Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
Vol.12, No.1, páginas 71-79
Recibido 16-03-2021. Aceptado 21-06-2021
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v12n1/fcasarrubias

EL TEOREMA DE METRIZACIÓN DE URYSOHN

FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

Resumen. Demostramos que en cualquier espacio topológico normal T_1 que tiene una base a lo más numerable existe una pseudométrica que define a su topología. Con esto damos la demostración del clásico teorema de metrización de Urysohn que trata sobre la metrizabilidad de espacios topológicos regulares T_0 que tienen una base a lo más numerable.

1. Introducción

El concepto de distancia entre dos puntos es algo muy intuitivo. Frechet dió una formulación matemática de la distancia entre dos puntos, llamada métrica, abstrayéndola de la recta real, del plano y del espacio tridimensional. Los espacios métricos, como llamamos hoy día a las parejas formadas por un conjunto no vacío y una métrica, aparecen en muchas áreas de las matemáticas como herramientas fundamentales.

La distancia entre puntos se puede utilizar para definir la distancia de un punto a un conjunto y con ello definir una topología; para hacerlo basta acordar que todos los puntos cuya distancia al conjunto A es igual a cero, son cercanos a A y definir la cerradura de A como el conjunto de tales puntos. Por esta razón podemos pensar a la noción de espacio topológico como una axiomatización de la idea de cercanía de un punto a un conjunto. Los espacios topológicos cuya topología proviene de una métrica son llamados *metrizables*. Estos espacios tienen muy buenas propiedades, y en cierta forma, podemos pensar que su estructura topológica es sencilla.

¿Cuándo un espacio topológico es metrizable? Tratar de responder a esta pregunta conlleva la idea de buscar condiciones (necesarias y) suficientes que nos permitan construir una métrica y reconstruir a la topología con esa métrica. Hacer esto es crear un teorema de metrización.

Probablemente el teorema de metrización más conocido es el teorema de metrización de Urysohn. Este teorema fue originalmente demostrado para espacios topológicos normales T_1 segundo-numerables en el famoso artículo *Zum Metrizationproblem* ([4]), y poco tiempo después fue extendido a la clase de los espacios T_3 segundo-numerables por Tychonoff.

La prueba de Urysohn en realidad muestra que todo espacio normal, T_1, segundo-numerable es un espacio pseudometrizable; es decir, un espacio en el cual es posible definir una pseudométrica de manera tal que la topología original del espacio es igual a la topología inducida por la pseudométrica.

Nuestro propósito principal en esta nota es dar una demostración simple y detalla de este clásico teorema de (pseudo)metrización. Exhibimos explícitamente la técnica empleada por Urysohn para construir una pseudométrica que induzca la topología de cualquier espacio normal segundo-numerable.

La prueba de Urysohn hace uso de su muy famoso lema. En esta nota, también proporcionamos una prueba del lema de Urysohn; y la hacemos en dos partes. Primero aislamos en un resultado auxiliar la técnica para crear funciones continuas a partir de cubiertas abiertas particulares, que están indexadas por subconjuntos densos de la recta real. Después demostramos el lema de Urysohn haciendo uso de este resultado

2010 *Mathematics Subject Classification.* 54A05, 54D10, 54D15, 54E35.
Palabras clave. Espacio topológico, espacio regular, espacio normal, metrizabilidad.

técnico. Esta manera de presentar la demostración del lema de Urysohn la hace más asequible para estudiantes de cursos básicos de topología.

Presentamos también la demostracion original (en lenguaje moderno) de Tychonoff acerca de que todo espacio regular segundo-numerable es un espacio normal, resultado con el cual se extiende el teorema de metrización de Urysohn de la clase de los espacios T_4 segundo-numerables a la clase de los espacios regulares T_0 que son segundo-numerables.

2. Terminología y notación

Una topología τ en un conjunto no vacío X es una colección de subconjuntos de X que es cerrada bajo uniones de cualquier cantidad de conjuntos y cerrada bajo intersecciones de cantidades finitas de conjuntos (y contiene a los conjuntos $\emptyset$ y X). A la pareja ordenada (X, τ) se le llama *espacio topológico.*

Una *base* para una topología τ es una subcolección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que para todo $U \in \tau$ y todo elemento $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Un espacio topológico (X, τ) es *segundo-numerable* si τ tiene una base a lo más numerable.

