Mixba'al,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.13, No.1, páginas 11-28.
Recibido 13-04-2021. Aceptado 7-12-2021.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v13n1/cgaray

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES TROPICALES

CRISTHIAN GARAY LÓPEZ

Resumen. Presentamos una introducción a la teoría de las ecuaciones diferenciales tropicales y explicamos cómo estas se pueden aplicar de manera concreta a problemas de sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales algebraicas.

1. Introducción

Este artículo pretende ser una excursión guiada al formalismo y filosofía detrás de las ecuaciones diferenciales tropicales, con el propósito de presentar una versión del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical como aparece en [3]. Este resultado abre la puerta a aplicaciones a la teoría de (soluciones en series de potencias de) ecuaciones diferenciales (algebraicas) clásicas, lo cuál justifica la importancia de un desarrollo más amplio de esta teoría.

Como excursión guiada, se enfatiza la presentación de las ideas para que sea accesible a un público amplio, digamos, para estudiantes a partir del último año de la licenciatura en matemáticas o carreras afines que sepan rudimentos de estructuras algebraicas y de ecuaciones diferenciales. El lector interesado en un primer acercamiento más riguroso y general al estado del arte de este tema puede consultar [2]. La forma en la que lo presentamos es mediante ejercicios básicos esparcidos a lo largo del documento, que aunque no son esenciales para llenar huecos en la exposición, creemos que ayudan a la comprensión y apreciación de los conceptos.

Más allá de las posibles aplicaciones ofrecidas por el teorema fundamental, creemos que esta teoría representa un buen ejemplo de aplicación de los semianillos (conmutativos con identidad) y de las valuaciones generalizadas. Estos son básicamente los dos pilares sobre los que se basa la teoría, y se pueden ver como extensiones naturales de sus contrapartes usuales, a saber, los anillos conmutativos y las valuaciones de Krull.

El presente trabajo está dividido de la siguiente manera: en la sección 2 presentamos la motivación de la teoría de las ecuaciones diferenciales tropicales. En la sección 3 introducimos el concepto de semianillo como objeto algebraico rector de la teoría, ya que este describe de manera unificada tanto el marco clásico como el tropical. Los objetos relevantes son los polinomios diferenciales con coeficientes en un semianillo de series de potencias formales y sus soluciones en series de potencias.

En la sección 4, vemos como los conceptos introducidos en la sección anterior interactúan por medio de los mapeos de tropicalización, los cuales permiten describir una correspondencia entre soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales clásicas con sus contrapartes tropicales. Finalmente, en la sección 5, discutiremos otros caminos y conceptos complementarios, como el de seminorma no arquimedeana, el cual es una generalización reciente del concepto de valuación de Krull o de seminorma de anillo (podemos decir que es una valuación que toma valores en un semianillo idempotente y que no necesariamente es multiplicativa).

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13N99, 14T10, 13P15, 52B20.

Palabras clave. geometría algebraica diferencial, geometría tropical, series de potencias, ecuaciones diferenciales algebraicas, poliedros de Newton.

2. Motivación

Contrariamente a la Matemática, sin adjetivos, la Matemática *tropical* no existe como tal; lo que tenemos son aplicaciones, o métodos tropicales aplicados a la Matemática *clásica*. En esencia, existen dos mundos paralelos: el clásico y el tropical, y el segundo está frecuentemente subordinado al primero. En esta sección vamos a explicar esto.

El computólogo brasileño Imre Simon fue de los primeros en estudiar problemas de matemáticas aplicadas usando cierto tipo de estructuras algebraicas, cuyo representante más conocido (probablemente) es el siguiente: $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot, -\infty, 0)$, donde $a \odot b := a + b$ y $a \oplus b := \max\{a, b\}$ con respecto al orden usual en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Estos se nombraron como semianillos max-plus, puesto que $\mathbb{T}$ es muy cercano al concepto de anillo con estas operaciones, o con el galicismo semianillos *tropicales*, porque Simon es Brasileño, que es tropical a ojos de los franceses. Esta historia se puede consultar en [10].

Una vez que el origen del nombre ha sido aclarado, el lector se podrá convencer sin mucho esfuerzo que varios de los conceptos básicos del álgebra conmutativa se pueden formular sobre $\mathbb{T}$ de manera análoga al caso de anillos, por ejemplo, un polinomio tropical (o con coeficientes en $\mathbb{T}$) es una suma de la forma

$$p(x) = a_0 \oplus a_1 \odot x \oplus \cdots \oplus a_d \odot x^{\odot d}, \quad a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{T}.$$

De la misma manera, podemos definir módulos tropicales (o $\mathbb{T}$-módulos), series de potencias tropicales, etc. Inclusive conceptos más atrevidos fuera del álgebra conmutativa, como curvas algebraicas tropicales planas (conjuntos de *ceros* en $\mathbb{T}^2$ de polinomios tropicales en dos variables), o como será el caso de este artículo, soluciones de ecuaciones diferenciales tropicales (los *ceros* de polinomios diferenciales tropicales).

En este contexto, cuando hablamos de un objeto matemático, tendremos dos tipos: clásicos o usuales, y nuevos o tropicales, y *tropicalizar* es viajar del mundo clásico al tropical, con el fin de analizar un problema desde otra perspectiva, frecuentemente con el fin de entenderlo mejor o de resolverlo. Una vez tropicalizado, la forma del problema cambia, pero algunos de sus aspectos fundamentales se conservan. O quizá el problema sea tan complicado que solo queramos entender mejor algunos aspectos de él. Este último es el caso de las soluciones de ecuaciones diferenciales. A continuación daremos un ejemplo de la aplicación concreta de esta metodología.

2.1. El teorema de la correspondencia de Mikhalkin. Los problemas de conteo o *combinatorios*[1] son propensos a ser transformados, y uno de los ejemplos más exitosos (sino es que el más) de tropicalización de un problema fue dado por Grigory Mikhalkin [9] para contar curvas algebraicas. Recordemos que una curva algebraica de grado $d \geq 1$ en el plano proyectivo $\mathbb{CP}^2$ es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo de grado d en las variables x, y, z.

Problema 1. Dados dos números naturales $d \geq 1$, $0 \leq g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ y $\mathcal{P}$ una configuración de $3d + g - 1$ puntos en $\mathbb{CP}^2$, contar cuántas curvas algebraicas de grado d (y género g) pasan por $\mathcal{P}$.

Este número no depende[2] de $\mathcal{P}$, por lo que se puede denotar como $N(d, g)$.

Ejemplo 1. Este problema es una generalización de nociones bien conocidas de geometría. Por ejemplo, si $d = 1$, entonces $g = 0$, y $\mathcal{P}$ consta de 2 puntos en $\mathbb{CP}^2$, luego $N(1, 0) = 1$, pues por dos puntos en el plano pasa una única línea.

---

[1]Entendiendo combinatoria como el dominio de lo discreto.

[2]Siempre y cuando la configuración sea genérica.

Elegimos este problema por varias razones: tiene una larga historia, es difícil de resolver (aunque no es difícil de formular), y básicamente fue el trabajo que puso lo tropical en el mapa de la matemática mundial, o al menos de la geometría algebraica. Mikhalkin lo resolvió, pero no contando curvas algebraicas de grado d –lo cual es difícil– sino de la siguiente manera:

1. primero notó que había un problema tropical análogo: dada una configuración $\mathcal{Q}$ de $3d+g-1$ puntos en el plano proyectivo tropical $\mathbb{TP}^2$, podemos calcular el número $N^{\text{trop}}(d,g,\mathcal{Q})$ de curvas tropicales de grado d (y género g) que pasan por $\mathcal{Q}$, digamos que son $C_1,\ldots,C_{N^{\text{trop}}(d,g,\mathcal{Q})}$,
2. después vio que el problema original se podía tropicalizar, lo que significa que si $D_1,\ldots,D_{N(d,g)}$ son las curvas que pasan por la configuración original $\mathcal{P}$ y si $\mathcal{Q}=\text{trop}(\mathcal{P})$ es la tropicalización de $\mathcal{P}$, entonces $\{\text{trop}(D_j)\,:\,j=1,\ldots,N(d,g)\}=\{C_i\,:\,i=1,\ldots N^{\text{trop}}(d,g,\mathcal{Q})\}$,
3. defines la multiplicidad $\mu(C_i)$ de C_i como el número de curvas D_j que se tropicaliza en C_i. Luego, el problema sale por definición, pues $N(d,g)$ es la suma de las multiplicidades $\mu(C_1)+\cdots+\mu(C_{N^{\text{trop}}(d,g,\mathcal{Q})})$.

Aunque este problema ya estaba resuelto, este método tiene dos ventajas: primero, el mundo tropical es independiente del mundo algebraico, es decir, podemos comenzar directamente eligiendo una configuración tropical $\mathcal{Q}$ ventajosamente, y segundo, las multiplicidades de las curvas tropicales se calculan combinatoriamente, –a diferencia de recursivamente, como los métodos disponibles anteriormente–.

