Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
Vol.12, No.1, páginas 33-45
Recibido 13-04-2021. Aceptado 28-05-2021
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v12n1/jrcangas

OPERADORES SIMÉTRICOS MULTIVALUADOS Y EL PROBLEMA DE MOMENTOS DE HAMBURGER TRUNCADO

JOSUÉ I. RIOS-CANGAS

Resumen. La teoría de operadores lineales multivaluados generaliza la teoría clásica de operadores lineales y surge por la necesidad de trabajar con el adjunto de un operador lineal no densamente definido en el espacio. Una clase particular de los operadores multivaluados son los simétricos multivaluados y mediante estos operadores se da una caracterización de todas las medidas que resuelven el problema de momentos de Hamburger truncado.

1. Introducción

Los operadores lineales multivaluados (o también llamados relaciones lineales) en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ son conjuntos lineales en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ representa la suma ortogonal de $\mathcal{H}$ consigo mismo (ver (3)). De manera particular una relación lineal es la gráfica de un operador lineal y por esta razón las relaciones lineales se consideran como una extensión de los operadores lineales. Es de interés mencionar que von Neumann no solo fue el pionero en la teoría de extensiones de operadores, sino también en la teoría de relaciones lineales. Ciertamente la noción de relaciones lineales surge en [20] por la necesidad de trabajar con el adjunto de un operador no densamente definido, es decir, cuya cerradura de su dominio no coincide con $\mathcal{H}$. La teoría de relaciones lineales fue desarrollada posteriormente en [3, 6, 9] (citas más recientes se pueden encontrar en [4, 16]).

La importancia de estudiar las relaciones simétricas viene del estudio de los operadores simétricos, debido a que están íntimamente conectados con los sistemas conservativos. Estos sistemas se generalizan a sistemas en donde la energía no necesariamente se conserva en el tiempo (por ejemplo, los sistemas disipativos para los cuales la energía no aumenta). Cabe señalar que uno de los precursores de las relaciones simétricas fue sin duda R. Arens [3] y en [7, 12] se estudian aspectos importantes de la teoría de relaciones simétricas. De igual importancia en el estudio de la teoría de relaciones simétricas aparece el estudio de la teoría de extensiones simétricas, la cual abarca la teoría clásica de von Neumann sobre extensiones simétricas de operadores simétricos [19]. La teoría de extensiones simétricas para relaciones lineales tuvo origen en un trabajo de Dijksma y Snoo [9] (c.f. [1, 10]).

El objetivo principal de este artículo es mostrar la teoría de operadores multivaluados, particularmente la teoría de operadores multivaluados simétricos. En la Sección 2 se plantea la teoría de operadores lineales en espacios de Hilbert donde se repasan de manera sencilla algunos conceptos y resultados sobre: operadores cerrados, operadores acotados, el adjunto de un operador, operadores simétricos y autoadjuntos. Además se introducen ejemplos prácticos de interés al lector (Ejemplos 1-3). La sección continua con la gráfica de un operador lineal para familiarizarse con la notación de operadores multivaluados.

La Sección 3.2 presenta la teoría de operadores multivaluados e inicia con el espectro de estos operadores y sus propiedades. Un operador multivaluado cerrado se puede descomponer canónicamente en su parte operador y su parte multivaluada (ver (9)). Esta descomposición permite dar similitudes entre los espectros de un

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47A06; 47B25; 44A60.
Palabras clave. Operadores multivaluados, operadores simétricos no densamente definidos, el problema clásico de momentos.

operador multivaluado y de su parte operador (Lema 7 y Teorema 8). De hecho bajo ciertas condiciones, el Teorema 9 muestra que es espectro de un operador multivaluado coincide con el espectro de su parte operador en cierto espacio de Hilbert. La sección prosigue con la teoría de operadores multivaluados simétricos, donde se muestran distintas caracterizaciones de estos operadores (Proposiciones 10, 11, 12 y Teorema 13).

Es de interés señalar que el problema de momentos fue fundamental para el desarrollo del análisis en el período que comprende de 1894, cuando Stieltjes escribió sus famosas memorias[18], hasta la década de 1950 cuando Krein completó una serie de notas relacionadas con este tema (c.f.[17]). Básicamente el problema de momentos de Hamburger indica que si para una sucesión $\{s_j\}_{j\geq 0}$ de números reales, es posible encontrar una medida μ sobre $\mathbb{R}$, tal que

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} \lambda^j d\mu(\lambda)\,, \tag{1}$$

además de saber si la existencia de μ es única. En [17, 2] se muestran condiciones necesarias y suficientes para que el problema de momentos (1) sea determinado (cuando existe una única medida) o indeterminado (cuando existen infinitas medidas). Si la sucesión de momentos es finita, es decir, si $\{s_j\}_{j=0}^N$ se dice que el problema de momentos de Hamburger (1) es truncado y este problema tiene solución cuando N es un número par (c.f. [8, Sec. 10] y [15, Sec. 9.1]). Mediante la teoría de operadores multivaluados simétricos, la última sección de este trabajo se centra en caracterizar todas las medidas μ que resuelven el problema de momentos de Hamburger truncado.

2. Preliminares

2.1. Operadores lineales. Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert separable sobre el campo $\mathbb{C}$, con producto interno anti-lineal en su primer argumento y norma $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$, con $f \in \mathcal{H}$.

Una aplicación $T\colon \operatorname{dom} T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un *operador lineal* (o simplemente operador) si para cada $f, g \in \operatorname{dom} T$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$, donde

$$\operatorname{dom} T := \{f \in \mathcal{H} : Tf \in \mathcal{H}\} \quad \operatorname{ran} T := \{Tf : f \in \operatorname{dom} T\}$$
$$\ker T := \{f \in \operatorname{dom} T : Tf = 0\}$$

representan el *dominio*, *rango* y *núcleo* de T, respectivamente, y estos resultan ser conjuntos lineales en $\mathcal{H}$.