En esta nota distinguimos a los espacios normales de los espacios T_4. Para ser más precisos, diremos que un espacio topológico (X, τ) es *normal* si para cualquier par de subconjuntos cerrados y ajenos F y G existen abiertos ajenos U y V tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. Y diremos que (X, τ) es un espacio T_4 si es normal y además satisface el axioma de separación T_1.

También distinguiremos a los espacios regulares de los espacios T_3. Un espacio topológico (X, τ) es *regular* si para cada subconjunto cerrado F de X y cada punto $x \in X \setminus F$, existen abiertos ajenos A, B tales que $x \in A$ y $F \subseteq B$. Y X es un espacio T_3 si es un espacio regular T_0[1].

Recuerde que un espacio X es T_1 (respectivamente, T_0) si para cualquier par de elementos diferentes x y y en X es posible hallar un abierto U tal que $U \cap \{x, y\} = \{x\}$ (respectivamente, tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$).

En algunas partes de esta nota hacemos uso del resultado que muestra que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas real valuadas y definidas en un espacio topológico X, es una función continua de valores reales. La demostración de este hecho básico puede ser consultada en [1, 6.4.3].

3. El lema de Urysohn

El lema de Urysohn [5] es uno de los resultados más relevantes y fundamentales, y más conocido, de la topología general. En él se demuestra que en los espacios normales hay una gran cantidad de funciones continuas de valores reales con buenas propiedades de separación. La «maquinaria» que construye esas funciones continuas es aislada en el siguiente lema técnico.

Lema 1 ([2]). *Suponga que (X, τ) es un espacio topológico y que D es un subconjunto denso de la recta real $\mathbb{R}$ que tiene asociada una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in D}$ de X con las siguientes propiedades:*

1. *Si $\alpha, \beta \in D$ y $\alpha < \beta$ entonces $\mathrm{cl}(U_\alpha) \subseteq U_\beta$.*
2. *$\bigcap_{\alpha \in D} U_\alpha = \emptyset$.*

Entonces la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \inf\{\alpha \in D : x \in U_\alpha\}$$

es continua.

---

[1]Si X es regular y T_0, y x y y son elementos distintos de X, entonces por el axioma T_0 existe un abierto U tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Si $x \in U$ y $y \notin U$ entonces $x \notin \mathrm{cl}(\{y\})$. Como X es regular, existen abiertos ajenos V y W tales que $x \in V$ y $y \in \mathrm{cl}(\{y\}) \subseteq W$. De manera análoga, si $y \in U$ y $x \notin U$ entonces existen abiertos ajenos V y W tales que $y \in V$ y $x \in \mathrm{cl}(\{x\}) \subseteq W$. Así, X es un espacio Hausdorff.

Demostración. Debido a que $\mathcal{U}$ es una cubierta de X, cada conjunto $A_x = \{\alpha \in D : x \in U_\alpha\}$ es no vacío, y también es acotado inferiormente en $\mathbb{R}$. En efecto, si A_x no es acotado inferiormente entonces para cualquier elemento $\beta \in D$ es posible hallar un elemento $\alpha \in A_x$ de modo que $\alpha < \beta$. Aplicando (1) tenemos que $\mathrm{cl}(U_\alpha) \subseteq U_\beta$. Luego como $\alpha \in A_x$, se tiene que $x \in U_\alpha \subseteq \mathrm{cl}(U_\alpha) \subseteq U_\beta$. Entonces $\beta \in A_x$. Por lo tanto, $A_x = D$ y por ello $x \in \bigcap_{\alpha \in D} U_\alpha$; lo que contradice la condición 2.

El que los conjuntos A_x sean no vacíos y acotados inferiormente garantiza que el número real $f(x) = \inf\{\alpha \in D : x \in U_\alpha\}$ está bien definido.

