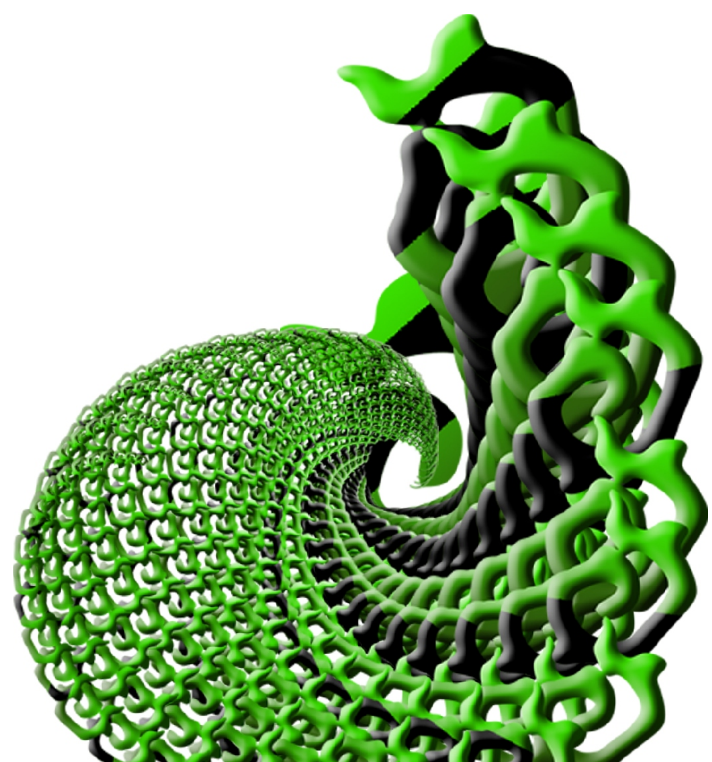
mixba'al

ISSN:2007-7874

Mixba'al Revista Metropolitana de Matemáticas



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA
VOL XI, No. 1, OCTUBRE 2020

MIXBA'AL. Vol. XI, No. 1, octubre de 2020 a octubre de 2021, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas.

Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México y Av. San Rafael Atlixco, No. 186, Edificio AT, tercer piso, Col. Vicentina, Delegación Iztapalapa, C.P. 09340, México, Ciudad de México. Tel. 5804 4658.
Página electrónica de la revista: http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revista-mixba-al.
Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx.

Editor Responsable: Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro.
Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2010-072017382600-203, ISSN: 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Dr. Gustavo Izquierdo Buenrostro, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas, Av. San Rafael Atlixco No. 186, Edificio AT, tercer piso, Colonia Vicentina, Delegación Iztapalapa, C.P. 09340, México, Ciudad de México. Fecha de última modificación 31 de octubre de 2020. Tamaño del archivo 1.4 MB.

Contacto:
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.
Tel: (01) 55 5804 4654 .
Fax: (01) 55 5804 4660.
e-mail: mixbaal2009@gmail.com.
Web revista: http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revista-mixba-al.

Casa abierta al tiempo

Unidad Iztapalapa

Posgrados:
Maestría y Doctorado en Matemáticas

pmat@xanum.uam.mx
http://pmat.izt.uam.mx/

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Teoría de anillos y módulos.
Teoría de conjuntos y lógica.
Geometría algebraica.
Geometría diferencial y Riemanniana.
Teoría de números.
Teoría de códigos y criptografía.
Análisis geométrico.
Física matemática.
Análisis diferencial.
Matemáticas discretas, combinatoria y gráficas.
Dinámica de fluidos computacional.
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.
Métodos matemáticos en finanzas y economía.
Control y sistemas dinámicos.
Mecánica celeste, sistemas hamiltonianos y aplicaciones a la física.
Control, estabilidad y robustez de sistemas estocásticos.
Metodología estadística.
Estadística asintótica.
Topología de conjuntos, grupos topológicos y Cp-teoría.
Métodos geométricos en mecánica. Dinámica de vórtices. Mecánica celeste.

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales (MACMAI)

mvmg@xanum.uam.mx
http://mcmai.izt.uam.mx

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Códigos y Criptografía.
Control y Sistemas Dinámicos.
Combinatoria y Optimización.
Estadística.
Métodos Matemáticos en Finanzas.
Modelación y Simulación Computacional.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA, UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, EDIFICIO ANEXO DEL T, 3ER PISO, TEL. 58044654 FAX. 5804 4660
AV. SAN RAFAEL ATLIXCO No 186, COL. VICENTINA, IZTAPALAPA, MÉXICO, D.F.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Contenido

Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

A los autores

Mixba'al es una publicación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Está dirigida a la comunidad matemática.

Esta publicación está dedicada primordialmente a la divulgación, por lo que los artículos que se presenten deberán ser accesibles a estudiantes de posgrado y/o licenciatura versados en el tema. Los trabajos pueden ser sobre cualquier tópico de las matemáticas; por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos, artículos panorámicos sobre un área de investigación, la presentación de una visión distinta de algún tema vinculado con la docencia, notas de cursos avanzados, aplicaciones de las matemáticas, historia y filosofía de las matemáticas y aspectos lúdicos de las mismas, entre otros

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español, aunque en casos excepcionales podrán aceptarse artículos en inglés. El comité editorial tiene la responsabilidad de cuidar la calidad de la revista, tanto en su contenido como en su presentación, de acuerdo a los lineamientos, tipografía y corrección de lenguaje (ortografía, estilo, etcétera). Asimismo, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista, y en caso de que así sea, lo enviara a arbitraje, sin excepción.

La versión preliminar de los trabajos sometidos a la revista deberá enviarse en formato pdf. al correo electrónico mixbaal2009@gmail.com. Puesto que la presentación final de los trabajos se hará en Latex2ε, aquellos autores cuyos trabajos sean aceptados, deberán enviarlos, para su publicación final, con el formato y macros que la revista les proporcionará. Las fotografías o gráficos que acompañen al texto deberán ser enviados, por separado, en formao pdf con la calidad y resolución adecuados para una buena reproducción impresa, además deberán contar con los correspondientes derechos de autor. Se recomienda que la extensión de los trabajos no exceda de 20 páginas.

Gustavo Izquierdo Buenrostro
Coordinador

Presentación

Mixba'al es una revista de divulgación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana.

El primer artículo de este número es un trabajo de Mariana Ladrón de Guevara sobre núcleos de digráficas circulantes.

El segundo artículo es una colaboración de Edgar Gutiérrez Suárez sobre grupos de Galois de polinomios irreducibles.

La intención es continuar con este formato y la revista invita a someter contribuciones de esta índole en el idioma español, aunque ocasionalmente pueden aceptarse contribuciones en inglés. Inicialmente se publicará al menos un número al año.

Toda comunicación debe ser dirigida al comité editorial, al correo electrónico: mixbaal2009@gmail.com.

Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol.XI , julio 2020, 7–14

SOBRE EL NÚMERO DE GROSOR DE LIBRO Y EL NÚMERO CROMÁTICO DE GRÁFICAS

JOSÉ LUIS COSME ÁLVAREZ

Resumen. Un libro de k hojas consiste en k semiplanos distintos, llamados hojas (o páginas) unidos en una línea recta llamada lomo. El número de grosor de libro *bt* (*book thickness*) de una gráfica G, se define como el menor número de hojas necesarias para dibujar una copia isomorfa de G, de tal manera que los vértices estén sobre el lomo del libro y no haya aristas que se crucen al ser dibujadas sobre las hojas.

En este artículo definimos la gráfica $I(G, \pi)$ asociada a la gráfica G, donde sus vértices han sido acomodados en el orden π sobre el lomo de un libro. Presentamos algunas propiedades de dicha gráfica asociada a la gráfica completa K_n y mostramos la relación que hay entre el número cromático de $I(G, \pi)$ y el número de grosor de libro de G. Esta relación nos permite decidir sobre la complejidad computacional del problema de calcular el número de grosor de libro de una gráfica.

1. Introducción

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica *simple*, es decir, sin lazos ni aristas múltiples. Dos vértices u, v son *adyacentes* si existe una arista que los une. El *grado* de un vértice u es el número de vértices en G que son adyacentes a u. La gráfica G es *conexa* si entre cada par de vértices existe una trayectoria que las une, en caso contrario, decimos que la gráfica no es conexa. Un vértice es *singular* si no existe trayectoria entre este y cualquier otro vértice de la gráfica. Denotaremos por K_n a la gráfica completa de n vértices.

Dos gráficas G y H son *isomorfas* y lo escribimos $G \cong H$, si existe una función biyectiva que mapea los vértices de G en los vértices de H de tal forma que dos vértices son adyacentes si y solo si las imágenes de estos vértices bajo la función también son adyacentes. En lo siguiente utilizaremos las definiciones y propiedades descritas en el libro [4].

Recordemos que una k-coloración del conjunto de vértices de G sobre el conjunto de k colores, es una función sobreyectiva $\gamma : V(G) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Decimos que la k-coloración de los vértices de la gráfica G es *propia* si vértices adyacentes reciben distinto color. Si V_i, con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, representa el conjunto de vértices con color c_i, diremos que V_i es la i-ésima *clase cromática*.

Similarmente, una k-coloración del conjunto de aristas de G es una función sobreyectiva $\varphi : E(G) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Diremos que una clase cromática es *libre de cruces monocromáticos* si las aristas pertenecientes a dicha clase han sido dibujadas sin cruces entre ellas.

El *número cromático* de la gráfica G se define como el mínimo número k para el cual existe una k-coloración propia de $V(G)$, es decir, cada par de vértices adyacentes son de distinto color y denotaremos tal número por $\chi(G)$.

En la literatura existe una amplia bibliografía que versa sobre el tema de número cromático. El lector interesado, puede consultar [6] para más información y antecedentes históricos de la evolución del estudio de este parámetro.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C15, 05C40, 05C60, 05C70.
Palabras clave. Número de grosor de libro, número cromático, coloraciones por vértices y aristas, encajes.

2. El número de grosor de libro de una gráfica

El concepto del número de grosor de libro (*book tightness*) de una gráfica G fue introducido en 1979 por Bernhart y Kainen en [2]. Este parámetro es una variante relacionada con el número de cruce y el encaje de gráficas en superficies, que pertenecen al área conocida como *Teoría Topológica de las gráficas.* En [1] las autoras presentan una selección de temas como número de cruce, encajes en superficies orientadas y no orientadas, así como algunos resultados sobre el número de encaje en libros que definimos a continuación.

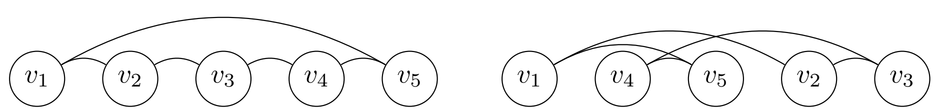
En lo sucesivo diremos que un libro de k hojas es simplemente un k-libro. Dada una gráfica G de n vértices, con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, tomemos una permutación $\pi = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$ de $V(G)$. Un π-*encaje* de la gráfica G en el k-libro es un mapeo en el que cada vértice se ha colocado en el lomo del libro en el orden π y cada arista ha sido dibujada al interior de a lo más una hoja, de tal manera que aristas dibujadas en la misma hoja no se crucen. Si G ha sido dibujada en el π-encaje, diremos que G es π-*encajable*.

Notemos que en la definición anterior, cada hoja representa una partición o clase cromática, por lo que la definición es equivalente a decir que las aristas han sido coloreadas sin cruces monocromáticos.

Una gráfica dibujada de tal manera que todos sus vértices están sobre un círculo, puede fácilmente encajarse en un libro si «abrimos» el círculo por en medio de dos vértices hasta formar una línea recta, que será el lomo del libro. Si además las aristas han sido coloreadas sin que haya cruces del mismo color (cruces monocromáticos), entonces al ser colocados en una hoja, las aristas del mismo color no tendrán cruces en la hoja. Estas dos formas de representar la gráfica G son equivalentes.

Al mínimo número de hojas de un libro donde se puede encajar la gráfica G, se le llama el *número de grosor de libro (book tightness)* de G y lo denotamos por $bt(G)$ por sus siglas en inglés.

Es claro que un ciclo C_n de longitud n puede ser encajado en una o más hojas, dependiendo del orden que se le dé a sus vértices, por lo que claramente $bt(C_n) = 1$.



