hernández García
Departamento de Matemáticas, UAM - Iztapalapa.

Diseño Portada

Srita. Michael Rivera Arce.

MIXBA'AL. Vol. IX, No. 1, julio de 2018 a julio de 2019, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas.

Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México y Av. San Rafael Atlixco, No. 186, Edificio AT, tercer piso, Col. Vicentina, Delegación Iztapalapa, C.P. 09340, México, Ciudad de México. Tel. 5804 4658.

Página electrónica de la revista:

<http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revista-mixba-al>.

Correos electrónicos:

mixbaal2009@gmail.com,

mixb@xanum.uam.mx.

Editor Responsable: Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro.

Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No.

04-2010-072017382600-203, ISSN:

2007-7874, ambos otorgados por el Instituto

Nacional del Derecho de Autor. Responsable

de la última actualización de este número

Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro, División

de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas, Av. San

Rafael Atlixco No. 186, Edificio AT, tercer

piso, Coonia Vicentina, Delegación

Iztapalapa, C.P. 09340, México, Ciudad de

México. Fecha de última modificación 7

de julio de 2017. Tamaño del archivo 1.4 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no

necesariamente reflejan la postura del editor

responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción

total o parcial de los contenidos e imágenes

de la publicación sin previa autorización de

la Universidad Autónoma Metropolitana.

Contacto:

Departamento de Matemáticas, Universidad

Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Tel: (01) 55 5804 4654 .

Fax: (01) 55 5804 4660.

e-mail: mixbaal2009@gmail.com.

Web revista: [http://mat.izt.uam.mx/mat/](http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revista-mixba-al)

[index.php/revista-mixba-al](http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revista-mixba-al).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA



Una Universidad asentada en la tradición



Abierta



Interdisciplinaria y Autónoma



Flexible



Casa abierta al tiempo.



Posgrados:
Maestría y Doctorado en Matemáticas
pmat@xanum.uam.mx
<http://pmat.izt.uam.mx/>

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Teoría de anillos y módulos.
Teoría de conjuntos y lógica.
Geometría algebraica.
Geometría diferencial y Riemanniana.
Teoría de números.
Teoría de códigos y criptografía.
Análisis geométrico.
Física matemática.
Análisis diferencial.
Matemáticas discretas, combinatoria y gráficas.
Dinámica de fluidos computacional.
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.
Métodos matemáticos en finanzas y economía.
Control y sistemas dinámicos.
Mecánica celeste, sistemas hamiltonianos y aplicaciones a la física.
Control, estabilidad y robustez de sistemas estocásticos.
Metodología estadística.
Estadística asintótica.
Topología de conjuntos, grupos topológicos y Cp-teoría.
Métodos geométricos en mecánica. Dinámica de vórtices. Mecánica celeste.

**Maestría en Ciencias Matemáticas
Aplicadas e Industriales (MACMAI)**
mvmg@xanum.uam.mx
<http://mcmαι.izt.uam.mx>

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Códigos y Criptografía.
Control y Sistemas Dinámicos.
Combinatoria y Optimización.
Estadística.
Métodos Matemáticos en Finanzas.
Modelación y Simulación Computacional.

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

CONTENIDO

7 EL ESPECTRO DE GELFAND DEL ÁLGEBRA CIRCULANTE

Aura Carina Márquez Martínez y Roberto Quezada

13 ALGUNOS ASPECTOS HISTÓRICOS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Karla Adriana Ortega Gallegos y Gustavo Izquierdo Buenrostro

mixba'al



Revista Metropolitana de Matemáticas



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

A LOS AUTORES

Mixba'al es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Está dirigida a la comunidad matemática.

Esta publicación está dedicada primordialmente a la divulgación, por lo que los artículos que se presenten deberán ser accesibles a estudiantes de posgrado y/o licenciatura versados en el tema. Los trabajos pueden ser sobre cualquier tópico de las matemáticas; por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos, artículos panorámicos sobre un área de investigación, la presentación de una visión distinta de algún tema vinculado con la docencia, notas de cursos avanzados, aplicaciones de las matemáticas, historia y filosofía de las matemáticas y aspectos lúdicos de las mismas, entre otros

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español, aunque en casos excepcionales podrán aceptarse artículos en inglés. El comité editorial tiene la responsabilidad de cuidar la calidad de la revista, tanto en su contenido como en su presentación, de acuerdo a los lineamientos, tipografía y corrección de lenguaje (ortografía, estilo, etcétera). Asimismo, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista, y en caso de que así sea, lo enviara a arbitraje, sin excepción.

La versión preliminar de los trabajos sometidos a la revista deberá enviarse en formato pdf. al correo electrónico mixbaal2009@gmail.com. Puesto que la presentación final de los trabajos se hará en Latex2 ϵ , aquellos autores cuyos trabajos sean aceptados, deberán enviarlos, para su publicación final, con el formato y macros que la revista les proporcionará. Las fotografías o gráficos que acompañen al texto deberán ser enviados, por separado, en formato pdf con la calidad y resolución adecuados para una buena reproducción impresa, además deberán contar con los correspondientes derechos de autor. Se recomienda que la extensión de los trabajos no exceda de 20 páginas.

Gustavo Izquierdo Buenrostra
Coordinador

PRESENTACIÓN

Mixba'al es una revista de divulgación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana.

El primer artículo de este número es un trabajo de Aura Carina Márquez Martínez y Roberto Quezada sobre el espectro de Gelfand de matrices circulantes.

El segundo artículo es una colaboración de Karla Adriana Ortega Gallegos y Gustavo Izquierdo sobre algunos hechos histórico de las funciones seno y coseno .

La intención es continuar con este formato y la revista invita a someter contribuciones de esta índole en el idioma español, aunque ocasionalmente pueden aceptarse contribuciones en inglés. Inicialmente se publicará al menos un número al año.

Toda comunicación debe ser dirigida al comité editorial, al correo electrónico: mixbaal2009@gmail.com.



EL ESPECTRO DE GELFAND DEL ÁLGEBRA CIRCULANTE

AURA CARINA MÁRQUEZ MARTÍNEZ Y ROBERTO QUEZADA

RESUMEN. Calculamos el espectro de Gelfand del álgebra de las matrices circulantes. Describimos la correspondiente transformada de Gelfand y demostramos que ésta coincide con la transformada de Fourier discreta.

1. INTRODUCCIÓN

La generalización de Gelfand de la transformada de Fourier, originalmente definida en el álgebra conmutativa $L_1(\mathbb{R}^n)$ de las funciones integrables con valores complejos, al caso de un álgebra conmutativa arbitraria es muy abstracta y en cursos introductorios es conveniente ilustrarla con varios ejemplos. En la literatura es usual que algunas nociones de esta generalización se ilustren con el álgebra $C(X)$ de todas las funciones continuas sobre un compacto X , o bien, con el álgebra de Wiener \mathcal{W} de todas las funciones continuas sobre la circunferencia unitaria cuya serie de Fourier converge absolutamente, véase por ejemplo [1].

Es sorprendente que el álgebra de todas las matrices circulantes (o álgebra circulante), un álgebra probablemente más simple que las dos anteriores, aparentemente no se ha utilizado para ilustrar esta bella y profunda generalización de Gelfand, no obstante que el concepto de matriz circulante se usa ampliamente en varias áreas de las matemáticas y aún fuera de ella, véase por ejemplo el libro de Davis [2]. En esta nota ilustramos los conceptos de espectro y transformada de Gelfand en el caso del álgebra conmutativa de las matrices circulantes, calculando explícitamente su espectro de Gelfand y mostrando cómo en este caso, la transformada de Gelfand se reduce a la transformada de Fourier discreta.

2. EL ÁLGEBRA CIRCULANTE

Una matriz compleja de tamaño $p \times p$, $c = (c_{ij})_{0 \leq i, j \leq p-1}$, es circulante si y sólo si $c_{ij} = c_{j-i}$, para cada $0 \leq i, j \leq p-1$, las operaciones en los subíndices son módulo p , $(c_{(j-i) \bmod p})$. Es decir,

$$c = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} \\ c_{p-1} & c_0 & \cdots & c_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Usualmente, una matriz circulante c se denota por $c = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$ o simplemente por $c = (c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$. Un cálculo sencillo permite mostrar que cada matriz circulante c es una combinación lineal de potencias de la matriz de permutación primaria J ,

$$(1) \quad c = \sum_{k=0}^{p-1} c_k J^k$$

donde $J = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$. Así mismo J es una combinación lineal de operadores de rango uno (proyecciones),

$$J = \sum_{k=0}^{p-1} |e_k\rangle\langle e_{k+1}|$$

donde $\{e_i\}_{i=0}^{p-1}$ es la base canónica de \mathbb{C}^p y $|e_k\rangle\langle e_{k+1}|$ es el operador de rango uno en \mathbb{C}^p definido mediante $|e_k\rangle\langle e_{k+1}|v = \langle e_{k+1}, v\rangle e_k$, $v \in \mathbb{C}^p$, con operaciones en los subíndices módulo p . El símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota al producto interno usual en \mathbb{C}^p .

