



NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS CIRCULANTES, UN PROBLEMA ABIERTO DE TEORÍA DE GRÁFICAS

MARIANA LADRÓN DE GUEVARA FUENTES

RESUMEN. En este artículo se analizará el problema de caracterizar las digráficas circulantes que tienen núcleo; un problema abierto de teoría de gráficas. Se dará una caracterización para una familia infinita de digráficas circulantes usando para su demostración algunos resultados la teoría aditiva de números y se establece una conjetura para motivar la investigación en este campo.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de gráficas tiene aplicaciones en muchas áreas, no sólo en las matemáticas puras y aplicadas, también en otras ciencias: química, física, ciencias sociales, informática, etc. Muchas estructuras pueden ser representadas mediante una gráfica: relaciones entre personas, redes de telecomunicación, circuitos eléctricos unidos por puentes, enlaces entre moléculas o partículas, etc. Para representar una relación entre los elementos de cualquier conjunto finito de objetos, siempre podemos usar una (di)gráfica. Los elementos se representan por vértices y las relaciones entre ellos se dan mediante aristas (en gráficas), arcos o flechas (en el caso de las digráficas).

En matemáticas, al trabajar con conjuntos, es usual querer encontrar un subconjunto, relativamente pequeño, que nos revele información del conjunto total. En teoría de gráficas, el núcleo de una digráfica (ver pág.6), es un subconjunto de los vértices que muestra propiedades importantes de la gráfica en cuestión y nos permite ver cómo se comporta. Es por esto que encontrar el núcleo de una gráfica dirigida o digráfica, se ha hecho un objeto de estudio para muchos matemáticos en diversas partes del mundo, y se han obtenido grandes avances que se pueden apreciar en múltiples artículos (ver [17], [4], [5], [6], [12], [13]). La idea de núcleos fue introducida por primera vez por John von Neumann y Oskar Morgenstern en 1944 [16], como una generalización de las SOLUCIONES-NM, un concepto que se usó para resolver un tipo de problemas de teoría de juegos aplicada a la economía. Se define el núcleo desde esta perspectiva para describir la victoria en un juego posicional entre dos personas (ver [6]). Von Neumann y Morgenstern también probaron que en una digráfica acíclica, existe un único núcleo y además puede obtenerse en tiempo lineal [6]. De aquí, se comenzaron a ver aplicaciones para obtener las soluciones en otros tipos de juegos, como los “juegos sin retorno”; que son una generalización de los juegos tipo NIM (un juego de estrategia entre dos personas, en el que intercaladamente, cada persona debe ir quitando objetos de entre dos montones y gana aquél que se queda sin objetos o con un objeto), en los cuales es posible encontrar un núcleo en tiempo polinomial, así lo probaron Jack Edmonds y Vladimir Gurvich [11]. También se han visto aplicaciones en áreas como lógica, inteligencia artificial, teoría de gráficas y análisis combinatorio [3], [8].

En general, el problema de encontrar un núcleo en una gráfica es un problema del que se sabe relativamente poco, pese a su extensa investigación. Hasta ahora, se ha demostrado, por ejemplo, que probar la existencia de un núcleo, en una digráfica en

2010 *Mathematics Subject Classification.* MSC 2000: 5C20, 11B25.

Palabras clave. Teoría de Gráficas; Teoría Aditiva de Números; Núcleos.

general con un número finito de vértices, es un problema NP-completo ¹ [8]. También se sabe que todos los ciclos dirigidos de longitud par y la mayoría de los torneos no tienen núcleo [4] [2]. Además, una gráfica finita cuyos ciclos sean todos de longitud impar, tiene núcleo [19].

En el presente artículo se estudia el problema de caracterizar a las digráficas circulantes que tienen núcleo. Es un problema NP-completo sin resolver, propuesto en el libro de J. Bang-Jensen and G. Gutin [2]. Transformaremos este problema de teoría de digráficas a uno más simple de teoría aditiva de números, para ser abordado desde esta perspectiva. Se dará en primer lugar, un panorama preliminar acompañado de algunos ejemplos que familiarizarán al lector con el problema. Se abordarán los elementos necesarios para ver el problema como un problema de teoría aditiva de números, la cual se usará para probar una caracterización para una familia infinita de digráficas circulantes.

Las digráficas circulantes tienen una fuerte aplicación en el área de informática. En la computadora ILLIAC IV, por ejemplo, el arreglo PE (que consiste de una CPU y una memoria local), puede funcionar como una digráfica circulante. Cada PE de la red ILLIAC IV está conectado a un número fijo de otras PE's. Cada nodo i está conectado con los nodos $i \pm 1$ y $i \pm s$ módulo n [20]. La llamada "memoria circular" tiene también esta estructura. En el diseño e implementación de redes de área local, es común que se use la estructura de un ciclo dirigido para que la transferencia de información llegue a todos los nodos. Esta estructura es "económica" y fácil de manejar, por su simplicidad y simetría. Sin embargo, por su débil conexidad, es susceptible a fallos. Dado que las digráficas circulantes, además de ser simétricas y regulares, son siempre fuertemente conexas, resultan ser más adecuadas para este tipo de redes.