Verifiquemos ahora que f es continua. Suponga que $x_0 \in X$ es un elemento cualquiera y que $\epsilon > 0$ es un número positivo arbitrario. Como $f(x_0) = \inf A_{x_0} < f(x_0) + \epsilon$ existe $\beta_0 \in A_{x_0}$ tal que $f(x_0) \leqslant \beta_0 < f(x_0) + \epsilon$. Por ser D denso en $\mathbb{R}$ podemos elegir $\beta_1, \beta_2 \in D$ tales que $f(x_0) - \epsilon < \beta_1 < \beta_2 < f(x_0)$. La definición de $f(x_0)$ implica que $x_0 \notin U_{\beta_2}$. Por (1), $\beta_1 < \beta_2$ implica que $\mathrm{cl}(U_{\beta_1}) \subseteq U_{\beta_2}$. Luego $x_0 \notin \mathrm{cl}(U_{\beta_1})$. Por lo tanto $U_{\beta_0} \setminus \mathrm{cl}(U_{\beta_1})$ es un abierto de X que contiene a x_0. Resulta además que $f[U_{\beta_0} \setminus \mathrm{cl}(U_{\beta_1})] \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Efectivamente, si $x \in U_{\beta_0} \setminus \mathrm{cl}(U_{\beta_1})$, entonces $\beta_0 \in A_x = \{\beta \in D : x \in U_\beta\}$ y $A_x \subseteq (\beta_1, \infty)$. Luego, $\beta_1 \leqslant f(x) \leqslant \beta_0$ porque $f(x) = \inf A_x$, β_1 es cota inferior de A_x y β_0 es elemento de A_x. Consecuentemente, $f[U_{\beta_0} \setminus \mathrm{cl}(U_{\beta_1})] \subseteq [\beta_1, \beta_0] \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Por lo tanto f es continua en x_0. □

El lema de Urysohn trabaja en espacios normales, en su demostración usamos la siguiente propiedad de estos espacios topológicos, la cual es muy sencilla de demostrar:

> *Si F es un subconjunto cerrado y U es un subconjunto abierto de un espacio normal X tal que $F \subseteq U$, entonces existe un abierto V de X tal que $F \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$.*

En efecto, por la normalidad de X existen abiertos ajenos V y W que contienen, respectivamente, a los subconjuntos cerrados ajenos F y $X \setminus U$. Debido a que $X \setminus W$ es cerrado, podemos concluir que $F \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq X \setminus W \subseteq U$, como se desea.

La razón por la cuál se elige la anterior propiedad de espacios normales es la siguiente. Para aplicar el lema 1 en un espacio normal debemos construir una cubierta abierta de dicho espacio normal. La construcción se hace seleccionando en pasos sucesivos a conjuntos abiertos. La condición 1 del lema 1 nos dice que en cada paso podemos aplicar la propiedad de espacios normales: $F \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$, y elegir al abierto V que nos proporciona esa propiedad, para que éste forme parte de la cubierta. En cada uno de esos pasos, la aplicación de dicha propiedad de espacios normales, y por consecuencia, la elección del abierto V, está supeditada a la forma en que está acomodado un determinado número racional en el intervalo $[0, 1]$ en relación a una cantidad finita de otros números racionales. Lo curioso es que para descubrir ese acomodo, esencialmente aplicaremos el método que nos enseñaron en educación básica para saber, por ejemplo, dónde debemos colocar al racional $\frac{5}{7}$ en el $[0, 1]$ cuando el intervalo $[0, 1]$ está «dividido en octavos». De esta manera, como alguna vez escuche decir a un buen amigo, «la prueba del lema de Urysohn es esencialmente saber cómo están "acomodados" los números racionales en $[0, 1]$».

Lema 2 (de Urysohn). *Sea X un espacio normal. Supongamos que F y G son subconjuntos cerrados X que son ajenos. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f[G] \subseteq \{1\}$.*

Demostración. La idea clave para la demostración es construir una cubierta abierta para X que satisfaga las hipótesis del lema 1. Para ello utilizaremos un subconjunto denso especial de la recta real y a los subconjuntos cerrados ajenos F y G del espacio normal X. Una vez hecho esto el lema 1 nos construye la función continua que necesitamos.

Definición de un subconjunto denso D de $\mathbb{R}$ adecuado. Consideremos una enumeración inyectiva[2] $D_0 = \{q_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ del conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tal que $q_0 = 0$

[2]Considere una biyección f de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

y $q_1 = 1$. Definamos $D = (-\infty, 0) \cup D_0 \cup (1, \infty)$. Es fácil demostrar que D es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

Ahora construiremos a una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X a partir de los subconjuntos cerrados F y G, indexada por el conjunto D, y que cumpla las condiciones del lema 1.