Consideremos el caso cuando la gráfica dada es la completa K_n de n vértices. Es bien sabido que tiene número de grosor de libro igual a $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ y el algoritmo que permite encontrar un encaje para K_n en un $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-libro fue descrito en [2] y es el siguiente.

Sea K_n la gráfica completa con n vértices y supongamos sin pérdida de generalidad que el orden de los vértices en el lomo del $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-libro es $\pi = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Recordemos que los vértices pueden también ser acomodados sobre el contorno de una circunferencia, por lo que la partición que proporciona las $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ clases cromáticas se determinan dependiendo de la paridad de n.

1. Si n es par, definimos la trayectoria
$$P_1 = \{v_1, v_2, v_n, v_3, v_{n-1}, v_4, v_{n-2}, \dots, v_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+2}, v_{\frac{n}{2}+1}\},$$
donde los subíndices se reducen módulo n. Notemos que las aristas de esta trayectoria
$$E(P_1) = \{v_1v_2, v_2v_n, v_nv_3, \dots, v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+2}, v_{\frac{n}{2}+2}, v_{\frac{n}{2}+1}\}$$
han sido dibujados sin cruces entre sí, por lo que nos definen una clase cromática y por lo tanto un encaje en la primera hoja del $(\frac{n}{2})$-libro.

De manera análoga, para cada $i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$, las aristas de la trayectoria
$$P_{i+1} = \{v_{1+i}, v_{2+i}, v_{n+i}, v_{3+i}, v_{n-1+i}, v_{4+i}, v_{n-2+i}, \dots, v_{\frac{n}{2}+2+i}, v_{\frac{n}{2}+1+i}\},$$

definen la $(i+1)$-ésima clase cromática y por tanto, la $(i+1)$-ésima hoja del $(\frac{n}{2})$-libro.

2. Si n es impar, entonces $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ y de manera similar a la construcción anterior, si la primera clase cromática es dada por los vértices de la trayectoria

$$P_1 = \{v_1, v_2, v_n, v_3, v_{n-1}, \ldots, v_{\frac{n+1}{2}+2}, v_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}+1}\},$$

entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2} - 2\}$, las aristas de la trayectoria

$$P_{i+1} = \{v_{1+i}, v_{2+i}, v_{n+i}, v_{3+i}, v_{n-1+i}, \ldots, v_{\frac{n+1}{2}+2+i}, v_{\frac{n+1}{2}+i}, v_{\frac{n+1}{2}+1+i}\}$$

definen la $(i+1)$-ésima clase cromática y por lo tanto, la $(i+1)$-ésima hoja del $(\frac{n+1}{2})$-libro.

Finalmente, la $(\frac{n+1}{2})$-ésima clase crómatica faltante es definida por el emparejamiento

$$\{v_1 v_n, v_2 v_{n-1}, v_3 v_{n-2}, \ldots, v_{\frac{n+1}{2}-1} v_{\frac{n+1}{2}+1}\}.$$

En la figura 1 se muestra la partición de las aristas de K_5 y K_6 con este algoritmo, donde las líneas punteadas, rayadas y continuas representan colores distintos. Notemos que cada clase cromática no tiene cruces entre sí, por lo que para cualquier orden, se obtiene un encaje en un 3-libro.

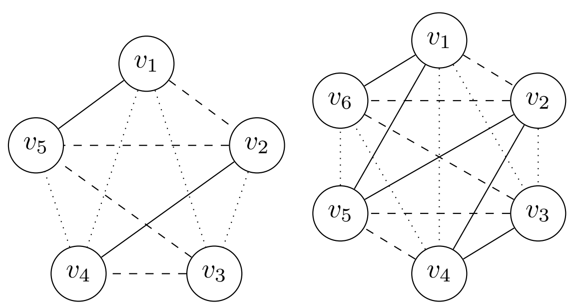


FIGURA 1. Partición de las aristas de K_5 y K_6

En la figura 2 se representa el encaje de estas gráficas en un 3-libro, donde al igual que en la figura anterior, las líneas punteadas, rayadas y continuas representan una hoja distinta en la que se han dibujado las aristas de G.

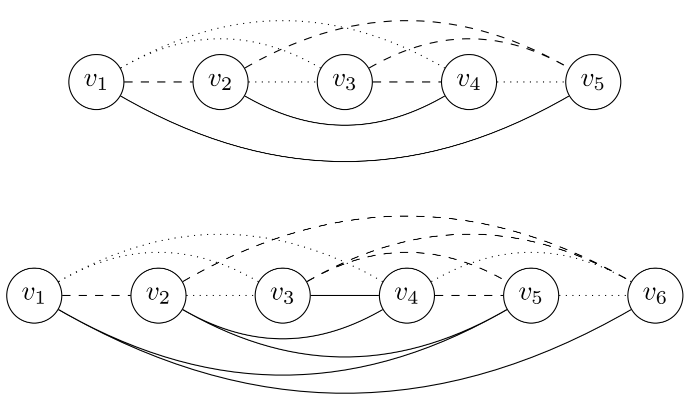


FIGURA 2. El encaje de K_5 y K_6 en un 3-libro

3. La gráfica de intervalos $I(G, \pi)$

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica simple y supongamos que tiene un π-encaje, donde $\pi = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un orden fijo.

Definimos la gráfica de intervalos $I(G, \pi)$ de orden fijo π, con conjunto de vértices y aristas determinados de la siguiente forma.

Si $v_i v_j$ es una arista de G, donde $1 \leq i < j \leq n$, entonces el intervalo (i, j) será un elemento de $V(I(G, \pi))$, es decir, los vértices de la gráfica de intervalos $I(G, \pi)$ son los intervalos abiertos de números reales, cuyos valores de los extremos son determinados por los subíndices de los vértices v_i y v_j.

Declaramos adyacentes a los vértices (i, j), (r, s) de $V(I(G, \pi))$ en $I(G, \pi)$ si vistos como conjuntos de números reales, se satisface que

1. $(i, j) \cap (r, s) \neq \emptyset$,
2. $(i, j) \setminus (r, s) \neq \emptyset$ y
3. $(r, s) \setminus (i, j) \neq \emptyset$,

donde consideramos que si $(r, s) \subset (i, j)$, entonces $(r, s) \setminus (i, j) = \emptyset$.

En otras palabras, dos vértices en $I(G, \pi)$ (que son intervalos) son adyacentes en $I(G, \pi)$, si se intersectan pero no son subconjuntos propios uno del otro.

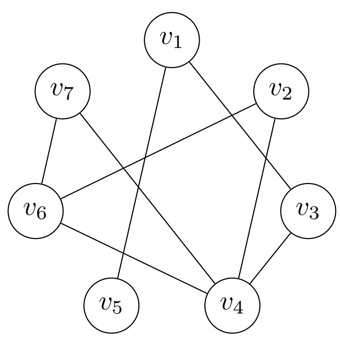


Figura 3. La gráfica G

Sea G la gráfica de la figura 3 y supongamos que el orden π dado es el orden natural $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. El dibujo de G sobre el lomo de un libro se muestra en la figura 4.

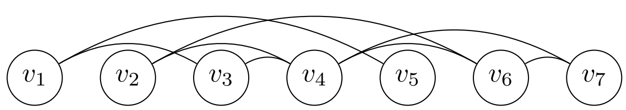


Figura 4. Dibujo de G en el lomo de un libro con el orden trivial

La gráfica $I(G, \pi)$ tiene como vértices al conjunto

$$V(I(G, \pi)) = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 6), (4, 7), (6, 7)\}.$$

Notemos que, vistos como conjuntos de números reales

$$(1, 3) \cap (2, 4) \neq \emptyset, \quad (1, 3) \setminus (2, 4) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad (2, 4) \setminus (1, 3) \neq \emptyset,$$

por lo que los vértices (1,3) y (2,4) son adyacentes en $I(G, \pi)$, sin embargo los conjuntos $(1, 3) \cap (1, 5) \neq \emptyset$ y $(1, 5) \setminus (1, 3) \neq \emptyset$, pero $(1, 3) \setminus (1, 5) = \emptyset$, por lo que no existe arista entre ellos en $I(G, \pi)$.

En la figura 5 se muestra la gráfica de intervalos $I(G, \pi)$ de la gráfica G de la figura 4 con el orden trivial.

Los siguientes lema y teorema nos proporcionan una relación entre un π-encaje en un k-libro de la gráfica G y el número cromático de $I(G, \pi)$.

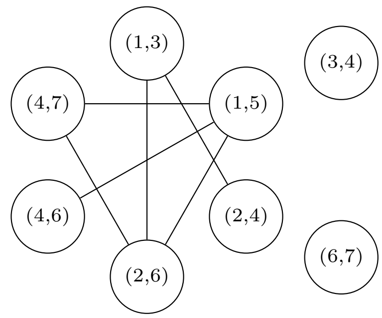


FIGURA 5. La gráfica $I(G, \pi)$ de G

LEMA 1. *Sean G una gráfica y π un orden de sus vértices. Si G es π-encajable en un k-libro, entonces*

$$\chi(I(G, \pi)) \leq k.$$

Demostración. El π-encaje de G en el k-libro con hojas $H_1, H_2, \ldots, H_k$ determina una partición $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de $E(G)$, donde E_i es el subconjunto de aristas de $E(G)$ dibujadas en la hoja H_i. Definimos la k-coloración $\varphi : V(I(G, \pi)) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ de los vértices de $I(G, \pi)$ de la siguiente manera.

Para $v_r v_s \in E_i$, definimos $\varphi((r, s)) = c_i$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Finalmente, observe que, por la construcción de la coloración, si $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $xy \notin E(I(G, \pi))$, ya que x e y corresponden a dos aristas de G dibujadas en la misma hoja de tal manera que no se cruzan.

Luego φ es una k-coloración propia de $I(G, \pi)$, por lo que $\chi(I(G, \pi)) \leq k$ como se quería demostrar. $\square$

TEOREMA 2. *Sea G una gráfica, entonces existe un π-encaje de G tal que*

$$bt(G) = \chi(I(G, \pi)).$$

Demostración. Supongamos que $bt(G) = k$. Entonces existe un orden π de $V(G)$ tal que G es π-encajable en un k-libro. Por el lema 1, se tiene que

$$\chi(I(G, \pi)) \leq k. \tag{1}$$

Supongamos por contradicción que $\chi(I(G, \pi)) = k' < k$, entonces existe una k'-coloración propia $\varphi : V(I(G, \pi)) \to \{c_1, c_2, \ldots, c_{k'}\}$ de $I(G, \pi)$. Definamos una partición $E_1, E_2, \ldots, E_{k'}$ de $E(G)$ como sigue.

Para $(r, s) \in V(I(G, \pi))$, $v_r v_s \in E_i \Leftrightarrow \varphi((r, s)) = c_i$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k'\}$.

Observe que, por construcción, las aristas en E_i pueden dibujarse en la hoja de un libro sin que se crucen. Luego $bt(G) \leq k' < k$, lo cual es imposible.