El conjunto de matrices circulantes de tamaño $p \times p$, \mathcal{C}_p , tiene estructura de álgebra conmutativa sobre los complejos con las operaciones de suma y multiplicación de matrices y multiplicación por escalares; de hecho, es un álgebra de Von Neumann con la operación de involución definida como la toma de adjuntos.

En vista de la representación (1), la aplicación $c \mapsto (c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$ define un isomorfismo del álgebra de von Neumann de las matrices circulantes en el álgebra de von Neumann $(\mathbb{C}^p, *)$, donde \mathbb{C}^p se provee con su estructura natural de espacio vectorial junto con la conjugación coordinada a coordinada y la multiplicación de vectores definida mediante la convolución:

$$c * c' := ((c * c')_0, (c * c')_1, \dots, (c * c')_{p-1})$$

donde $(c * c')_i = \sum_{j=0}^{p-1} c_j c'_{i-j}$, con operaciones módulo p en los subíndices. Dejamos como un ejercicio para el lector demostrar que en efecto, la aplicación de \mathcal{C}_p en $(\mathbb{C}^p, *)$ definida por $c \mapsto (c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$ es un $*$ -isomorfismo.

3. EL ESPECTRO DE GELFAND DEL ÁLGEBRA CIRCULANTE

Si A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad e , se denota por $\text{hom}(A, \mathbb{C})$ al conjunto de todos los homomorfismos $w : A \rightarrow \mathbb{C}$ de A en los complejos, es decir, $w \in \text{hom}(A, \mathbb{C})$ si w es un funcional lineal complejo tal que

$$w(xy) = w(x)w(y), \text{ para cada } x, y \in A.$$

El **espectro de Gelfand** de A se define como el conjunto

$$sp(A) = \{w \in \text{hom}(A, \mathbb{C}) : w \neq 0\}$$

de todos los homomorfismos complejos no triviales de A . En ocasiones también se le llama **espacio de ideales máximos** de A , pues existe una biyección natural de $sp(A)$ sobre el conjunto de todos los ideales máximos de A .

El espectro de Gelfand satisface lo siguiente:

1. Cada $w \in sp(A)$ satisface $w(e) = 1$.
2. Cada $w \in sp(A)$ es continuo, mejor aún, $\|w\| = 1$.
3. Para cada $w \in sp(A)$, $\ker(w)$ es un ideal de A .

TEOREMA 1. *Existe una biyección entre los subconjuntos $sp(\mathcal{C}_p)$ y $\{\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}\}$, donde ξ es una raíz primitiva de la unidad de orden p .*

Demostración. Sean $w \in sp(\mathcal{C}_p)$ y J la matriz de permutación primaria. Como w es un homomorfismo, tenemos que

$$w(J^k) = w(J)^k \in \mathbb{C}$$

para cada $k \geq 0$. En particular, $w(J^p) = w(I) = 1$ y en consecuencia $w(J)^p = 1$, por lo que $w(J)$ es una raíz de la unidad de orden p .

Si ξ es una raíz primitiva de la unidad de orden p , existe un único $\lambda = \lambda(w)$ con $0 \leq \lambda \leq p-1$ tal que $w(J) = \xi^\lambda$. Defínase $\phi : sp(\mathcal{C}_p) \rightarrow \{\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}\}$, mediante $\phi(w) = \xi^\lambda$ para $w \in sp(\mathcal{C}_p)$ con $w(J) = \xi^\lambda$.

La aplicación ϕ es una biyección entre $sp(\mathcal{C}_p)$ y $\{\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}\}$. Para demostrar esto nótese primero que ϕ es inyectiva. En efecto, si para $w_1, w_2 \in sp(\mathcal{C}_p)$, $\phi(w_1) =$

$\phi(w_2)$, entonces existen únicos $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq p-1$ tales que $\phi(w_1) = \xi^{\lambda_1}$, $\phi(w_2) = \xi^{\lambda_2}$ y así

$$\xi^{\lambda_1} = \xi^{\lambda_2} \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow w_1 = w_2$$

donde hemos usado que cada λ_j , $j = 1, 2$, está asociado de manera biunívoca con su respectivo w_j . Y ϕ es sobreyectiva, ya que para cada $\xi^k \in \{\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}\}$, la aplicación $w_k : \mathcal{C}_p \rightarrow \mathbb{C}$ definida para cada $c = \sum_{j=0}^{p-1} c_j J^j$ mediante

$$w_k(c) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j \xi^{kj}$$

define un elemento $w_k \in \text{hom}(\mathcal{C}_p, \mathbb{C})$. En efecto, sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $c = \sum_{j=0}^{p-1} c_j J^j$, $d =$

$\sum_{j=0}^{p-1} d_j J^j \in \mathcal{C}_p$. Para la matriz circulante

$$\alpha c + d = \sum_{j=0}^{p-1} (\alpha c_j + d_j) J^j$$

se tiene que

$$w_k(\alpha c + d) = \sum_{j=0}^{p-1} (\alpha c_j + d_j) \xi^{kj} = \alpha \sum_{j=0}^{p-1} c_j \xi^{kj} + \sum_{j=0}^{p-1} d_j \xi^{kj} = \alpha w_k(c) + w_k(d)$$

Entonces w_k es un funcional. Además se observa que

$$w_k(I) = w_k(J^0) = \xi^{k \cdot 0} = 1$$

Ahora, la multiplicación de dos matrices circulantes $c, d \in \mathcal{C}_p$ es la matriz circulante

$$cd = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} c_j d_{(p-j+i)} J^i.$$

Por lo tanto, como $\xi^{kp} = 1$, haciendo $m + j = i \pmod{p}$, equivalentemente, $m = (p - j + i) \pmod{p}$, se obtiene

$$w_k(c)w_k(d) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} c_j d_m \xi^{k(m+j)} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} c_j d_{(p-j+i)} \xi^{ki} = w_k(cd)$$

Lo cual demuestra que w_k es un homomorfismo no trivial, i.e., $w_k \in \text{sp}(\mathcal{C}_p)$. Esto concluye la demostración. \square

4. LA TRANSFORMADA DE GELFAND DEL ÁLGEBRA CIRCULANTE

De ahora en adelante identificaremos al conjunto $\text{sp}(\mathcal{C}_p)$ con las raíces de la unidad $\{\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}\}$.

Cada elemento $c \in \mathcal{C}_p$ da lugar a una función

$$\hat{c} : \{\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}\} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$(2) \quad \hat{c}(\xi^k) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j \xi^{jk}, \quad 0 \leq k \leq p-1$$

La función \hat{c} se llama la **transformada de Gelfand de c** y la aplicación $c \rightarrow \hat{c}$ es la **transformada de Gelfand**.

Nótese que cada función \hat{c} se puede identificar con el vector de todos sus valores: $\hat{c} = (\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \dots, \hat{c}(\xi^{p-1}))$. Esta identificación nos permite escribir a la transformada de

Gelfand como una aplicación lineal $\hat{\cdot}$ que asocia con cada matriz (vector) circulante $c = (c_0, \dots, c_{p-1})$, la función (vector) $\hat{c} = (\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \dots, \hat{c}(\xi^{p-1}))$, de manera que

$$(3) \quad \hat{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \cdots & \xi^{p-2} & \xi^{p-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \cdots & \xi^{2(p-2)} & \xi^{2(p-1)} \\ 1 & \xi^3 & \xi^6 & \cdots & \xi^{3(p-2)} & \xi^{3(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi^{p-2} & \xi^{(p-2)^2} & \cdots & \xi^{(p-2)(p-2)} & \xi^{(p-2)(p-1)} \\ 1 & \xi^{p-1} & \xi^{(p-1)^2} & \cdots & \xi^{(p-1)(p-2)} & \xi^{(p-1)(p-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{p-2} \\ c_{p-1} \end{pmatrix}$$

Es decir, la transformada de Gelfand es el operador

$$\hat{\cdot} = \sum_{0 \leq k, l \leq p-1} \xi^{kl} |e_k\rangle \langle e_l|$$

cuya matriz asociada aparece arriba.