Teorema 1 (El teorema de la correspondencia de Mikhalkin). *El número $N(d,g)$ se puede calcular tropicalmente.*

Se llama teorema de la correspondencia porque cada una de las curvas algebraicas D_j que nos interesan se envía en una de las curvas tropicales C_i; básicamente queremos usar la combinatoria para resolver problemas clásicos, como el anterior. Es difícil hacerle justicia a un resultado tan bello en un espacio tan pequeño, pero se puede consultar [8, Section 1.7], o el artículo original [9] para saber más.

Después del teorema de la correspondencia de Mikhalkin, el punto fuerte de la aplicación de métodos tropicales a problemas clásicos fue la obtención de resultados tipo teorema de correspondencia. El propósito de este artículo es mostrar que el teorema fundamental (Teorema 14) se puede ver como un caso particular de teorema de correspondencia para el caso de soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales.

2.2. Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales. Está de más decir que las ecuaciones diferenciales siempre han sido un área importantísima no solo de las matemáticas tanto puras como aplicadas, sino también de casi cualquier otra rama del conocimiento humano. También está de más decir que resolverlas es bastante complicado, y que dentro de los métodos de solución particularmente tratables está el de proponer soluciones en series de potencias formales.

Concretamente, consideraremos K un campo de característica cero (podemos suponer $K=\mathbb{C}$) y relaciones *algebraicas* con coeficientes en el anillo $K[\![t,u]\!]$ de series de potencias formales en las variables t,u, de tipo

$$P(t,u;x,x_t,x_u,x_{tu}\ldots,y,y_t,y_u,y_{tu},\ldots). \tag{1}$$

Una ecuación diferencial clásica es el enunciado $P=0$, y buscamos parejas $\varphi(t,u)$, $\psi(t,u)\in K[\![t,u]\!]$ de manera que al hacer la sustitución $x=\varphi,y=\psi$ en (1), la siguiente expresión

$$P|_{x=\varphi,y=\psi}:=P(t,u;\varphi,\varphi_t,\varphi_u,\varphi_{tu},\ldots,\psi,\psi_t,\psi_u,\psi_{tu},\ldots)=0 \tag{2}$$

sea verdadera, donde $\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\psi_{tu} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial u}$, etc. Insistimos en que las relaciones (1) deben de ser algebraicas, por lo que no permitimos expresiones que involucren cosas como raíces cuadras, normas o valores absolutos, o funciones trigonométricas.

Entonces lo que hacemos es considerar expansiones $\varphi(t,u) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j} t^i u^j$, $\psi(t,u) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} b_{i,j} t^i u^j$ con $a_{i,j}, b_{i,j} \in K$, las substituimos en (2) para obtener una serie $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f_{i,j}(\{a_{m,n}, b_{m,n}\}) t^i u^j = 0$, y luego resolvemos el sistema infinito de ecuaciones algebraicas $\{f_{i,j}(\{a_{m,n}, b_{m,n}\}) = 0 : (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$ para los vectores infinitos de coeficientes $(a_{m,n}), (b_{m,n}) \in K^{\mathbb{N}^2}$.

Ejemplo 2. Sea $P(t;x,x') = x - x'$. Al proponer $\varphi(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i t^i$ y hacer la substitución $x = \varphi$, obtenemos $P|_{x=\varphi} = \varphi - \varphi' = \sum_{i\geq 1}(a_{i-1} - i a_i) t^{i-1} = 0$, lo que da $\{a_i = \frac{a_{i-1}}{i} : i \geq 1\}$, y finalmente $\varphi(t) = \varphi(t, a_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_0}{i!} t^i$, $a_0 \in K$.

Ahora consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas $\{P_i = 0\}_i$ con coeficientes en $K[\![t,u]\!]$ como en (1). Una cuestión muy importante, pero claramente muy difícil, es la siguiente:

Problema 2. ¿Qué se puede decir del conjunto de todas las parejas $(\varphi,\psi) \in K[\![t,u]\!] \times K[\![t,u]\!]$ que satisfacen el sistema $\{P_i = 0\}_i$?

Luego, no estamos interesados ni en hallar soluciones concretas de estos sistemas ni en interpretarlas, contrariamente a lo que ocurre comúnmente en Física u otras ciencias; más bien nos interesan las propiedades de los conjuntos de soluciones. Hasta aquí llega el repaso de todo lo que necesitamos saber de ecuaciones diferenciales clásicas.

A inicios de 2015, Dima Grigoriev introdujo en [7] el concepto de ecuación diferencial tropical. Él ya había estudiado previamente la estructura de las soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales algebraicas, y se preguntó si había un *teorema de correspondencia* similar al de la sección 2.1 entre las soluciones de sus ecuaciones diferenciales tropicales y las soluciones de un sistema clásico. Por lo tanto, el objetivo inicial de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales era aplicarla al estudio del conjunto de soluciones en series de potencias de sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales.

El mismo año se probó que dicha correspondencia existía para el caso ordinario [1], y después para el caso parcial en [3]. A partir de ahora, nos dedicaremos a explicar esta correspondencia, la cual se puede consultar en el Teorema 14.

3. Ecuaciones diferenciales con coeficientes en un semi anillo

En esta parte, asumiremos que el lector tiene conocimientos básicos de estructuras algebraicas. En particular todas nuestras estructuras serán conmutativas y con identidad, por lo que procuraremos no estarlo repitiendo.

Como ya comentamos, los semianillos ofrecen un marco algebraico capaz de describir la teoría de ecuaciones diferenciales tanto tropical como la clásica de la sección 2.2. Por lo tanto, en un intento de poner ambos mundos al mismo nivel, los introduciremos como casos particulares de la teoría de semianillos. El lector que quiera saber más sobre esta estructura algebraica, puede consultar [6].

Los semianillos conmutativos con identidad son 5-tuples $S = (S, +, \times, 0, 1)$ muy comunes en la naturaleza matemática, donde cada símbolo representa lo que el lector tiene en mente. De entrada cualquier anillo conmutativo con identidad es un semianillo, pero la clase de semianillos es estrictamente más grande que la de anillos; por ejemplo, los números naturales $S = \mathbb{N}$ equipados con la suma y el producto usuales, o el conjunto potencia $S = \mathcal{P}(X)$ de un conjunto $X \neq \emptyset$, equipado con la unión y la intersección como suma y producto, respectivamente.

Ejercicio 1. Verificar que lo único que le falta a los ejemplos anteriores para ser anillos es que la ecuación $a+b=0$ a veces no tiene solución en S.

Pretenderemos que un semianillo S es un anillo en el que no siempre nos es posible hacer restas, o mejor aún: que un anillo es un semianillo en el que podemos restar. En un curso *clásico* de álgebra abstracta probablemente se nos diga que no es bueno trabajar en una estructura S en el que las ecuaciones del Ejercicio 1 no tengan solución en S, después de todo hemos estado acostumbrados a trabajar con grupos, que son estructuras algebraicas donde todo elemento es invertible: por ejemplo las simetrías de figuras geométricas bajo la composición, el grupo de Galois de una extensión de campos, o la construcción K de Grothendieck, la cual le asocia a todo monoide un grupo (de manera universal).

El hecho de no tener inversos aditivos a veces puede ser remediado agregándolos artificialmente –como cuando pasamos de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.– Sin embargo, estaremos interesados en un cierto tipo de semianillos en los que esto no tiene remedio, y de los cuales $\mathcal{P}(X)$ es un ejemplo.

Ejercicio 2 (No se le pueden añadir inversos a $(\mathcal{P}(X),\cup)$). Probar que el único homomorfismo de semigrupos $(\mathcal{P}(X),\cup,\emptyset) \longrightarrow (G,+,0)$ con G un grupo, es el homomorfismo 0.

En este trabajo, nuestro ejemplo principal de semianillo será el siguiente.

Definición 2. El *semianillo booleano* $\mathbb{B}$ es el conjunto ordenado $\{0<1\}$ con la suma $a+b=\max\{a,b\}$ y el producto de toda la vida.

Al semigrupo $(\mathbb{B},+,0)$ tampoco se le pueden añadir inversos (se prueba como en el Ejercicio 2). Si seguimos con la idea de que esto es *problemático*, entonces la moraleja es que a veces se pueden *remediar los problemas*, y a veces no. Sin embargo nosotros estaremos contentos con estos fenómenos porque los veremos como oportunidades de acceder a nuevos mundos sin alejarnos tanto del contexto usual; después de todo, dentro de los semianillos se encuentran los anillos.

El objeto principal de estudio de esta sección serán las soluciones en series de potencias (formales) de ecuaciones diferenciales en dos mundos muy diferentes: el clásico y el tropical. Entonces, lo primero que vamos a hacer es construir las series de potencias con coeficientes en un semianillo.

Definición 3. Si S es un semianillo, definimos el semianillo $S[\![t,u]\!]$ de *series de potencias formales* en las variables t,u como el conjunto de todas las expresiones

$$a=a(t,u)=\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}t^iu^j, \quad a_{i,j}\in S, \quad A\subset\mathbb{N}^2, \tag{3}$$

equipado con la suma y el producto de series usuales.

El conjunto soporte de la serie (3) es $\mathrm{Supp}(a):=\{(i,j)\in A\ :\ a_{i,j}\neq 0\}$.