Construcción de la cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in D\}$. Primero definamos

$$U_\alpha = \begin{cases} \emptyset & \alpha < 0, \\ X & \alpha > 1. \end{cases}$$

Con los elementos de $\mathcal{U}$ que tenemos definidos hasta este momento podemos ya verificar que la colección $\mathcal{U}$ será una cubierta de X y que se cumplirá la condición 2 del lema 1. Observe que estos elementos cumplen también la condición 1.

De esta manera, nuestra única preocupación ahora es construir a los restantes elementos de la cubierta $\mathcal{U}$ con el único requisito de que ellos cumplan la condición 1 del lema 1. Es decir, debemos construir una colección $\mathcal{U}_0 = \{U_{q_n} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ de subconjuntos abiertos de X que tengan la siguiente propiedad:

(a) si $r < s$ con $r, s \in D_0$ entonces $\mathrm{cl}(U_r) \subseteq U_s$.

Como X es un espacio normal, y F es un cerrado tal que $F \subseteq X \setminus G$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $F \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq X \setminus G$. Defina $U_{q_0} = V$ y $U_{q_1} = X \setminus G$.

Supongamos ahora que $n \geqslant 2$ y que hemos construido los subconjuntos abiertos $U_{q_0}, U_{q_1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_n}$ de tal forma que ellos satisfacen la condición (a). La idea para construir al subconjunto abierto $U_{q_{n+1}}$ radica en saber «cómo está acomodado el racional q_{n+1} en [0,1]» en relación a los números racionales $q_0, q_1, \ldots, q_n$. Para saberlo, simplemente aplicamos nuestros conocimientos de educación básica y definimos

$$r = \text{máx}\{q_k : k \in \{0, 1, \ldots, n\} \ \ \& \ \ q_k < q_{n+1}\}$$

y

$$s = \text{mín}\{q_l : l \in \{0, 1, \ldots, n\} \ \ \& \ \ q_{n+1} < q_l\}.$$

Es claro que $r, s \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ y que $r < q_{n+1} < s$. Por nuestra hipótesis de recursión, tenemos que $\mathrm{cl}(U_r) \subseteq U_s$. Como X es un espacio normal, existe W abierto en X tal que $\mathrm{cl}(U_r) \subseteq W \subseteq \mathrm{cl}(W) \subseteq U_s$. Defina $U_{q_{n+1}} = W$.

No es difícil verificar ahora que los conjuntos

$$\{U_{q_0}, U_{q_1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_n}, U_{q_{n+1}}\}$$

satisfacen las condiciones requeridas. Esto completa la construcción recursiva de la familia $\mathcal{U}_0 = \{U_r : r \in D\} \subseteq \tau_X$ que satisface la condición (a).

Definamos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]\} \cup \mathcal{U}_0$. Es fácil verificar que la colección $\mathcal{U}$ satisface las hipotesis del lema 1. La función $f : X \to \mathbb{R}$ que se define en el lema 1 a partir de la cubierta $\mathcal{U}$ que hemos construido es continua. Además $f[X] \subseteq [0, 1]$, $f(F) \subseteq \{0\}$ y $f(G) \subseteq \{1\}$. Efectivamente, si existiera un elemento $x \in X$ para el cual $f(x) = \inf\{\alpha \in D : x \in U_\alpha\} < 0$, entonces existe $\beta < 0$ tal que $\beta \in \{\alpha \in D : x \in U_\alpha\}$; pero entonces $x \in U_\beta = \emptyset$, lo cual es evidentemente una contradicción. Por otro lado, como para toda $\alpha \in (1, \infty)$, $U_\alpha = X$, se tiene que $(1, \infty) \subseteq \{\alpha \in D : x \in U_\alpha\}$. Luego, $f(x) = \inf\{\alpha \in D : x \in U_\alpha\} \leqslant 1 = \inf(1, \infty)$. En consecuencia, $f[X] \subseteq [0, 1]$. Por otra parte, si $x \in F$ entonces $x \in U_{q_0}$. Luego, $0 = q_0 \in \{\alpha \in D : x \in U_\alpha\}$. Por ello, $f(x) = \inf\{\alpha \in D : x \in U_\alpha\} \leqslant 0$. Es decir, $f(x) = 0$. Finalmente, si $x \in G$ entonces $x \notin U_{q_1}$, y por ello, $x \notin U_\alpha$ para todo $\alpha \leqslant 1$. En consecuencia, $\{\alpha \in D : x \in U_\alpha\} = (1, \infty)$. Y entonces $f(x) = 1$. □

Uno de los corolarios inmediatos del lema de Urysohn es la siguiente caracterización de la normalidad en términos de funciones continuas.