Para dos operadores lineales T, S y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, el operador $\alpha T + \beta S$ tiene $\operatorname{dom}(\alpha T + \beta S) = \operatorname{dom} T \cap \operatorname{dom} S$ y actua como $(\alpha T + \beta S) f = \alpha T f + \beta S f$. El operador TS tiene $\operatorname{dom}(TS) = \{f \in \operatorname{dom} S : Sf \in \operatorname{dom} T\}$ y $TSf = T(Sf)$. Además, $T{\restriction_{\mathcal{C}}}$ es el operador T con dominio restringido a un conjunto lineal $\mathcal{C} \subset \operatorname{dom} T$. En este sentido, $T \subset S$ si $S{\restriction_{\operatorname{dom} T}} = T$ y en este caso se dice que S es extensión de T. Por otra parte, T es *invertible* si tiene núcleo trivial y en cuyo caso la inversa se denota por T^{-1}.

Lo siguiente denota dos tipos de cerradura:

1. Un operador T es *cerrado* si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} T$ tal que $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ se tiene $x \in \operatorname{dom} T$ y $y = Tx$.
2. Un operador T es *cerrable* si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} T$ tal que $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$ se tiene $y = 0$.

Cuando T es cerrado se escribe $T = \overline{T}$ y cuando T es cerrable se tiene que $\overline{T}$ es un operador lineal. Es claro que el núcleo de un operador cerrado es cerrado.

Un operador T se llama *acotado* si existe $c > 0$ tal que $\|Tf\| \leq c\,\|f\|$, para todo $f \in \operatorname{dom} T$. Es fácil ver que un operador es acotado si y solo si es continuo. Además, la *norma* de un operador T viene dada por

$$\|T\| := \sup_{\substack{f \in \operatorname{dom} T,\\ f \neq 0}} \frac{\|Tf\|}{\|f\|}\,,$$

la cual cumple las siguientes equivalencias:

$$\|T\| = \sup_{\substack{f \in \operatorname{dom} T, \\ \|f\| < 1}} \|Tf\| = \sup_{\substack{f \in \operatorname{dom} T, \\ \|f\| \leq 1}} \|Tf\| = \sup_{\substack{f \in \operatorname{dom} T, \\ \|f\| = 1}} \|Tf\| .$$

Observación 1. Si un operador T cumple dos de las siguientes tres propiedades, entonces T cumple las tres propiedades (c.f. [5, Sec. 3.2]):

1. T es cerrado.
2. T es acotado.
3. $\operatorname{dom} T$ es cerrado.

Denote por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como el conjunto de todos los operadores acotados con dominio todo $\mathcal{H}$ y por consiguiente cerrados. El conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un espacio lineal normado y es de importancia mencionar que en este espacio se definen los siguientes tres tipos de convergencia.

Para $T, T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con $n \in \mathbb{N}$, se dice que:

1. $\{T_n\}$ converge uniformemente a T si $\|T - T_n\| \to 0$.
2. $\{T_n\}$ converge fuertemente a T si $\|Tf - T_n f\| \to 0$, para cada f en $\mathcal{H}$.
3. $\{T_n\}$ converge débilmente a T si $\langle g, Tf - T_n f\rangle \to 0$, para cada $f, g \in \mathcal{H}$.

La convergencia uniforme, fuerte y débil, se denotan por

$$u\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T ; \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T ; \quad w\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T ,$$

respectivamente. Además, la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte y la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

Ahora bien, un operador es densamente definido si tiene dominio denso en $\mathcal{H}$. Para un operador densamente definido T se denota su *adjunta* como T^*, con dominio

$$\operatorname{dom} T^* = \{h \in \mathcal{H} : \exists k \in \mathcal{H} \text{ tal que } \langle Tf, h\rangle = \langle f, k\rangle , \forall f \in \operatorname{dom} T\} , \tag{2}$$

de manera que $T^*h = k$. El adjunto T^* es un operador lineal cerrado en $\mathcal{H}$ (c.f. [14, Sec. 1.2]) y puede tener dominio no denso en $\mathcal{H}$ (ver Ejemplo 3).

Permita introducir una parte de la teoría de operadores simétricos (ver [14, Secs. 3.1 y 3.2] para más referencia).

Un operador T es *simétrico* o *hermitiano* si su forma sesquilineal es real, es decir, si $\langle f, Tf\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $f \in \operatorname{dom} T$. Esto es equivalente a decir que $\langle f, Tg\rangle = \langle Tf, g\rangle$, para todo $f, g \in \operatorname{dom} T$.

Los operadores simétricos son caracterizados por tener espectro real. Además, un operador densamente definido T es simétrico si $T \subset T^*$ y autoadjunto si $T = T^*$.

Ejemplo 1. El operador identidad $If = f$ y el operador cero $Of = 0$, para todo $f \in \mathcal{H}$, son ejemplos sencillos de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, con norma $\|I\| = 1$, $\|O\| = 0$ y adjunto $I^* = I$, $O^* = O$, es decir, son autoadjuntos.

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones cuadrado integrable en $\mathbb{R}$, con producto interno $\langle f, g\rangle = \int \overline{f(t)} g(t) dt$. Considere el operador de multiplicación $Jf(t) = tf(t)$ cuyo dominio viene dado por

$$\operatorname{dom} J = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int (1 + t^2) \left|f(t)\right|^2 dt < \infty \right\} ,$$

el cual es denso en $L_2(\mathbb{R})$.

El operador J es autoadjunto y no acotado. En efecto,

$$\langle Jf, f\rangle = \int \overline{tf(t)} f(t) dt = \int \overline{f(t)} tf(t) dt = \langle f, Jf\rangle , \quad \forall f \in \operatorname{dom} J$$

de donde se sigue que $J \subset J^*$. Luego, si $g \in \operatorname{dom} J^*$, entonces $\langle Jf, g\rangle = \langle f, J^*g\rangle$, para todo $f \in \operatorname{dom} J$, que verifica $tg(t) = J^*g(t) \in L_2(\mathbb{R})$. De este modo, $g \in \operatorname{dom} J$ y por lo tanto $J^* = J$. Continuando, defina para $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } n \leq t < n+1 \\ 0\,, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, $\|f_n\| = 1$ y uno calcula que $\|Jf_n\| > n \to \infty$. Por lo tanto, J es no acotado.