2. PRELIMINARES

2.1. Teoría aditiva de números. La teoría aditiva de números es el estudio de la suma o sustracción (ver (ec1), (ec2)) entre conjuntos finitos de enteros, extendiendo su análisis a grupos abelianos y semigrupos conmutativos. La primera aplicación que se conoce de la teoría aditiva de números, fuera del campo de las matemáticas teóricas, fue en ingeniería eléctrica en 1945, para resolver el siguiente problema: Se tiene una resistencia que debe ser siempre de 30 ohms. Esta resistencia está compuesta por un conjunto de puntos fijos de contacto, tales que cada resistencia integral de 1, 2, 3, ..., 30 ohms puede ser obtenida conectando dos puntos fijos de contacto. Se usó la teoría aditiva de números para obtener el menor número posible de puntos fijos que puedan realizar esta tarea (ver [7]).

En la teoría aditiva de números se examinan dos tipos de problemas: directos e indirectos. En los primeros, el objetivo es conocer el comportamiento del conjunto que resulta de sumar dos o más conjuntos, conociendo propiedades de los sumandos que lo componen. Mientras que en el segundo tipo de problemas, se extraen propiedades de los conjuntos que componen un conjunto suma, conociendo la estructura del mismo.

¹En teoría de la complejidad computacional, NP es el acrónimo en inglés de nondeterministic polynomial time ("tiempo polinomial no determinista"). Es el conjunto de problemas que pueden ser resueltos en tiempo polinómico por una máquina de Turing no determinista.

Un problema de decisión C es NP-completo si:

1. C está contenido en el conjunto NP, y
2. Todo problema de NP es reducible a C en tiempo polinomial.

Sea $h \geq 2$, y sean A_1, A_2, \dots, A_h conjuntos de enteros. Se define el **conjunto suma** como

$$(1) \quad A_1 + A_2 + \dots + A_h = \{a_1 + a_2 + \dots + a_h : a_i \in A_i \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, h\}.$$

Denotamos la cardinalidad de A como $|A|$. Sean $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, entonces el **conjunto resta** se define como

$$(2) \quad A - B = \{a - b : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Para cada $c \in \mathbb{Z}$, se definen los siguientes conjuntos

$$(3) \quad \begin{aligned} c + A &= \{c\} + A = \{c + a \in : a \in A\}, \\ c - A &= \{c\} - A = \{c - a \in : a \in A\}. \end{aligned}$$

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$ cualquier conjunto, decimos que A es **libre de sumas** (*sum free*) si

$$(4) \quad (A + A) \cap A = \emptyset.$$

Sea G un conjunto y $M \subseteq G$. Si M es libre se sumas y para todo conjunto $B \subseteq G$ que sea libre se sumas se cumple que $|B| \leq |M|$, entonces se dice que M es **libre de sumas maximal**.

Para cualquier conjunto A , denotaremos a su complemento con \bar{A} .

2.2. Teoría de gráficas. Una **digráfica** o gráfica dirigida D es un par ordenado $(V(D), A(D))$, donde $V(D) \subseteq \mathbb{N}$ es el conjunto de **vértices**, y $A(D) \subseteq V(D) \times V(D)$ es el conjunto de **arcos o flechas**. Decimos que un par ordenado (u, v) está en $A(D)$, si y solo si, existe una flecha que va de u a v , dicho de otro modo

$$(5) \quad (u, v) \in A(D) \iff u \rightarrow v.$$

Dada una flecha (u, v) , al primer vértice u lo llamaremos **origen** y al segundo v **destino**; también se puede decir que "u llega a v", o que "v sale de u". Sean $u, v \in V(D)$, entonces u y v son **adyacentes** si alguna, (u, v) o (v, u) , es una flecha en D .

Para una digráfica D y para cualquier $v \in V(D)$ se definen los conjuntos

$$(6) \quad N_D^+(v) = \{u \in V(D) \setminus \{v\} : (v, u) \in A(D)\}$$

y

$$(7) \quad N_D^-(v) = \{u \in V(D) \setminus \{v\} : (u, v) \in A(D)\},$$

a los que llamaremos **exvecindad** (todos lo vértices de la gráfica que salen de v) e **invecindad** (todos lo vértices de la gráfica que llegan a v) de v , respectivamente. Se define la **vecindad de v** como

$$(8) \quad N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v).$$

Se dice que una digráfica G es **k-regular** si para todo $v \in (V(J))$, se cumple que $|N_D^+(v)| = |N_D^-(v)| = k$.

Para cualquier entero $n \geq 2$ y cualquier conjunto $J \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, una digráfica cuyo conjunto de vértices es isomorfo al de clases laterales \mathbb{Z}_n (es decir, que tiene n vértices etiquetados con representantes de 0 a $n-1$), decimos que es una **digráfica circulante** $\vec{C}_n(J)$ si toda flecha $a \rightarrow b$ está en $A(\vec{C}_n(J))$ si y solo si $b - a \pmod{n}$ es un elemento de J . Dicho de otro modo, una digráfica es circulante si su conjunto de arcos o flechas es de la forma

$$(9) \quad A(\vec{C}_n(J)) = \{i \rightarrow i + j \pmod{n} : 0 \leq i \leq n-1, j \in J\}.$$

Al conjunto J se le llama **conjunto de saltos** (*jumps*), porque denota la cantidad de saltos que se dan de un vértice a los siguientes vértices adyacentes a él.