Corolario 3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio topológico* (X, τ).

1. (X, τ) *es un espacio normal;*
2. *para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos* F_1 *y* F_2 *de* X *existe una función* $f : X \to [0,1]$ *tal que* $f[F_1] \subseteq \{0\}$ *y* $f[F_2] \subseteq \{1\}$.

4. El teorema de pseudometrización de Urysohn para espacios normales

Si X es un conjunto no vacío, entonces una función ρ de valores reales no negativos definida en $X \times X$ es llamada *pseudométrica* si cumple las siguientes tres condiciones: (1) $\rho(x,x) = 0$ para cada $x \in X$, (2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ para todo $x, y \in X$; (3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Si ρ es una pseudométrica sobre X, entonces definimos a las bolas abiertas como los conjuntos $B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$, donde $x \in X$ y $r > 0$. La colección $\tau_\rho = \{\emptyset\} \cup \{A : \big(\forall x \in A\big)\big(\exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A\big)\}$ es la topología sobre X inducida por la pseudométrica ρ.

La diferencia entre una métrica y una pseudométrica es simplemente la condición (1), la cual se sustituye en el caso de una métrica por la condición: (1') $\rho(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$[3]. Desde el punto de vista topológico esta diferencia es codificada por el axioma de separación T_0.

Proposición 4 (Kolmogorov). *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier pseudométrica* ρ *sobre* X*:*

(1) ρ *es una métrica;*

(2) (X, τ_ρ) *es un espacio* T_0.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si $x, y \in X$ son elementos diferentes, entonces $U = B(x,r) \in \tau_\rho$ donde $r = d(x,y)$. Es claro que $|U \cap \{x,y\}| = 1$. Esto muestra que (X, τ_ρ) es un espacio topológico T_0.

(2) $\Rightarrow$ (1). Suponga que $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$. Como (X, τ_ρ) es T_0, existe un abierto U tal que $|U \cap \{x,y\}| = 1$. Podemos suponer sin perder generalidad que $x \in U$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq U$. Como $y \notin U$, tenemos que $y \notin B(x,r)$. Consecuentemente, $\rho(x,y) \geqslant r > 0$. Esto demuestra que la pseudométrica ρ es una métrica. □

Un espacio topológico (X, τ) es *pseudometrizable* si existe una pseudométrica ρ de modo que $\tau_\rho = \tau$. En el siguiente teorema se resume el método de Urysohn para pseudometrizar a cualquier espacio normal segundo-numerable.

Teorema 5. *Todo espacio normal,* T_1 *y segundo numerable es pseudometrizable.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio normal que es segundo numerable. Fijemos una base numerable $\mathcal{B}$ para τ. Definamos como $\mathcal{D}$ al siguiente conjunto:

$$\mathcal{D} = \{(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid \mathrm{cl}(U) \subseteq V\}.$$

Debido a que $\mathcal{B}$ es numerable, la colección $\mathcal{D}$ también lo es. Podemos entonces suponer que $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como cada elemento $D_n \in \mathcal{D}$ es una pareja ordenada $D_n = (U,V)$ escribiremos $D_n = (U_n, V_n)$ para enfatizar que los elementos U_n y V_n forman la pareja ordenada D_n; de esta manera

$$\mathcal{D} = \{D_n = (U_n, V_n) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid \mathrm{cl}(U_n) \subseteq V_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Aplicando el el lema de Urysohn, podemos fijar para todo número natural n una función continua $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f_n[\mathrm{cl}(U_n)] \subseteq \{0\}$ y $f_n[X \setminus V_n] \subseteq \{1\}$.

Afirmación 1. La relación $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(y)|$ define una pseudométrica $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ en X.

[3]Es claro que toda métrica es una pseudométrica, pero la función constante cero es una pseudométrica que no es una métrica en cualquier conjunto con al menos dos elementos.

Demostración de la Afirmación 1. Para cualesquiera $x, y \in X$, la sucesión

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2^i}|f_i(x) - f_i(y)|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

es acotada superiormente en $\mathbb{R}$ porque $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} < 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(y)|$ es convergente.