Ejemplo 3. Considere un conjunto lineal $\mathcal{D}$ en $\mathcal{H}$ y $0 \neq g \in \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{F}$ un funcional lineal no continuo sobre $\mathcal{D}$ y defina el operador lineal T con $\operatorname{dom} T = \mathcal{D}$, tal que $Tf = \mathcal{F}(f)g$.

El operador T no es acotado ni cerrable. Ciertamente, como $\mathcal{F}$ no es continuo existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, con $\|f_n\| = 1$, tal que $0 \neq |\mathcal{F}(f_n)| \to \infty$. Así, $\|Tf_n\| = |\mathcal{F}(f_n)|\,\|g\| \to \infty$, es decir, T no es acotado. Además, haciendo $h_n = \mathcal{F}(f_n)^{-1} f_n$ se tiene que $h_n \to 0$ y $Th_n = \mathcal{F}(h_n)g = g \neq 0$, es decir, T no es cerrable.

Si $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$, entonces T^* no es densamente definido y $T^* = O\restriction_{\{g\}^\perp}$. Desde luego, como el producto interno es continuo y $\mathcal{F}$ es discontinuo, la aplicación $f \to \langle h, Tf\rangle = \mathcal{F}(f)\langle h, g\rangle$ es continua si y solo si $h \perp g$. Por lo tanto, $\operatorname{dom} T^* = \{g\}^\perp$ y $T^*h = 0$, para todo $h \in \operatorname{dom} T^*$.

2.2. La gráfica de un operador. Este tema se aborda de manera análoga a [5, Cap. 3]. Sea $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ la suma ortogonal de dos copias de $\mathcal{H}$ (c.f. [5, Sec. 2.3]), es decir,

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \,:\, f, g \in \mathcal{H} \right\}, \tag{3}$$

que es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, k\rangle\,, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\,.$$

La convergencia en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas.

La *gráfica* de un operador lineal T viene dada por

$$\mathcal{G}(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, f \in \operatorname{dom} T \right\},$$

la cual resulta ser un conjunto lineal en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Sin embargo no todo conjunto lineal en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ resulta ser la gráfica de un operador lineal.

Proposición 1. *Un conjunto lineal $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ es la gráfica de un operador lineal si y solo si*

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \,:\, f = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{4}$$

Demostración. Suponga que (4) se cumple y considere las aplicaciones lineales $\pi, \rho\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\pi\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f \quad ; \quad \rho\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = g\,, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\,.$$

De este modo, $\ker \pi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y se verifica que $T = \rho\pi^{-1}$ es un operador lineal con $\operatorname{dom} T = \pi\mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}$. La prueba inversa es directa. □

Para efectos prácticos, se introducen las aplicaciones $\mathbb{U}, \mathbb{W}\colon \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \to \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, que actúan como

$$\mathbb{U}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbb{W}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$$

las cuales son operadores lineales que satisfacen $\mathbb{U}^2 = I = -\mathbb{W}^2$ y $\mathbb{U}\mathbb{W} = -\mathbb{W}\mathbb{U}$.

Para dos operadores T, S, lo siguiente se cumple de manera sencilla:

(a) $T \subset S$ si y solo si $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$.

(b) T es cerrado si y solo si $\mathcal{G}(T)$ es cerrada.

(c) Si T es invertible entonces $\mathcal{G}(T^{-1}) = \mathbb{U}\mathcal{G}(T)$.

Para un conjunto lineal $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, denote el conjunto lineal

$$-\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \right\}.$$

Proposición 2. *Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ es un conjunto lineal, entonces:*

(a) $(\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp = \mathbb{W}(\mathcal{G}^\perp)$.

(b) $\overline{\mathbb{W}\mathcal{G}} = \mathbb{W}\overline{\mathcal{G}}$.

(c) $(\mathbb{U}\mathcal{G})^\perp = \mathbb{U}(\mathcal{G}^\perp)$.

(d) $\overline{\mathbb{U}\mathcal{G}} = \mathbb{U}\overline{\mathcal{G}}$.

(e) $\mathbb{U}^2\mathcal{G} = \mathbb{W}^2\mathcal{G} = \mathcal{G}$.

(f) $\mathbb{U}\mathbb{W}\mathcal{G} = \mathbb{W}\mathbb{U}\mathcal{G} = -\mathcal{G}$.

Demostración. Note que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp$ si y solo si $\forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{W}\mathcal{G}$, $\begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ y

$$\left\langle \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,,$$

si y solo si $\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix} \in (\mathcal{G})^\perp$, o bien $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{W}(\mathcal{G})^\perp$. Esto prueba el punto (a). Ahora,

$$\overline{\mathbb{W}\mathcal{G}} = \left((\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp \right)^\perp = \mathbb{W}\left((\mathcal{G}^\perp)^\perp \right) = \mathbb{W}\overline{\mathcal{G}}\,,$$

es decir, (b). Los puntos (c),(d) se siguen de manera análoga y (e),(f) se siguen directamente de la definición, notando que $\mathcal{G}$ es conjunto lineal. □

Los operadores $\mathbb{U}, \mathbb{W}$ y sus propiedades serán de gran utilidad en la secuela.

3. Operadores lineales multivaluados

Esta sección presenta una manera de extender la teoría espectral de operadores lineales en espacios de Hilbert.

3.1. Espectro de un operador multivaluado. Se llama *operador lineal multivaluado* o *relación lineal* a un conjunto lineal T en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ (ver (3)), con

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T &:= \left\{ f \in \mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} & \operatorname{ran} T &:= \left\{ g \in \mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \\ \ker T &:= \left\{ f \in \mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in T \right\} & \operatorname{mul} T &:= \left\{ g \in \mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \end{aligned} \tag{5}$$

los cuales son conjuntos lineales en $\mathcal{H}$. La notación (5) es habitual en el caso de operadores lineales a excepción de $\operatorname{mul} T$, que representa el *multivaluado* de T.

Una relación T es *cerrada* si $T = \overline{T}$, la cual es subespacio (conjunto lineal cerrado) en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Uno verifica fácilmente que si T es cerrada, entonces $\ker T$ y $\operatorname{mul} T$ son subespacios de $\mathcal{H}$.