Vamos a equipar a $S[\![t,u]\!]$ con tantas derivaciones (i.e. operador lineal que satisface la regla de Leibniz para la derivación de un producto) como variables: si a es de la forma (3), definimos

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\sum_{(i,j)\in A} ia_{i,j}t^{i-1}u^j, \quad \frac{\partial a}{\partial u}=\sum_{(i,j)\in A} ja_{i,j}t^iu^{j-1},$$

donde $ia=\underbrace{a+\cdots+a}_{i-\text{veces}}$ para $i\in\mathbb{N}$. Notemos que $\frac{\partial}{\partial t}\circ\frac{\partial}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\circ\frac{\partial}{\partial t}$, por lo que denotamos a esta composición en común como $\frac{\partial^2}{\partial t\partial u}$.

Ejercicio 3. Muestre que $(\mathbb{B}[\![t,u]\!],+,\times,0,1)$ (donde $\mathbb{B}$ es el semianillo booleano) es un semianillo conmutativo con identidad, y describa concretamente sus elementos.

Luego, muestre que $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} : \mathbb{B}[\![t,u]\!] \longrightarrow \mathbb{B}[\![t,u]\!]$ son derivaciones y describa cómo actúan concretamente en los elementos de $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$.

Ya que tenemos algunas derivadas con que trabajar, introduzcamos ahora operadores diferenciales. El formalismo algebraico que utilizaremos es el de polinomios diferenciales, el cual se puede consultar en la Definición 8.

Definición 4. Un *monomio diferencial* con coeficientes en el semianillo $S[\![t,u]\!]$ en las variables x, y es un producto finito de las variables $\{x_{(i,j)}, y_{(k,l)} : (i,j),(k,l) \in \mathbb{N}^2\}$, es decir, una expresión de la forma

$$ax_{I_1}^{m_{I_1}} \cdots x_{I_s}^{m_{I_s}} y_{J_1}^{m_{J_1}} \cdots y_{J_t}^{m_{J_t}}, \quad \text{con } a \in S[\![t,u]\!],\ I_i, J_j \in \mathbb{N}^2,\ m_{I_i}, m_{J_j} \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Se supone que cada sub-índice $I = (i,j)$ que aparece en las variables x, y codifica el operador diferencial $\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial u^j}$, por lo que si $I_i = (a_i, b_i)$, $J_j = (c_j, d_j)$, el monomio (4) es una forma abreviada de escribir el siguiente operador diferencial:

$$\begin{aligned} & S[\![t,u]\!] \times S[\![t,u]\!] \longrightarrow S[\![t,u]\!] \\ & (\varphi(t,u), \psi(t,u)) \mapsto a \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial^{a_i+b_i} \varphi(t,u)}{\partial t^{a_i} \partial u^{b_i}} \right)^{m_{I_i}} \prod_{j=1}^{t} \left(\frac{\partial^{c_j+d_j} \psi(t,u)}{\partial t^{c_j} \partial u^{d_j}} \right)^{m_{J_j}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Para ahorrar espacio, podemos escribir la sucesión $x_{I_1}^{m_{I_1}} \cdots x_{I_s}^{m_{I_s}}$ (respectivamente $y_{J_1}^{m_{J_1}} \cdots y_{J_t}^{m_{J_t}}$) como $x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}$ (respectivamente $y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m_J}}$) donde $\mathbf{m_I}$ y $\mathbf{m_J}$ son ciertas matrices con entradas en $\mathbb{N}$, como mencionamos el Ejercicio 4. Escribiremos $ax_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}} y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m_J}}|_{x=\varphi, y=\psi}$ en vez de la forma desarrollada de la evaluación del operador a la derecha de (5).

Dado que una suma finita de monomios es un polinomio, una suma finita $P = a_1(t,u) x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}} y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}} + \cdots + a_n(t,u) x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}} y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}$ de monomios diferenciales se llama un polinomio diferencial, y en este caso induce por linealidad un operador diferencial $P : S[\![t,u]\!] \times S[\![t,u]\!] \longrightarrow S[\![t,u]\!]$ que manda $(\varphi(t,u), \psi(t,u))$ en $P(\varphi, \psi)$, la suma de las evaluaciones $\sum_k a_k x_{\mathbf{I_k}}^{\mathbf{m_{I_k}}} y_{\mathbf{J_k}}^{\mathbf{m_{J_k}}}|_{x=\varphi, y=\psi}$.

Ejercicio 4. Sea S un semianillo y considere el siguiente polinomio diferencial:

$$P = a(t,u) x_{(1,0)} y_{(1,0)} + b(t,u) y_{(1,1)}^2 + c(t,u) x_{(0,0)} x_{(1,0)}^2 x_{(0,1)}^3 x_{(1,1)}^4.$$

Como indicamos anteriormente, cada monomio diferencial se puede codificar con una pareja de matrices $(\mathbf{m_I}, \mathbf{m_J})$, por ejemplo, el tercero estaría inducido por la pareja $(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, 0)$. Describa las parejas de matrices de los dos monomios restantes, y el operador diferencial determinado por P.

La ventaja de este acercamiento general es que el operador $P : S[\![t,u]\!] \times S[\![t,u]\!] \longrightarrow S[\![t,u]\!]$ inducido por un polinomio P es válido para series con coeficientes en cualquier semianillo S. A partir de ahora nos enfocaremos solamente en dos semianillos radicalmente diferentes, a saber $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$.

Definición 5. Si P es un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{C}[\![t,u]\!]$, decimos que una pareja $(\varphi(t,u), \psi(t,u)) \in \mathbb{C}[\![t,u]\!] \times \mathbb{C}[\![t,u]\!]$ es *solución* de P si $P(\varphi, \psi) = 0$.

Ejercicio 5. Calcular todas las soluciones $\varphi = \sum_{(i,j)} a_{i,j} t^i u^j \in \mathbb{C}[\![t,u]\!]$ del polinomio diferencial complejo $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ de una variable x.

Ahora viene una pequeña discusión filosófica. Si P es un polinomio diferencial con coeficientes $S[\![t,u]\!]$, entonces el enunciado $P = 0$ es una ecuación (de *igualdad*) diferencial (pues P es un polinomio diferencial). Este enunciado tiene sentido para cualquier semianillo S, y podemos investigar la naturaleza del conjunto de parejas $(\varphi, \psi) \in S[\![t,u]\!] \times S[\![t,u]\!]$ que satisfacen la ecuación diferencial $P = 0$. Si acaso S es un anillo, recuperamos la noción usual de solución de una ecuación diferencial de la sección 2.2, sin embargo, veremos que esta definición no da buenos resultados en el caso $S=\mathbb{B}$, por lo que tendremos que definir el concepto de solución de manera diferente.

Es por eso que la Definición 5 tiene un cambio sutil, ya que remplazamos los conceptos de anillos de *ecuación diferencial* $P=0$ y de *solución de* $P=0$ por el de *solución del polinomio* P, evitando hacer mención a la condición $P=0$. Por lo tanto, aunque el acercamiento por semianillos unifica ciertas cosas, otras deben de ser tratadas por separado.

3.1. Soluciones para polinomios diferenciales con coeficientes en $\mathbb{B}$. Recordemos que $\mathbb{B}$ solo tiene dos elementos, y del Ejercicio 3 sabemos que los elementos de $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ y las derivaciones son fáciles de describir, puesto que si $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, entonces el operador $\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m\partial u^n}:\mathbb{B}[\![t,u]\!]\to\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ envía $a=\sum_{(i,j)\in A}t^iu^j$ en $\frac{\partial^{m+n}a}{\partial t^m\partial u^n}=\sum_{(i,j)\in(A+(-m,-n))_{\geq(0,0)}}t^iu^j$. Así que derivar series booleanas es muy fácil: el operador $\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m\partial u^n}$ actúa en los elementos $a\in\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ como operadores de desplazamiento por el vector entero $(-m,-n)$ en su soporte $\mathrm{Supp}(a)\subset\mathbb{N}^2$. Ver Figura 1.

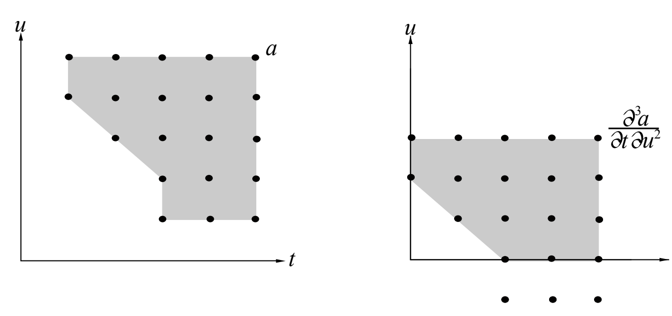

FIGURA 1. La serie booleana $a(t,u)$ identificada con su soporte y la acción del operador $\frac{\partial^3}{\partial t\partial u^2}$ en ella.

Ahora nos preguntamos,

Problema 3. Dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$, ¿cuándo decimos que la pareja $(\varphi,\psi)\in\mathbb{B}[\![t,u]\!]\times\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ es una solución de P?

Veremos a continuación que aunque la definición usual $P(\varphi,\psi)=0$ tiene sentido también en este caso, nos da resultados incompletos.