A esta transformación también se le conoce como **transformada de Fourier discreta** y tiene una gran cantidad de aplicaciones en varias áreas de las matemáticas y otras ciencias, véase por ejemplo el artículo *Discrete Fourier Transform* en Wikipedia [3] y los artículos ahí citados. Usualmente se le denota por F en lugar de $\hat{\cdot}$. De hecho el propósito de Gelfand al definir su transformada fue precisamente generalizar el concepto de transformada de Fourier, originalmente definida en $L_1(\mathbb{R}^n)$, al caso de álgebras conmutativas arbitrarias. Aquí observamos cómo la extensión de Gelfand se reduce al concepto original de Fourier. Dejamos al lector el ejercicio de verificar que F es la transformada de Fourier sobre el espacio $L_1(P)$, donde $P = \{0, 1, \dots, p-1\}$, con la medida de conteo normalizada.

5. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CIRCULANTES

En esta sección demostraremos que la transformada de Gelfand diagonaliza a cualquier matriz circulante. Por comodidad, usaremos la notación de F en lugar de $\hat{\cdot}$.

Es conveniente introducir una constante de normalización. Denotaremos con el mismo símbolo F a la transformada de Fourier normalizada

$$F = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{0 \leq k, l \leq p-1} \xi^{kl} |e_k\rangle \langle e_l|$$

La transformada de Fourier discreta es un operador unitario, i.e., $FF^* = F^*F = I$, donde F^* es el adjunto (transpuesta conjugada) de F , lo cual se demuestra fácilmente usando la matriz (3) o, equivalentemente, con el siguiente cálculo,

$$(4) \quad \begin{aligned} FF^* &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{ij} |e_i\rangle \langle e_j| \sum_{i',j'=0}^{p-1} \bar{\xi}^{i'j'} |e_{j'}\rangle \langle e_{i'}| = \frac{1}{p} \sum_{i,j=0}^{p-1} \sum_{i',j'=0}^{p-1} \xi^{ij-i'j'} \delta_{jj'} |e_i\rangle \langle e_{i'}| \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i,i'=0}^{p-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} \xi^{j(i-i')} \right) |e_i\rangle \langle e_{i'}| = \frac{1}{p} \sum_{i,i'=0}^{p-1} p \delta_{ii'} |e_i\rangle \langle e_{i'}| = \sum_{i=0}^{p-1} |e_i\rangle \langle e_i| = I \end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad

$$(5) \quad \sum_{j=0}^{p-1} \xi^{j(i-i')} = \begin{cases} p & \text{if } i - i' = 0 \pmod{p} \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

la cual que se sigue de

$$\sum_{j=0}^{p-1} \xi^{j(i-i')} = \left(\frac{\xi^{p(i-i')} - 1}{\xi^{(i-i')} - 1} \right) = 0$$

si $i \neq i'$ con $0 \leq i, i' \leq p-1$ y observando que la suma es igual a p si $i = i'$. De manera análoga se muestra que $F^*F = I$. En particular, hemos demostrado que la inversa de F es F^* .

Por otra parte, si c es una matriz circulante, F^*cF es una matriz diagonal, en efecto, demostraremos lo siguiente.

PROPOSICIÓN 2. $F^*JF = \text{diag}(\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1})$ En particular, los valores propios de J son las coordenadas del vector $(\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1})$. Consecuentemente, para cada matriz circulante c , F^*cF es la matriz diagonal

$$F^*cF = \text{diag}(\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \dots, \hat{c}(\xi^{p-1}))$$

donde \hat{c} es la transformada de Gelfand de c dada por (2); los valores propios de c son las coordenadas del vector $\hat{c} = (\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \dots, \hat{c}(\xi^{p-1}))$.

Demostración. Tenemos que

$$F^*J = \frac{1}{p} \sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{-ij} |e_j\rangle \langle e_i| \sum_k |e_k\rangle \langle e_{k+1}| = \frac{1}{p} \sum_{i,j,k=0}^{p-1} \xi^{-ij} \delta_{ik} |e_j\rangle \langle e_{k+1}| = \frac{1}{p} \sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{-ij} |e_j\rangle \langle e_{i+1}|$$

de manera que, usando (5), se obtiene

$$\begin{aligned} F^*JF &= \frac{1}{p^2} \sum_{i,j=0}^{p-1} \xi^{-ij} |e_j\rangle \langle e_{i+1}| \sum_{i',j'=0}^{p-1} \xi^{i'j'} |e_{i'}\rangle \langle e_{j'}| = \frac{1}{p^2} \sum_{i,j,i',j'=0}^{p-1} \xi^{i'j'-ij} \delta_{i+1,i'} |e_j\rangle \langle e_{j'}| \\ (6) &= \frac{1}{p^2} \sum_{i,j,j'=0}^{p-1} \xi^{(i+1)j'-ij} |e_j\rangle \langle e_{j'}| = \frac{1}{p^2} \sum_{j,j'=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \xi^{i(j'-j)} \right) \xi^{j'} |e_j\rangle \langle e_{j'}| \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{j,j'=0}^{p-1} p \delta_{jj'} \xi^{j'} |e_j\rangle \langle e_{j'}| = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \xi^j |e_j\rangle \langle e_j| = \text{diag}(\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}) \end{aligned}$$

Esto demuestra la primera afirmación de la proposición, el resto es consecuencia de la identidad

$$c = \sum_{k=0}^{p-1} c_k J^k$$

□

De acuerdo con el resultado de la proposición anterior, los valores propios (espectro) de cada matriz circulante c , se obtienen mediante los valores $\{\hat{c}(\xi^0), \hat{c}(\xi), \dots, \hat{c}(\xi^{p-1})\}$ de la transformada de Gelfand en cada elemento del espectro de Gelfand $\{\xi^0, \xi, \dots, \xi^{p-1}\}$ del álgebra circulante. Esta es una propiedad general de la transformada de Gelfand en cualquier álgebra conmutativa, véase por ejemplo el Teorema 1.9.5 de [1].

Concluimos esta nota invitando al lector interesado a identificar otras propiedades y nociones de la teoría de Gelfand en el álgebra circulante.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó parcialmente con el apoyo de CONACYT a través de una ayudantía de Investigador Nivel III.

REFERENCIAS

- [1] Arveson W., A Short Course on Spectral Theory, Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics 209), (2002)
- [2] Davis P. J., Circulant Matrices, Wiley-Interscience, NY, (1979)
- [3] Discrete Fourier Transform, Wikipedia,
[https : //en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform)



ALGUNOS ASPECTOS HISTÓRICOS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO.

KARLA ADRIANA ORTEGA GALLEGOS Y GUSTAVO N. IZQUIERDO BUENROSTRO

RESUMEN. En este trabajo presentamos la relación entre el cálculo de cuerdas en un círculo y las funciones seno y coseno.

1. INTRODUCCIÓN

Existen al menos dos preguntas que un estudiante no tiene manera de responder cuando estudia las funciones trigonométricas. Una de ellas es ¿porqué no quedarse con la mera definición del seno y el coseno en un triángulo rectángulo? La otra tiene que ver con el cálculo de sus valores ¿cómo le hace uno para calcular el seno y el coseno de un ángulo? Tal vez una de las formas de dar una respuesta a estas interrogantes de manera elemental sea a través de la Historia.

La intención en este trabajo es presentar a las funciones seno y coseno desde una perspectiva "histórica". Desde este punto de vista, uno puede ver que los primeros avances en trigonometría están relacionados con las propiedades y el cálculo de las cuerdas determinadas por los ángulos centrales en un círculo. Así pues nos proponemos presentar a las funciones seno y coseno, no a partir de la definición actual, sino a partir de su relación con las cuerdas en un círculo.

Como la intención de este texto es ofrecer una lectura optativa para los alumnos de Cálculo, a lo largo del texto se dejan ejercicios para que el lector los resuelva.

2. LOS PRIMEROS AVANCES EN TRIGONOMETRÍA. LAS CUERDAS

Los primeros avances importantes en la trigonometría se dieron en la antigua Grecia y el primer compendio escrito que se conserva hasta nuestros días es el Almagesto de Claudio Ptolomeo¹. En dicho trabajo, se destacan las aportaciones del matemático y astrónomo griego Hiparco de Nicea (190 a.C.-120 a.C.) a quien se le atribuyen un gran número de resultados y la elaboración de una primera tabla de valores relacionados con el cálculo de senos y cosenos.