Observación 2. La gráfica de un operador linear es un caso particular de una relación. Una consecuencia de la Proposición 1 es que una relación T es la gráfica de un operador si y solo si $\operatorname{mul} T = 0$. En el contexto de operadores multivaluados se identifica a cada operador con su gráfica.

Para dos relaciones T, S y $\zeta \in \mathbb{C}$, se consideran las relaciones:

$$\begin{aligned} T + S &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g+h \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in S \right\} & \zeta T &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta g \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \\ ST &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in S \right\} & T^{-1} &:= \left\{ \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \end{aligned}$$

que representan la suma de relaciones, multiplicación por escalar, composición de relaciones e inversa de una relación, respectivamente. Note que $T^{-1} = \mathbb{U}T$ y esto extiende la noción de la inversa de un operador lineal.

Dos relaciones T y S son linealmente independientes si $T\cap S=\left\{\binom{0}{0}\right\}$. Además se asume que los símbolos $\dotplus$, $\oplus$, y $\ominus$ representan la notación estándar, es decir,

$$\begin{aligned} T\dotplus S &= \left\{\binom{f+h}{g+k} \,:\, \binom{f}{g}\in T,\ \binom{h}{k}\in S \text{ y } T\cap S=\left\{\binom{0}{0}\right\}\right\}. \\ T\oplus S &= T\dotplus S\,,\ \text{ con } T\subset S^{\perp}. \\ T\ominus S &= T\cap S^{\perp}. \end{aligned}$$

Hablando de manera estricta, el símbolo $\oplus$ en este contexto difiere de la expresión $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Esto no debería causar confusión al usar el mismo símbolo.

Se denota la *adjunta* de una relación T como la relación lineal

$$T^*:=\left\{\binom{h}{k}\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \langle h,g\rangle=\langle k,f\rangle\,,\quad \forall\binom{f}{g}\in T\right\}.$$

Este concepto extiende al de (2), sin pedir restricción sobre la densidad del dominio.

Teorema 3. *Para relaciones T,S y $0\neq\alpha\in\mathbb{C}$, lo siguiente se cumple:*

(a) $T^*=(\mathbb{W}T)^{\perp}$

(b) $T^{**}=\overline{T}$

(c) $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$

(d) $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$

(e) $S\subset T\Rightarrow T^*\subset S^*$

(f) $\ker T^*=(\operatorname{ran}T)^{\perp}$

Demostración. Note que $\binom{h}{k}\in T^*$ si y solo si para todo $\binom{f}{g}\in T$, $\langle k,f\rangle=\langle h,g\rangle$, es decir, $\left\langle\binom{h}{k},\binom{-g}{f}\right\rangle=0$, esto si y solo si $\binom{h}{k}\in(\mathbb{W}T)^{\perp}$ y por lo tanto (a). Luego, se sigue de la Proposición 2 que

$$T^{**}=\left(\mathbb{W}\,(\mathbb{W}T)^{\perp}\right)^{\perp}=\left(T^{\perp}\right)^{\perp}=\overline{T}$$

que produce (b). Además, $(T^*)^{-1}=\mathbb{U}\,(\mathbb{W}T)^{\perp}=(\mathbb{W}\mathbb{U}T)^{\perp}=\left(T^{-1}\right)^*$, es decir, (c). Es simple calcular por contención que $(\alpha T)^*\subset\overline{\alpha}T^*$ y como $\alpha\neq 0$, se tiene que $\overline{\alpha}T^*=\overline{\alpha}\left(\alpha^{-1}\alpha T\right)^*\subset\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}^{-1}(\alpha T)^*$ e implica (d). Si $S\subset T$ entonces $\mathbb{W}S\subset\mathbb{W}T$. Así, $(\mathbb{W}T)^{\perp}\subset(\mathbb{W}S)^{\perp}$ y se tiene (e). Por último, $\binom{f}{0}\in T^*$ si y solo si $\langle f,k\rangle=\langle 0,h\rangle=0$, para todo $\binom{h}{k}\in T$, esto si y solo si $f\in(\operatorname{ran}T)^{\perp}$, de donde se llega a (f). □

La igualdad (a) implica que T^* es una relación cerrada. Además se sigue de las igualdades (c) y (f) que

$$\overline{\operatorname{dom}T}=\overline{\operatorname{ran}T^{-1}}=\left(\ker\left(T^{-1}\right)^*\right)^{\perp}=(\operatorname{mul}T^*)^{\perp}\,, \tag{6}$$

es decir, si un operador no está densamente definido en $\mathcal{H}$ entonces su adjunta tiene multivaluado no trivial. De esto proviene la condición de densidad en (2).

Observación 3. Dos conjuntos lineales cerrados G,L que son linealmente independientes satisfacen

$$G\cap L=\left(G^{\perp}\dotplus L^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Ciertamente, si $f\in G\cap L$, entonces $\langle f,h\rangle=0$ para todo $h\in G^{\perp}\dotplus L^{\perp}$, lo cual produce $G\cap L\subset\left(G^{\perp}\dotplus L^{\perp}\right)^{\perp}$. Inversamente, note que $G^{\perp},L^{\perp}\subset G^{\perp}\dotplus L^{\perp}$ y como los conjuntos son cerrados, $\left(G^{\perp}\dotplus L^{\perp}\right)^{\perp}\subset G,L$, es decir, $\left(G^{\perp}\dotplus L^{\perp}\right)^{\perp}\subset G\cap L$.

Corolario 4. *Si S,T son relaciones cerradas linealmente independientes entonces*

$$(S\dotplus T)^*=S^*\cap T^*.$$

Demostración. Del punto (a) del Teorema 3 y de la Proposición 2, uno calcula de manera sencilla que

$$\begin{aligned}(S \dotplus T)^* &= \mathbb{W}\,(S \dotplus T)^{\perp} = (\mathbb{W}S \dotplus \mathbb{W}T)^{\perp} \\ &= \left(S^{*\perp} \dotplus T^{*\perp}\right)^{\perp} = S^* \cap T^*\,,\end{aligned}$$

la última igualdad se sigue de la Observación 3. □

Una relación es *acotada* si resulta ser un operador lineal acotado. Cabe aclarar que en el contexto de relaciones lineales existen diferentes maneras de definir relaciones acotadas (ver por ejemplo [7]).