Cabe mencionar que para fines de este artículo, en nuestras digráficas circulantes se excluyen todas aquellas digráficas con lazos o flechas simétricas, esto es;

1. Para todo $u \in V(\vec{C}_n(J))$, $(u, u) \notin A(\vec{C}_n(J))$.
2. Para todo $u, v \in V(\vec{C}_n(J))$, si $(u, v) \in A(\vec{C}_n(J))$, entonces $(v, u) \notin A(\vec{C}_n(J))$.

Ejemplo 1. La digráfica circulante $\vec{C}_{15}(3, 5)$ es la digráfica de 15 vértices y saltos 3 y 5. Ver Figura 1.

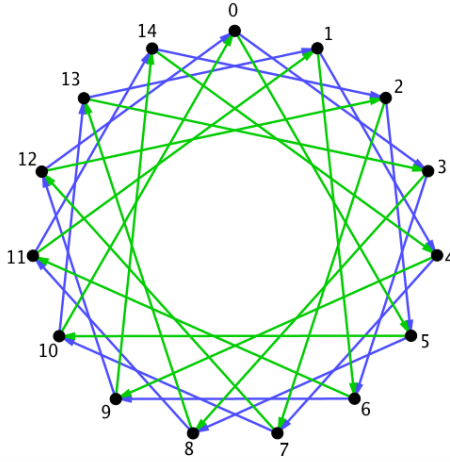


FIGURA 1. Gráfica $\vec{C}_{15}(3, 5)$. Las flechas en azul indican el salto 3 y las que están en verde el salto 5.

Como $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, entonces para cada $i \in V(\vec{C}_n(J)) = \mathbb{Z}_n$

$$(10) \quad N_G^+(i) = \{i + j_t : 1 \leq t \leq k\} \quad \text{y} \quad N_G^-(i) = \{i - j_t : 1 \leq t \leq k\}.$$

Se sigue que $|N_G^+(i)| = |N_G^-(i)| = |J|$.

Por lo anterior, podemos decir que toda digráfica circulante $\vec{C}_n(J)$ es $|J|$ -regular.

Ejemplo 2. A la gráfica $\vec{C}_{15}(3, 5, 8)$, le corresponde el conjunto de saltos $J = \{3, 5, 8\}$. Por lo tanto es 3-regular, porque de cada vértice en la gráfica salen tres flechas, la misma cantidad de flechas que llegan a él. Esto es, para todo $v \in V(\vec{C}_{15}(3, 5, 8))$, $|N_G^+(v)| = |N_G^-(v)| = 3$.

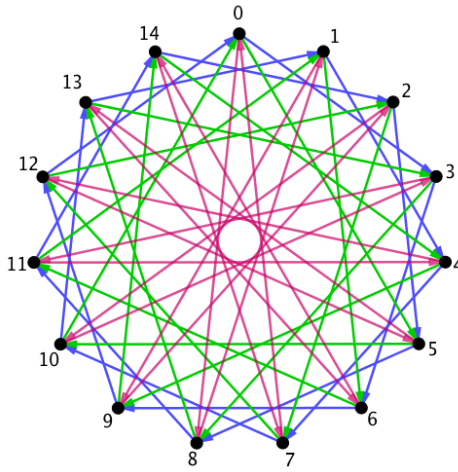


FIGURA 2. Gráfica $\vec{C}_{15}(3, 5, 8)$. . Las flechas en azul indican el salto 3 y las que están en verde el salto 5 y las de rosa corresponden al salto 8.

Sea G una gráfica y sea $K \subset V(G)$. Se dice que K es un **núcleo** de G si

1. Es **independiente**; si para cualesquiera $u, v \in K$, entonces, $(u, v), (v, u) \notin A(G)$.
2. Es **absorbente**; si para toda $x \in V(G) \setminus K$, existe $v \in K$, tal que $(x, v) \in A(G)$.

Dicho de otro modo, K es núcleo si no tiene pares de vértices adyacentes entre sí (independencia) y si cada elemento de su complemento “llega a” algún elemento de K (absorbencia).

Ejemplo 3. Sea $\vec{C}_{10}(1,4)$. Si tomamos $K = \{1, 3, 6, 8\}$, observamos que K es independiente y absorbente. Por lo tanto, K es un núcleo de $\vec{C}_{10}(1,4)$. Ver Figura 3.

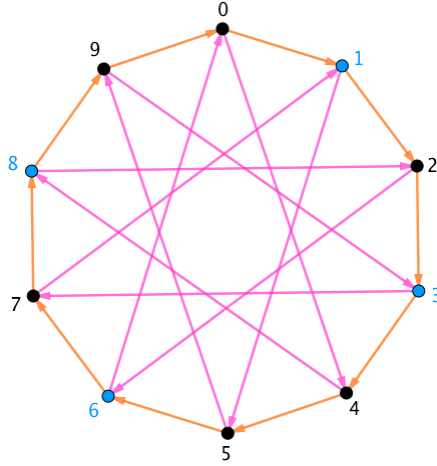


FIGURA 3. Gráfica $\vec{C}_{10}(1,4)$. Las flechas en amarillo indican el salto 1 y las que están en rosa el salto 4.