Antes de continuar debemos señalar que en un principio no se consideraban las funciones seno y coseno tal y como las estudiamos ahora. Para Hiparco, Ptolomeo y sus discípulos el problema era el siguiente: dado un círculo de radio predeterminado y un ángulo central x , determinar la longitud de la cuerda comprendida por el ángulo. En términos de la Figura 1 el problema es determinar la longitud de segmento AB en términos del ángulo x .

Palabras clave. Funciones trigonométricas, cuerda de un ángulo central, seno y coseno.

¹Ptolomeo nació en Egipto en el año 85 después de cristo

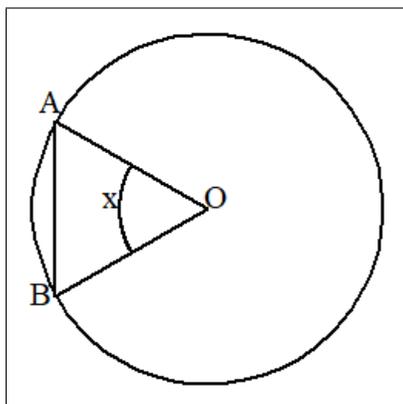


Figura 1

Al problema que acabamos de mencionar se le llamó problema del cálculo de cuerdas. Más adelante veremos cómo se relaciona este problema con el cálculo de los valores del seno y el coseno, por el momento concentremos nuestra atención en algunas de las ideas y resultados presentados en el Almagesto para el cálculo de cuerdas.

Debemos empezar por destacar que para medir ángulos Ptolomeo usa los grados tal y como los conocemos ahora, esto es, divide el círculo en 360 partes iguales a las que llama grados, luego divide en 60 partes iguales cada grado y a dichas divisiones les llama minutos, finalmente, al dividir en 60 partes iguales los minutos obtiene los segundos.

En los capítulos 10 y 11 del primer libro del Almagesto, estudia algunas propiedades de las cuerdas en un círculo y nos presenta una tabla con los valores de las cuerdas. Aquí se considera un círculo de diámetro 120 y se dan los valores de las cuerdas en dicho círculo para ángulos que van de los 14° a los 180° con incremento de medio grado en medio grado. En la tabla de Ptolomeo se hace uso del sistema de numeración sexagesimal babilónico o base 60, en conjunción con el sistema griego en el que cada letra del alfabeto se le asigna un valor numérico: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y así sucesivamente. Esto hace que la lectura de su tabla sea un poco engorrosa.

2.1. Algunas propiedades de las cuerdas. Antes de ver como construir una tabla como esta, es necesario estudiar cuáles son las propiedades de las cuerdas. Con este fin, Ptolomeo hace uso extensivo de varias propiedades geométricas de las figuras inscritas en un círculo.

Un primer ejemplo es la siguiente relación entre la cuerda de un ángulo a y la cuerda de su suplementario, $180^\circ - a$.

PROPOSICIÓN 1. *Para cualquier ángulo central a se cumple que*

$$(1) \quad \text{crd}^2 [a] + \text{crd}^2 [180^\circ - a] = \text{crd}^2 [180^\circ]$$

En esta fórmula y en muchos de los resultados que enuncia Ptolomeo

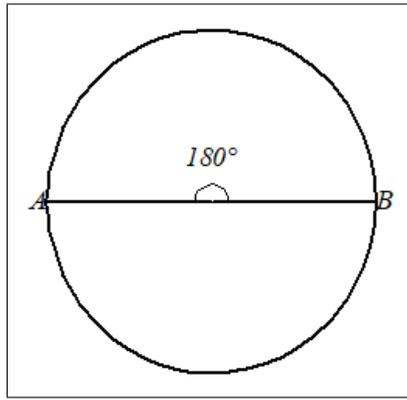


Figura 2

se refiere al diámetro del círculo como la cuerda del ángulo de 180° (ver Figura 2). Así $\text{crd}[180^\circ]$ corresponde al valor del diámetro de la circunferencia, en particular si el radio es r , $\text{crd}[180^\circ] = 2r$.

Veámos como se demuestra la proposición 1:

Demostración. La prueba se basa en el famoso teorema del triángulo semi-inscrito en un círculo. Este resultado nos dice que si un lado de un triángulo es el diámetro de un círculo y sus vértices están sobre dicho círculo, entonces, el triángulo es un triángulo rectángulo.

Regresando a la relación entre $\text{crd}[a]$ y $\text{crd}[180^\circ - a]$, obsérvese (ver figura 3) que la cuerda de a , AB , la cuerda de $180^\circ - a$, BC , y la cuerda de 180° , AC , forman un triángulo semi-inscrito y, por el teorema ya mencionado, se tiene que nuestro triángulo, $\Delta(A, B, C)$, es un triángulo rectángulo.

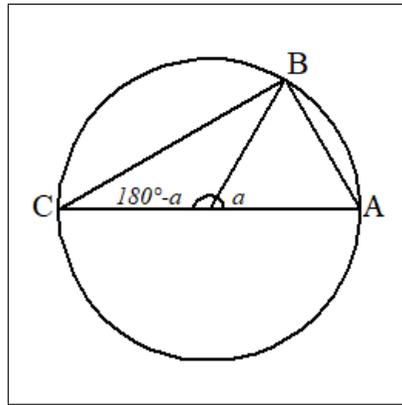


Figura 3

Si ahora aplicamos el teorema de Pitágoras a nuestro triángulo, concluimos que

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

esto es,

$$\text{crd}^2[a] + \text{crd}^2[180^\circ - a] = \text{crd}^2[180^\circ]$$

o si se quiere

$$\text{crd}^2[a] + \text{crd}^2[180^\circ - a] = 4r^2$$

□

Una de las primeras propiedades de las cuerdas que aparece en el Almagesto es la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2. Sean a y b dos ángulos centrales de un círculo de radio r , entonces:

$$(2) \quad \text{crd}[a - b] \text{crd}[180^\circ] = \text{crd}[a] \text{crd}[180^\circ - b] - \text{crd}[b] \text{crd}[180^\circ - a]$$

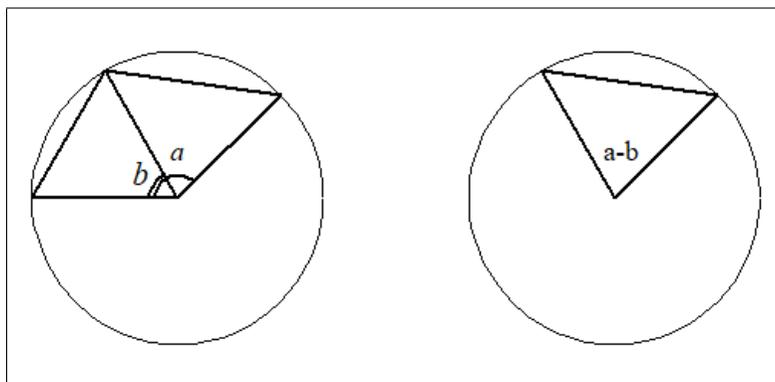


Figura 4

Por supuesto, al igual que la proposición 1, la demostración de este resultado hace uso de las propiedades de los polígonos inscritos en un círculo. En este caso el resultado a partir del cual se puede demostrar nuestra proposición es el llamado Teorema de Ptolomeo, el cual nos dice lo siguiente:

TEOREMA 3 (Ptolomeo). *El producto de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en un círculo es igual a la suma de los productos de lados opuesto. En términos de la Figura 5 este teorema nos dice que*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

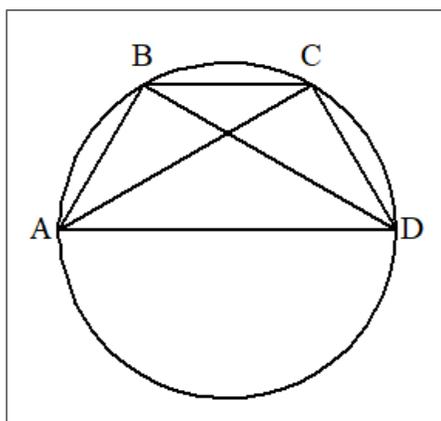


Figura 5

2.1.1. Demostración de la proposición 2. Veamos como se relaciona el teorema de Ptolomeo con la demostración de la proposición.

Tracemos sobre un círculo los ángulos a , b y $a - b$ (ver Figura 6).