De aquí que

$$\chi(I(G, \pi)) \geq k. \tag{2}$$

Finalmente, por (1) y (2) se tiene que $bt(G) = \chi(I(G, \pi))$. $\square$

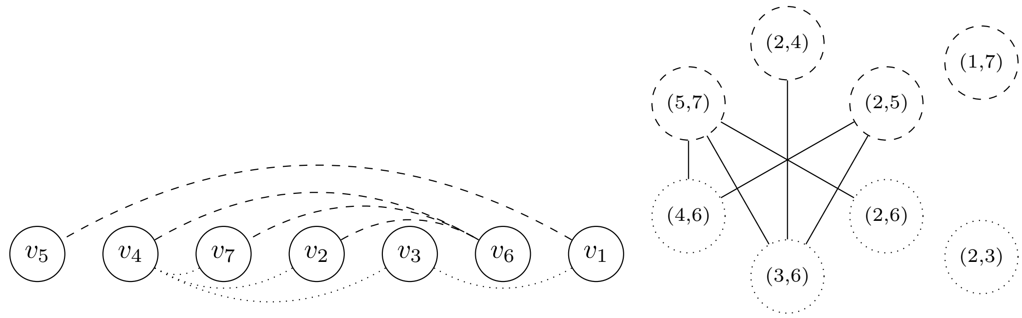
Considere nuevamente la gráfica G de la figura 3 mostrada anteriormente y

$$\pi_2 = \{v_5, v_4, v_7, v_2, v_3, v_6, v_1\}$$

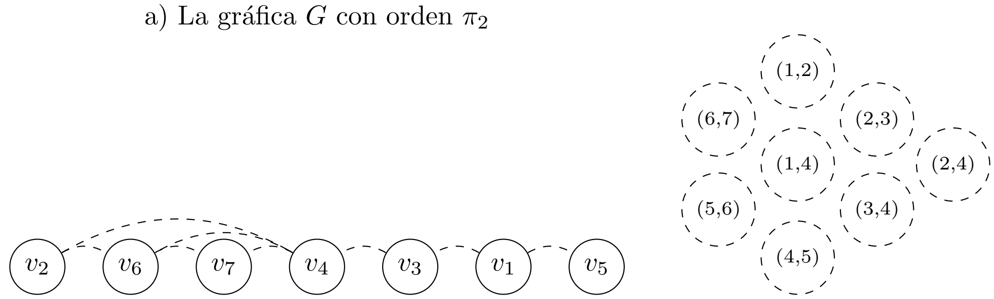
un orden de sus vértices. En la figura 6 observamos que esta partición proporciona un encaje en un 2-libro. Similarmente se tiene que el orden

$$\pi_3 = \{v_2, v_6, v_7, v_4, v_3, v_1, v_5\}$$

define un encaje en un 1-libro. Estas particiones de $E(G)$ nos describen particiones de $V(I(G, \pi))$ que calculan el número cromático respectivo para cada gráfica de intervalos.



a) La gráfica G con orden π_2



a) La gráfica G con orden π_3

FIGURA 6. G con los órdenes π_1 y π_2 y sus gráficas de intervalos

Más aún, el órden π_3 resulta en la gráfica de intervalos $I(G, \pi_3)$, donde todos sus vértices son singulares, por lo que claramente

$$bt(G) = \chi(I(G, \pi_3)) = 1.$$

Recordemos que una gráfica G es *plana* si puede ser dibujada en el plano sin cruces y decimos que G es *exteriormente plana* si tiene un encaje en el plano sin cruces y de forma que todos sus vértices aparecen en la frontera de la cara exterior del dibujo (que es un polígono). En [2] se señala que una gráfica G es plana si y solo si $bt(G) = 1$.

El siguiente resultado es consecuencia de este hecho.

COROLARIO 3. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para una gráfica G.*

1. *G es exteriormente plana.*
2. *$bt(G) = 1$.*
3. *Existe un π-encaje de G tal que $I(G, \pi)$ consta solo de vértices singulares.*
4. *Existe un π-encaje de G tal que $\chi(I(G, \pi)) = 1$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) por el teorema 2.5 de [2]. Si G es π-encajable en un 1-libro, entonces el π-encaje no tiene cruces y por la definición de $I(G, \pi)$ no tiene aristas, es decir, consiste solo de vértices singulares, por lo que (2) $\Rightarrow$ (3).

Es claro que si el π-encaje es tal que $I(G, \pi)$ consta solo de vértices singulares si y solo si $\chi(I(G, \pi)) = 1$, por lo que (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Finalmente si el π-encaje es tal que $I(G, \pi)$ consta solo de vértices singulares, por definición tenemos que G no tiene cruces entre sus aristas y este π-encaje resulta ser un dibujo plano de G. Como el dibujar la gráfica sobre el lomo de un libro es equivalente a dibujarla sin cruces en la frontera de una circunferencia, entonces G es exteriormente plana, por lo que (4) $\Rightarrow$ (1). □

Recordemos que la gráfica completa K_n tienen $\binom{n}{2}$ aristas, por lo que tenemos igual número de vértices en $I(K_n, \pi)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que π es el orden natural $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y observe que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene que para el intervalo (r, s), con $1 < r < s < n$, se cumple que $(i, i+1) \subset (r, s)$ o bien $(i, i+1) \cap (r, s) = \emptyset$, por lo que el intervalo $(i, i+1)$ no tiene adyacencia con vértice alguno en $I(K_n, \pi)$. Un caso similar sucede con el intervalo $(1, n)$, el cual contiene a cualquier otro intervalo (r, s), con $1 \leq r < s \leq n$. De lo anterior, tenemos que la gráfica $I(K_n, \pi)$ tiene n vértices singulares correspondientes a los intervalos $(1, n), (1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$. Los restantes intervalos forman una componente conexa con

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

vértices.

Por otro lado, el número de aristas en $I(K_n, \pi)$ queda determinado por cada cruce de los intervalos (i, j) y (r, s), con $1 \leq i < r < j < s \leq n$, por lo que hay $\binom{n}{4}$ aristas en $I(K_n, \pi)$ que corresponde al número en formas distintas de tomar estas cuartetas de números.

En la figura 7 se muestran las gráficas $I(K_5, \pi)$ e $I(K_6, \pi)$, así como una partición de sus vértices, que proporcionan una coloración propia heredada de las particiones mostradas en las figura 1 y 2 de $E(K_5)$ y $E(K_6)$ respectivamente.

Por lo tanto $\chi(I(K_5, \pi)) = \chi(I(K_6, \pi)) = 3$ para todo orden π.

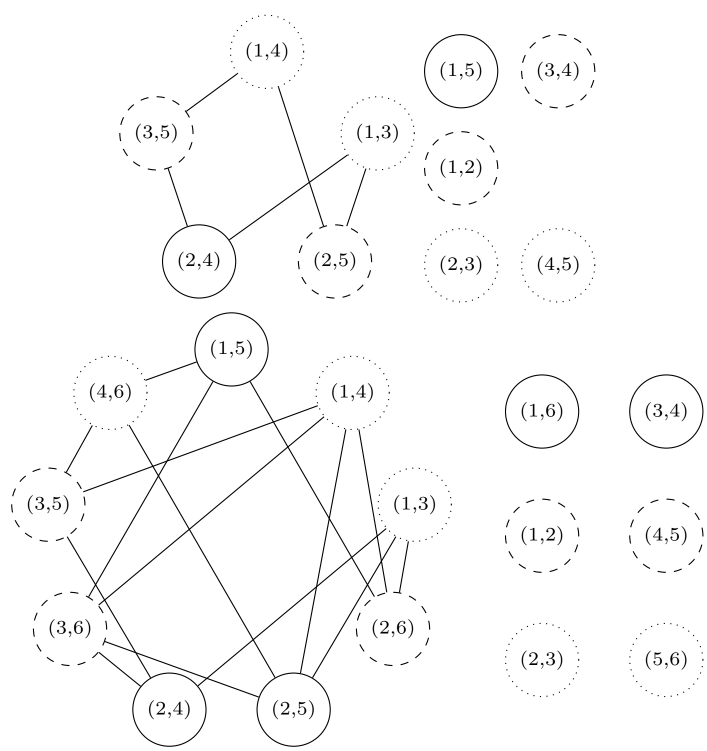


FIGURA 7. El número cromático de $I(K_5, \pi)$ e $I(K_6, \pi)$

4. Una nota sobre la complejidad

La tasa de crecimiento exponencial del espacio de soluciones del problema de coloración en gráficas es un problema de gran dificultad. El hecho de que este y otros problemas similares se consideren «complejos» o «intratables», se debe al trabajo realizado por Stephen Cook, quien en el año de 1971 introdujo los conceptos de *NP-completitud* y de *reducción en tiempo polinómico*. Cook demostró en [3] que el problema conocido como el «problema de satisfacibilidad» es NP-completo. En [5] se demuestra que el problema de coloración por aristas de gráficas, pertenece a la clase de problemas NP-completos.

En el tema de la complejidad computacional, los problemas suelen plantearse como problemas de decisión, cuyas respuestas son sí o no. Los problemas de coloración de gráficas, pueden plantearse también como problemas de decisión al ser transformado a un problema de la forma:

¿puede una gráfica G ser coloreada de forma propia, utilizando k colores?

Esta forma reemplaza al problema de determinar el mínimo número de colores necesarios para obtener una coloración propia de G.

El resultado demostrado por Cook en [3] sobre la NP-completitud del problema de satisfacibilidad, se puede utilizar para demostrar la NP-completitud de muchos otros problemas aplicando transformaciones polinómicas, que consisten en transformar de forma eficiente un problema de decisión en otro. El Problema de coloración de gráficas generaliza el problema NP-completo de la 3-satisfacibilidad, es decir, que el problema de la 3-satisfacibilidad es polinómicamente reducible al problema de coloración de gráficas.

El teorema 2 nos proporciona una manera alternativa para demostrar que el problema de encaje en libros y el de número cromático son equivalentes, es decir, existe un algoritmo de tiempo polinomial que transforma un problema en otro. Dado que el problema de hallar el número cromático pertenece a la clase de problemas NP-completos, se tiene que el problema de encaje en libros pertenece también a la clase de problemas NP-completos.

Referencias

[1] Armas-Sanabria L., Olsen M., Valencia-Saravia P., *Algunos aspectos de la teoría topológica de gráficas*, Miscelánea Matemática, **55** (2012) 89-112. SMM

[2] Bernhart F. R., Kainen P. C., *The book thickness of a graph*, J. Comb. Theory, Ser. B **27** (1979) 320-331.

[3] Cook S., *The complexity of theorem proving procedures.* Proceeding of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1971) 151-158.

[4] Bondy J. A., Murty U. S. R., *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 244, Berlin: Springer, 2008.

[5] Holyer I., *The np-completeness of edge-coloring*, SIAM J. Comp. **10** (1981) 718-720.

[6] Chartrand G., Zhang P., *Chromatic graph theory.* Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2009. xiv+483 pp. ISBN: 978-1-58488-800-0 (Reviewer: D. de Werra) 05-01.

Dirección del autor:
José Luis Cosme Álvarez
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, Ciudad de México.
e-mail: `coal@xanum.uam.mx`

Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
No. 1, Vol. XI, octubre de 2020, 15–29

LOS TEOREMAS DE STEINITZ EN LA TEORÍA DE CAMPOS

LUIS MIGUEL VILLEGAS SILVA

Resumen. En este trabajo presentamos la demostración de dos teoremas de E. Steinitz. A saber, la existencia de la cerradura algebraica de campos y que dos campos de la misma característica y cardinalidad innumerable son isomorfos. La intención es presentar una prueba detallada, en lo que a teoría de modelos y de conjuntos respecta, de estos resultados importantes.

1. Introducción

Un resultado bien conocido en teoría de campos afirma que todo campo K tiene una extensión K' que es algebraicamente cerrada. Esto es, cualquier polinómio con coeficientes en K' tiene sus raíces en K'. La demostración original debida a E. Steinitz recurre al teorema de recursión transfinita. Posteriormente, E. Artin [1] desarrolló una demostración ≪más algebraica≫ de este resultado, para aliviar en la medida de lo posible, la ignorancia conjuntista de la inmensa mayoría de los algebristas de aquel entonces. Sin embargo, la demostración original es ciertamente más elegante y sencilla. No obstante, la demostración original debida a Steinitz es poco amigable y no totalmente formal. Existe una presentación posterior debida a Van der Waerden [8] pero que tampoco incluye los detalles importantes de teoría de conjuntos.

En este artículo presento los detalles necesarios mencionados explicados claramente, en particular el uso del teorema de recursión. Más aun, en la prueba de la isomorfía de dos campos de la misma característica y cardinalidad se evita el uso del teorema de categoricidad de Morley, figura recurrente en la prueba de este teorema en los textos de teoría de modelos. Suponemos conocidos por el lector diversos resultados puramente algebraicos de la teoría de campos, pero damos una referencia para revisar la demostración en caso de necesidad. También suponemos conocimientos básicos sobre aritmética cardinal, teorema de recursión y teoría de modelos. Los resultados aquí presentados son conocidos.

2. Teoría de modelos

Trabajeremos en el lenguaje formal $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$, donde $+, \cdot$ son funciones (operaciones) binarias y 0,1 símbolos de constante, cuya interpretación es la que es de esperarse.

Definición 2.1. Sea φ un $\mathcal{L}$-enunciado,
(a)
$$Mod^{\mathcal{L}}(\varphi) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi, \mathfrak{A} \text{ es una } \mathcal{L}\text{-estructura}\}.$$
Sea $\mathfrak{K}$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras. (b) $\mathfrak{K}$ es *elemental o finito axiomatizable* si existe un $\mathcal{L}$-enunciado φ tal que $\mathfrak{K} = Mod^{\mathcal{L}}(\varphi)$.