PROPOSICIÓN 1. *Sea $J \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. Si $n \leq 2|J| + 1$, entonces $\vec{C}_n(J)$ no tiene conjuntos absorbentes.*

Demostración. Tener una gráfica $|J|$ -regular significa que para todo $x \in V(\vec{C}_n(J))$, $|J|$ elementos diferentes salen de x y $|J|$ elementos diferentes llegan a x ; es decir, x es adyacente a $2|J|$ vértices distintos de $V(\vec{C}_n(J))$. Por lo tanto, tiene que haber al menos $|J| + 1$ vértices además de x , para que pueda existir un vértice no adyacente a él. \square

Como se ha mencionado anteriormente, el problema que se quiere resolver es el de caracterizar las digráficas circulantes que tienen núcleo. Sin embargo, aún con la poca teoría que se tiene hasta ahora, es posible caracterizar familias específicas de digráficas circulantes. La siguiente proposición es ejemplo de una caracterización de este tipo.

PROPOSICIÓN 2. *La digráfica $\vec{C}_n(1,2)$ tiene núcleo K , si y sólo si, $3 \mid n$ y $K = 3\mathbb{Z}_n$.*

Demostración. Por la Proposición 4, podemos asumir que $n \geq 6$. Supongamos por contradicción que $\vec{C}_n(1,2)$ tiene núcleo N pero que $n \nmid 3$. Entonces $n = 3r + 1$ ó $n = 3r + 2$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Sea $a \in N$, por definición de $\vec{C}_n(1,2)$, a es adyacente a los dos vértices $a + 1$ y $a + 2$, y sería independiente al vértice $a + 3$. De esto podemos afirmar que al menos uno de cada tres vértices de $\vec{C}_n(1,2)$ está contenido en N . Se sigue que

$$(11) \quad |N| \leq \lfloor \text{frac}|G|3 \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor.$$

Entonces

$$(12) \quad |N| = r,$$

y

$$(13) \quad |\bar{N}| = 2r + 1 \quad \text{ó} \quad |\bar{N}| = 2r + 2.$$

Sea R el conjunto de todos los elementos de $V(\vec{C}_n(1,2))$ que son absorbidos por N . Es fácil verificar que N y R son disjuntos ya que N es independiente, y al ser $\vec{C}_n(1,2)$

un gráfica 2-regular, se tiene que

$$(14) \quad |R| = |\{x \in \bar{N} : (x, a) \in A(\vec{C}_n(1, 2)); a \in N\}| \leq 2r < 2r + i,$$

para toda $i \in \mathbb{N}$.² Así, $\bar{N} \neq R$. Por lo tanto, N no es núcleo. Se sigue que $n = 3r$, para algún $r \in \mathbb{N}$. Como todo lo anterior es válido para todo $a \in N$, se tiene que $a + 3(i) \in N$ para toda $i \in \{0, 1, \dots, r\}$. Por lo tanto, los conjuntos N y $\{a + 3(i) : a \in N; 1 \leq i \leq r\}$ son isomorfos, i. e.,

$$(15) \quad N \cong \{a + 3(i) : a \in N; 1 \leq i \leq r\} \cong \{3(i) : 1 \leq i \leq r\} = 3\mathbb{Z}_n.$$

Supongamos ahora que $n = 3r$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Si $N \cong 3\mathbb{Z}_n$, entonces $|K| = r$. Como N es subgrupo de \mathbb{Z}_n y $J = \{1, 2\}$, se sigue que la suma o diferencia entre cualesquiera dos elementos de N no estaría en J , por lo que N es un conjunto independiente. Así

$$(16) \quad |R| = |\{a \in \bar{N} : (a, x) \in A(V(\vec{C}_n(1, 2))); x \in N\}| = 2r.$$

Recordemos que R y N son disjuntos. Se sigue que

$$(17) \quad |N| + |R| = r + 2r = 3r = n.$$

En consecuencia $R = \bar{N}$, es decir, N es absorbente. Por lo tanto, N es núcleo. □

El siguiente ejemplo ilustra la proposición anterior.

Ejemplo 4. Sea la digráfica $\vec{C}_9(1, 2)$. Si tomamos el conjunto $K = \{0, 3, 6\}$ podemos observar que es un núcleo (ver Figura 4). Por la acción del grupo \mathbb{Z}_n sobre el conjunto de vértices de la gráfica³, los conjuntos $\{0 + i, 3 + i, 6 + i\}$ con $i \in \{1, 2\}$, también son núcleos de $\vec{C}_9(1, 2)$, pero son isomorfos a K .