Por otro lado, es fácil probar que $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ y además $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$; esto es, ρ es una pseudométrica en X. ⊠

La idea ahora es demostrar que la pseudométrica ρ genera a la topología de X. Para hacerlo, primero demostraremos que si fijamos la segunda variable en la función ρ entonces la función resultante es continua.

Afirmación 2. Para cada $z \in X$, la función $f_z : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_z(x) = \rho(x, z)$ es una función continua de (X, τ) en $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$.

Demostración de la Afirmación 2. Fijemos un elemento cualquiera $z \in X$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, definimos $h_{z,k}(x) = \frac{1}{2^k}|f_k(x) - f_k(z)|$. No es difícil darse cuenta que cada función $h_{z,k} : X \to \mathbb{R}$ es una función continua en (X, τ). Definamos ahora $g_{z,n} = \sum_{k=1}^{n} h_{z,k}$ $(n \in \mathbb{N})$. Como $g_{z,n}$ es suma de funciones continuas, cada $g_{z,n}$ es una función continua.

La sucesión de funciones continuas $(g_{z,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X a la función f_z: supongamos que $\epsilon > 0$. Fijemos un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^{N-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Aplicando lo establecido en los párrafos anteriores, es fácil verificar que $|g_{z,n}(x) - g_{z,m}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $n, m \geqslant N$ y para cualquier $x \in X$. Resulta que $|g_{z,n}(x) - f_z(x)| < \epsilon$ para todo $n \geqslant N$ y todo elemento $x \in X$. Efectivamente, supongamos que $x \in X$ y que $n \geqslant N$ son elementos cualesquiera. Como $f_z(x) = \lim_{n\to\infty} g_{z,n}(x)$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|g_{z,m}(x) - f_z(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $m \geqslant M$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ de modo que $m \geqslant N + M$. Entonces $n, m \geqslant N$ y $m > M$. Luego $|g_{z,n}(x) - f_z(x)| \leqslant |g_{z,n}(x) - g_{z,m}(x)| + |g_{z,m}(x) - f_z(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto, $(g_{z,m})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X a la función f_z. ⊠

Como f_z es el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas real valuadas, f_z es continua para todo $z \in X$. Obsérvese que $f_z(x) = \rho(x, z)$ para cada $x \in X$.

Para finalizar la demostración, verificaremos que la topología τ_ρ inducida por ρ en X coincide con la topología τ. Para hacerlo es suficiente demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación 3.

(a) Para cada $z \in X$ y $r > 0$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B \subseteq B(z, r) = \{y \in X : \rho(z, y) < r\}$.

(b) Para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B$, existe una $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq B$.

Demostración de la afirmación 3. (a) Supongamos que $z \in X$. Por la afirmación 2, la función $f_z : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_z(x) = \rho(x, z)$ es continua en X cuando en X se considera a la topología τ. Consecuentemente, por la continuidad de f_z en z, si $r > 0$ existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B$ y $f_z(B) \subseteq (f_z(z) - r, f_z(z) + r) = (-r, r)$. Entonces, para cada $x \in B$ se tiene que $\rho(x, z) = f_z(x) \in (-r, r)$; por lo tanto, $z \in B \subseteq B(z, r)$.

(b) Supongamos, por el contrario, que existen $B \in B$ y $x \in B$ tales que $B(x, \epsilon)\setminus B \neq \emptyset$ para cada $\epsilon > 0$. En particular, para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos fijar $x_n \in B(x, \frac{1}{2^n}) \setminus B$. Como $x \in B$, B es abierto básico y X es normal T_1, existe $U \in B$ tal que $x \in U \subseteq \mathrm{cl}(U) \subseteq B$. Luego la pareja ordenada (U, B) pertenece a $\mathcal{D}$. Por ello, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(U, B) = D_N = (U_N, V_N)$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que $x_n \in X \setminus B$, tenemos que $f_N(x) = 0$ y $f_N(x_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En particular, $f_N(x) = 0$ y $f_N(x_N) = 1$. En consecuencia, $\rho(x, x_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(x_N)| \geqslant \frac{1}{2^N}|f_N(x) - f_N(x_N)| = \frac{1}{2^N}$;

lo cual contradice la elección de x_N en $B(x, \frac{1}{2^N}) \setminus B$. Esta contradicción muestra que (b) es cierta. ⊠