Se denota el conjunto *cuasi-regular* de una relación T como

$$\hat{\rho}(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, (T - \zeta I)^{-1} \text{ es acotada}\}\,.$$

Proposición 5. *El conjunto cuasi-regular de una relación es abierto.*

Demostración. Para $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ se tiene la existencia de $c_\zeta > 0$ tal que

$$\|k\| \leq c_\zeta\,\|h\|\,, \quad \forall \binom{h}{k} \in (T - \zeta I)^{-1}\,. \tag{7}$$

Considere la bola abierta $\mathbb{B}_{c_\zeta^{-1}}(\zeta)$ y $\eta \in \mathbb{B}_{c_\zeta^{-1}}(\zeta)$. Uno calcula de manera sencilla que para $\binom{f}{g} \in (T - \eta I)^{-1}$ se tiene $\binom{f + (\eta - \zeta)g}{g} \in (T - \zeta I)^{-1}$. Así de (7),

$$\frac{1}{c_\zeta}\,\|g\| \leq \|f + (\eta - \zeta)g\| \leq \|f\| + |\eta - \zeta|\,\|g\|\,.$$

De esta manera, $\|g\| \leq c'\,\|f\|$ con $c'^{-1} = c_\zeta^{-1} - |\eta - \zeta| > 0$ y por consiguiente $(T - \eta I)^{-1}$ es acotada. Por lo tanto $\mathbb{B}_{c_\zeta^{-1}}(\zeta) \subset \hat{\rho}(T)$. □

Para $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ se tiene que $\operatorname{ran}(T - \zeta I)$ es cerrado si y solo si T es cerrada. Además, $\dim\left(\operatorname{ran}(T - \zeta I)\right)^{\perp}$ es contante en cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$ [13, Sec. 2].

El conjunto *regular* de una relación T se denota como

$$\rho(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, (T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}\,.$$

Claramente el conjunto regular está contenido en el cuasi-regular y también es abierto. Además, si una relación no es cerrada entonces su conjunto regular es vacío.

Considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \sigma(T) &:= \mathbb{C}\backslash\rho(T) && \textit{(espectro)} \\ \hat{\sigma}(T) &:= \mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(T) && \textit{(núcleo espectral)} \\ \sigma_p(T) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \ker(T - \zeta I) \neq \{0\}\} && \textit{(espectro puntual)} \\ \sigma_p^{\infty}(T) &:= \{\zeta \in \sigma_p(T) \,:\, \dim\ker(T - \zeta I) = \infty\} && \textit{(espectro puntual no discreto)} \\ \sigma_c(T) &:= \left\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{ran}(T - \zeta I) \neq \overline{\operatorname{ran}(T - \zeta I)}\right\} && \textit{(espectro continuo)} \end{aligned}$$

Teorema 6. *Si T es una relación cerrada entonces $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \hat{\sigma}(T)$.*

Demostración. Si $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ entonces $\operatorname{ran}(T - \zeta I)$ es cerrado y además

$$\ker(T - \zeta I) = \operatorname{mul}(T - \zeta I)^{-1} = \{0\}\,, \tag{8}$$

esto implica que $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Por otra parte, si $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ el mismo cálculo de (8) muestra que $(T - \zeta I)^{-1}$ es un operador cerrado, ya que T es cerrada, con dominio cerrado y por lo tanto acotado (ver Observación (1)), es decir, $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. □

Observación 4. Como en el caso de operadores lineales en espacios de Hilbert de dimensión finita, las relaciones lineales son cerradas y sus espectros puntal no discreto y continuo son vacíos. Además, el núcleo espectral coincide con el espectro.

Es conveniente descomponer a una relación cerrada T como $T = T_\odot \oplus T_\infty$, donde

$$T_\infty := \left\{ \binom{0}{g} \in T \right\} \quad \text{y} \quad T_\odot := T \ominus T_\infty \tag{9}$$

son cerradas llamadas la *parte multivaluada* y la *parte operador* de T, respectivamente. Note que $\operatorname{ran} T_\odot \perp \operatorname{ran} T_\infty = \operatorname{mul} T$ y $\operatorname{dom} T = \operatorname{dom} T_\odot$.

Lema 7. *Si T es una relación cerrada, entonces $\hat{\rho}(T) \subset \hat{\rho}(T_\odot)$.*

Demostración. Uno verifica de manera sencilla que $(T_\odot - \zeta I)^{-1} \subset (T - \zeta I)^{-1}$, para $\zeta \in \mathbb{C}$. Así, si $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ entonces $(T - \zeta I)^{-1}$ es acotada al igual que $(T_\odot - \zeta I)^{-1}$, es decir, $\zeta \in \hat{\rho}(T_\odot)$. □

Es simple calcular que para una relación cerrada T con $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$,

$$T - \zeta I = (T_\odot - \zeta I) \oplus T_\infty\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Teorema 8. *Si T es una relación cerrada tal que $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$, entonces $\hat{\rho}(T) = \hat{\rho}(T_\odot)$.*

Demostración. Es suficiente mostrar debido al Lema 7 que $\hat{\rho}(T_\odot) \subset \hat{\rho}(T)$. Esto se sigue directamente si $(T - \zeta I)^{-1}$ es acotada, para todo $\zeta \in \hat{\rho}(T_\odot)$. Note de (10) que

$$(T - \zeta I)^{-1} = (T_\odot - \zeta I)^{-1} \oplus (T_\infty)^{-1}\,.$$

De este modo, para $\binom{h}{k} \in (T - \zeta I)^{-1}$, existen $\binom{r}{k} \in (T_\odot - \zeta I)^{-1}$ y $\binom{s}{0} \in (T_\infty)^{-1}$ tales que $h = r + s$. Como $\zeta \in \hat{\rho}(T_\odot)$, existe $C > 0$ tal que $\|k\| \le C\ \|r\|$. Así,

$$\begin{aligned} \|k\| &\le C\,(\|r\| + \|s\|) \\ &= C\ \|r + s\| = C\ \|h\|\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto $(T - \zeta I)^{-1}$ es acotada. □

Observación 5. La propiedad del Teorema 8 no siempre se cumple para el conjunto regular de una relación. Ciertamente, para A autoadjunta se tiene $\operatorname{dom} A \subset (\operatorname{mul} A)^\perp$ (ver Proposición 11). Si $\operatorname{mul} A \neq \{0\}$ entonces $\operatorname{dom}(A_\odot - \zeta I)^{-1} \neq \mathcal{H}$, para todo $\zeta \in \mathbb{C}$ y por ende $\rho(A_\odot) = \emptyset$. Sin embargo $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(A)$ (consecuencia del Teorema 13).