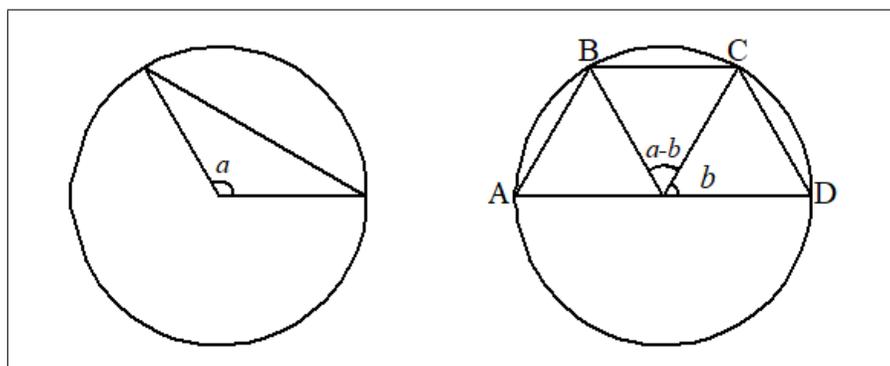


Figura 6

las cuerdas de los ángulos b , $a - b$, $180^\circ - a$ junto con el diámetro forman el cuadrilátero $\square(ABCD)$ que está inscrito en nuestro círculo. Las diagonales de dicho cuadrilátero

BD y AC son, justamente, las cuerdas de a y de $180^\circ - b$, respectivamente. En otros términos (ver Figura 7), tenemos que, para el cuadrilátero inscrito, los lados son

$$AB = \text{crd}[180^\circ - a], AC = \text{crd}[180^\circ - b], BC = \text{crd}[a - b] \text{ y } AD = \text{crd}[180^\circ]$$

mientras que las diagonales son

$$BD = \text{crd}[a] \text{ y } BD = \text{crd}[180 - b]$$

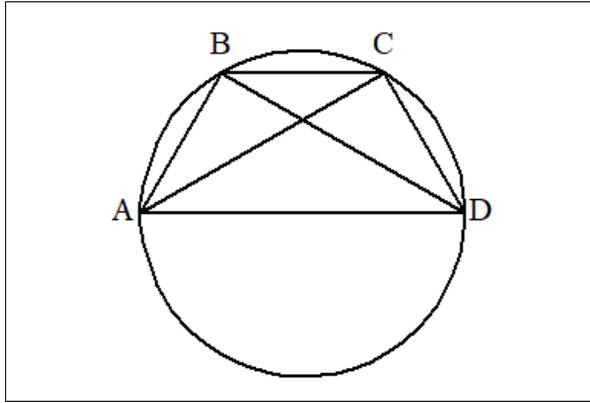


Figura 7

Así, de acuerdo con el teorema de Ptolomeo (teorema 3) se sigue que

$$(3) \quad \text{crd}[a] \cdot \text{crd}[180^\circ - b] = \text{crd}[b] \cdot \text{crd}[180^\circ - a] + \text{crd}[a - b] \cdot \text{crd}[180^\circ]$$

Si despejamos la expresión $\text{crd}[a - b] \cdot \text{crd}[180^\circ]$ en la ecuación (3) se llega a la igualdad

$$\text{crd}[a - b] \text{crd}[180^\circ] = \text{crd}[a] \text{crd}[180^\circ - b] - \text{crd}[b] \text{crd}[180^\circ - a]$$

que es justo la fórmula que queríamos obtener.

2.1.2. Más propiedades de las cuerdas. Un resultado análogo a la proposición 2, pero para la cuerda de una suma, se puede obtener si se considera la siguiente figura

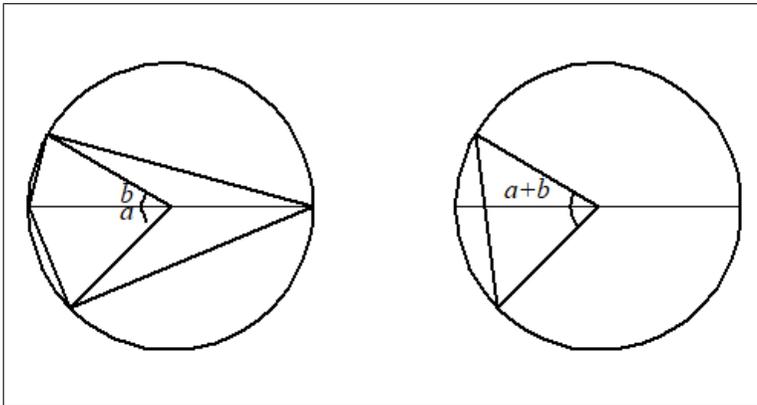


Figura 8

PROPOSICIÓN 4. Sean a y b dos ángulos centrales de un círculo de radio r , entonces:

$$(4) \quad \text{crd}[a + b] \text{crd}[180^\circ] = \text{crd}[a] \text{crd}[180^\circ - b] + \text{crd}[b] \text{crd}[180^\circ - a]$$

o, si se prefiere

$$2r \text{crd}[a + b] = \text{crd}[a] \text{crd}[180^\circ - b] + \text{crd}[b] \text{crd}[180^\circ - a]$$

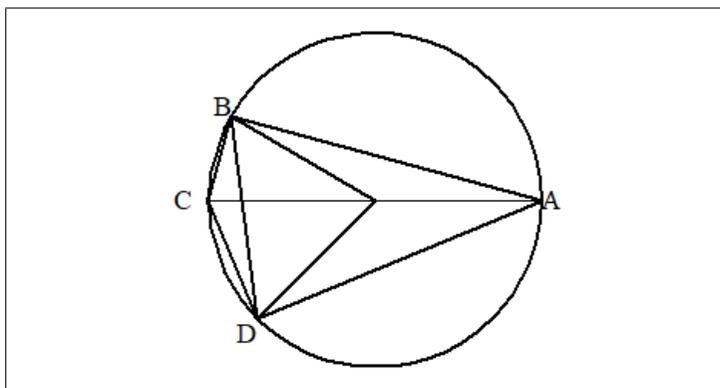


Figura 8B

Ejercicio 1. Use las figuras 8 y 8B y el teorema de Ptolomeo par demostrar la proposición 4.

El siguiente resultado relaciona la cuerda de un ángulo a con la cuerda del semiángulo $\frac{a}{2}$.

PROPOSICIÓN 5. Sean a y b dos ángulos centrales de un círculo de radio r , entonces:

$$\text{crd} \left[\frac{a}{2} \right] \text{crd} \left[\frac{a}{2} \right] = \frac{1}{2} \{ \text{crd} [180^\circ] \text{crd} [180^\circ] - \text{crd} [180^\circ] \text{crd} [180^\circ - a] \}$$

esto es,

$$\text{crd}^2 \left[\frac{a}{2} \right] = 2r^2 - r \text{crd} [180^\circ - a]$$

Demostración. Tracemos en el círculo el ángulo central $a = \angle DOB$ y sea OC la bisectriz de dicho ángulo, entonces, los segmentos BC y CD son iguales. Luego se dibuja el segmento CF perpendicular al diámetro y coloca el punto E sobre AD con $AE = AB$ y finalmente traza el segmento EC como se muestra en la [Figura 9]

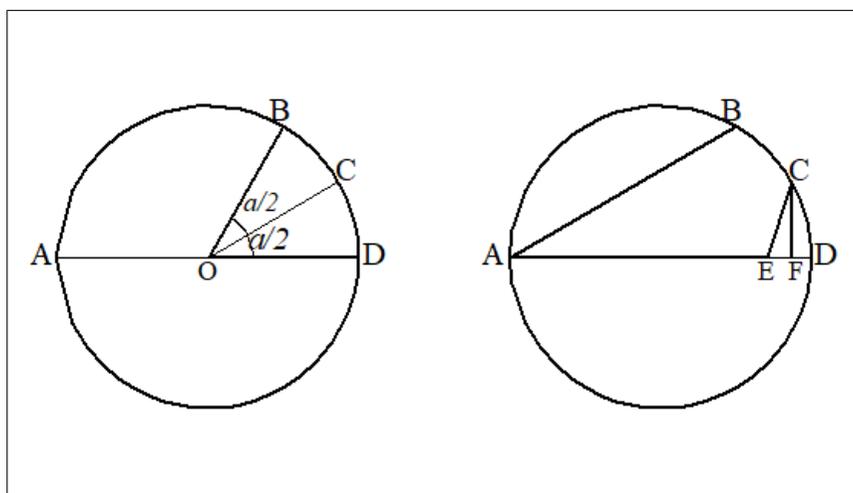


Figura 9

Entonces tenemos que los triángulos ABC y ACE son congruentes. En efecto, como los ángulos centrales $\angle BOC$ y $\angle DOC$ son congruentes (ver Figura 10), los ángulos inscritos $\angle BAC$ y $\angle EAC$ también son congruentes