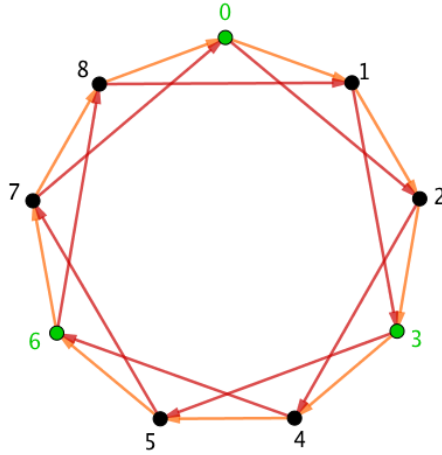


FIGURA 4. Gráfica $\vec{C}_9(1, 2)$: los vértices en verde representan el conjunto K

Ya vimos que con poca teoría se pueden caracterizar algunas familias específicas de digráficas circulantes, pero la herramienta que nos va a ayudar a dar un acercamiento a una caracterización más general es la teoría aditiva de los números. El siguiente lema

²En este artículo $0 \notin \mathbb{N}$

³El grupo \mathbb{Z}_n actúa sobre $V(\vec{C}_n(J))$ mediante la aplicación

$$(18) \quad \begin{aligned} \phi : (\mathbb{Z}_n \times V(\vec{C}_n(J))) &\longrightarrow V(\vec{C}_n(J)) \\ (i, x) &\longrightarrow i + x \end{aligned}$$

es el puente que nos llevará del mundo de la teoría de gráficas al mundo de la teoría aditiva de los números y viceversa.

LEMA 3. Sean $J \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ finito y $n > 2|J| + 1$. Sea $\vec{C}_n(J)$ una digráfica circulante. Entonces

1. $K \subset V(\vec{C}_n(J))$ es independiente $\iff (K + J) \cap K = \emptyset$.
2. $N \subset V(\vec{C}_n(J))$ es absorbente $\iff \bar{N} = N - J$.

Demostración. 1. Sea $k \in K$. Por definición de $\vec{C}_n(J)$, $(k, k + j) \in A(\vec{C}_n(J))$. Ya que K es independiente, $k + j \notin K$ para todo $j \in J$. Por lo tanto, $(K + J) \cap K = \emptyset$.

2. Como N absorbente, $x \in \bar{N}$ si y solo si existe $k \in N$ tal que $(x, k) \in A(\vec{C}_n(J))$ y por la definición de flecha en una digráfica circulante, eso pasa si y solo si, $k = x + j$, para alguna $j \in J$. Así,

$$(19) \quad k = x + j \iff x = k - j \iff x \in N - J \iff \bar{N} = N - J.$$

□

El siguiente teorema, aunque es muy simple, es una herramienta muy útil para la caracterización de familias más generales de digráficas $\vec{C}_n(J)$ con núcleos. Este nos permite simplificar la búsqueda de núcleos reduciendo el número de propiedades que se le debe pedir al conjunto. Para saber si una digráfica circulante tiene núcleo, basta con saber si su conjunto de vértices contiene un conjunto absorbente. Veremos primero el Lema de Vosper, un lema previo al teorema que nos ayudará con su demostración.

LEMA 4 (Lema de Vosper). Sea G cualquier grupo abeliano, y sean $A, B, C \subseteq G$ finitos y no vacíos, entonces

$$(20) \quad (A + B) \cap C = \emptyset \iff A \cap (C - B) = \emptyset.$$

Demostración. Si, $A \cap (C - B) \neq \emptyset$, entonces existe x tal que $x \in A$ y $x \in C - B$, sí y sólo si existen $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$, tales que $x = a$ y $x = c - b$. Pero

$$(21) \quad a = c - b \iff a + b = c \iff c \in A + B \cap C \iff (A + B) \cap C \neq \emptyset$$

□

TEOREMA 5. Sea G un grupo abeliano finito, entonces para cualesquiera $K, J \subset G$ no vacíos,

$$(22) \quad \bar{K} = K - J \implies (K + J) \cap K = \emptyset.$$

Demostración. Como

$$(23) \quad \begin{aligned} \bar{K} = K - J &\implies K - J \subseteq \bar{K} \\ &\implies (K - J) \cap K = \emptyset. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 4, se concluye que

$$(24) \quad (K + J) \cap K = \emptyset.$$

□

3. RESULTADOS

A continuación, usaremos los resultados de la sección anterior para establecer las condiciones que nos permitan caracterizar una familia de digráficas circulantes más general. Se probará una condición suficiente para que una digráfica circulante, con saltos $J = \{1, k\}$, tenga núcleo.

TEOREMA 6. Para cualquier digráfica circulante $\vec{C}_n(1, k)$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Si k es par, entonces $\vec{C}_n(1, k)$ tiene núcleo si $(k + 1) \mid n$.