(c) $\mathfrak{K}$ es Δ-*elemental* si existe un conjunto de $\mathcal{L}$-enunciados Φ tal que $\mathfrak{K} = Mod^{\mathcal{L}}(\Phi)$; en este caso decimos que $\mathfrak{K}$ es axiomatizable por Φ.

Teorema 2.2. *Sea $\mathfrak{K}$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras.*
(a) $\mathfrak{K}$ es elemental si y sólo si, tanto $\mathfrak{K}$ como su clase complementaria
$$\mathfrak{K}^* \equiv \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \textit{ es una } \mathcal{L}\textit{-estructura }, \mathfrak{A} \notin \mathfrak{K}\}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C35, 03C60, 03C98, 03E75.
Palabras clave. Cerradura algebraica, categoricidad, teorema de recursión transfinita, teorema de Morley.

son Δ-elementales.

(b) Si $\mathfrak{K} = Mod^{\mathcal{L}}(\Phi)$, entonces $\mathfrak{K}$ es elemental si y sólo si existe un subconjunto finito Φ' de Φ con $\mathfrak{K} = Mod^{\mathcal{L}}(\Phi')$.

Demostración. (a) ($\Rightarrow$) Sea $\mathfrak{K}$ elemental, digamos $\mathfrak{K} = Mod^{L}(\varphi)$. Entonces $\mathfrak{K}^* = Mod^{L}(\neg\varphi)$.

($\Leftarrow$) Sean $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{K}^*$ clases Δ-elementales, digamos $\mathfrak{K} = Mod^{L}(\Phi)$ y $\mathfrak{K}^* = Mod^{L}(\Phi^*)$, donde Φ, Φ^* son conjuntos de $\mathcal{L}$-enunciados. Si $\mathfrak{K}$ no fuese elemental, existiría, para cada $\Phi' \subseteq \Phi$ una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con $\mathfrak{A} \models \Phi'$ pero $\mathfrak{A} \not\models \Phi$. Lo último significa que $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{K}$, por lo que $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}^*$ y por consiguiente, $\mathfrak{A} \models \Phi^*$. En consecuencia, $\Phi \cup \Phi^*$ es finito satisfacible y posee (por el teorema de compacidad) un modelo $\mathfrak{A}$. Puesto que $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}^* = \emptyset$, esto no es posible. Por lo tanto, $\mathfrak{K}$ debe ser elemental.

(b) Sea $\mathfrak{K}$ elemental, digamos $\mathfrak{K} = Mod^{\mathcal{L}}(\varphi)$. Ya que también $\mathfrak{K} = Mod^{\mathcal{L}}(\Phi)$, se sigue que $\Phi \models \varphi$. Por el teorema de compacidad, sabemos que existe un subconjunto finito $\Phi' \subseteq \Phi$ con $\Phi' \models \varphi$. Así que $Mod^{\mathcal{L}}(\Phi') \subseteq Mod^{\mathcal{L}}(\varphi)$. Dado que $\Phi' \subseteq \Phi$, se cumple $Mod^{\mathcal{L}}(\Phi) \subseteq Mod^{\mathcal{L}}(\Phi')$. En resumen, $Mod^{\mathcal{L}}(\Phi') = Mod^{\mathcal{L}}(\Phi) = \mathfrak{K}$, como se afirmó. $\square$

Definición 2.3. Sea κ un cardinal. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\mathfrak{A}_\alpha$ una $\mathcal{L}$-estructura, tal que $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_\beta$ siempre que $\alpha < \beta$. Tal sucesión de modelos $(\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa)$ se llama *una cadena* de $\mathcal{L}$-estructuras.

Convertimos $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ como sigue.

$$R_i^{\mathfrak{A}} \equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} R_i^{\mathfrak{A}_\alpha};$$
$$f_j^{\mathfrak{A}} \equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} f_j^{\mathfrak{A}_\alpha};$$
$$c_k^{\mathfrak{A}} \equiv c_k^{\mathfrak{A}_\alpha}.$$

De la relación $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_\beta$ se deduce fácilmente que realmente tenemos definida una $\mathcal{L}$-estructura sobre $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$. Esta estructura se denota con

$$\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{A}_\alpha$$

y la llamamos la *unión de las* $\mathfrak{A}_\alpha$. De la construcción se desprende el siguiente resultado.

Lema 2.4. *Para $\alpha < \kappa$ se cumple $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\kappa} \mathfrak{A}_\beta$.*

Teorema 2.5. *Sea φ un Π_2-enunciado de $\mathcal{L}$, es decir, un enunciado de la forma*

$$\varphi = \forall\, x_1, \ldots, x_m \exists\, y_1, \ldots y_n \psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

donde ψ es una $\mathcal{L}$-fórmula sin cuantificadores. Si $\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi$ para toda $\alpha < \kappa$, es cierto que $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{A}_\alpha \models \varphi$.

Demostración. Sean $A \equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ el universo de $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{A}_\alpha$, y $a_1, \ldots, a_m \in A$ arbitrarios. Entonces existe una $\alpha < \kappa$ con $a_1, \ldots a_m \in A_\alpha$. Puesto que $\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi$, existen $b_1, \ldots, b_n \in A_\alpha$ con

$$\mathfrak{A}_\alpha \models \psi[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots b_n].$$

Ya que $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\kappa} \mathfrak{A}_\beta$ y ψ está libre de cuantificadores, se deduce

$$\bigcup_{\beta<\kappa} \mathfrak{A}_\beta \models \psi[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n],$$

dando paso a $\bigcup_{\beta<\kappa} \mathfrak{A}_\beta \models \exists\, y_1 \ldots y_n\ \psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)\ [a_1,\ \ldots,\ a_m]$. En vista de que los $a_1, \ldots, a_m$ se eligieron arbitrariamente, se sigue

$$\bigcup_{\beta<\kappa} \mathfrak{A}_\beta \models \forall\, x_1 \cdots x_m \exists\, y_1 \cdots y_n \psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

lo que se quería demostrar. □

Una consecuencia inmediata del teorema 2.5 se expone a continuación.

Corolario 2.6. *Si $\mathbf{\mathfrak{K}}$ es axiomatizable mediante una teoría Φ, que consiste en Π_2-enunciados, entonces $\mathbf{\mathfrak{K}}$ es cerrada respecto a uniones de cadenas, es decir, si κ es un cardinal y $(\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa)$ es una cadena de modelos en $\mathbf{\mathfrak{K}}$, también $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{A}_\alpha$ pertenece a $\mathbf{\mathfrak{K}}$.*

De hecho, también la conversa es cierta, si $\mathbf{\mathfrak{K}}$ es cerrada respecto a uniones de cadenas, $\mathbf{\mathfrak{K}}$ es axiomatizable mediante un conjunto que consta sólo de Π_2-enunciados. La demostración se puede encontrar en [3, Teorema IV.5.7, pp. 316].

3. Existencia de la cerradura algebraica

Ahora probaremos la existencia de la cerradura algebraica de todo campo. Para ello presentamos primero la teoría de campos.

La $\mathcal{L}$-teoría Φ_{Camp} (la teoría de campos) consiste en los siguientes enunciados.

(i) $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 + v_1 = v_1 + v_0$ (conmutatividad de la suma).
(ii) $\forall v_0 v_1 v_2 (v_0 + (v_1 + v_2) = (v_0 + v_1) + v_2)$ (ley asociativa de la suma).
(iii) $\forall v_0 (v_0 + 0 = v_0)$ (0 es el elemento neutro para la suma).
(iv) $\forall v_0 \exists v_1 (v_0 + v_1 = 0)$ (existencia de un elemento inverso).
(v) $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_0)$ (ley conmutativa de la multiplicación).
(vi) $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (v_0 \cdot (v_1 \cdot v_2) = (v_0 \cdot v_1) \cdot v_2)$ (ley asociativa de la multiplicación).
(vii) $\forall v_0 (v_0 \cdot 1 = v_0)$ (1 es elemento neutro de la multiplicación).
(viii) $\forall v_0 \exists v_1 (\neg v_0 = 0 \to v_0 \cdot v_1 = 1)$ (existencia de un inverso multiplicativo).
(ix) $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (v_0 \cdot (v_1 + v_2) = v_0 \cdot v_1 + v_0 \cdot v_2)$ (ley distributiva).
(x) $\neg 0 = 1$.

Φ_{camp} axiomatiza la clase de los modelos de los campos y se llama la teoría de los campos.

Definición 3.1. Un campo $\mathfrak{K}$ es algebraicamente cerrado si todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ con coeficientes en $\mathfrak{K}$ se factoriza en factores lineales.

Una definición equivalente es que $\mathfrak{K}$ es algebraicamente cerrado si cualquier polinomio no constante $p(x)$ con coeficientes en $\mathfrak{K}$ tiene al menos una raíz en $\mathfrak{K}$ y por tanto un factor lineal. En efecto, si esta condición se satisface y si un polinomio arbitrario $p(x)$ se factoriza en factores irreducibles, estos sólo pueden ser lineales.

Definición 3.2. Si $\mathfrak{K}$ es un campo,

$$\mathfrak{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{K}\}.$$

Teorema 3.3. *Sean $\mathfrak{K}$ un campo, $p(x)$ un polinomio mónico irreducible in $\mathfrak{K}[x]$ de grado d, $K = \mathfrak{K}[x]/(p)$ y $\beta = x + (p) \in K$. Se cumplen ls siguientes afirmaciones.*

1. *K es un campo y $K' = \{a + (p) : a \in \mathfrak{K}\}$ es un subcampo de K isomorfo a $\mathfrak{K}$. Así, si identificamos a K' con $\mathfrak{K}$ mediante $a \mapsto a + (p)$, $\mathfrak{K}$ es un subcampo de K.*
2. *β es una raíz de p en K.*
3. *Si $q(x) \in \mathfrak{K}[x]$ y β es raíz de q en K, entonces $p|q$ en $\mathfrak{K}[x]$.*
4. *p es el único polinomio mónico irreducible en $\mathfrak{K}[x]$ que tiene a β como raíz.*
5. *El conjunto finito $\{1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{d-1}\}$ es una base para K como espacio vectorial sobre $\mathfrak{K}$, por lo que la dimensión de K es d.*

Demostración. Véase [5, Proposition A-3.84]. □

Definición 3.4. Si K es un campo que contiene a $\mathfrak{K}$ como subcampo, K se conoce como una extensión de $\mathfrak{K}$ y denotamos una extensión mediante

$$K/\mathfrak{K}.$$

Una extensión $K/\mathfrak{K}$ es una extensión finita, si K es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathfrak{K}$. La dimensión de K se denota como $[K:\mathfrak{K}]$ y se llama el grado de $K/\mathfrak{K}$.

Definición 3.5. Sea $K/\mathfrak{K}$ una extensión. Un elemento $\alpha \in K$ es algebraico sobe $\mathfrak{K}$ si existe un polinomio distinto de cero $p(x) \in \mathfrak{K}[x]$ que tiene a α como raíz; en otro caso, α es trascendente sobre $\mathfrak{K}$. Una extensión $K/\mathfrak{K}$ es algebraica cuando todo $\alpha \in K$ es algebraico sobre $\mathfrak{K}$.

Proposición 3.6. *Si $K/\mathfrak{K}$ es una extensión finita, entonces es una extensión algebraica.*

Demostración. Véase [5, Proposition A-2.86]. □

Definición 3.7. Si $K/\mathfrak{K}$ es una extensión y $\alpha \in K$, el campo

$$\mathfrak{K}(\alpha)$$

es la intersección de los subcampos de K que contienen a $\mathfrak{K}$ y a α; $\mathfrak{K}(\alpha)$ se conoce como el subcampo de K que se obtiene al adjuntar α a $\mathfrak{K}$, en lugar de llamarlo el subcampo de K generado por $\mathfrak{K}$ y α.

En general, si A es un subconjunto de K (puede ser infinito), $\mathfrak{K}(A)$ es el subcampo de K generado por $\mathfrak{K}$ y A en K. Si $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$, $\mathfrak{K}(A) = \mathfrak{K}(z_1, \ldots, z_n)$.