El siguiente resultado se presenta con efecto de interés al lector, el cual puede encontrarse en [13, Teo. 2.10].

Teorema 9. *Si T es una relación cerrada con $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$, entonces:*

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(T) &= \hat{\sigma}(T_T) & \qquad \sigma_c(T) &= \sigma_c(T_T) \\ \sigma(T) &= \sigma(T_T) & \qquad \sigma_p(T) &= \sigma_p(T_T) \end{aligned}$$

donde $T_T = T_\odot$ en el espacio de Hilbert $(\operatorname{mul} T)^\perp \oplus (\operatorname{mul} T)^\perp$.

La afirmación anterior significa que las propiedades espectrales de una relación T con $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$, son las mismas que las de su parte operador $T_\odot$ visto en el espacio $(\operatorname{mul} T)^\perp \oplus (\operatorname{mul} T)^\perp$.

3.2. Operadores multivaluados simétricos. Esta parte extiende el concepto de operador simétrico. Particularmente el concepto de operador autoadjunto.

Una relación A es llama *simétrica* si $A \subset A^*$ y *autoadjunta* si $A = A^*$. Los siguientes resultados exhiben caracterizaciones de las relaciones simétricas.

Proposición 10. *Para una relación lineal A, los siguientes son equivalentes:*

(a) A es simétrica.

(b) Para cada $\binom{f}{g}$ y $\binom{h}{k}$ en A, se cumple que $\langle f, k\rangle = \langle g, h\rangle$.

(c) Para cada $\binom{f}{g}$ en A, se tiene que $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$.

Demostración. (a) ⇒ (b) Si $\binom{f}{g}$, $\binom{h}{k} \in A$ entonces $\binom{h}{k} \in A^*$, es decir, $\langle h, g\rangle = \langle k, f\rangle$. (b) ⇒ (c) Para $\binom{f}{g} \in A$, se tiene $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$. Por lo tanto $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$. (c) ⇒ (a) Si $\binom{f}{g} \in A$ entonces para todo $\binom{h}{k} \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que $\binom{f}{g} + \alpha\binom{h}{k} \in A$ y $\langle f + \alpha h, g + \alpha k\rangle \in \mathbb{R}$. Como $\langle f, g\rangle, \langle h, k\rangle \in \mathbb{R}$, se sigue que

$$\alpha \langle f, k\rangle + \overline{\alpha} \langle h, g\rangle = \overline{\alpha} \langle k, f\rangle + \alpha \langle g, h\rangle \ .$$

Así, para $\alpha \in \{1, i\}$, uno llega a $\operatorname{Im}\langle f, k\rangle = \operatorname{Im}\langle g, h\rangle$ y $\operatorname{Re}\langle f, k\rangle = \operatorname{Re}\langle g, h\rangle$, es decir, $\langle f, k\rangle = \langle g, h\rangle$. Por lo tanto $\binom{f}{g} \in A^*$. □

Observación 6. Existe otra caracterización de relaciones simétricas con respecto a su conjunto cuasi-regular. A saber, A es simétrica si y solo si $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$ y

$$\left\|(A - \zeta I)^{-1}\right\| \leq 1/\left|\operatorname{Im}\zeta\right| ,$$

para todo $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ [13, Obs. 3.2].

Proposición 11. *Si A es una relación simétrica entonces $\overline{\operatorname{dom} A} \subset (\operatorname{mul} A)^{\perp}$.*

Demostración. Si $A \subset A^*$ entonces $\operatorname{mul} A \subset \operatorname{mul} A^*$ y tomando complemento ortogonal se llega a $(\operatorname{mul} A^*)^{\perp} \subset (\operatorname{mul} A)^{\perp}$. Por lo tanto de (6) se sigue la afirmación. □

Como consecuencia del resultado anterior, una relación simétrica cerrada cumple las propiedades espectrales del Teorema 9.

Proposición 12. *Si A es una relación simétrica cerrada con dominio todo el espacio, entonces A es un operador autoadjunto y acotado.*

Demostración. Como $\operatorname{dom} A = \mathcal{H}$ se sigue de (6) y la Observación 2 que A^* es un operador y, además, $A = A^*$. Por último, A es un operador cerrado con dominio cerrado y por tanto acotado. □

La sección concluye con la siguiente caracterización de relaciones autoadjuntas.

Teorema 13. *Una relación es autoadjunta si y solo si es simétrica cerrada con espectro real.*

Demostración. Si $A = A^*$ entonces es simétrica y cerrada. Ahora, para $\zeta \in \hat{\rho}(A)\backslash\mathbb{R}$ de la Observación 6 se tiene que $\overline{\zeta} \in \hat{\rho}(A)\backslash\mathbb{R}$ y $(A - \overline{\zeta}I)^{-1}$ es un operador. De este modo como A es cerrada,

$$\mathcal{H} = \left(\operatorname{mul}(A - \overline{\zeta}I)^{-1}\right)^{\perp} = \left(\ker(A - \overline{\zeta}I)\right)^{\perp} = \operatorname{ran}(A - \zeta I) \,,$$

es decir, $\zeta \in \rho(A)$. Como $\hat{\rho}(A)$ es abierto y $\dim\left(\operatorname{ran}(A - \zeta I)\right)^{\perp}$ permanece constante en componentes conexas de $\hat{\rho}(A)$, si $\zeta \in \hat{\rho}(A) \cap \mathbb{R}$, entonces $\zeta \in \rho(A)$. Por lo tanto, $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$, que implica $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Inversamente, si $A \subset A^*$ es cerrada con espectro real, entonces $\pm i \in \rho(A)$ que implica $\operatorname{ran}(A - iI) = \mathcal{H}$ y $\ker(A^* - iI) = \{0\}$. Por consiguiente, si $\binom{f}{g} \in A^*$ entonces existe $\binom{h}{g - if} \in (A - iI)$, es decir,

$$\binom{h}{g - i(f - h)} \in A \subset A^* \ . \tag{11}$$

Por linealidad, $\binom{f - h}{i(f - h)} \in A^*$ que equivale a $f - h \in \ker(A^* - iI)$. Por lo tanto $f = h$ y de (11) se obtiene que $\binom{f}{g} \in A$. □

El teorema anterior es equivalente a decir que una relación A es autoadjunta si y solo si es simétrica cerrada, con $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$.