2. Si k es impar, entonces $\vec{C}_n(1, k)$ tiene núcleo si n es par.

Demostración. 1. Como k es par y $(k+1)|n$, podemos escribir a k y n como $k = 2r$ y $n = (k+1)t$ con $r, t \in \mathbb{Z}^+$. Para cada entero $q \in [0, t-1]$, definamos

$$(25) \quad \begin{aligned} H_q &= \{(k+1)q + p : 2 \mid p, 0 \leq p \leq k-2\} \\ &= \left\{ (k+1)q + 2s : 0 \leq s \leq \frac{k-2}{2} \right\} \end{aligned}$$

y

$$(26) \quad H = \bigcup_{q=0}^{t-1} H_q.$$

Sea $H_k = \{(k+1)q + k : 0 \leq q \leq t-1\}$. Afirmamos que

$$(27) \quad \overline{H} = (H+1) \cup H_k.$$

En efecto, observemos que por construcción, para toda $q \in [0, t-1]$, $H_q \subseteq \{\overline{2i} : 0 \leq i \leq r-1\} \subseteq \mathbb{Z}_{k+1}$. Además, sabemos que

$$(28) \quad \begin{aligned} H+1 &= \bigcup_{q=0}^{t-1} H_q + 1 \\ &= \bigcup_{q=0}^{t-1} (H_q + 1) \\ &= \bigcup_{q=0}^{t-1} \left\{ (k+1)q + (2s+1) : 0 \leq s \leq \frac{k-2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Así, $H+1 \subseteq \{\overline{2i+1} : 0 \leq i \leq r-1\} \in \mathbb{Z}_{k+1}$. Por último,

$$(29) \quad H_k = \{(k+1)q + k : 0 \leq q \leq t-1\} \subseteq \overline{k} \in \mathbb{Z}_{k+1}.$$

Por lo tanto, los conjuntos $H, H+1$ y H_k son disjuntos dos a dos. Finalmente, verificaremos que su unión es \mathbb{Z}_n . Por la definición de los conjuntos, podemos calcular las cardinalidades de cada conjunto

$$(30) \quad \begin{aligned} |H| &= \sum_{q=0}^{t-1} |H_q| = \sum_{q=0}^{t-1} \left(\frac{k-2}{2} + 1 \right) = t \frac{k}{2}, \\ |H+1| &= |H| = t \frac{k}{2}, \\ |H_k| &= t. \end{aligned}$$

Sumando las cardinalidades tenemos que

$$(31) \quad |H| + |H+1| + |H_k| = 2 \left(t \frac{k}{2} \right) + t = t(k+1) = n.$$

Ahora probaremos que, para $J = \{1, k\}$, se cumple

$$(32) \quad \overline{H} = H - J,$$

lo cual sucede si y solo si $\overline{H} \subseteq H - J$ y $H - J \subseteq \overline{H}$

⊆) Sea $x \in \overline{H}$. Entonces $x \in H+1$ ó $x \in H_k$.

- Si $x \in H+1$, entonces existen $q \in [0, t-1]$ y s par con $0 \leq s \leq k-2$, tales que

$$(33) \quad x = (k+1)q + s + 1 \quad \text{con} \quad s \leq k-2.$$

Si $s < k-2$ se sigue que $s \leq k-4$, así podemos expresar a s como $s = 2s'$ con $s' < k-4$. Entonces

$$(34) \quad \begin{aligned} x &= (k+1)q + 2s' + 1 \\ &= (k+1)q + (2s' + 2) + 1 - 2 = (k+1)q + 2(s'+1) - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x \in H - \{1\} \subseteq H - J$. Si $s = k - 2$, entonces

$$(35) \quad x = (k+1)q + s + 1 = kq + q + (k-2) + 1 + k - k = (q+1)(k+1) + (k-2) - k,$$

con $q \leq t - 1$ entonces $q + 1 \leq t$. Pero si $q + 1 = t$. Entonces

$$(36) \quad (q+1)(k+1) = t(k+1) = 0.$$

Así $q + 1 \leq t - 1$ y por lo tanto, $x \in H - \{k\} \subseteq H - J$.

- Si $x \in H_k$, entonces para alguna $q \in [0, t - 1]$

$$(37) \quad \begin{aligned} x &= (k+1)q + k \\ &= k(q+1) + (q+1) - 1 = (k+1)(q+1) - 1 \in H - 1 \subseteq H - J. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{H} \subseteq H - J$.

\supseteq) Procedemos análogamente para esta contención. Sea $y \in H - J$. Entonces tenemos que $y \in H - \{1\}$ ó $y \in H - \{k\}$.

- Si $y \in H - \{1\}$, entonces existen $p \in [0, t - 1]$ y $s \in [0, r - 1]$ tales que

$$(38) \quad \begin{aligned} y &= (k+1)q + 2s - 1 \\ &= (k+1)q + 2s - 1 + 2 - 2 \\ &= (k+1)q + 2(s-1) + 1 \in H + 1 \subseteq \overline{H}. \end{aligned}$$

- Si $y \in H - \{k\}$, entonces y es de la forma $y = (k+1)q + 2s - k$. Si $s = 0$, entonces $y \in H_k \subset \overline{H}$. Si $s \neq 0$, entonces

$$(39) \quad y = kq + q + 2s - k + 1 - 1 = (k+1)(q-1) + 2s + 1 \in H + 1 \subseteq \overline{H}.$$

En ambos casos $y \in \overline{H}$. Así $H - J \subseteq \overline{H}$. Por lo tanto, $\overline{H} = H - J$.