Teorema 3.8. *Si $K/\mathfrak{K}$ es una extensión y $\alpha \in K$ es algebraico sobre $\mathfrak{K}$, existe un único polinomio mónico e irreducible $p(x) \in \mathfrak{K}[x]$ que tiene a α como raíz. Más aún, $\mathfrak{K}[x]/(p) \cong \mathfrak{K}(\alpha)$. En efecto, existe un isomorfismo*

$$\varphi : \mathfrak{K}[x]/(p) \to \mathfrak{K}(\alpha),$$

donde $\varphi(x + (p)) = \alpha$ y $\varphi(c + (p)) = c$ para cada $c \in \mathfrak{K}$.

Demostración. Véase [5, Theorem A-3.87]. □

Teorema 3.9. *Sean $L \subseteq E \subseteq K$ campos tales que E es una extensión finita de L y K es una extensión finita de E. Entonces, K es una extensión finita de L y*

$$[K : L] = [K : E][E : L].$$

Demostración. Véase [5, Theorem A-3.88]. □

Lema 3.10.
1. *Suponga que $L \subseteq K \subseteq E$ son campos tales que E/K y K/L son algebraicos, entonces E/L también es algebraico.*
2. *Suponga que la cadena*

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq \cdots$$

es creciente y conformada por campos. Si K_{n+1}/K_n es algebraico para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es un campo algebraico sobre K_0.

3. *Sea $K = \mathfrak{K}(A)$, esto es, K se obtiene de $\mathfrak{K}$ adjuntando los elementos del conjunto (puede ser infinito) A. Si cada $a \in A$ es algebraico sobre $\mathfrak{K}$, así lo es la extensión $K/\mathfrak{K}$.*

Demostración. Véase [5, Lemma B-2.38]. □

Lema 3.11. *Sea V un espacio vectorial infinito sobre el campo K de dimensión finita. Entonces $|V| \leq |K| + \aleph_0$.*

Demostración. Que V tenga dimensión finita significa que tiene una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Esta base genera a V y los elementos de B son linealmente independientes. Así, cualquier elemento $z \in V$ se puede representar en forma única como,

$$z = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n,$$

donde $k_1, \ldots, k_n \in K$. En consecuencia, podemos establecer una inyección $f : V \to \overbrace{K \times \cdot \times K}^{n \text{ veces}}$, mediante $f(z) = (k_1, \ldots, k_n)$, según se estableció arriba.

Si K es infinito, sabemos que $K^n = \overbrace{K \times \cdot \times K}^{n \text{ veces}}$ tiene cardinalidad igual a la de K mismo. Si K es finito, entonces $|K^n| = |K|^n$. En cualquier caso, se cumple $|V| \leq |K| + \aleph_0$, pues si K es finito, V también lo es; mientras qe si K es infinito, V tiene su mismo tamaño y el sumando $\aleph_0$ no desempeña ningún papel. □

Recuerde que si A es un conjunto infinito, la cardinalidad del conjunto de subconjuntos finitos de A es igual a la de A mismo. Esto se expresa como

$$|[A]^{<\omega}| = |A|.$$

Lema 3.12. *Si K es un campo de cardinalidad finita o infinita, entonces*

$$|K[x]| = \begin{cases} |K|, & \textit{cuando } K \textit{ es infinito} \\ \aleph_0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Por definición, $K[x]$ consiste en polinomios en la variable x, es decir, expresiones de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Propiamente, el polinomio $p(x)$ está determinado por la $n+1$-ada $(a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$.

Tenemos dos casos.

Caso I. K es finito.

$$\begin{aligned} |K[x]| &= \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^n \right| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |K^n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |K|^n = |K|^0 + |K|^1 + |K|^2 + \cdots + |K|^m + \cdots \end{aligned}$$

Note que del lado derecho aparecen potencias finitas de un número natural, y estas potencias crecen. No obstante, para cada potencia l podemos encontrar un natural k que la excede, y para cada natural n existe una potencia m que lo excede. Así que la suma del lado derecho es igual a $\sum_{n \in \mathbb{N}} n$.

Por otro lado, como $n < \aleph_0$, tenemos

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

mientras que $\aleph_0 = \omega = \bigcup_{n \in \omega} n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n$, por lo que $\aleph_0 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} n$. Estas dos desigualdades propician que $\sum_{n \in \mathbb{N}} n = \aleph_0$. Por consiguiente,

$$|K[x]| = \aleph_0.$$

Caso II. K es infinito. Cada elemento $a \in K$ da lugar a un polinomio constante, el polinomio $p(x) = a$, así que, $|K[x]| \geq |K|$. Por otro lado, como vimos antes, cada elemento de $K[x]$ está asociado a una única n-ada $(k_1, \ldots, k_n)$ de elementos de K. Por tanto,

$$|K[x]| \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^n \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |K^n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |K| = \aleph_0 \cdot |K| = |K|.$$

(Recuerde que $|K^n| = |K|$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ cuando $|K|$ es infinita.) □

Ahora podemos enunciar nuestro teorema principal.

Teorema 3.13. *Sea $\mathfrak{K}$ un campo. Entonces existe una* cerradura algebraica *de $\mathfrak{K}$, es decir, un campo $\overline{\mathfrak{K}}$ que contiene a $\mathfrak{K}$ como subcampo, tal que*

(a) $\overline{\mathfrak{K}}$ es algebraicamente cerrado, es decir, todo polinomio no constante en $\overline{\mathfrak{K}}[x]$ tiene una raíz en $\overline{\mathfrak{K}}$.

(b) $\overline{\mathfrak{K}}$ es algebraico *sobre $\mathfrak{K}$, es decir, cada elemento de $\overline{\mathfrak{K}}$ es algebraico sobre $\mathfrak{K}$, por tanto, es el cero de un polinomio no trivial con coeficientes en $\mathfrak{K}$. Se cumple además $|\overline{\mathfrak{K}}| = |\mathfrak{K}| + \aleph_0$.*

Antes de presentar la prueba formal es importante entender la idea de la misma, la cual es ciertamente simple. De hecho, las pruebas ≪puramente algebraicas≫ sólo logran oscurecer innecesariamente esta idea.

Tenemos un campo $\mathfrak{K}$ y queremos construir un campo K que contenga a $\mathfrak{K}$ y que sea algebraicamente cerrado. En particular, cualquier polinomio con coeficientes en $\mathfrak{K}$ se puede descomponer en factores lineales sobre K. Si $\mathfrak{K}$ ya tiene esta característica, hacemos $K = \mathfrak{K}$. En otro caso, lo primero que hacemos será añadir las raices de todos los posibles polinomios con coeficientes en $\mathfrak{K}$. Por supuesto, habrá que hacerlo en forma controlada, asegurando que al final obtengamos un campo. Pero aún cuando tengamos éxito en esto, habremos añadido puntos nuevos (el menos las raíces), lo que da lugar a nuevos polinomios, pues tendremos nuevos posibles coeficientes. Así que habremos de repetir el procedimiento recién descrito una y otra vez. Como veremos, esta repetición no es tan larga como pudiera pensarse y se hace ≪sólo≫ una cantidad numerable de veces. El teorema de recursión hace su aparición precisamente para elegir uno a uno los polinomios, añadir sus raíces y generar campos. Si el campo original es numerable, la recursión se lleva a cabo sobre ω. De ser $\mathfrak{K}$ innumerable, aparecen etapas límite y sucesor, lo que complica ligeramente la construción.

Demostración. **Afirmación 1.** Si $\mathfrak{L}$ es un campo y $p \in \mathfrak{L}[x]$ es un polinomio no constante, existe una extensión algebraica $\mathfrak{L}^p$ de $\mathfrak{L}$ en la que p tiene una raíz. Se cumple $|\mathfrak{L}^p| \leq |\mathfrak{L}| + \aleph_0$.

Prueba de 1. Se sigue de los resultados previos, pues $\mathfrak{L}^p = \mathfrak{L}/(p)$ contiene una raíz α de $p(x)$. Además, este campo es isomorfo a $\mathfrak{L}(\alpha)$.

Por último, como $\mathfrak{L}(\alpha)$ es un $\mathfrak{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, se obtiene que $|\mathfrak{L}(\alpha)| \leq |\mathfrak{K}| + \aleph_0$. $\boxed{\checkmark}$ (1)

Ahora construimos una extensión $\mathfrak{L}'$ para cada campo $\mathfrak{L}$ mediante cadenas de modelos, en el que cada polinomio no constante tiene al menos una raíz. En este paso usamos recursión transfinita.

Afirmación 2. Sea $\mathfrak{L}$ un campo. Existe una extensión $\mathfrak{L}'$ de $\mathfrak{L}$ tal que:

(a) todo polinomio no constante $p \in \mathfrak{L}[x]$ tiene una raíz en $\mathfrak{L}'$;
(b) $\mathfrak{L}'$ es una extensión algebraica de $\mathfrak{L}$;
(c) $|\mathfrak{L}'| \leq |\mathfrak{L}| + \aleph_0$.

Prueba de 2. Sean $\kappa = |\mathfrak{L}[x]| = |[\mathfrak{L}]^{<\omega}| (= |\mathfrak{L}| + \aleph_0)$ y $(p_\alpha : \alpha < \kappa)$ una enumeración de todos los polinomios no constantes con coeficientes en $\mathfrak{L}$. Definimos una cadena $(\mathfrak{L}_\alpha : \alpha < \kappa)$ de campos de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_0 &\equiv \mathfrak{L}; \\ \mathfrak{L}_{\alpha+1} &\equiv \mathfrak{L}_\alpha^{p_\alpha}; \\ \mathfrak{L}_\delta &\equiv \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{L}_\alpha, \quad \text{cuando } \delta \text{ es límite.} \end{aligned}$$

Observe los siguientes hechos. El paso sucesor $\mathfrak{L}_\alpha$ a $\mathfrak{L}_{\alpha+1}$ arroja una extensión algebraica sobre $\mathfrak{L}_\alpha$ y $\mathfrak{L}_\alpha^{p_\alpha}$ existe porque p_α es un polinomio con coeficientes en $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}_\alpha$.

Cuando δ es un ordinal límte, debemos cerciorarnos de que $\mathfrak{L}_\delta$ es un campo, que es una extensión algebraica de $\mathfrak{L}_0$ y que tiene la cardinalidad adecuada. Nuestra hipótesis de inducción es que los campos $\mathfrak{L}_\beta$, para $\beta < \delta$, cumplen lo requerido. Un ordinal límite $\gamma > 0$ puede tomar exactamente una de las siguientes formas: $\gamma = \beta + \omega$, donde β es el ordinal líte más grande menor que γ (β puede ser 0), o γ es límite de ordinales límite.

Caso I. $\delta = \beta + \omega$, donde β es un ordinal menor que δ. Sabemos que $\mathfrak{L}_\beta$ es una extensión algebraica de $\mathfrak{L}_0$, y $|\mathfrak{L}_\beta| \leq |\mathfrak{L}_0| + \aleph_0$. Obtenemos $\mathfrak{L}_\delta$ como la unión de las extensiones

$$\mathfrak{L}_\beta \subseteq \mathfrak{L}_{\beta+1} \subseteq \mathfrak{L}_{\beta+2} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{L}_{\beta_n} \subseteq \cdots$$

Dado que $\mathfrak{L}_\delta$ es unión de campos, es un campo, según el corolario 2.6, porque los axiomas de la teoría de campos son Π_2-enunciados.

Más aún, de acuerdo al lema 3.10(ii), $\mathfrak{L}_\delta$ es una extensión algebraica de $\mathfrak{L}_\beta$, que a su vez es una extensión algebraica de $\mathfrak{L}_0$. Por lo tanto, $\mathfrak{L}_\delta$ es una extensión algebraica de $\mathfrak{L}_0$ de acuerdo con el lema 3.10(i).

Caso II. δ es un ordinal límite de ordinales límite. Nuestra hipótesis de inducción asegura que cualquier campo $\mathfrak{L}_\gamma$ con $\gamma < \delta$ es algebraico sobre $\mathfrak{L}_0$ y tiene el tamaño adecuado. Sabemos que

$$\mathfrak{L}_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} \mathfrak{L}_\beta$$

y sin perder generalidad alguna, podemos suponer que

$$\mathfrak{L}_\delta = \bigcup_{\substack{\gamma<\delta \\ \gamma \text{ ordinal límite}}} \mathfrak{L}_\gamma$$

Como antes, inferimos que $\mathfrak{L}_\delta$ es un campo. Dado que cada $\mathfrak{L}_\gamma$ es algebraico sobre $\mathfrak{L}_0$, cada elemento de $\mathfrak{L}_\gamma$ es algebraico sobre $\mathfrak{L}_0$. Sea

$$A = \bigcup_{\substack{\gamma<\delta \\ \gamma \text{ ordinal límite}}} A_\gamma,$$

donde A_γ son los elementos de $\mathfrak{L}_\gamma$, para cada $\gamma < \delta$, γ un ordinal límite.