Ejercicio 6. Un semianillo S es idempotente si $a+a=a$ para todo $a\in S$. Mostrar que en un semianillo idempotente, si $\sum_i a_i=0$, entonces $a_i=0$ para todo i.

En el siguiente ejercicio nos damos cuenta de que como la estructura de semianillo es muy cercana a la de anillo, muchos de los conceptos de anillos *se transfieren* de manera natural a semianillos.

Ejercicio 7. Mostrar que $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ es idempotente, y que no tiene divisores de cero, esto es, si $ab=0$ entonces $a=0$ o $b=0$.

Sean $P=a_1(t,u)x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}}y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}}+\cdots+a_n(t,u)x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}}y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ y $(\varphi,\psi)\in\mathbb{B}[\![t,u]\!]\times\mathbb{B}[\![t,u]\!]$. Del Ejercicio 7, tenemos que $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ es idempotente, por ende obtenemos que $P(\varphi,\psi)=0$ si y solo si la evaluación de cada monomio $a_i(t,u)x_{\mathbf{I_i}}^{\mathbf{m_{I_i}}}y_{\mathbf{J_i}}^{\mathbf{m_{J_i}}}|_{x=\varphi,y=\psi}$ es 0, y por el mismo ejercicio sabemos que $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ no tiene divisores de cero, por lo tanto deducimos que $x_{\mathbf{I_i}}^{\mathbf{m_{I_i}}}|_{x=\varphi}=0$ o que $y_{\mathbf{J_i}}^{\mathbf{m_{J_i}}}|_{y=\psi}=0$.

Luego $x_{\mathbf{I_i}}^{\mathbf{m_{I_i}}} = x_{I_1}^{m_{I_1}} \cdots x_{I_s}^{m_{I_s}}$ con $I_j = (a_j, b_j)$, usamos la definición (5) para obtener $x_{\mathbf{I_i}}^{\mathbf{m_{I_i}}}|_{x=\varphi} = \prod_j \left(\frac{\partial^{a_j+b_j}\varphi(t,u)}{\partial t^{a_j}\partial u^{b_j}}\right)^{m_{I_j}} = 0$, y esto sucede si $\frac{\partial^{a_j+b_j}\varphi(t,u)}{\partial t^{a_j}\partial u^{b_j}} = 0$ para algún $I_j = (a_j, b_j)$.

Ejercicio 8. Dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$, formular las condiciones concretas sobre $(\varphi,\psi) \in \mathbb{B}[\![t,u]\!] \times \mathbb{B}[\![t,u]\!]$ para tener $P(\varphi,\psi) = 0$.

Al trabajar sobre semianillos idempotentes, frecuentemente encontramos fenómenos como los del Ejercicio 8, en el que la traducción literal de los conceptos clásicos no sirve de mucho, por lo que se tiene que encontrar un reemplazo adecuado a nuestros fines. Para formular *correctamente* el concepto de solución de un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$, necesitaremos lo siguiente.

Definición 6. El *polígono de Newton* $\mathrm{New}(A)$ de $A \subset \mathbb{N}^2$ es la envoltura convexa en $\mathbb{R}^2$ del conjunto

$$\{I + J \in \mathbb{N}^2 \;:\; I \in A \text{ y } J \in \mathbb{N}^2\}.$$

El conjunto $\mathrm{Vert}(A)$ de vértices de A son los puntos extremos del polígono $\mathrm{New}(A)$.

Luego $\mathrm{New}(A)$ son todas las combinaciones convexas finitas de elementos de la forma $(i+m, j+n)$ con $(i,j) \in A$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Es un hecho básico de teoría de la convexidad que $\mathrm{Vert}(A)$ siempre es un conjunto finito (cf. [5, Theorem 3.1.29]). Dada una serie booleana $\varphi = \sum_{(i,j)\in A} t^i u^j$ con conjunto soporte A, decimos que el polinomio $\sum_{(i,j)\in \mathrm{Vert}(A)} t^i u^j$ es el polinomio de vértices de φ y lo denotamos por $V(\varphi)$.

Ejemplo 3. El polinomio de vértices de la serie booleana $\varphi = tu^4 + t^2u^3 + t^3u^3 + t^4u$ es $V(\varphi) = tu^4 + t^4u$, de acuerdo a la Figura 2.

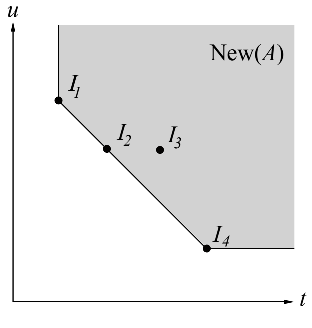

FIGURA 2. El conjunto soporte A de la serie $\varphi = tu^4 + t^2u^3 + t^3u^3 + t^4u$, su polígono de Newton $\mathrm{New}(A)$, y su conjunto de vértices $\mathrm{Vert}(A) = \{I_1, I_4\}$. Luego $V(\varphi) = tu^4 + t^4u$.

Con lo anterior podemos dar la definición de soluciones de polinomios diferenciales con coefficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$.

Definición 7. Sea $P = a_1(t,u)x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}} y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}} + \cdots + a_n(t,u)x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}} y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$. Decimos que una pareja $(\varphi,\psi) \in \mathbb{B}[\![t,u]\!] \times \mathbb{B}[\![t,u]\!]$ es *solución* de P si cada monomio t^iu^j del polinomio $V(P(\varphi,\psi))$ aparece en $V(a_i(t,u)x_{\mathbf{I_i}}^{\mathbf{m_{I_i}}} y_{\mathbf{J_i}}^{\mathbf{m_{J_i}}}|_{x=\varphi,y=\psi})$ para al menos dos monomios diferentes de P.

Ejemplo 4. Retomemos el polinomio $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2+u^3)$ con coeficientes en $\mathbb{C}[\![t,u]\!]$ del Ejercicio 5. Ya que todos los coeficientes numéricos de las series t, u, t^2+u^3 son 1, podemos interpretar a P también como un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$.

Vamos a probar que $\varphi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[\![t, u]\!]$ es una solución de P según la Definición 7. Primero evaluamos cada monomio de P en $x = \varphi = t^2 + tu + u^3$:

$$tx_{(1,0)}|_{x=\varphi} = t\frac{\partial}{\partial t}(t^2 + tu + u^3) = t^2 + tu,$$

y de manera similar para los otros dos monomios. Así obtenemos el valor de P evaluado en φ:

$$P(\varphi) = (t^2 + tu) + (tu + u^3) + (t^2 + u^3) = t^2 + tu + u^3.$$

Luego, de la Figura 3b calculamos el conjunto de vértices $V(P(\varphi)) = V(t^2+tu+u^3) = t^2 + tu + u^3$, y de la Figura 3a calculamos el conjunto de vértices de cada uno de los tres monomios de P evaluados en φ: $V(t^2 + tu) = t^2 + tu$, $V(tu + u^3) = tu + u^3$ y $V(t^2+u^3) = t^2+u^3$. Finalmente vemos que la condición de la Definición 7 se satisface.

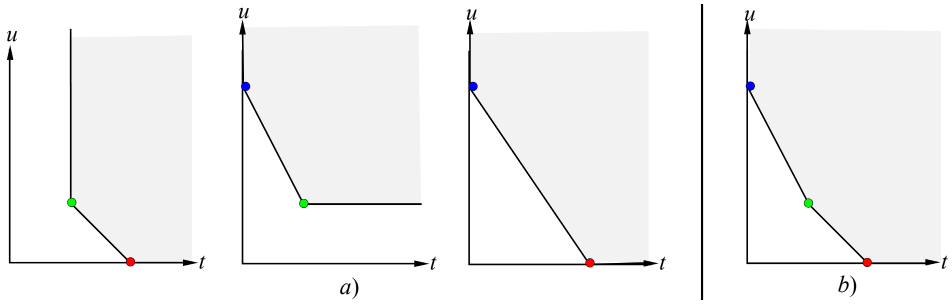

FIGURA 3. Polígonos de Newton junto con sus conjuntos de vértices para los elementos del Ejemplo 4: a) para cada uno de los tres monomios de P evaluados en φ; y b) para $V(P(\varphi))$.

Observación 1. Aunque la Definición 7 es misteriosa, es importante notar que dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t, u]\!]$ y una pareja $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[\![t, u]\!] \times \mathbb{B}[\![t, u]\!]$ (que a priori es un objeto infinito), solo es necesario verificar un número finito de condiciones para ver si (φ, ψ) es o no solución de P. En general, P impone un número finito de condiciones sobre el soporte de los elementos de su espacio de soluciones, como podemos ver en el Ejercicio 9.