4. El problema de momentos de Hamburger truncado

Para $n \in \mathbb{N}$, considere $\{s_j\}_{j=0}^{2n} \subset \mathbb{R}$, con $s_0 = 1$, tal que

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k}\overline{\alpha}_l \alpha_k > 0\,, \tag{12}$$

para toda sucesión no trivial $\{\alpha_j\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{C}$.

Problema 1. Resolver si existe una medida μ sobre $\mathbb{R}$, tal que

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} \lambda^j d\mu(\lambda)\,, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n\,.$$

El problema anterior se le conoce como el problema de momentos de Hamburger truncado para $2n$-sucesiones positivas definidas y este problema tiene solución debido a (12) (c.f [15, Sec. 9.1]).

Lo siguiente es dar concretamente la medida μ que resuelve el Problema 1 y determinar su unicidad.

Sea $\mathbb{C}_n[t]$ el espacio de los polinomios complejos de grado $\leq n$, equipado con producto interno

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k}\overline{\alpha}_l \beta_k\,, \quad f = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j,\, g = \sum_{j=0}^{n} \beta_j t^j \in \mathbb{C}_n[t]$$

y base ortonormal $\{e_j\}_{j=0}^{n}$, calculada mediante proceso de Gram-Schmidt, donde e_j es un polinomio de grado j, con coeficiente principal positivo.

Considere sobre $\mathbb{C}_n[t]$ al operador de multiplicación $Jf(t) = tf(t)$, el cual claramente tiene dominio

$$\operatorname{dom} J = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=0}^{n-1} = \mathbb{C}_n[t] \ominus \{e_n\}\,. \tag{13}$$

Proposición 14. *El operador de multiplicación es simétrico. Además, existen $a_j \in \mathbb{R}$, $b_j > 0$, con $j = 0, 1, \ldots, n-1$, tales que*

$$Je_j = b_j e_{j+1} + a_j e_j + b_{j-1} e_{j-1}\,. \quad (b_{-1} = 0)$$

Demostración. Es sencillo verificar que $\langle Jf, f\rangle = \langle f, Jf\rangle$, para todo $f \in \operatorname{dom} J$, lo que implica que J es simétrico. Además para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, se tiene que $Je_j = \sum_{k=0}^{n} \langle Je_j, e_k\rangle e_k$. Como J es simétrico, $\langle Je_j, e_k\rangle = \langle e_j, Je_k\rangle = 0$ para $1 < |j-k|$, ya que Je_j es de grado $j+1$ y Je_k es de grado $k+1$. De este modo

$$Je_j = \langle Je_j, e_{j+1}\rangle e_{j+1} + \langle Je_j, e_j\rangle e_j + \langle Je_{j-1}, e_j\rangle e_{j-1}\,.$$

Observe que Je_j y e_{j+1} son polinomios de grado $j+1$ con coeficiente principal positivo y entonces $\langle Je_j, e_{j+1}\rangle > 0$. Por lo tanto, haciendo $b_j = \langle Je_j, e_{j+1}\rangle$, $a_j = \langle Je_j, e_j\rangle$ se llega a (13). $\square$

El resultado anterior asegura que la representación matricial de J con respecto a la base $\{e_j\}_{j=0}^{n}$, está dada por

$$J = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & 0 & * \\ b_0 & a_1 & b_1 & \ldots & 0 & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & * \end{pmatrix}.$$

Además, (6) señala que J^* es un operador multivaluado con $\operatorname{mul} J^* = \operatorname{span}\{e_n\}$.

Sea $J_0 \supset J$ el operador con $\operatorname{dom} J_0 = \mathbb{C}_n[t]$ y representación matricial

$$J_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

que representa una extensión autoadjunta de J. Estos operadores serán identificados con su gráfica para trabajar con operadores multivaluados en $\mathbb{C}_n[t] \oplus \mathbb{C}_n[t]$.

Considere el operador multivaluado

$$Z := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{C}_n[t] \oplus \mathbb{C}_n[t] .$$

Teorema 15. *El operador de multiplicación satisface $J = J_0 \cap Z^*$.*

Demostración. Si $f \in \operatorname{dom} J$, entonces $\langle f, e_n \rangle = \langle Jf, 0 \rangle = 0$. Así, $\begin{pmatrix} f \\ Jf \end{pmatrix} \in Z^*$ y $J \subset J_0 \cap Z^*$. Para la otra contención, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in J_0 \cap Z^*$, entonces $f \in \operatorname{dom} J_0$ y $\langle f, e_n \rangle = \langle g, 0 \rangle = 0$, es decir $f \in \operatorname{dom} J$, lo que lleva a $J_0 \cap Z^* \subset J$. □

Uno verifica de manera sencilla que J_0 y Z son linealmente independientes.

Corolario 16. *El adjunto de J viene dado por $J^* = J_0 \dotplus Z$.*

Demostración. Uno tiene del Corolario 4 que $J_0 \dotplus Z = (J_0 \dotplus Z)^{**} = (J_0 \cap Z^*)^*$. Por lo tanto, del Teorema 15 se tiene la afirmación. □

El siguiente resultado es consecuencia directa del Teorema 15 y de [11, Teo. 2.4]

Corolario 17. *Todas las extensiones autoadjuntas del operador de multiplicación J son perturbaciones unidimensionales del operador J_0 y están en correspondencia uno-a-uno con $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, las cuales vienen dadas por*

$$J_\tau = \left\{\begin{pmatrix} f(t) \\ J_0 f(t) + \tau \langle f, e_n \rangle e_n \end{pmatrix} : f \in \mathbb{C}_n[t]\right\}, \quad \tau \neq \infty \tag{14}$$

que son operadores lineales, a diferencia de

$$J_\infty = J \dotplus Z$$

que resulta ser un operador multivaluado.