Se sigue que $\mathfrak{L}_\delta = \mathfrak{L}(A)$, que es una extensión algebraica según el lema 3.10(iii).

Otra forma de probar esto es mostrar que cualquier elemento de $\mathfrak{L}_\delta$ es algebraico sobre $\mathfrak{L}_0$, de la siguiente manera. Sea $x \in \mathfrak{L}_\delta$. Entonces $x \in \mathfrak{L}_\gamma$ para algún ordinal límite $\gamma < \delta$, el menor posible. Por esta elección y la definción de $\mathfrak{L}_\gamma$, se deduce que $x \in \mathfrak{L}_{\beta+n}$ para $\beta < \gamma$ un ordinal límite el mayor posible y algún $n \in \mathbb{N}$. Por construcción de $\mathfrak{L}_{\beta+n}$ e hipótesis de inducción, x es algebraico sobre $\mathfrak{L}_0$.

En cualquier caso $|\mathfrak{L}_\delta| \leq |\mathfrak{L}_0| + \aleph_0$, pues $\delta < |\mathfrak{L}_0| + \aleph_0$.

Entonces tenemos una cadena creciente de subcampos $(\mathfrak{L}_\alpha : \alpha < \kappa)$ cada uno de los cuales es algebraico sobre $\mathfrak{L}$. Sea

$$\mathfrak{L}' \equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{L}_\alpha$$

y obtenemos un campo que satisface la afirmación 2, pues $\mathfrak{L}'$ es, como antes, un campo que extiende a $\mathfrak{L}$. Si $p(x)$ es un polinomio en $\mathfrak{L}[x]$, debe ser igual a p_α para algún $\alpha < \kappa$, por lo que en la construcción de $\mathfrak{L}'$ debió añadirse una raíz del mismo. También por un razonamiento similar a los anteriores, $|\mathfrak{L}'| \leq |\mathfrak{L}| + \aleph_0$. $\boxed{\checkmark}$ (2)

Lo que tenemos en este punto es un campo $\mathfrak{K}'$ que tiene raíces para cualquier polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathfrak{K}$. Pero es claro que si agrandamo $\mathfrak{K}$, debieron aparcer elementos que dan lugar a coeficientes de nuevos polinomios. Para estos polinomios recién nacidos no podemos asegurar que $\mathfrak{K}'$ tenga raíces.

Si iteramos $\aleph_0$-veces la construcción de la afirmación 2 encontramos el campo requerido. Definimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_0 &\equiv \mathfrak{K} \\ \mathfrak{K}_{n+1} &\equiv \mathfrak{K}_n'; \\ \overline{\mathfrak{K}} &\equiv \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{K}_n. \end{aligned}$$

Como antes, se corrobora que $\overline{\mathfrak{K}}$ es un campo, y que $\overline{\mathfrak{K}}$ es algebraico sobre $\mathfrak{K}$.

El campo $\overline{\mathfrak{K}}$ es algebraicamente cerrado, pues los coeficientes de un polinomio arbitrario no constante $p \in \overline{\mathfrak{K}}[x]$ están en algún $\mathfrak{K}_n$, y por construcción tiene un cero en $\mathfrak{K}_{n+1} = \mathfrak{K}_n'$ (y por consiguiente en $\overline{\mathfrak{K}}$). La cardinalidad de $|\overline{\mathfrak{K}}|$ se calcula como sigue. Por un lado, en vista de la afirmación 2(c)

$$|\mathfrak{K}_n| \leq |\mathfrak{K}| + \aleph_0,$$

de donde concluimos

$$|\overline{\mathfrak{K}}| \leq \aleph_0 \cdot (|\mathfrak{K}| + \aleph_0) = |\mathfrak{K}| + \aleph_0.$$

Por otro lado, $|\mathfrak{K}| \leq |\overline{\mathfrak{K}}|$ pues $\mathfrak{K} \subseteq \overline{\mathfrak{K}}$. Además $\aleph_0 \leq |\overline{\mathfrak{K}}|$, ya que un campo finito no puede ser algebraicamente cerrado. Por lo tanto,

$$|\overline{\mathfrak{K}}| = |\mathfrak{K}| + \aleph_0$$

y concluimos la demostración del teorema. □

Teorema 3.14. *Cualesquier dos cerraduras algebraicas de un campo $\mathfrak{K}$ son isomorfas.*

Demostración. Véase [5, Theorem B-2.44]. □

Por consiguiente, la cerradura algebraica de un campo es única (salvo isomorfismos).

En este punto presentamos otra aplicación de las cadenas de modelos para probar que la clase de los campos algebraicamente cerrados no es finito axiomatizable.

Definición 3.15. Si $K/\mathfrak{K}$ es un campo extensión y $\alpha \in K$ es algebraico sobre $\mathfrak{K}$, entonces el único polinomio $p(x) \in \mathfrak{K}[x]$ mónico e irreducible que tiene a α como raíz se conoce como el polinomio mínimo de α sobre $\mathfrak{K}$ y se denota $irr(\alpha, \mathfrak{K}) = p(x)$; su grado es igual a $[K : \mathfrak{K}]$.

Lema 3.16. *Para cada $n < \omega$ existe una extensión $\mathbb{Q}^n$ de $\mathbb{Q}$ tal que,*

(a) Todo polinomio $p \in \mathbb{Q}^n[x]$ de grado $\leq n$ tiene un cero en $\mathbb{Q}^n$.

(b) $\mathbb{Q}^n$ no es algebraicamente cerrado.

Demostración. Sea $\overline{\mathbb{Q}}$ la cerradura algebraica de $\mathbb{Q}$. Según el teorema 3.13, $\overline{\mathbb{Q}}$ es numerable, así que lo enumeramos como $(a_k : k < \omega)$. Para $n < \omega$ construimos una cadena $(\mathbb{Q}^n_i : i < \omega)$ de subcampos de $\overline{\mathbb{Q}}$ como se describe a continuación. Sea $\mathbb{Q}^n_0 \equiv \mathbb{Q}$, y supongamos que $\mathbb{Q}^n_i$ ya está definido. Si existe un k tal que $a_k \notin \mathbb{Q}^n_i$ que sea la raíz de un polinomio de grado $\leq n$ en $\mathbb{Q}^n_i[x]$, escogemos la menor de tales k y definimos $\mathbb{Q}^n_{i+1} \equiv \mathbb{Q}^n_i(a_k)$. De no existir tal k, hacemos $\mathbb{Q}^n_{i+1} \equiv \mathbb{Q}^n_i$. Establecemos entonces $\mathbb{Q}^n \equiv \bigcup_{i<\omega} \mathbb{Q}^n_i$. Si $p(x) = \sum_{j \leq m} b_j x^j$ es un polinomio de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{Q}^n$, existe $i < \omega$ con $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}^n_i$. Ya que $\overline{\mathbb{Q}}$ es algebraicamente cerrado, existe $j < \omega$, tal que a_j es un cero de p. De la construcción del campo se sigue fácilmente que $a_{j+1} \in \mathbb{Q}^n_{i+j}$. Así que p tiene un cero en $\mathbb{Q}^n$. Queda demostrado (a). Para probar (b) necesitamos los siguientes hechos algebraicos, que se deducen de los resultados previos.

Si $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(a)$, donde a es algebraico sobre $\mathfrak{K}$, entonces $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$ es el grado del polinomio irreducible de a (véase [9, Proposition 2.4.6]). En el caso $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{K}_3$, ocurre

$$[\mathfrak{K}_3 : \mathfrak{K}_1] = [\mathfrak{K}_3 : \mathfrak{K}_2][\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1].$$

De aquí se sigue que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(a_1, \ldots, a_m)$, donde $a_1, \ldots, a_m$ son elementos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, entonces $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$ es divisible por el grado del polinomio irreducible de a_1, pues

$$[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] = [\mathfrak{K}(a_1, \ldots, a_m) : \mathfrak{K}(a_1, \ldots, a_{m-1})] \cdots [\mathfrak{K}(a_1) : \mathfrak{K}].$$

Para demostrar (b), supongamos que $\mathbb{Q}^n$ es algebraicamente cerrado. Entonces $\mathbb{Q}^n = \overline{\mathbb{Q}}$. Fijemos un primo racional arbitrario $q > n$. Sea a un elemento arbitrario de $\overline{\mathbb{Q}}$, cuyo polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ tiene grado q (por ejemplo, si $a = 2$, puede ser $p(x) = x^q - 2$). Puesto que $a \in \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^n$, existe un menor $i < \omega$ con $a \in \mathbb{Q}^n_i$. Ya que para $j < \omega$, $\mathbb{Q}^n_{j+1}$ se obtiene de $\mathbb{Q}^n_j$ mediante la adición de un cero de un polinomio de grado $\leq n$, deducimos que $[\mathbb{Q}^n_{j+1} : \mathbb{Q}^n_j] \leq n < q$. En vista de que

$$[\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}^n_{i-1}] \cdots [\mathbb{Q}^n_1 : \mathbb{Q}^n_0],$$

se sigue que q no está entre los factores del lado derecho, por lo que no puede dividir al producto. Así, $\neg(q|[\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}])$. Dado que $[\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}] < \omega$ y $a \in \mathbb{Q}^n_i$, existen una cantidad finita de elementos $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}^n_1$ que son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$, tales que $\mathbb{Q}^n_i = \mathbb{Q}(a, b_1, \ldots, b_m)$. Acabamos de mostrar que en este caso $[\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}]$ es divisible entre el grado del polinomio irreducible de a, es decir $q|[\mathbb{Q}^n_i : \mathbb{Q}]$. Esta contradicción muestra que $\mathbb{Q}^n$ no puede ser algebraicamente cerrado. □

Para nuestro siguiente teorema sobre campos algebraicamente cerrados, necesitamos introducir la teoría de los campos algebraicamente cerrados. Primero definimos los siguientes $\mathcal{L}$-términos:

Definición 3.17. (a) Sea $i < \omega$. Definimos por recursión sobre $n < \omega$ el $\mathcal{L}$-término v_i^n mediante $v_i^0 = 1$ y $v_i^{n+1} = v_i^n \cdot v_i$.

(b) Definimos por recursión sobre $n < \omega$, $n \geq 1$, los $\mathcal{L}$-enunciados ψ_n mediante

$$\psi_n \equiv \forall\, v_0 \cdots v_n \exists\, v_{n+1} (\neg v_n = 0 \to \sum_{i<n+1} v_i \cdot v_{n+1}^i = 0).$$

(el enunciado ψ_n afirma que todo polinomio de grado n tiene una raíz).

La $\mathcal{L}$-teoría $\Phi_{cac} \equiv \Phi_{camp} \cup \{\psi_n : 1 \leq n \wedge n < \omega\}$ axiomatiza la clase de modelos de los campos algebraicamente cerrados y se llama la teoría de los campos algebraicamente cerrados.

Teorema 3.18. *La clase de los campos algebraicamente cerrados no es elemental.*

Demostración. Supongamos que la clase de los campos algebraicamente cerrados es finito axiomatizable. Entonces por 2.2 existe un subconjunto finito Φ' de Φ_{cac}, que axiomatiza esta clase. Existe $n < \omega$ tal que $\psi_m \notin \Phi'$ para toda $m > n$. De acuerdo al teorema 3.13, $\mathbb{Q}^n$ es un modelo de Φ' pero no es modelo de Φ_{cac}, lo que contradice la suposición de que Φ' axiomatiza la clase de los campos algebraicamente cerrados. □

Ahora nos ocupa mostrar la validez de otro teorema de Steinitz. A saber, dados dos campos innumerables del mismo tamaño y misma carcaterística, necesariamente existe un isomorfismo entre ellos.