2. Sabemos que n es par y k es impar. Definamos $N = \{2, 4, \dots, n\}$. Afirmamos que N es núcleo. En efecto, ya que k es impar y debido a que cualquier $x \in \overline{N}$ es impar, entonces $x + j \in N$, para todo $j \in J = \{1, k\}$. Así $(x, x + j) \in A(\vec{C}_n(J))$ y por lo tanto N es absorbente y en consecuencia independiente. Por lo tanto, N es núcleo de $\vec{C}_n(J)$.

□

En el siguiente ejemplo, podemos observar cómo funciona el conjunto H_q propuesto para demostrar el resultado anterior.

Ejemplo 5. En la gráfica $\vec{C}_{15}(1, 4)$, el conjunto $H_q = \{0, 2, 5, 7, 10, 12\}$ es núcleo. (Ver Figura 5).

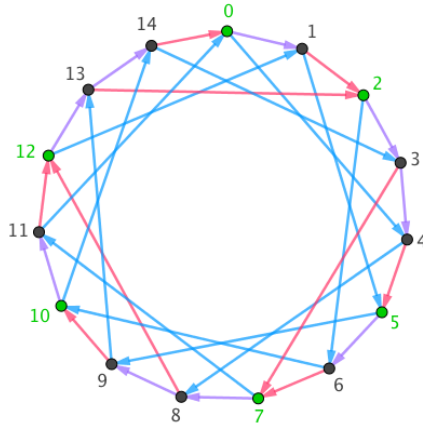


FIGURA 5. Gráfica $\vec{C}_{15}(1,4)$. Los vértices en verde son un núcleo. Las flechas en rosa indican cómo el complemento es absorbido por el núcleo, mientras que las flechas en color lila indican los saltos 1 y las azules el salto 4.

La afirmación inversa del Caso 2 del teorema anterior (para una k chica), es falsa. Un contraejemplo es la digráfica $\vec{C}_n(1,5)$, la cual no sólo tiene núcleo cuando n es par, también tiene núcleo al ser n un múltiplo de 3. Para probar esta afirmación, sea $n = 3t$ para alguna $t \in \mathbb{Z}^+$, y tomemos el conjunto $K = \{0, 3, \dots, 3t\}$. Entonces toda $x \in \bar{K}$ es de la forma

$$(40) \quad x = 3r + i \quad \text{con } r \in [0, t - 1] \quad \text{y } i \in \{1, 2\}.$$

Si $x = 3r + 1$, entonces, $x + 5 = 3r + 6 = 3(r + 2) \in K$. Si $x = 3r + 2$, entonces, $x + 1 = 3r + 3 = 3(r + 1) \in K$. Como $A(\vec{C}_n(1,5)) = \{(x, x + j) : j \in J = \{1, 5\}\}$, se sigue que K es absorbente y por lo tanto, núcleo.

Ejemplo 6. Observamos que en la gráfica $\vec{C}_{15}(1,5)$, el conjunto $K = \{0, 3, 6, 9, 12\} \subset V(\vec{C}_{15}(1,5))$ es un núcleo, así mismo, el conjunto $N = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \subset V(\vec{C}_n(1,5))$ es otro núcleo no isomorfo a K . Ver Figura 6.

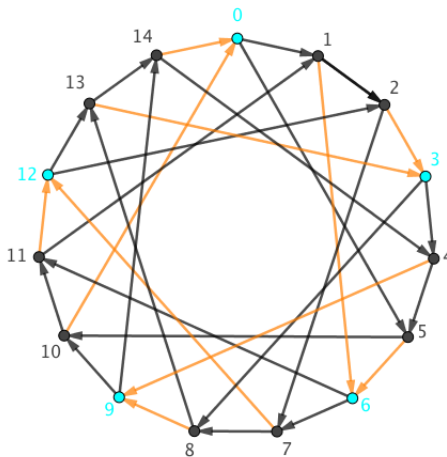


FIGURA 6. Gráfica $\vec{C}_{15}(1,5)$. Los puntos en verde forman un núcleo, mientras que las flechas en naranja indican cómo absorben al complemento.

El estudio de núcleos en digráfica circulantes es reciente y se tienen pocos resultados al respecto. Estos son algunos de ellos [13]:

1. Sea $J \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$ tal que $n-j \in J$ para toda $j \in J$. Entonces la digráfica circulante $\vec{C}_n(J)$ tiene núcleo.
2. Si n es impar y si J es un subconjunto de números pares en $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Entonces $\vec{C}_n(J)$, tiene núcleo.
3. Si n es par y si S_1 y S_2 son los conjuntos de todos los números pares y todos los números impares en $\{1, 2, \dots, n-1\}$, respectivamente. Entonces ambos S_1 y S_2 no tienen núcleo.
4. Si $i+j \neq n$, entonces la digráfica $\vec{C}_n(i, j)$ tiene núcleo.