Verifiquemos que $\tau = \tau_\rho$. Si $U \in \tau$ es no vacío, para toda $x \in U$ podemos fijar un elemento B de la base $\mathcal{B}$ de modo que $x \in B \subseteq U$. Por el inciso (b) de la afirmación 3, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $x \in B(x, \epsilon) \subseteq U$. Esto muestra que $U \in \tau_\rho$. Entonces $\tau \subseteq \tau_\rho$. Por otra parte, si $U \in \tau_\rho$ es no vacío, entonces para toda $x \in U$ existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq U$. Aplicando el inciso (a) de la afirmación 3, para toda $x \in U$ podemos fijar un elemento B_x de la base $B_x \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B_x \subseteq B(x, r_x)$. Entonces $U = \bigcup_{x \in U} B_x \in \tau$. Por lo tanto, $\tau_\rho \subseteq \tau$. □

Como todo espacio pseudometrizable T_0 es metrizable, a partir del teorema 5 podemos concluir el teorema de metrización de Urysohn para espacios T_4.

Teorema 6 (Urysohn [4]). *Todo espacio normal, T_1 y segundo numerable es metrizable.*

5. El teorema de metrización de Urysohn para espacios T_3

En la parte final de [4] Urysohn planteó la pregunta de si era posible modificar la hipótesis de normalidad en el teorema 6 a una hipótesis más débil. En [3], Tychonoff resolvió positivamente este planteamiento demostrando el siguiente resultado.

Teorema 7 (Tychonoff). *Todo espacio segundo numerable regular es normal.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio regular segundo numerable. Supongamos también que $\mathcal{B}$ es una base numerable de (X, τ) y que F y G son cualesquiera subconjuntos de X, cerrados, ajenos y no vacíos.

Para cada $x \in F$, por la regularidad de (X, τ), existen abiertos ajenos A_x, B_x tales que $x \in A_x$ y $G \subseteq B_x$. Debido a que $\mathcal{B}$ es una base para τ, para cada $x \in F$, existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subseteq A_x$. Obsérvese que $\mathrm{cl}(U_x) \cap G = \emptyset$ para cada $x \in F$.

Definamos $\mathcal{F} = \{U_x : x \in F\}$. Como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, tenemos que $\mathcal{F}$ es numerable. Luego podemos numerar a sus elementos: $\mathcal{F} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, y además, $\mathrm{cl}(U_n) \cap G = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De manera totalmente análoga a lo antes hecho, podemos construir una colección $\mathcal{G} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, y además, $\mathrm{cl}(V_n) \cap F = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definamos ahora $C_1 = U_1$, $D_1 = V_1 \setminus \mathrm{cl}(U_1)$, y para cada $n \geqslant 2,$, $C_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{cl}(D_i)$ y $D_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(C_i)$.

Claramente cada conjunto C_n, y cada conjunto D_n, es abierto en X. Además, $C_n \subseteq U_n$ y $D_n \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ y $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Resulta que U y V son abiertos. Para terminar demostraremos que U y V son conjuntos ajenos y que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. Efectivamente, supongamos por el contrario que existe $x \in U \cap V$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in C_n \cap D_m$. Si $n \leqslant m$ entonces $x \in C_n \cap (V_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{cl}(C_i) \subseteq C_n \cap (V_m \setminus \mathrm{cl}(C_n) \subseteq (C_n \setminus C_n) = \emptyset$, lo cual es imposible. Luego, debe ocurrir que $n > m$. Pero entonces $x \in C_n \cap D_m = (U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{cl}(D_i) \cap D_m \subseteq (U_n \setminus D_m) \cap D_m = \emptyset$, lo cual es absurdo. Lo anterior muestra que necesariamente $U \cap V = \emptyset$. Por otro lado, si $z \in F$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in U_n$. Si $n = 1$ entonces $z \in U_1 = C_1 \subseteq U$. Supongamos que $n \geqslant 2$. Como $z \in F$, $z \notin \mathrm{cl}(V_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Debido a que $D_i \subseteq V_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $z \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{cl}(D_i)$. Luego, $z \in U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{cl}(D_i) = C_n \subseteq U$. Por otra parte, si $z \in G$ es cualquier elemento, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $z \in V_m$. Como $z \in G$, $z \notin \mathrm{cl}(U_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Como $C_i \subseteq U_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $z \in V_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{cl}(C_i) = D_m \subseteq V$. □