4. Categoricidad

A principios de siglo XX Steinitz [6] demostró el siguiente resultado. Dos campos algebraicamente cerrados de la misma característica y con igual cardinalidad (infinita no numerable) son isomorfos. Este resultado se traduce en teoría de modelos en la afirmación de que la teoría de los campos algebraicamente cerrados de característica p o cero es κ-categórica para toda $\kappa > \aleph_0$. A continuación presentamos una demostración directa de este resultado utilizando métodos de teoría de modelos. Pero mucha atención; como se apreciará al final, podemos también dar una prueba que no requiere la teoría de modelos.

Definición 4.1. Una $\mathcal{L}$-teoría es λ-*categórica*, si tiene un único modelo (salvo isomorfismos) de cardinalidad λ.

La teoría que nos concierne es la teoría de los campos algebraicamente cerrados $\boldsymbol{T}_{cac}$. La formulamos en el lenguaje antes mencionado $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$. Para p un número primo, definimos el $\mathcal{L}$-enunciado

$$C_p \equiv \sum_{i<p} 1 = 0.$$

Con lo que la teoría de los campos algebraicamente cerrados de característica p se axiomatiza como

$$\boldsymbol{T}_{cac,p} \equiv \boldsymbol{T}_{cac} \cup \{C_p\}.$$

y la de los campos algebraicamente cerrados de característica cero mediante:

$$\boldsymbol{T}_{cac,0} \equiv \boldsymbol{T}_{cac} \cup \{\neg C_p : p \text{ es primo}\}.$$

Observe que $\boldsymbol{T}_{cac}$ tiene sólo modelos infinitos, pues si $\mathfrak{K}$ es un campo finito cuyo universo es $\{k_i : i < n\}$, entonces el polinómio $1 + \Pi_{i<n}(x - k_i)$ no tendría raíz en $\mathfrak{K}$.

Recuerde que una $\mathcal{L}$-teoría $\boldsymbol{T}$ es completa, si para todo $\mathcal{L}$-enunciado φ, se cumple que $\varphi \in \boldsymbol{T}$ o $\neg\varphi \in \boldsymbol{T}$.

Definición 4.2. Sea E/K una extensión. Un subconjunto $U \subseteq E$ es algebraicamente dependiente sobre K, cuando existe un subconjunto finito $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq U$ y un polinómio distinto de cero $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$. Un subconjunto $B \subseteq E$ es algebraicamente independiente, cuando no es algebraicamente dependiente.

Un campo extensión E/K es trascendente puro cuando $E = K$ o E contiene un subconjunto algebraicamente independiente B tal que $E = K(B)$.

Ya que subconjuntos algebraicamente dependientes son necesariamente no vacíos, el conjunto vacío $\emptyset$ es algebraicamente independiente. El conjunto unitario $\{u\} \subseteq E$ es algebraicamente dependiente si u es algebraico sobre K; esto es, u es raíz de un polinomio no constante sobre K. Si $\{u\}$ es algebraicamente independiente, entonces u es trascendente sobre K.

Recuerde que si V es un espacio vectorial y $X = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$, X es linealmente dependiente si y sólo si algún v_i está en el subespacio generado por el resto de los elementos de X. La siguiente proposición establece un resultado análogo para dependencia algebraica.

Proposición 4.3. *Sea E/K una extensión. El subconjunto $U \subseteq E$ es algebraicamente dependiente sobre K si y sólo si existe $v \in U$ tal que v es algebraico sobre $K(U - \{v\})$.*

Demostración. Véase [5, Proposition B-2.48]. □

Existe un fuerte paralelismo entre dependencia lineal en un espacio vectorial y dependencia algebraica en un campo. El análogo a una base en un espacio vectorial es una base de trascendencia en un campo; el símil de dimensión es el grado de trascendencia.

Sea E/K un campo extensión. Si $u \in E$ y $S \subseteq E$, entonces u es dependiente en S, que se denota $u \preccurlyeq S$, cuando u es algebraico sobre $k(S)$, el subcampo de E generado por K y S.

Teorema 4.4. *Sean E/K una extensión, $u \in E$ y $S \subseteq E$. Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si $u \in S$, entonces $u \preccurlyeq S$.*
2. *Si $u \preccurlyeq S$, existe un subconjunto finito $S' \subseteq S$ con $u \preccurlyeq S'$.*
3. *Sean $T \subseteq E$; si $u \preccurlyeq S$ y cada elemento de S es dependiente en T, entonces u es dependiente en T.*
4. *Si u es dependiente en $S = \{v, s_1, \ldots, s_n\}$ pero no en $\{s_1, \ldots, s_n\}$, entonces v es dependiente en $\{u, s_1, \ldots, s_n\}$ pero no en $\{s_1, \ldots, s_n\}$.*

Demostración. Véase [5, Theorem B-2.49]. □

Se puede extender la notación $\preccurlyeq$ a espacios vectoriales. Si V es un espacio vectorial sobre un campo K y $S \subseteq V$, decimos que $v \in V$ depende en S, $v \preccurlyeq S$, si v es una combinación lineal de vectores en S. Así, un subconjunto S es linealmente dependiente, si $s \preccurlyeq S - \{s\}$ para algún $s \in S$.

Si E/K es una extensión, un subconjunto $S \subseteq E$ no vacío es algebraicamente independiente si y sólo si $s \not\preccurlyeq S - \{s\}$ para toda $s \in S$. Se sigue que todo subconjunto de un conjunto algebraicamente independiente es él mismo algebraicamente independiente.

Definición 4.5. Si E/K es una extensión, un subconjunto $S \subseteq E$ genera a E (en el sentido de la relación de dependencia; no cofundir con $K(S) = E$) si $x \preccurlyeq S$ para cada $x \in E$.

Una base de E es un subconjunto algebraicamente independiente que genera a E.

Lema 4.6. *Sea E/K una extensión. Si $T \subseteq E$ es algebraicamente independiente sobre K y $z \in E$ es trascendente sobre $K(T)$, entonces $T \cup \{z\}$ es algebraicamente independiente.*

Demostración. Véase [5, Lemma B-2.50]. □

Definición 4.7. Si E/K es una extensión, entonces una base de trascendencia es un subconjunto de E algebraicamente independiente sobre K máximo.

Aquí, que H sea algebraicamente independiente sobre K máximo significa que H es algebraicamente inependiente sobre K y si $H \subseteq H'$ y H' es algebraicamente independiente sobre K, entonces $H = H'$.

Ahora podemos demostrar la existencia de bases de trascendencia empleando el teorema de recursión.

Teorema 4.8. *Si E/K es un campo extensión, entonces E tiene una base de trascendencia. De hecho, todo subconjunto algebraicamente independiente es parte de una base de trascendencia.*

Demostración. Sea $B \subseteq E$ un conjunto algebraicamente independiente dado. En cualquier caso, podemos tomar $B = \emptyset$. Estamos trabajndo en ZFC, por lo que se cumple el axioma de elección, en particular el principio del buen orden. Esto es, cualquier conjunto, E por ejemplo, es isomorfo a un ordinal. En consecuencia, podemos enumerar E mediante ese ordinal. Digamos

$$E = \{e_\alpha : \alpha < \mu\}$$

para algún ordinal μ.

Por recursión en μ construimos una cadena creciente de subconjuntos de E

$$B = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \cdots \subseteq B_\alpha \subseteq \cdots$$

cada uno de los cuales es algebraicamente idependiente. Empezamos, como ya se dijo, con $B = B_0$ y considere el primer e_α (aquí el primer e_α significa el elemento de E con el menor índice posible) que sea trascendente sobre $K(B_0)$. De no existir ninguno, la recursión termina.

En general, si ya construimos B_α, buscamos el primer e_γ que sea trascendente sobre $K(B_\alpha)$ y formamos $B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup \{e_\gamma\}$. Según el teorema 4.6, $B_{\alpha+1}$ es algebraicamente independiente.

Si λ es un ordinal límite > 0 y construimos B_α para cada $\alpha < \lambda$, hacemos $B_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$. Note que al ser λ un ordinal límite > 0, necesariamente es infinito.

Afirmación 1. B_λ es algebraicamente independiente.

Prueba de 1. Todos y cada uno de los B_α, $\alpha < \lambda$, son algebraicamente independientes. Supongamos que B_λ no lo es. Entonces existe $e \in B_\lambda$ que es algebraicamente indepndiente, lo que de acuerdo con la terminología arriba descrita, da lugar a $e \preccurlyeq B_\lambda - \{e\}$. Recurrimos al teorema 4.4(2) para encontrar un subconjunto finito $\{e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_n}\} \subseteq B_\lambda - \{e\}$ tal que $e \preccurlyeq \{e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_n}\}$. Antes llamamos la atención al hecho de que λ debe ser infinito; como cada e_{γ_i}, $0 < i \leq n$ debe aparecer en B_λ, que es la unión de los B_α, debe existir un ordinal $\gamma < \lambda$ tal que $\{e, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_n}\} \subseteq B_\gamma$, pues los B_α conforman una cadena $\subseteq$-creciente y e también pertenece a B_λ. Pero esto no es posible, pues, por hipótess de inducción, cada B_α, $\alpha < \lambda$, es algebraicamente independiente. Este razonamiento absurdo, confirma la afirmación 1. $\boxed{\checkmark}$ (1)

Una vez efectuada la recursión sobre μ, hacemos

$$W = \bigcup_{\alpha<\eta} B_\alpha,$$

donde η es el primer ordinal donde se «detuvo» la recursión, es decir, donde ya no pudimos encontrar un elemento e_γ que fuese trascendente sobre el campo generado en E por K y los B_α construidos previamente. Nada impide que $\eta = \mu$, pero también puede ocurrir que $\eta < \mu$.

En todo caso, W es algebraicamente independiente, lo que se confirma mediante una prueba como la de la afirmación 1. Dado que la recursión se detuvo ante la imposibilidad de encontrar un elemento trascendente, es claro que W es un subconjunto $\subseteq$-máximo de E.

Afirmación 2. W es una base de trascendencia para E.

Prueba de 2. Ya vimos que W es máximo. Resta constatar que W genera a E. Supongamos que no es el caso. Entonces existe $e \in E$ tal que $e \not\preceq W$. Apelamos otra vez al teorema 4.6 para confirmar que $W \cup \{e\}$ es algebraicamente independiente. Pero esto se opone a lo recién establecido, que W es máximo. Por lo tanto, W es una base para E. $\boxed{\checkmark}$ (3) □

Definición 4.9. Sea $\mathfrak{K}$ una clase de $\mathcal{L}$-modelos. Un $\mathcal{L}$-modelo $\mathfrak{A}$ es una estructura primitiva de $\mathfrak{K}$, si $\mathfrak{A}$ se encaja en toda estructura $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{K}$.

Que $\mathfrak{A}$ se encaje en $\mathfrak{B}$ significa que existe un monomorfismo $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Como se sabe, los números racionales y los campos $\mathfrak{F}_p$ (es decir, $\mathbb{Z}_p$ para p primo con la suma y el producto) son subcampo de todo campo de característica cero o de característica p, respectivamente.

Nuestra intención es demostrar que dos campos algebraicamente cerrados de las mismas cardinalidad no numerable y característica, son isomorfos.

Lema 4.10. *Sean K un campo y L un subcampo de K a lo sumo numerable. Si $A \subseteq K$ es numerable, el subcampo generado por $L \cup A$ en K es numerable.*

Demostración. Sabemos que L es subcampo de K. Al añadir elementos a L, es claro que puede perder su cualidad de ser subcampo. Esto puede ocurrir por varias razones. A saber, si tomamos $B = L \cup A$,

- Si $a \in A - L$, $a \neq 0$, puede no existir el inverso multiplicativo de a en B.
- Si $a, b \in B$, puede ocurrir que $a + b \notin B$.
- Si $a, b \in B$, puede ocurrir que $a \cdot b \notin B$.
- Si $a \in B$, el inverso aditivo de a puede no vivir en B.

Por ello debemos generar un campo a partir de B. De hecho, buscamos el subcampo de K que contenga a B y sea el menor posible respecto a ser subcampo y contener a B. Esto se logra, por recursión transfinita sobre ω, de la siguiente manera.