Hasta ahora podemos afirmar que no todas las gráficas circulantes tienen núcleo, y las que tienen, no siempre es único (salvo isomorfismos). Por lo que se ha podido observar de repetidos ejemplos, hemos llegado a la siguiente conjetura:

Conjetura: *Si una digráfica circulante tiene núcleo, entonces existe un conjunto independiente maximal que también es núcleo*

Debido a la variedad de resultados que ya existen sobre conjuntos libres de sumas maximales en \mathbb{Z}_n y \mathbb{F}_p (ver [21], [14], [22], [10], [18]), probar esta conjetura nos abrirá la oportunidad de conocer las cardinalidades de una variedad mucho más amplia de digráficas circulantes, problema que creemos puede ser estudiado para un futuro proyecto de investigación.

4. CONCLUSIÓN

El problema que se abordó es este artículo, podrá plantearse de manera muy simple, pero es amplio y complejo. Aunque se pudo obtener una condición suficiente para caracterizar las digráficas de la familia $\vec{C}_n(1, k)$ con núcleo, aún no se pudo establecer si la condición necesaria es cierta y para cuáles n hay excepciones. Y esta es sólo una pequeña familia de digráficas circulantes, recordemos que el problema es caracterizar cuáles digráficas circulantes $\vec{C}_n(J)$ con $J \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$ tienen núcleo, por lo que aún falta mucho que estudiar, investigar y analizar en este tema.

5. AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis profesores el Dr. Bernardo Llano y el Dr. Gabriel Bengochea porque gracias a sus enseñanzas, comentarios y su motivación, he podido realizar este artículo. Y extendiendo el agradecimiento al árbitro anónimo, cuyos comentarios ayudaron a mejorar la calidad y presentación de este trabajo.

También quiero hacer un agradecimiento especial al Dr. Mario Pineda por su apoyo durante mi formación como Matemática y por su confianza al invitarme a formar parte de este proyecto.

REFERENCIAS

- [1] A. Apartsin, E. Ferapontova, and V. Gurvich, *A circular graph - counter example to the Duchet kernel conjecture*, Discrete Math, 178 (1998), 229-231.
- [2] J. Bang-Jensen, and G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, London, 2009.
- [3] C. Berge, *Nowelles extensions du noyau dâun graphe et ses applications en théorie des jeux*, Publ. Economé 6 (1977).
- [4] C. Berge and P. Duchet, *Recent problems and results about kernels in directed graphs*, Discrete Math, 86 [1-3], (1990), 27-31.
- [5] E. Boros, and V. Gurvich, *A corrected version of the Duchet kernel conjecture*. Discrete Mathematics, 179, (1998), 231-233.

- [6] E.Boros, and V. Gurvich, *Perfect graphs, kernels, and cores of cooperative games*, Discrete Mathematics, 306, (2006), 2336-2354.
- [7] A. Brauer, *A problem of Additive Number Theory and its application in Electrical Engineering*, Journal of the Mitchell Society, 61 [1/2], (1945), 55-66 .
- [8] V. Chvátal, *On the computational complexity of finding a kernel*, Centre de Recherches Mathematiques-Universite de Montreal, Report No. CRM-300, (1973).
- [9] H. Davenport, *On the addition of residue clases*. Journal of the London Mathematical Society, s1-10, (1935), 30-32.
- [10] P.H. Diananda, and H.P. Yap, *Maximal sum-free sets of elements of finite groups*, Proc. Japan Academy, 45 (1969), 1-5.
- [11] J. Edmonds, and V. Gurvich. *Games of no return*. Turner Research Report. 4-2010.
- [12] Galeana-Sánchez, B. Llano, and J. J. Montellano-Ballesteros. *k-colored kernels in semicomplete multipartite digraphs*, Discrete Applied Mathematics, 158 (2010), 461-466.
- [13] R. Lakshmi, and S. Vidhyapriya. *Kernels in circulant digraphs*, Transactions on Combinatorics, 3 [2], 2014, 45-49.
- [14] B. Llano, Notas personales.
- [15] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory. Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 165, 1996.
- [16] J. von Neumann and O. Morgenstein, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press. 1953.
- [17] A. Ramoul, and M. Blidia. *A new generalization of kernels in digraphs*, Discrete Applied Mathematics, 217 [3], (2017), 673-684.
- [18] A.H. Rhemtulla and A.P. Street. *Maximal sum-free sets in finite abelian p-groups*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2 (1970), 289-297.
- [19] M. Richardson, *Solutions of irreflexible relations*, Ann. Math., 58 (1953), 573-590.
- [20] A. Survey, and J.C. Bermond, *Distributed Loop Computer Networks*, Journal of Parallel and Distributed Computig, 24 (1995), 2-10.
- [21] A. G. Vosper, *The critical pairs of sumset of a group of prime order*, J. London Math. Soc. 31 (1956) 200-205.
- [22] H.P. Yap, *Maximal sum-free sets on group elements*, Bull. Austral. Math. Soc., 4 (1971), 217-223.

Dirección de la autora:

Universidad Autónoma Metropolitana,
 Unidad Iztapalapa,
 División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
 Departamento de Matemáticas.
 Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
 Del. Iztapalapa, C.P. 09340 Ciudad de México
 e-mail: marladron.mat@xanum.uam.mx