Ejercicio 9. En el Ejemplo 4, mostramos que la serie $\varphi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[\![t, u]\!]$ es una solución de $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$. Muestre usando la Definición 7 que el espacio de soluciones de P está descrito por el siguiente número finito de condiciones:

$$\left\{\varphi = \sum_{(i,j)\in A} t^i u^j \ : \ (1, 0), (0, 1), (0, 2) \notin A, \text{ y } (2, 0), (0, 3) \in A\right\}.$$

Es claro que el fenómeno descrito en la Observación 1 no sucede para las soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales con coeficientes en un anillo. Por ejemplo, el polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ impone un conjunto infinito de ecuaciones sobre los coeficientes de los elementos $\varphi = \sum_{i,j} a_{i,j} t^i u^j \in \mathbb{C}[\![t, u]\!]$ de su espacio de soluciones, los cuales incluyen $a_{i,i} = 0$ para todo $i \geq 1$, y $ia_{i,j} + ja_{i,j} = 0$ cada vez que $i, j \geq 1$, $i \neq j$. Volveremos sobre esto más tarde.

Ya hemos definido de manera separada el concepto de solución de un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{C}[\![t, u]\!]$ y en $\mathbb{B}[\![t, u]\!]$, y hemos visto que los formalismos obtenidos son bastante diferentes. Lo que haremos a continuación será conectar estos dos mundos con diversos mapeos de *tropicalización*, es decir asociarle a objetos definidos sobre $\mathbb{C}$ ciertos objetos definidos sobre $\mathbb{B}$. Esto nos dará acceso a enunciados de comparación, y lo increíble será que ¡los soportes de las soluciones de ciertos sistemas sobre estos dos semianillos coinciden!

4. ¿Para qué sirven las ecuaciones diferenciales tropicales?

Como dijimos al inicio, el objetivo incial de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales tal y como se introdujo en la sección 3.1, era el de aplicarla al problema de encontrar soluciones en series de potencias formales para sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales. De hecho, para muchas personas, los desarrollos ofrecidos por los métodos tropicales son estériles si no se pueden aplicar a los problemas de la matemática clásica.

Concretamente, sea K un campo de característica cero y $\{P_i\}_i$ un conjunto de polinomios diferenciales con coeficientes en $K[\![t,u]\!]$, como los que manejamos en la sección anterior para el caso $K=\mathbb{C}$. Recordemos que en el problema 2 nos preguntamos la naturaleza del conjunto de todas las parejas de series $(\varphi,\psi)\in K[\![t,u]\!]\times K[\![t,u]\!]$ que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales $\{P_i=0\}_i$.

Esto cae en la rama conocida como geometría algebraica (diferencial), puesto que nos interesa hallar las soluciones comunes de un sistema de polinomios (diferenciales).

En esta sección discutiremos algunos aspectos del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical, tal y como está en [3]. Esta es la parte más técnica de este trabajo, pues tiende el puente entre el mundo clásico y el tropical. Para poder hablar de cosas interesantes, en esta sección vamos a cambiar $\mathbb{C}$ por un campo de característica cero K, y como no queremos dar falsas esperanzas, aunque complique las cosas, lo supondremos algebraicamente cerrado y no-numerable. Luego, campos como la cerradura algebraica de los números racionales $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, o el campo de los números reales $\mathbb{R}$, quedarán excluidos.

Definición 8. Sea S un semianillo. El *semianillo de polinomios diferenciales* con coeficientes en $S[\![t,u]\!]$ y en dos variables diferenciales x,y es el siguiente semianillo de polinomios en infinitas variables:

$$S[\![t,u]\!][x_{(i,j)},y_{(k,l)}\ :\ (i,j),(k,l)\in\mathbb{N}^2] \tag{6}$$

Recordemos que los elementos de (6) son sumas finitas de monomios diferenciales como en (4). Para ahorrar espacio, vamos a denotar el semianillo (6) como $S[\![t,u]\!]\{x,y\}$, lo cual es un pequeño abuso de notación, pero lo corregiremos más adelante.

Sea $\Sigma\subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ un conjunto arbitrario de polinomios diferenciales. Denotaremos por $\mathrm{Sol}(\Sigma)$ el conjunto de las parejas $(\varphi,\psi)\in K[\![t,u]\!]\times K[\![t,u]\!]$ que sean solución común a todos los elementos $P\in\Sigma$, en el sentido de la Definición 5. El sueño sería poder describir el conjunto $\mathrm{Sol}(\Sigma)$, pero dado que este problema es muy difícil[3], nos contentaremos con poder decir algo –cualquier cosa– sobre él.

Para hacer esto, trasladaremos la discusión al mundo discreto al tropicalizar tanto nuestros polinomios diferenciales de Σ como las parejas $(\varphi,\psi)\in K[\![t,u]\!]\times K[\![t,u]\!]$ de las soluciones del sistema $\{\Sigma=0\}$.

Definición 9. Si $\varphi=\sum_{(i,j)\in A}a_{i,j}t^iu^j$ es un elemento de $K[\![t,u]\!]$ con conjunto soporte $\mathrm{Supp}(\varphi)=A$, su *soporte booleano* es el elemento de $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ definido por

$$\mathrm{sp}(\varphi):=\sum_{(i,j)\in A}t^iu^j.$$

Notemos que al pasar al contexto de objetos sobre $\mathbb{B}$ estamos tropicalizando, ya que las series $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ se pueden identificar efectivamente con su soporte, que son subconjuntos del conjunto discreto $\mathbb{N}^2$.

Si P es un polinomio diferencial con coeficientes en $K[\![t,u]\!]$, lo podemos transformar en un polinomio diferencial $\mathrm{sp}(P)$ con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ al tomar el soporte booleano de los coeficientes de sus monomios diferenciales.

[3]De hecho es algorítmicamente imposible, según los trabajos de J. Denef y L. Lipschitz.

Definición 10. Sea $P = a_1(t,u)x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}} y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}} + \cdots + a_n(t,u)x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}} y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $K[\![t,u]\!]$. Definimos su *soporte* como

$$\mathrm{sp}(P) := \mathrm{sp}(a_1)x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}} y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}} + \cdots + \mathrm{sp}(a_n)x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}} y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}.$$

Como se dice frecuentemente en el área, los objetos que acabamos de definir son *sombras combinatorias* de los objetos clásicos de los que provienen.

Ejemplo 5. En el Ejemplo 4, consideramos el polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ con coficientes en $\mathbb{C}[\![t,u]\!]$, y justificamos el hecho de que podíamos tratarlo como un polinomio con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ simplemente diciendo que las series t, u, t^2+u^3 tenían coeficientes $\{0,1\}$. Lo que en realidad hicimos fue tomar $\mathrm{sp}(P) = \mathrm{sp}(t)x_{(1,0)} + \mathrm{sp}(u)x_{(0,1)} + \mathrm{sp}(t^2+u^3) = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2+u^3)$, y aunque P y $\mathrm{sp}(P)$ se escriben igual, representan objetos distintos.

La primera relación que nos indica que vamos por el camino correcto es la siguiente.

Ejercicio 10. En el Ejercicio 5, se calcularon las soluciones $\varphi = \sum_{(i,j)} a_{i,j}t^iu^j \in \mathbb{C}[\![t,u]\!]$ de $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2+u^3)$. Muestre que si φ es una solución de P, entonces la serie booleana $\mathrm{sp}(\varphi)$ es una solución de $\mathrm{sp}(P)$ en el sentido de la Definición 7.

Con el ejercicio anterior queremos motivar la validez del siguiente resultado.

Proposición 11. *Sea $P \in K[\![t,u]\!]\{x,y\}$. Si $(\varphi,\psi) \in K[\![t,u]\!] \times K[\![t,u]\!]$ es una solución de P, entonces $(sp(\varphi), sp(\psi)) \in \mathbb{B}[\![t,u]\!] \times \mathbb{B}[\![t,u]\!]$ es solución de $sp(P) \in \mathbb{B}[\![t,u]\!]\{x,y\}$.*

Demostración. Para probar esto necesitamos un poco más de herramientas que las que hemos introducido, pero trataremos de dar una idea de las partes esenciales. Un concepto clave es el de valuación, el cual se puede consultar en la sección 5.

Primero escribimos $P = a_1(t,u)x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}} y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}} + \cdots + a_n(t,u)x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}} y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}$, $A_i = \mathrm{Supp}(a_i)$ para $i = 1,\ldots,n$, y $A = \mathrm{Supp}(\varphi)$, $B = \mathrm{Supp}(\psi)$, de manera que $\mathrm{sp}(a_i) = \sum_{(i,j)\in A_i} t^iu^j$, $\mathrm{sp}(\varphi) = \sum_{(i,j)\in A} t^iu^j$ y $\mathrm{sp}(\psi) = \sum_{(i,j)\in B} t^iu^j$.