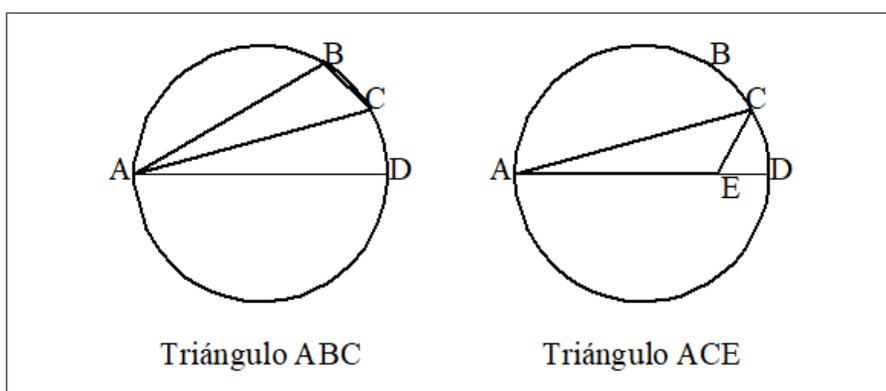


Figura 10

Como el lado AC es común y $AB \equiv BE$ por construcción, por el criterio LAL, concluimos que los triángulos son congruentes y que

$$BC \equiv CE$$

Pero sabemos que $BC \equiv CD$, lo que implica que $CE \equiv CD$. Esto muestra que el triángulo $\triangle CDE$ es isósceles.

Por otra parte, los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle CFD$ son semejantes, ya que los ángulos $\angle ACD$ y $\angle CFD$ son rectos (ver Figura 11)

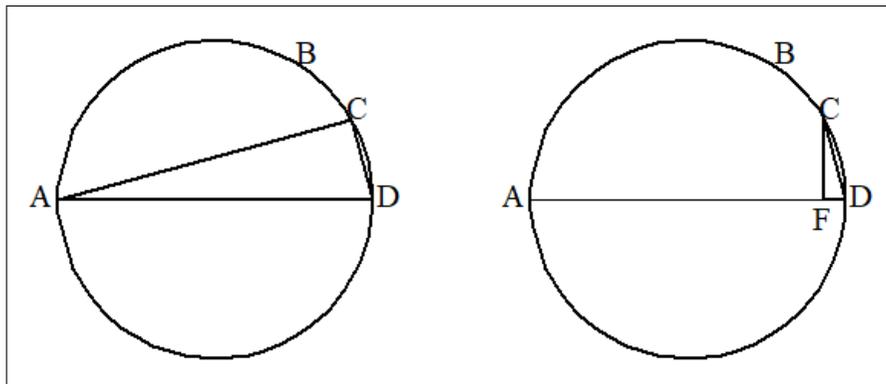


Figura 11

y, por ende, congruentes. Como, además, el ángulo $\angle ADC$ es el mismo que el ángulo $\angle FDC$, podemos concluir, como afirmamos, que los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle CFD$ son semejantes.

Como consecuencia de esto se tiene que

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DF}$$

luego

$$(5) \quad CD \cdot CD = AD \cdot DF$$

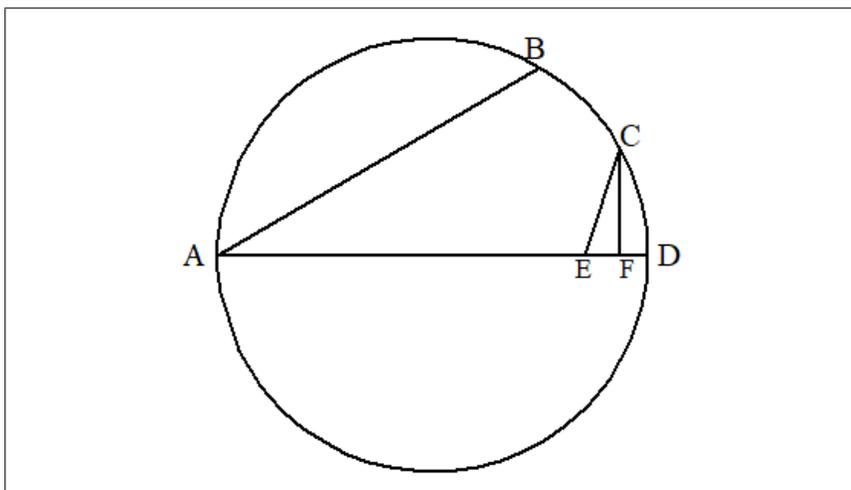


Figura 12

Finalmente, como

$$ED = AD - AE = AD - AB$$

y F es el punto medio del lado ED , se tiene que

$$DF = \frac{1}{2}(AD - AB)$$

Al sustituir en (5) se tiene que

$$CD^2 = AD \cdot \left[\frac{1}{2}(AD - AB) \right]$$

$$(6) \quad CD^2 = \frac{1}{2}(AD^2 - AD \cdot AB)$$

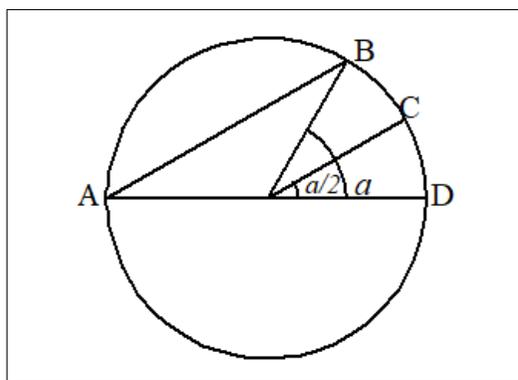


Figura 13

Puesto que $CD = \text{crd}[a/2]$, $AD = \text{crd}[180^\circ]$ y $AB = \text{crd}[180^\circ - a]$, se sigue de la igualdad (6) que

$$\text{crd}^2 \left[\frac{a}{2} \right] = \frac{1}{2} [\text{crd}^2 [180^\circ] - \text{crd} [180^\circ] \text{crd} [180^\circ - a]]$$

o, si se prefiere,

$$\text{crd}^2 \left[\frac{a}{2} \right] = 2r^2 - r \text{crd} [180^\circ - a]$$

□

Ejemplo 1. Muestre que si a y b son ángulos centrales de un círculo de radio r , entonces:

$$(7) \quad \text{crd} [180^\circ] \text{crd} [180^\circ - (a + b)] = \text{crd} [180^\circ - a] \text{crd} [180^\circ - b] - \text{crd} [a] \text{crd} [b]$$

esto es,

$$2r \operatorname{crd} [180^\circ - (a + b)] = \operatorname{crd} [180^\circ - a] \operatorname{crd} [180^\circ - b] - \operatorname{crd} [a] \operatorname{crd} [b].$$

(Sugerencia: Use la fórmula (2) para la resta de los ángulos $180^\circ - a$ y b .)

Ejercicio 2. Muestre que si a y b son ángulos centrales de un círculo de radio r , entonces:

$$\operatorname{crd} [180^\circ] \operatorname{crd} [180^\circ - (a - b)] = \operatorname{crd} [180^\circ - a] \operatorname{crd} [180^\circ - b] + \operatorname{crd} [a] \operatorname{crd} [b]$$

(Sugerencia: Ahora podría usar la fórmula (4).)

Ejercicio 3. a) Muestre que en un círculo de radio r

$$\operatorname{crd} \left[\frac{a}{2} \right] = \sqrt{2r^2 - r \operatorname{crd} [180^\circ - a]}$$

b) Use la relación (1) para concluir que

$$(8) \quad \operatorname{crd} \left[\frac{a}{2} \right] = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - \operatorname{crd}^2 a}}$$

Ejercicio 4. a) Muestre que

$$\operatorname{crd}^2 \left[180^\circ - \frac{a}{2} \right] = 2r^2 + r \operatorname{crd} [180^\circ - a]$$

b) Muestre que

$$\operatorname{crd} \left[180^\circ - \frac{a}{2} \right] = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - \operatorname{crd}^2 [a]}}$$

2.1.3. *Como usar las propiedades de las cuerdas para construir una tabla como la de Ptolomeo.* Para empezar, en sus cálculos Ptolomeo usa un círculo de radio 60, por lo que en nuestras fórmulas r debe ser 60.