Algunos autores enuncian el teorema 7 para espacios T_3, es decir, para espacios regulares que además son espacios T_0[4]. Se puede notar en la prueba que dimos que

[4]El que un espacio sea regular no implica que éste sea T_0. Como ejemplo de ello considere al conjunto $\mathbb{R}$ con la topología indiscreta $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

no es necesario el uso del axioma T_0. También es importante mencionar que de esta prueba (la cual es original de Tychonoff) se extrajo la siguiente caracterización de los espacios normales.

Proposición 8. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio topológico* (X, τ)*:*

1. (X, τ) *es un espacio normal,*
2. *para cualquier subconjunto cerrado* F *y cualquier abierto* U *con* $F \subseteq U$*, existe una sucesión* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de subconjuntos abiertos de* X *tal que* $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W_i$ *y* $\mathrm{cl}(W_n) \subseteq U$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que F es cerrado y que U es un abierto tal que $F \subseteq U$. Como X es un espacio normal, podemos encontrar un abierto V de X tal que $F \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}(V) \subseteq U$. Definamos ahora $W_n = V$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Es claro que la sucesión $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene las propiedades deseadas.

(2) $\Rightarrow$ (1). Consideremos subconjuntos cerrados ajenos F y G de X. Definamos $U = X \setminus G$. Como $F \subseteq U$ y U es abierto, por hipótesis, existe una sucesión de subconjuntos abiertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ y $\mathrm{cl}(U_n) \subseteq X \setminus G$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De manera análoga, existe una sucesión $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos tales que $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ y $\mathrm{cl}(V_n) \subseteq X \setminus F$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definamos ahora $C_1 = U_1$, $D_1 = V_1 \setminus \mathrm{cl}(U_1)$, y para cada $n \geqslant 2$,

$$C_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{cl}(D_i) \quad \text{y} \quad D_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(C_i).$$

Claramente cada conjunto C_n, y cada conjunto D_n, es abierto en X. Además, $C_n \subseteq U_n$ y $D_n \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos ahora $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ y $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Resulta que U y V son abiertos, son conjuntos ajenos y además $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$ (vea la prueba del teorema 7). Por lo tanto, X es un espacio normal. $\square$

Para los fines de esta nota la consecuencia más importante del teorema 7 es el siguiente teorema de pseudometrización para espacios regulares T_0 que son segundo numerables.

Teorema 9 (de metrización de Urysohn). *Todo espacio segundo numerable, regular y* T_0 *es metrizable separable.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio regular, T_0 y segundo numerable. Aplicando el teorema 7, podemos concluir que (X, τ) es un espacio normal T_1. Aplicando ahora el teorema 5, tenemos que X es pseudometrizable.

Debido a que todo espacio pseudometrizable T_0 es metrizable, el espacio (X, τ) es metrizable. Éste es separable porque todo espacio segundo-numerable lo es. Esto termina la demostración del teorema. $\square$

Referencias

[1] Casarrubias-Segura, F & Tamariz-Mascarúa, A. *Elementos de topología general.* Aportaciones matemáticas. Textos 37. Nivel medio. Instituto de matemáticas. UNAM. 2019.

[2] Dávila-Albarrán, J. L. *Lema de Urysohn y sus aplicaciones.* Tesis de Máster. Posgrado de Matemáticas, Máster de Matemática Avanzada. Curso 2012-2013. Universidad de Murcia. España.

[3] Tychonoff, A. N. *Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn*, Mathematische Annalen, 95, 994–996. 1925.

[4] Urysohn, P. *Zum Metrizationproblem.* Mathematische Annalen, 94, 309–315, 1925. (Traducción al español: *Lecturas básicas en Topología General*, Comunicaciones 28, Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana. 2000. Páginas 295–301).

[5] Urysohn, P. *Über die Mächtigkeit der zussamenhängenden Räume*, Mathematische Annalen, 94, 262–295, 1925.

Dirección del autor:
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas.
Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510.
Ciudad Universitaria, Ciudad de México. México.
e-mail: fcasarrubiass@ciencias.unam.mx.