Por definición, $\mathrm{sp}(P) = \mathrm{sp}(a_1)x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}} y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}} + \cdots + \mathrm{sp}(a_n)x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}} y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}$ es un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[\![t,u]\!]$, y $(\mathrm{sp}(\varphi), \mathrm{sp}(\psi)) \in \mathbb{B}[\![t,u]\!] \times \mathbb{B}[\![t,u]\!]$ son un par de series booleanas, por lo que la siguiente evaluación tiene sentido :

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}(P)(\mathrm{sp}(\varphi),\mathrm{sp}(\psi)) = \mathrm{sp}(a_1)x_{\mathbf{I_1}}^{\mathbf{m_{I_1}}} y_{\mathbf{J_1}}^{\mathbf{m_{J_1}}}|_{x=\mathrm{sp}(\varphi),y=\mathrm{sp}(\psi)} + \cdots \\ +\mathrm{sp}(a_n)x_{\mathbf{I_n}}^{\mathbf{m_{I_n}}} y_{\mathbf{J_n}}^{\mathbf{m_{J_n}}}|_{x=\mathrm{sp}(\varphi),y=\mathrm{sp}(\psi)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Por otro lado, la evaluación (7) es por definición una serie booleana en las variables t,u, y si C es su conjunto soporte, entonces podemos escribir

$$\mathrm{sp}(P)(\mathrm{sp}(\varphi),\mathrm{sp}(\psi)) = \sum_{(i,j)\in C} t^iu^j = \sum_{(i,j)\in \mathrm{Vert}(C)} t^iu^j + \xi,$$

donde $V(\mathrm{sp}(P)(\mathrm{sp}(\varphi),\mathrm{sp}(\psi))) = \sum_{(i,j)\in\mathrm{Vert}(C)} t^iu^j$ es el polinomio de vértices de la evaluación (7) y ξ tiene soporte $C\setminus\mathrm{Vert}(C)$. De acuerdo a la Definición 7, tenemos que verificar que para cualquier monomio en t^iu^j con $(i,j)\in\mathrm{Vert}(C)$, existen al menos dos monomios diferentes en la expansión (7) que lo contienen en su respectivo polinomio de vértices. Claro, suponiendo que $P(\varphi,\psi) = 0$ se satisface.

Ahora notamos que si tenemos un monomio diferencial $x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}$ y una serie $\varphi \in K[\![t,u]\!]$, entonces

$$\mathrm{sp}(x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}|_{x=\varphi}) = x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}|_{x=\mathrm{sp}(\varphi)}, \tag{8}$$

que quiere decir que, en este caso, las operación de tomar el soporte booleano y la operación de evaluar conmutan. Invitamos al lector a convencerse de (8), pero debe de ser claro puesto que el campo K es de característica cero y los soportes son los mismos.

En general tenemos

$$\mathrm{sp}(ax_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m_J}}|_{x=\varphi,y=\psi}) \subseteq \mathrm{sp}(a)x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m_J}}|_{x=\mathrm{sp}(\varphi),y=\mathrm{sp}(\psi)}, \tag{9}$$

lo que quiere decir que el mapeo sp *no es multiplicativo.* Esto viene del hecho de que puede haber cancelaciones aditivas del lado izquierdo de (9), pero éstas no son reflejadas del lado derecho puesto que no hay inversos aditivos. Sin embargo, veremos que esto no afecta de ninguna manera el cálculo del polinomio de vértices que nos interesa, ¡por una maravillosa propiedad de unicidad de los vértices de la suma de dos politopos convexos que se halla escondida en el siguiente enunciado!

Hecho: sean $\varphi, \psi \in \mathbb{B}[\![t,u]\!]$ con conjuntos soportes A y B respectivamente, y sea $\gamma = \varphi\psi$ su producto con conjunto soporte C. Si $(i_C, j_C) \in \mathbb{N}^2$ es un vértice de C, entonces existen únicos vértices (i_A, j_A) de A y (i_B, j_B) de B tales que $(i_C, j_C) = (i_A, j_A) + (i_B, j_B)$. Ver [4, Lemma 6].

En particular, esto quiere decir que el polinomio de vértices del lado derecho de (9) *tiene un único levantamiento* $p(t,u)$ en la evaluación $ax_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m_J}}|_{x=\varphi,y=\psi}$, ya que la unicidad de la expresión $(i_C, j_C) = (i_A, j_A) + (i_B, j_B)$ implica que no puede haber cancelaciones aditivas. Luego podemos escribir

$$a_i x_{\mathbf{I_i}}^{\mathbf{m_{I_i}}} y_{\mathbf{J_i}}^{\mathbf{m_{J_i}}}|_{x=\varphi,y=\psi} = p_i(t,u) + \Xi_i,$$

donde $\mathrm{sp}(p_i(t,u)) = \sum_{(i,j)\in \mathrm{Vert}(C)} t^i u^j$ es un polinomio que agrupa los *términos iniciales* (el levantamiento del polinomio de vértices), y Ξ_i es una serie con *términos de orden superior* (todo lo demás). Ahora tenemos

$$P(\varphi,\psi) = (p_1(t,u) + \Xi_1) + \cdots + (p_n(t,u) + \Xi_n) = 0,$$

y nos concentramos en los soportes de los elementos de la expresión anterior. Vemos que $\mathrm{sp}(p_i(t,u))$ consiste de los *mínimos* de $\mathrm{sp}(a_i)x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m_J}}|_{x=\mathrm{sp}(\varphi),y=\mathrm{sp}(\psi)}$, y los mínimos de la suma $\sum_i \mathrm{sp}(a_i)x_{\mathbf{I_i}}^{\mathbf{m_{I_i}}}y_{\mathbf{J_i}}^{\mathbf{m_{J_i}}}|_{x=\mathrm{sp}(\varphi),y=\mathrm{sp}(\psi)}$ forman el polinomio de vértices $V(\mathrm{sp}(P)(\mathrm{sp}(\varphi),\mathrm{sp}(\psi))) = \sum_{(i,j)\in\mathrm{Vert}(C)} t^i u^j$ de la evaluación (7).

Finalmente, dado que $P(\varphi,\psi) = 0$, entonces cada mínimo global debe de aparecer como mínimo local en al menos dos monomios de P para que los coeficientes puedan ser capaces de sumar 0, luego, como los mínimos locales (monomiales) sí pasan a mínimos locales en $\mathrm{sp}(p)$, hemos deducido que éste último polinomio se anula en el punto indicado, de acuerdo a la Definición 7. □

Por lo tanto, dado un polinomio diferencial $P \in K[\![t,u]\!]\{x,y\}$, ya vimos que los soportes booleanos de sus soluciones son soluciones de su polinomio diferencial soporte $\mathrm{sp}(P)$. El siguiente paso es preguntarse :

¿Qué tanto difieren los conjuntos de soluciones de $\mathrm{sp}(P)$, y de los soportes booleanos de las soluciones algebraicas de P del conjunto ? En general, un levantamiento de una solución (φ,ψ) de $\mathrm{sp}(P)$ es una solución (Φ,Ψ) de P tal que $(\mathrm{sp}(\Phi),\mathrm{sp}(\Psi)) = (\varphi,\psi)$.

No es difícil ver que en general $\mathrm{sp}(P)$ tiene soluciones *artificiales* (combinatorias), es decir, que no tienen un levantamiento.

Ejercicio 11 (Soluciones tropicales artificiales)**.** Sea P el polinomio diferencial complejo del Ejemplo 5. Del Ejemplo 4 sabemos que $\psi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[\![t,u]\!]$ es solución del polinomio booleano $\mathrm{sp}(P)$. Muestre que ψ no tiene un levantamiento a una solución de P.

Ejercicio 12 (Soluciones tropicales artificiales, bis)**.** Sea $P = x - x_1 \in \mathbb{C}[\![t]\!]\{x\}$ el polinomio del Ejemplo 2. Muestre que el conjunto de soluciones de $\mathrm{sp}(P)$ es

$$\left\{ a = \sum_i t^i \in \mathbb{B}[\![t]\!] \;:\; 0, 1 \in \mathrm{Supp}(a) \right\} \cup \{0\}.$$

Concluimos que tropicalizando nuestras ecuaciones, aparte de recuperar los soportes de las soluciones algebraicas obtenemos también soluciones artificiales. Entonces podemos preguntarnos: ¿qué utilidad tiene la teoría tropical para la teoría clásica? Es aquí donde entra el enunciado del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical, el cual dice :

dado un sistema $\Sigma \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$*, sí es posible, usando métodos tropicales, calcular exactamente el conjunto de soportes de sus soluciones*

$$\{(A,B)\in\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)\times\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)\ :\ \text{existe } (\varphi,\psi)\in\mathrm{Sol}(\Sigma) \text{ con } \mathrm{Supp}(\varphi)=A, \mathrm{Supp}(\psi)=B\},$$

a condición de que calculemos los conjuntos de soluciones de suficientes polinomios diferenciales tropicales asociados a Σ.

Esto es, bajo ciertas condiciones, las soluciones comunes de ciertos sistemas de polinomios diferenciales tropicales serán exactamente los soportes booleanos de soluciones de sistemas clásicos. Clarifiquemos esto.

4.1. El teorema fundamental. Notemos que $S[\![t,u]\!] \subset S[\![t,u]\!][x_{(i,j)}, y_{(k,l)} : (i,j),(k,l)\in\mathbb{N}^2]$, y por razones técnicas, necesitamos extender las derivadas $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}$ que ya tenemos en los elementos de $S[\![t,u]\!]$ a derivadas de polinomios diferenciales.