El otro aspecto a tomar en cuenta es, el ángulo del que partimos. En la tabla que construimos a continuación partimos del ángulo 60° pues para dicho ángulo, sus lados junto con la cuerda forman un triángulo equilátero (ver Figura 14) y por ende

$$\operatorname{crd} [60^\circ] = 60$$

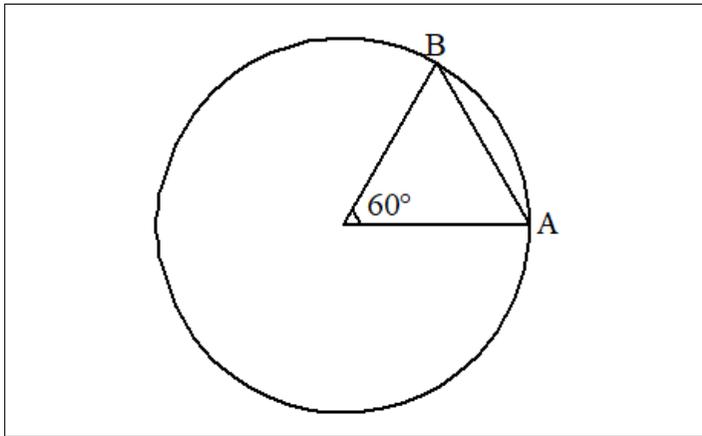


Figura 14

Con esto en mente uno puede calcular la $\operatorname{crd} [30^\circ]$ usando la identidad (8) como sigue: De la identidad obtenida en el problema 4-b) se tiene que

$$\operatorname{crd} [30^\circ] = \sqrt{2 * 60^2 - 60 \sqrt{4 * 60^2 - (\operatorname{crd} [60^\circ])^2}}$$

y como $\operatorname{crd} [60^\circ] = 60$

$$\operatorname{crd} [30^\circ] = \sqrt{2 * 60^2 - 60 \sqrt{4 * 60^2 - (60)^2}} = 31,058\ 285$$

Una vez calculado el valor de $\text{crd}[30^\circ]$ podemos obtener el valor de la $\text{crd}[15^\circ]$ aplicando nuevamente la identidad (8)

$$\begin{aligned}\text{crd}[15^\circ] &= \sqrt{2 * 60^2 - 60\sqrt{4 * 60^2 - (\text{crd}[30^\circ])^2}} \\ &= \sqrt{2 * 60^2 - 60\sqrt{4 * 60^2 - (31.058285)^2}} = 15,663143\end{aligned}$$

Con el valor de $\text{crd}[15^\circ]$ y nuestra identidad para la cuerda de la mitad del ángulo, podemos calcular $\text{crd}[7,5^\circ]$

$$\begin{aligned}\text{crd}[7,5^\circ] &= \sqrt{2 * 60^2 - 60\sqrt{4 * 60^2 - (\text{crd}[15^\circ])^2}} \\ &= \sqrt{2 * 60^2 - 60\sqrt{4 * 60^2 - (15.663143)^2}} = 7,848375\end{aligned}$$

De modo similar, podemos calcular la $\text{crd}[3,75^\circ]$

$$\begin{aligned}\text{crd}[3,75^\circ] &= \sqrt{2 * 60^2 - 60\sqrt{4 * 60^2 - (\text{crd}[7,5^\circ])^2}} \\ &= \sqrt{2 * 60^2 - 60\sqrt{4 * 60^2 - (7.848375)^2}} = 3.926289\end{aligned}$$

y, procediendo de esta forma, podemos construir una tabla como la siguiente

ángulo	cuerda
60°	60,000 000
30°	31.058 285
15°	15.663 143
$7,5^\circ$	7.848 375
$3,75^\circ$	3.926 289
$1,875^\circ$	1.963 407
$0,9375^\circ$	0,981 736
$0,46875^\circ$	0,490 872

La relevancia de esta tabla es que con estos valores y las identidades obtenidas para las cuerdas, uno puede obtener una tabla mucho más completa. Por ejemplo para calcular la $\text{crd}[60,9375^\circ]$ notemos que

$$\text{crd}[60,9375^\circ] = \text{crd}[60^\circ + 0,9375^\circ]$$

por lo que uno puede usar primero la identidades (4) para llegar a que

$$120 \text{crd}[60,9375^\circ] = \text{crd}[60^\circ] \text{crd}[180^\circ - 0,9375^\circ] + \text{crd}[180^\circ - 60^\circ] \text{crd}[0,9375^\circ]$$

y luego usar (1) para ver que

$$\begin{aligned}\text{crd}[60,9375^\circ] &= \frac{1}{120} \text{crd}[60^\circ] \left(\sqrt{120^2 - \text{crd}^2[0,9375^\circ]} \right) \\ &\quad + \frac{1}{120} \left(\sqrt{120^2 - \text{crd}^2[60^\circ]} \right) \text{crd}[0,9375^\circ]\end{aligned}$$

Finalmente, substituyendo los valores de la tabla y haciendo las operaciones indicadas se tiene que

$$\text{crd}[60,9375^\circ] = 60,848201$$

(Note que $61^\circ \approx 60,9375^\circ$, así que $\text{crd}[61^\circ] \approx 60,848201$)

Ejercicio 5. Use una calculadora para obtener los valores de $\text{crd}[0,9375^\circ]$ y $\text{crd}[0,46875^\circ]$ a partir de la identidad (8).

Ejercicio 6. Use las identidades para las cuerdas, los valores de la tabla y una calculadora para ver que

$$\text{crd}[59,53875^\circ] = 59,574\,389$$

(Sugerencia: $59,53875^\circ = 60^\circ - 0,46875^\circ$ y recuerde la identidad (2).)

3. EL ORIGEN DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO QUE CONOCEMOS

3.1. Avances de Johannes Müller. Como ocurrió durante la edad media con todo el desarrollo de la ciencia, muchos de los trabajos relacionados con trigonometría de los griegos, fueron preservados y ampliados por los pueblos musulmanes, en particular destacan las aportaciones del escritor islámico Nasí Edin (1201-1274).

La primera publicación europea que terminaría por convertirse en referencia básica para el estudio de la trigonometría en Europa, es el trabajo de Johannes Müller (1436-1476) titulado *Regiomontanus*, sobre triángulos de todo tipo, publicado en Nuremberg en el año de 1533.

El tema principal de este trabajo, el cual se divide en 5 tomos, es el estudio de las razones entre los lados de los triángulo rectángulo con un mismo ángulo agudo, esto es, el estudio de las funciones trigonométricas tal y como nos las enseñaban en la secundaria.

Por supuesto, J. Müller en el *Regiomontanus*, busca establecer desde el principio la relación entre las razones trigonométricas y las cuerdas de un círculo. Así, en el primer tomo, uno de sus primeros resultados es el siguiente:

TEOREMA 6. (*Teorema 20*) *En todos los triángulos rectángulos, si describimos un círculo con su centro en un vértice de un ángulo agudo y su radio de longitud la del lado más largo (lo que ahora llamamos hipotenusa), entonces el lado que subtiende este ángulo agudo es el seno de el arco adyacente a ese lado y opuesto al ángulo dado; el tercer lado es igual al seno del complemento del arco.*

En términos un poco más modernos uno podría enunciar el teorema de la siguiente manera: Si en cualquier triángulo rectángulo ABC en donde A es uno de los ángulos agudos, se traza un círculo con radio AB (la hipotenusa) con centro en A (ver Figura 15). Entonces, el lado BC , que subtiende el ángulo A , es el seno del arco BE . Además, el tercer lado, AC , es el seno del complemento del arco BE .

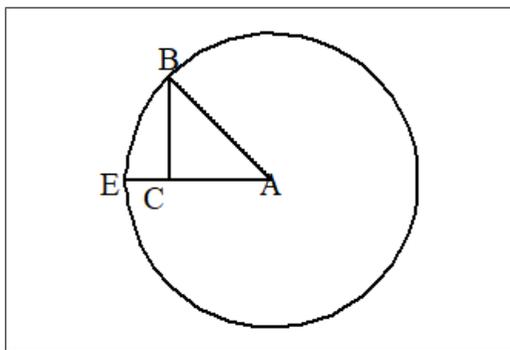


Figura 15

En otras palabras, el seno del arco BE es el lado opuesto (cateto opuesto) al vértice A , a saber el lado BC .