Las extensiones (14) tienen representación matricial

$$J_\tau = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & \tau \end{pmatrix} \tag{15}$$

mientras que la representación matricial de la parte operador de J_∞ es

$$J_{\infty\odot} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

En virtud del Teorema 9 y de la Proposición 11, el espectro de J_∞ coincide con el espectro de

$$J_{\infty\odot} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

en el espacio $\mathbb{C}_{n-1}[t]$.

Lo siguiente es demostrar la solución al Problema 1. Debido al teorema espectral, cada extensión autoadjunta (15) de J tiene representación

$$J_\tau = \sum_{\lambda\in\sigma(J_\tau)} \lambda P_\lambda\,, \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

donde P_λ es la proyección ortogonal sobre el auto-vector unitario de $\lambda \in \sigma(J_\tau)$. Defina la medida espectral (ver [14, Caps. 4 y 5])

$$E_\tau(M) := \sum_{\lambda\in\sigma(J_\tau)\cap M} P_\lambda\,, \quad M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,,$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ representa la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Así,

$$J_\tau = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\tau(\lambda)\,. \tag{17}$$

Ahora bien, denote

$$\mu_\tau(\lambda) := \langle 1, E_\tau(\lambda)1\rangle\ ,$$

la cual representa una medida de probabilidad, ya que $\mu_\tau(\mathbb{R}) = \langle 1, 1\rangle = s_0 = 1$.

De esta manera se cumple que para $j, k = 0, 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} s_{j+k} &= \left\langle t^j, t^k\right\rangle = \left\langle J^j 1, J^k 1\right\rangle \\ &= \left\langle J_\tau^j 1, J_\tau^k 1\right\rangle = \left\langle 1, J_\tau^{j+k} 1\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{j+k} d\,\langle 1, E_\tau(\lambda)1\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{j+k} d\mu_\tau(\lambda)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Con esto se ha demostrado lo siguiente:

Teorema 18. *El Problema 1 tiene infinitas soluciones parametrizadas por $\tau \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera:*

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} \lambda^j d\mu_\tau(\lambda)\,, \quad j = 0, 1, \dots, 2n\,.$$

De manera análoga a (17) se tiene la existencia de una medida espectral E_∞ para (16) en $\mathbb{C}_{n-1}[t]$, tal que $J_{\infty\odot} = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\infty(\lambda)$. La sección finaliza con el siguiente resultado que se demuestra siguiendo las mismas líneas de (18), con la medida $\mu_\infty(\lambda) := \langle 1, E_\infty(\lambda)1\rangle$.

Corolario 19. *El Problema 1 satisface*

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} \lambda^j d\mu_\infty(\lambda)\,, \quad j = 0, 1, \dots, 2(n-1)\,.$$

La condición (13) fue la que condujo a trabajar el problema de momentos de Hamburger truncado con la teoría de operadores multivaluados. Gracias a esta teoría se han podido caracterizar todas las medidas que resuelven el Problema 1.

Agradecimientos. El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo cuyos comentarios pertinentes llevaron a una mejor presentación de este trabajo.

Referencias

[1] Keshav Raj Acharya, *Self-adjoint extension and spectral theory of a linear relation in a Hilbert space*, ISRN Math. Anal. (2014), Art. ID 471640, 5. MR 3178945

[2] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Translated by N. Kemmer, Hafner Publishing Co., New York, 1965. MR 0184042 (32 #1518)

[3] Richard Arens, *Operational calculus of linear relations*, Pacific J. Math. **11** (1961), 9–23. MR 0123188 (23 #A517)

[4] Jussi Behrndt, Seppo Hassi, and Henk de Snoo, *Boundary value problems, Weyl functions, and differential operators*, Monographs in Mathematics, vol. 108, Birkhäuser/Springer, Cham, [2020] ©2020. MR 3971207

[5] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller. MR 1192782 (93g:47001)

[6] Earl A. Coddington, *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 134. MR 0477855

[7] Ronald Cross, *Multivalued linear operators*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 213, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998. MR 1631548

[8] V. A. Derkach and M. M. Malamud, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem*, J. Math. Sci. **73** (1995), no. 2, 141–242, Analysis. 3. MR 1318517

[9] A. Dijksma and H. S. V. de Snoo, *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces*, Pacific J. Math. **54** (1974), 71–100. MR 0361889 (50 #14331)

[10] Mercedes Fernandez Miranda and Jean-Philippe Labrousse, *The Cayley transform of linear relations*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 2, 493–499. MR 2093073

[11] Seppo Hassi and Henk de Snoo, *One-dimensional graph perturbations of selfadjoint relations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22** (1997), no. 1, 123–164. MR 1430397 (97m:47025)

[12] H. Langer and B. Textorius, *On generalized resolvents and Q-functions of symmetric linear relations (subspaces) in Hilbert space*, Pacific J. Math. **72** (1977), no. 1, 135–165. MR 0463964 (57 #3902)

[13] Josué I. Rios-Cangas and Luis O. Silva, *Dissipative extension theory for linear relations*, Expo. Math. **38** (2020), no. 1, 60–90. MR 4082306

[14] Konrad Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 265, Springer, Dordrecht, 2012. MR 2953553

[15] Konrad Schmüdgen, *The moment problem*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 277, Springer, Cham, 2017. MR 3729411

[16] Yuming Shi, Guixin Xu, and Guojing Ren, *Boundedness and closedness of linear relations*, Linear Multilinear Algebra **66** (2018), no. 2, 309–333. MR 3750592

[17] Barry Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Adv. Math. **137** (1998), no. 1, 82–203. MR 1627806 (2001e:47020)

[18] T.-J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **8** (1894), no. 4, J1–J122. MR 1508159

[19] J. von Neumann, *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*, Math. Ann. **102** (1930), no. 1, 49–131. MR 1512569

[20] John von Neumann, *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*, Annals of Mathematics Studies, no. 22, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950. MR 0034514

Dirección del autor:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México.
e-mail: `jottsmok@xanum.uam.mx`