Entonces, dado un polinomio diferencial P, queremos definir los polinomios diferenciales $\frac{\partial P}{\partial t}$ y $\frac{\partial P}{\partial u}$. Como $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}$ deben ser lineales, basta definir su acción en un monomio diferencial $a(t,u)x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m_I}}y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m_J}}$ como en (4), y finalmente como debe extender las derivadas de series que ya teníamos, y satisfacer la regla de Leibniz para la derivación de un producto, es suficiente definir su acción en las variables $x_{(i,j)}, y_{(k,l)}$. Los definimos como operadores de desplazamiento, concretamente:

$$\frac{\partial x_{(i,j)}}{\partial t} := x_{(i+1,j)} \qquad \frac{\partial x_{(i,j)}}{\partial u} := x_{(i,j+1)},$$

y de manera similar para las $y_{(k,l)}$.

Ejemplo 6. Sea $P = ax_{(1,0)}y_{(1,0)} + by_{(1,1)}^2 + cx_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4$ el polinomio del Ejercicio 4. Calculemos $\frac{\partial P}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial P}{\partial t} &= \tfrac{\partial a}{\partial t}x_{(1,0)}y_{(1,0)} + a\tfrac{\partial}{\partial t}(x_{(1,0)}y_{(1,0)}) + \tfrac{\partial b}{\partial t}y_{(1,1)}^2 + 2by_{(1,1)}y_{(2,1)} + \\ &+ \tfrac{\partial c}{\partial t}x_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4 + c\tfrac{\partial}{\partial t}(x_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4),\end{aligned}$$

y luego tenemos que desarrollar cada uno de los términos entre paréntesis, por ejemplo: $\frac{\partial}{\partial t}(x_{(1,0)}y_{(1,0)}) = x_{(1,0)}y_{(2,0)} + x_{(2,0)}y_{(1,0)}$, etc.

Ahora si ya podemos introducir el concepto más importante de esta sección. Es la pareja $(S[\![t,u]\!][x_{(i,j)}, y_{(k,l)}], \{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}\})$ la que se denota tradicionalmente como $S[\![t,u]\!]\{x,y\}$.

Definición 12. Un ideal $G \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ es *diferencial* si $\frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial u} \in G$ cada vez que $P \in G$.

Ejercicio 13. Sea $P \in K[\![t,u]\!]\{x,y\}$. Muestre que el ideal (usual) $[P]$ generado por $\{\frac{\partial^{m+n}P}{\partial t^m \partial u^n} : (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$ en $K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ es un ideal diferencial, y que es el más pequeño que contiene a P.

Recordemos que dada una familia $\Sigma \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$, denotamos por $\mathrm{Sol}(\Sigma)$ el conjunto de las parejas $(\varphi,\psi)\in K[\![t,u]\!]\times K[\![t,u]\!]$ que son solución común a todos los elementos $P\in\Sigma$, en el sentido de la Definición 5. También existe el ideal diferencial $[\Sigma]$ generado por Σ (ver Ejercicio 13), y ambos sistemas tienen las mismas soluciones (ver Ejercicio 15). Insistimos en que hallar $\mathrm{Sol}(\Sigma)$ se parece mucho a encontrar el conjunto de puntos $K[\![t,u]\!]$-racionales de un esquema afín no Noetheriano, por lo que a veces las llamamos AD-variedades, por Algebraica Diferencial.

De manera similar, si $P\in\mathbb{B}[\![t,u]\!]\{x,y\}$, denotamos por $\mathrm{Sol}(P)\subset\mathbb{B}[\![t,u]\!]\times\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ el conjunto de todas las parejas $(\varphi,\psi)\in\mathbb{B}[\![t,u]\!]\times\mathbb{B}[\![t,u]\!]$ que son solución de P.

Definición 13. Una *AD-variedad tropical* es cualquier conjunto de la forma

$$X := \bigcap_{P \in G} \mathrm{Sol}(\mathrm{sp}(P))$$

donde $G \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ es un ideal diferencial.

Dada cualquier familia $\Sigma \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$, la tropicalización $\mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([\Sigma]))$ de su AD-variedad asociada $\mathrm{Sol}(\Sigma)$ es la AD-variedad tropical asociada al ideal diferencial $[\Sigma]$.

Ejemplo 7 (AD-Hipersuperficies tropicales)**.** Llamamos AD-hipersuperficie al conjunto de ceros $\mathrm{Sol}(P)$ de un solo polinomio $P \in K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ (por razones obvias).

Para calcular la tropicalización de esta hipersuperficie, primero tenemos que calcular el ideal diferencial $[P] \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ como en el Ejercicio 13, y la tropicalización es $\bigcap_{Q\in[P]} \mathrm{Sol}(\mathrm{sp}(Q))$.

Ahora si estamos listos para ver cuáles sistemas tropicales vienen del álgebra.

Teorema 14 (Teorema fundamental). *Sea $\Sigma \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ arbitrario, con K un campo de característica cero, algebraicamente cerrado y no numerable.*

Entonces para cualquier (φ,ψ) en la AD-variedad tropical Sol(sp($[\Sigma]$)), existe una solución $(\Phi,\Psi) \in K[\![t,u]\!] \times K[\![t,u]\!]$ del sistema $\{\Sigma = 0\}$ tal que sp(Φ) $= \varphi$, sp(Ψ) $= \psi$.

Como mencionamos al inicio en la sección 2.1, este es un teorema de correspondencia similar al de la Correspondencia de Mikhalkin (Teorema 1), porque dice que el conjunto de soportes $\{(\mathrm{sp}(\Phi),\mathrm{sp}(\Psi))\}$ de soluciones (Φ,Ψ) de un sistema $\{\Sigma = 0\}$ se tropicaliza precisamente en la AD-variedad tropical $\mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([\Sigma]))$. Para complementarlo, tenemos que describir las fibras

$$\mathrm{sp}^{-1}(\varphi,\psi) = \{(\Phi,\Psi) \in \mathrm{Sol}(\Sigma) \,:\, \mathrm{sp}(\Phi) = \varphi, \mathrm{sp}(\Psi) = \psi\}, \quad (\varphi,\psi) \in \mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([\Sigma])).$$

Este resultado es el caso $m = n = 2$ del teorema fundamental, el cual es válido para cualquier número de variables $K[\![t_1,\ldots,t_m]\!]\{x_1,\ldots,x_n\}$, $m,n \geq 1$.

Observación 2. En la Observación 1 vimos que podíamos cambiar un sistema infinito de ecuaciones (las impuestas sobre los coeficientes de una serie φ que deben satisfacer una ecuación diferencial $P = 0$ dada) por un sistema finito de ecuaciones (las restricciones sobre el conjunto soporte de una serie φ que satisface el polinomio diferencial tropical $\mathrm{sp}(P)$). Tenemos que pagar este cambio de la siguiente forma. Todo sistema clásico $\{\Sigma = 0\}$ es equivalente a un sistema finito $\{P_1 = \cdots = P_k = 0\}$, de esto *sentimos* que muy probablemente debamos de resolver un número infinito de ecuaciones diferenciales tropicales del sistema $\{\mathrm{sp}(Q) \,:\, Q \in [\Sigma]\}$ para describir completamente el conjunto $\mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([\Sigma]))$. Por lo tanto, tenemos acceso a los siguientes dos paradigmas:

- Clásico: Resolver un número finito de sistemas (de ecuaciones) infinitos,
- Tropical: Resolver un número infinito de sistemas (de ecuaciones) finitos.

Ejercicio 14. Use el Teorema Fundamental para calcular la AD-hipersuperficie tropical $\mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([P]))$ asociada al polinomio diferencial ordinario $P = x - x_1$ del Ejemplo 2, así como la fibra $\mathrm{sp}^{-1}(\varphi)$ para cada $\varphi \in \mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([P]))$.

Ejemplo 8. Continuando con el Ejemplo 7, vamos calcular la AD-hipersuperficie tropical X asociada al polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + t^2 + u^3$ en $\mathbb{C}[\![t,u]\!]\{x,y\}$. Por definición tenemos que $X = \bigcap_{Q\in[P]} \mathrm{Sol}(\mathrm{sp}(Q))$, y por el Teorema 14, tenemos que $X = \{\mathrm{sp}(\Phi) \,:\, P(\Phi) = 0\}$. Dado que la solución general de P es de la forma $\Phi = c - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3$, $c \in \mathbb{C}$, tenemos $X = \{1 + t^2 + u^3, t^2 + u^3\}$. Vemos que las fibras son

$$\mathrm{sp}^{-1}(\varphi) = \begin{cases} \{c - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3 \,:\, c \in \mathbb{C}^*\}, & \text{si } \varphi = 1 + t^2 + u^3, \\ \\ \{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3\}, & \text{si } \varphi = t^2 + u^3 \end{cases}$$

Para terminar de reforzar esto, veamos una diferencia clara entre el comportamiento de estos dos conjuntos de soluciones.

Ejercicio 15. Demuestre que si $P \in K[\![t,u]\!]\{x,y\}$ y $(\varphi,\psi) \in \mathrm{Sol}(P)$, entonces $(\varphi,\psi) \in \mathrm{Sol}(\frac{\partial P}{\partial t})$. De esto deduzca que Σ y $[\Sigma]$ tienen las mismas soluciones.

Veamos que esto no es cierto si $P \in \mathbb{B}[\![t,u]\!]\{x\}$. Sea $P = x_{1,0} + x_{(0,1)} + (t^2+u^2)$ y $\varphi = t^2u + u^3$. Muestre que $\varphi \in \mathrm{Sol}(P)$, pero $\varphi \notin \mathrm{Sol}(\frac{\partial P}{\partial t})$.