Se construye una cadena $\subseteq$-creciente de subconjuntos de K, empezando con $B = B_0$,

$$B = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots B_n \subseteq \cdots$$

Como ya se dijo, sea $B_0 = B$. El siguiente conjuto, B_1, se define como

$$B_1 = B_0 \cup f_1[B_0] \cup f_2[B_0 \times B_0] \cup f_3[B_0 \times B_0] \cup f_4[B_0],$$

donde $f_1(x)$ consigue el inverso multiplicativo de $x \in K$, cuando $x \neq 0$; $f_2(x, y) = x + y$, $f_3(x, y) = x \cdot y$ y $f_4(x)$ es el inverso aditivo de x. Esto es, B_1 contiene a los inversos aditivos y multiplicativos de los elementos en B_0, así como las sumas y productos de elementos de B_0. Por supuesto, B_1 no necesariamente es un campo, pues aparecen alementos nuevos y no sabemos si sus inversos, sumas y productos están en B_1.

En general, si ya construimos B_n, sea

$$B_{n+1} = B_n \cup f_1[B_n] \cup f_2[B_n \times B_n] \cup f_3[B_n \times B_n] \cup f_4[B_n],$$

y tomamos $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Es fácil comprobar que F es un subcampo de K. Por ejemplo, F es cerrado respecto a la suma, pues si tomamos $x, y \in F$, estos deben pertenecer a algún B_n (la cadena es creciente), y su suma aparece en B_{n+1}.

Afirmación 1. F es el menor subcampo que contiene a B.

Prueba de 1. Ya vimos que F es subcampo de K y $B \subseteq F$. Sea F' otro subcampo de K que contiene a B. Mostraremos que $B_n \subseteq F'$ para toda $n \in \mathbb{N}$ por inducción en ω. Por hipótesis $B_0 = B \subseteq F'$. supongamos que $B_n \subseteq F'$ y verifiquemos que $B_{n+1} \subseteq F'$. Si $z \in B_{n+1}$, por construcción $z \in B_n \subseteq F'$ o z aparece como resultado de haber aplicado algunas de las operaciones $f_1, \ldots, f_4$ a elementos de $B_n \subseteq F'$. Pero estas operaciones son la de campo, y F' es campos, así que $z \in F'$.

Se sigue que todos los B_n están contenidos en F', por lo que su unión también lo está. $\boxed{\checkmark}$ (1)

Ahora no ocupamos de los tamaños. L es a lo sumo numerable y A es numerable, por lo que $B = L \cup A$ es numerable, lo mismo que $B \times B$.

Afirmación 2. F es numerable.

Prueba de 2. Se verifica que cada B_n es numerable por inducción en ω. B_0 es numerable por hipótesis. Suponga que B_n es numerable. El conjunto B_{n+1} se obtiene al unir B_n que es numerable con la unión de una cantidad finita de uniendos. Cada uno de estos uniendos es B_n o la imagen de B_n o de $B_n \times B_n$ respecto a una función; esta imágenes son numerables, de donde se deduce que B_{n+1} es numerable. Aquí usamos el hecho conocido de que si $f : C \to D$ es una función sobre, entonces $|D| \leq |C|$.

Entonces, F es la unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables, por lo que es numerable. $\boxed{\checkmark}$ (2) □

Con una prueba análoga se puede demostrar el teorema, pero en lugar de tomar a L a lo sumo numerable, y a A numerable, se considera L de tamaño κ o $\leq \kappa$, lo mismo que A. Se corrobora que el subcampo F resultante tiene tamaño $\leq \kappa$.

Lema 4.11. *Sean E/K y M/K extensiónes, y $B \subseteq E, B' \subseteq M$ conjuntos algebraicamente independientes sobre K. Suponga que existe una biyección $b : B \to B'$. Entonces, b se puede extender a un isomorfismo $\varphi : K(B) \to K(B')$.*

Demostración. Sabemos que $K(B)$ es el menor subcampo de E generado por K y B. Algo correspondiente ocurre con K y B'. En la prueba del lema 4.10 construimos el campo F generado por K y A. Aquí usaremos esa misma construcción para $K(B)$ y $K(B')$ en términos de K y B o B' según sea el caso.

Pera construir $K(B)$ se empieza con $C = B \cup K$, mientras que para $K(B')$ se comienza con $C' = K \cup B'$. Sin perder generalidad alguna, suponemos que $B \cap K = \emptyset = B' \cap K$. En consecuencia, tenemos una biyección $l : C \to C'$, que extiende a b.

Ahora, en el paso 1 se constuye C_1, respectivamente C'_1 como la unión de $C = C_0$ con la imagen de $C_0 \times C_0$ respecto a $f_1, \ldots, f_4$, y lo correspondiente para C'_1. Extendemos $l = l_0$ a $l_1 : C_1 \to C'_1$ de la siguiente manera. Primero establecemos que $l_1 \restriction C_0 = l_0$. Sea $z \in C_1 - C_0$. Entonces $z = f_1(x)$ o $z = f_2(x, y)$, o $z = f_3(x, y)$ o $z = f_4(x)$, donde $x, y \in C_0$. Hacemos $l_1(z) = z'$, donde $z' = f_1(l(x))$ o $z = f_2(l(x), l(y))$, o $z = f_3(l(x), l(y))$ o $z = f_4(l(x))$, según sea el caso para z. En general, si extendimos l a $l_n : C_n \to C'_n$, la podemos extender a $l_{n+1} : C_{n+1} \to C'_{n+1}$ mediante un procedimiento como el recién descrito.

Es fácil corroborar que estas extensiones preservan las operaciones de grupo (por inducción en n, probando que cada extensión l_n preserva las operaciones de campo), por lo que

$$l_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} : K(B) \to K(B')$$

es un isomorfismo. □

En lo sucesivo, diremos que la extensión de b a $K(B)$ es la extensión natural.

Ahora demostraremos que las teorías de los campos algebraicamente cerrados de característica p o cero son $\aleph_1$-categóricas. A partir de este resultado obtendremos la completud de nuestras teorías así como el teorema de Steinitz.

Teorema 4.12. *Sean $\mathfrak{K}, \mathfrak{M}$ campos algebaicamente cerrados de característica p (respectivamente, cero) y cardinalidad $\aleph_1$. Entonces $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{K}$ un campo algebraicamente cerrado con $|\mathfrak{K}| = \aleph_1$. Si $\mathfrak{K}'$ es el campo primo de $\mathfrak{K}$ y $\mathcal{B}$ es una base de trascendencia de $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}'$, entonces $\mathfrak{K}$ es la cerradura algebraica de $\mathfrak{K}'(\mathcal{B})$. Observemos que $\mathfrak{K}'$ es $\mathfrak{F}_p$ para algún primo p, o es $\mathbb{Q}$. Si $|\mathcal{B}| = \aleph_0$, entonces $|\mathfrak{K}'(\mathcal{B})| = \aleph_0$, según el lema 4.10. Por tanto, $|\mathfrak{K}| = \aleph_0$, lo cual es imposible. Se sigue que $|\mathcal{B}| = \aleph_1$.

Si $\mathfrak{M}$ es otro campo algebraicamente cerrado con $|\mathfrak{M}| = \aleph_1$ y $car(\mathfrak{K}) = car(\mathfrak{M})$, entonces $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ tienen el mismo campo primo. Sea $\mathcal{B}'$ base de trascendencia de $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}'$.

Como vimos antes,$|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'| = \aleph_1$. Así que tenemos una biyección $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$. Extendemos esta biyección a un isomorfismo de campos

$$\tilde{\phi} : k(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathfrak{K}'(\mathcal{B}')$$

de manera natural.

Por la unicidad de las cerraduras algebraicas, $\tilde{\phi}$ se extiende a un isomorfismo

$$\hat{\phi} : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{M}.$$

□

Teorema 4.13. *Sean $\mathfrak{K}, \mathfrak{M}$ campos algebaicamente cerrados de característica p (respectivamente, cero) y cardinalidad $\kappa \geq \aleph_1$. Entonces $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ son isomorfos.*

Demostración. La prueba del teorema 4.12 funciona *mutatis mutandi* para campos de cardinalidad $\kappa > \aleph_1$. □

Sólo nos queda comentar qué sucede si $|\mathfrak{K}| = \aleph_0$. Sean α, β trascendentes algebraicamente independientes sobre $\mathfrak{K}' = \mathfrak{F}_p$ o $\mathbb{Q}$. Es claro que $\mathfrak{K}'(\alpha) \not\cong \mathfrak{K}'(\alpha, \beta)$ y por lo tanto las cerraduras algebraicas respectivas tienen cardinalidad $\aleph_0$, pero no son isomorfas.

Para completar el artículo describimos la prueba usual del teorema 4.13 en teoría de modelos.

Teorema 4.14 (Criterio de Vaught)**.** *Sea $\boldsymbol{T}$ una L-teoría que no tiene modelos finitos. Si existe $\kappa \geq |L|$ tal que $\boldsymbol{T}$ es κ-categórica, entonces $\boldsymbol{T}$ es completa.*

Demostración. Sea $\kappa \geq |L|$ con $\boldsymbol{T}$ κ-categórica. Supongamos que $\boldsymbol{T}$ no es completa. Entonces existe un L-enunciado φ que no pertenece a $\boldsymbol{T}$ y tampoco $\neg\varphi$ pertenece a $\boldsymbol{T}$. En consecuencia, $\boldsymbol{T} \cup \{\varphi\}$ y $\boldsymbol{T} \cup \{\neg\varphi\}$ son consistentes; por consiguiente, son satisfacibles. Puesto que $\boldsymbol{T}$ carece de modelos finitos, ambos conjuntos tienen modelos infinitos. Del teorema de Löwenheim-Skolem obtenemos un modelos $\mathfrak{A}$ de $\boldsymbol{T} \cup \{\neg\varphi\}$ y un modelos $\mathfrak{B}$ de $\boldsymbol{T} \cup \{\varphi\}$, ambos de cardinalidad κ. Claramente estas estructuras no son elementalmente equivalentes y mucho menos isomorfas. En consecuencia, $\boldsymbol{T}$ no es κ- categórica, lo que contradice nuestra hipótesis. □

Corolario 4.15. *La teoría de los campos algebraicamente cerrados de característica p (respectivamente, cero) es completa.*

Demostración. Ya vimos que esta teoría es $\aleph_1$-categórica (teorema 4.12), y que carece de modelos finitos. Del criterio de Vaught se desprende que la teoría es completa. □

Ahora podemos demostrar el teorema de Steinitz 4.13.

Teorema 4.16 (Teorema de Steinitz)**.** *Sean $\mathfrak{K}_1$ y $\mathfrak{K}_2$ dos campos algebraicamente cerrados de característica p o cero, de la misma cardinalidad no numerable κ. Entonces $\mathfrak{K}_1$ es isomorfo a $\mathfrak{K}_2$.*

Demostración. El resultado es inmediato de los teoremas 4.12 y 4.14 pues de éllos concluimos que la teoría de los campos algebraicamente cerrados de característica p o cero es completa y $\aleph_1$-categórica. El teorema de Morley [2, 7.1.14, pp. 494] o[7, Corollary 5.8.2] asegura que toda L-teoría completa con $|L| \leq \aleph_0$ es κ categórica si y sólo si es $\aleph_1$-categórica, para todo cardinal $\kappa \geq \aleph_0$. En consecuencia, los campos dados en el enunciado del teoema deben ser isomorfos. □

Esta última prueba es ciertamente elegante y recurre a un teorema fundamental de la teoría de modelos; a saber, el Teorema de categoricidad de Morley.

Referencias

[1] E. Artin, *Galoische Theorie* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1988.
[2] C. Chang, H. J. Keisler *Model Theory*, Third Ed., North-Holland, 1993.
[3] M. Fernández de Castro, L. M. Villegas Silva *Teoría de conjuntos, lógica y temas afines I*, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, CDMX, México, 2013.
[4] M. Fernández de Castro, L. M. Villegas Silva *Teoría de conjuntos, lógica y temas afines II*, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, CDMX, México, 2017.
[5] J. Rotman *Advanced Modern Algebra, Part 1*, AMS, 2015.
[6] E. Steinitz *Algebraische Theorie der Körper*, J. f. Reine u. Angew. Math. **137**(1910), 167–309.
[7] K. Trent, M. Ziegler *A course in Model Theory*, Cambridge University Press, 2012.
[8] B. L. van der Waerden *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[9] S. Weintraub *Galois Theory*, Springer-Velag, N. Y., 2006

Dirección del autor:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340 México, D.F.
e-mail: `lmvs@xanum.uam.mx`