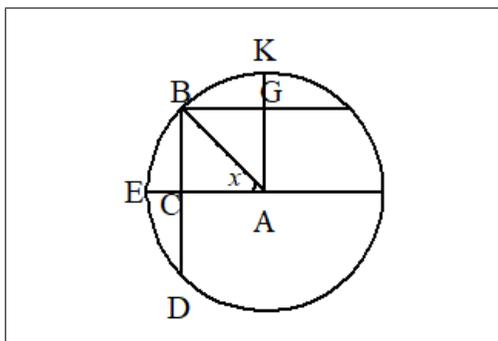


Figura 16

Si usamos la definición moderna de las funciones seno y coseno, denotamos por x el ángulo determinado por el arco BE y por R el radio del círculo, la resultado nos dice que

$$(9) \quad R \operatorname{sen} x = BC$$

En la segunda parte nos afirma que el seno del arco complementario BK es igual al tercer lado a saber, el lado AC .

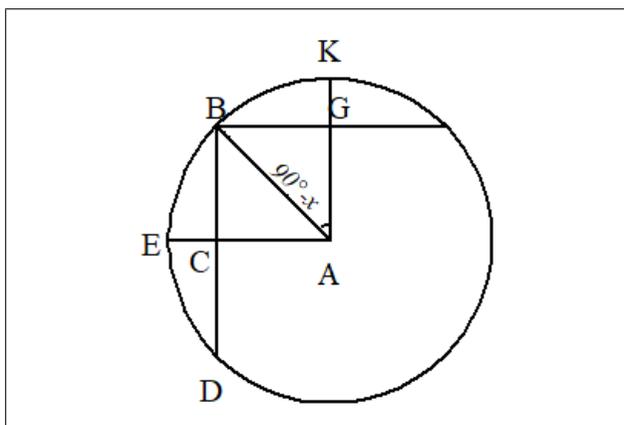


Figura 17

Para entender esta afirmación recordemos que en términos modernos $AC = R \cos \theta$ y que el ángulo determinado por el arco complementario BK es $90^\circ - x$, por lo que la segunda afirmación nos dice que

$$(10) \quad R \operatorname{sen} [90^\circ - x] = R \cos x$$

Así pues, el teorema 20 del libro I del Regiomontanus, establece la relación entre el seno, el coseno y los arcos de un círculo.

Por supuesto, más adelante J. Müller señala que BC es la mitad de la cuerda comprendida por el arco BD y que dicho arco es el doble del arco BE . En otros términos, si denotamos por x ángulo determinado por el arco BE y usamos (9), entonces, esta observación de J. Müller nos dice que para un círculo de radio R

$$(11) \quad R \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{crd} [2x]$$

Esta igualdad nos da la relación entre las cuerdas definidas por Ptolomeo y la definición del seno de J. Müller.

Notemos además que, de la ecuación (11), se sigue

$$R \cos x = R \operatorname{sen} [90^\circ - x] = \frac{1}{2} \operatorname{crd} [2(90^\circ - x)]$$

eso es,

$$(12) \quad R \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{crd} [180^\circ - 2x]$$

lo que establece la relación entre el coseno y la cuerda del suplementario.

Un detalle curioso es que mientras que Ptolomeo usa un círculo de radio $R = 60$ para sus cálculos, Müller usa un círculo de radio $R = 60\,000$.

3.2. La definición de Euler. A pesar de los trabajos de Johannes Müller la notación y el radio del círculo usados para la caracterización del seno y el coseno, no se estandarizaron hasta los trabajos del celebrado científico y filósofo Leonhard Euler (Suiza 1707-1783).

Euler en su famoso libro *Introductio in analysin infinitorum* publicado en 1748, definió las funciones trigonométricas de la siguiente manera: $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ denotan el seno y el coseno en el círculo unitario para el ángulo central que subtiende un arco de longitud x . Esto equivale a decir que $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ son, justamente, las funciones seno y el coseno tal y como son definidas en los cursos de Cálculo y que el ángulo x se mide en radianes.

Nosotros terminaremos este trabajo señalando cómo se pueden obtener las propiedades de seno y coseno en términos de lo que hemos visto sobre las cuerdas.

4. EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO A PARTIR DE LAS PROPIEDADES DE LAS CUERDAS

Nuestro punto de partida en esta sección son las relaciones

$$R \text{sen } x = \frac{1}{2} \text{crd } [2x] \text{ y } R \text{cos } x = \frac{1}{2} \text{crd } [180^\circ - 2x]$$

obtenidas por Johannes Müller. Por supuesto, en lo que sigue el radio R del círculo que se considera para definir las cuerdas y las funciones seno y coseno es 1. Así las relaciones entre las cuerdas y las funciones trigonométricas son

$$(13) \quad \text{sen } x = \frac{1}{2} \text{crd } [2x] \text{ y } \text{cos } x = \frac{1}{2} \text{crd } [180^\circ - 2x]$$

o, en forma equivalente,

$$(14) \quad \text{crd } [2x] = 2 \text{sen } x \text{ y } \text{crd } [180^\circ - 2x] = 2 \text{cos } x$$

Una de las primeras propiedades sobre cuerdas que vimos es la proposición 1 la cual nos da la siguiente identidad

$$\text{crd}^2 [a] + \text{crd}^2 [180^\circ - a] = \text{crd}^2 180^\circ$$

Si hacemos $a = 2x$ y usamos (14) obtenemos que

$$4 \text{sen}^2 x + 4 \text{cos}^2 x = \text{crd}^2 [180^\circ]$$

Puesto que se considera el círculo de radio 1, se tiene que su diámetro, la $\text{crd } [180^\circ]$, es 2 y por ende

$$4 \text{sen}^2 x + 4 \text{cos}^2 x = 4$$

lo que nos lleva a la famosa identidad

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

De modo similar, si en la identidad dada en la proposición 2

$$\text{crd } [a - b] \text{crd } 180^\circ = \text{crd } [a] \text{crd } [180^\circ - b] - \text{crd } [b] \text{crd } [180^\circ - a]$$

hacemos

$$a = 2x \text{ y } b = 2y$$

nos queda que

$$\text{crd } [2(x - y)] \text{crd } 180^\circ = \text{crd } [2x] \text{crd } [180^\circ - 2y] - \text{crd } [2y] \text{crd } [180^\circ - 2x]$$

y usando (14) nos queda que

$$2 \text{sen } [x - y] \cdot 2 = (2 \text{sen } x) (2 \text{cos } y) - (2 \text{sen } y) (2 \text{cos } x)$$

esto es

$$\operatorname{sen}[x - y] = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$$

Para la identidad dada en la proposición 5

$$\operatorname{crd}^2 \left[\frac{a}{2} \right] = 2r^2 - r \operatorname{crd} [180^\circ - a]$$

se obtiene la identidad

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x$$

la cual también podemos escribir en la forma

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

Ejercicio 7. ¿Qué otras identidades trigonométricas podría obtener a partir de las identidades obtenidas en las proposiciones 4 y 5?

Ejercicio 8. ¿Qué otras identidades trigonométricas podría obtener a partir de las identidades obtenidas en los problemas 1, 2, 3 y 4?

PROPOSICIÓN 7. *Las funciones seno y coseno cumplen las siguientes identidades trigonométricas*

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| I) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ | VII) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ |
| II) $\cos [x - y] = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ | VIII) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ |
| III) $\cos [x + y] = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ | IX) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ |
| IV) $\operatorname{sen} [x - y] = \cos x \operatorname{sen} y - \cos y \operatorname{sen} x$ | X) $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ |
| V) $\operatorname{sen} [x + y] = \cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x$ | XI) $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ |
| VI) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos y$ | |

Y las tres identidades siguientes:

$$\begin{aligned} \text{XII) } \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos [x - y] + \cos [x + y]] \\ \text{XIII) } \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2} [\cos [x - y] - \cos [x + y]] \\ \text{XIV) } \cos x \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen} [x - y] + \operatorname{sen} [x + y]] \end{aligned}$$

Ejercicio 9. Deduzca las identidades enunciadas en la proposición 7. (Sugerencias: Para el inciso a) se utiliza la propiedad (4) tomando a $a = 2x$ y $b = 2y$, de igual manera se resuelve el inciso b, tomando a $a = 2x$ y $b = 2y$ en la propiedad (7), partiendo de $a = 2x$ y $b = 2y$ en la ecuación (2) se resuelve el inciso c y el inciso d se resuelve tomando $a = 2x$ y $b = 2y$ en el 2.)

REFERENCIAS

- [1] Struik D.J., *A Source Book in Mathematics 1200-1800*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1969.
- [2] Morris R. Cohen, I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1948.
- [3] Edwards C. H., *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag 1979.