A continuación, ilustramos con [4, Example 28] cómo esta teoría se puede usar concretamente para hallar condiciones necesarias y relaciones en los soportes de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 9. Consideremos $\{P_1,P_2,P_3\} = \Sigma \subset \mathbb{C}[\![t,u]\!]\{x,y\}$ dado por

$$P_1 = x_{(1,0)}^2 - 4\,x_{(0,0)},\ P_2 = x_{(1,1)}\,y_{(0,1)} - x_{(0,0)} + 1,\ P_3 = y_{(2,0)} - x_{(1,0)}.$$

Ahora consideramos $\mathrm{sp}(P_1) = x_{(1,0)}^2 + x_{(0,0)}$, y evaluamos en (φ,ψ) de soportes A y B respectivamente, lo que da $\mathrm{sp}(P_1)(\varphi,\psi) = (\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2 + \varphi$. Si la coordenada φ es solución, podemos probar de la Definición 7 que $(0,0) \in A$ si y solo si $(1,0) \in A$.

Ahora $\mathrm{sp}(\frac{\partial P_1}{\partial t})(\varphi,\psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ y supongamos que $(i,0)$ es un vértice de esta expresión para algún $i > 0$. Si la coordenada φ es solución, entonces $2i-3 = i-1$, lo que da $i = 2$.

Se puede probar que las parejas $(\Phi,\Psi) \in \mathrm{Sol}(\Sigma)$ están dadas por:

$$\begin{aligned}
\Phi &= a^2 + 2at + \sqrt{2}au + t^2 + \sqrt{2}tu + \frac{u^2}{2},\\
\Psi &= b + ct + \frac{a^2-1}{\sqrt{2}}u + at^2 + \sqrt{2}atu + \frac{au^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2u}{\sqrt{2}} + \frac{tu^2}{2} + \frac{u^3}{6\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

donde $a,b,c \in K$ son arbitrarios. Vemos que las restricciones tropicales se reflejan en los soportes de las soluciones clásicas, ya que los monomios correspondientes $a^2 + 2at$ en un levantamiento Φ de φ son simultáneamente nulos o no nulos.

En la Figura 4 codificamos los coeficientes de las series soluciones del sistema del Ejemplo 9 como funciones de tres parámetros $a,b,c \in K$

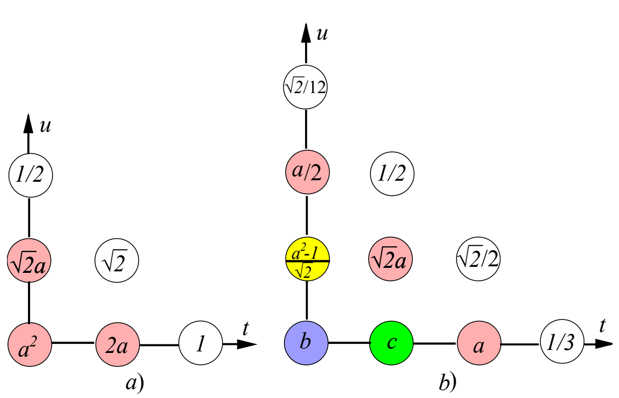

FIGURA 4. Coeficientes de las parejas de soluciones del sistema del Ejemplo 9 a) para Φ; y b) para Ψ.

Ejercicio 16. Calcule la AD-variedad tropical $\mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([\Sigma]))$ para el sistema del Ejemplo 9 usando la Figura 4. Además, dada $(\varphi,\psi) \in \mathrm{Sol}(\mathrm{sp}([\Sigma]))$, calcule la fibra $\mathrm{sp}^{-1}(\varphi,\psi)$.

5. Otras direcciones

Es importante mencionar que existe una tercera caracterización de las AD-variedades tropicales de la Definición 13 en términos de ideales iniciales libres de monomios (ver [4]). Esta caracterización es *local* en el sentido que permite concentrarse en la siguiente pregunta:

Problema 4. Dados $A, B \subset \mathbb{N}^2$, ¿será que el sistema $\{\Sigma = 0\}$ tiene una solución $(\Phi, \Psi) \in K[\![t,u]\!] \times K[\![t,u]\!]$ con soporte (A, B)?

Cuando se le adjunta esa tercera caracterización, se le conoce como el teorema fundamental porque es el análogo en geometría algebraica diferencial del llamado teorema fundamental de la geometría algebraica tropical [8, Theorem 3.2.3], el cual da tres formas equivalentes de definir variedades tropicales sobre un campo no arquimedeano, esto es, una pareja (K, v) de un campo con un valor absoluto no arquimedeano $v : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Hablando de valuaciones, y como comentamos al inicio, éstas son muy importantes en esta teoría.

Definición 15. Una *seminorma no arquimedeana* es un mapeo $v : R \to \mathrm{S}$ de un anillo R a un semianillo idempotente S que para $a, b \in R$ satisface

1. $v(0) = 0$ y $v(\pm 1) = 1$;
2. $v(a+b) + v(a) + v(b) = v(a) + v(b)$; y
3. $v(ab) + v(a)v(b) = v(a)v(b)$.

La seminorma v es multiplicativa si satisface $v(ab) = v(a)v(b)$ para $a, b \in R$. Una *valuación no arquimedeana* es una norma multiplicativa.

Este concepto es una generalización del de valuación clásica[4], o de Krull, que se obtiene al usar el orden de un monoide totalmente ordenado $(\mathrm{M}, \times, 1, \leq)$ para inducir una suma idempotente $a + b := \max\{a, b\}$ y convertir a M en un semianillo idempotente.

Gran parte de la riqueza y novedad combinatoria de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales es que podemos construir un semianillo idempotente S y una valuación no arquimedeana $v : K[\![t,u]\!] \longrightarrow S$ en el sentido de la Definición 15 que no es de Krull. Veamos esto de manera rápida y sin tantos detalles: dado $A \subset \mathbb{N}^2$, decimos que A es un conjunto de vértices si $\mathrm{Vert}(A) = A$, en el sentido de la Definición 6. Si S es la familia que consta de todos los conjuntos de vértices, definimos $v : K[\![t,u]\!] \longrightarrow S$ como la función que a cada serie $\varphi \in K[\![t,u]\!]$ le asigna los vértices de su conjunto soporte $v(\varphi) = \mathrm{Vert}(\mathrm{Supp}(\varphi))$. Entonces con las definiciones adecuadas de suma y producto en S, la aplicación v se vuelve una valuación no arquimedeana. Como comentamos en la prueba de la Proposición 11, la propiedad multiplicativa de v es la más sutil, y se deduce de una propiedad de vértices de una suma de Minkowski de dos politopos descritos en términos de sus vértices.

Ahora sí, vamos a discutir el orden de S.

Ejercicio 17. Dados dos conjuntos de vértices $P, Q \in S$, escribimos $P \leq Q$ si $P \subset \mathrm{New}(Q)$ (ver la Definición 6). Mostrar que $\leq$ es una relación de orden, y que no es total, al encontrar dos monomios $(i,j), (k,l) \in \mathbb{N}^2$ que no sean comparables.

Lo interesante es que la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales da una razón concreta para estudiar este tipo de seminormas no arquimedeanas.

Es necesario mencionar que de momento, las restricciones del Teorema fundamental 14 no pueden ser aligeradas. En particular, hay ejemplos concretos de ecuaciones diferenciales con coeficientes en $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ (el cual satisface todas las hipótesis, excepto ser

[4]Al mismo tiempo, las valoraciones no están muy lejos del concepto usual de seminorma de un álgebra, el cual se obtiene tomando $S = \mathbb{R}_{\geq 0}$, inclusive del concepto de homomorfismo de semianillos.

no numerable) en donde el teorema falla. Y apenas se está empezando a explorar que pasa en el caso de campos de característica positiva: notemos en particular que nuestras derivaciones $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} : S[\![t,u]\!] \to S[\![t,u]\!]$ no funcionan correctamente si S es un anillo de característica positiva.

Pero veamos dónde sí se puede aplicar este teorema. Básicamente cuando decimos K *campo algebraicamente cerrado, característica 0 y no numerable*, pensamos en dos arquetipos muy diferentes entre sí, a saber:

1. Arquimediano: $\mathbb{C}$,
2. No-Arquimediano: $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ (los números p-ádicos),

Los nombres vienen del hecho de que estos campos se pueden volver campos topológicos métricos por medio de una norma usual $v : K^* \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ arquimedeana en el primer caso, y no-arquimedeana en el segundo. Hasta el momento solo hemos discutido soluciones en series de potencias formales de nuestros sistemas $\Sigma \subset K[\![t,u]\!]\{x,y\}$, pero si consideramos como K a uno de estos campos topológicos, sería natural estudiar las propiedades de convergencia de dichas soluciones en la completación métrica $\widehat{K}$ de estos campos, siendo $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ ya completo y $\mathbb{C}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}}$ los *complejos p-ádicos.*

Luego, las series $\varphi \in \widehat{K}[\![t,u]\!]$ con radio de convergencia positivo se pueden interpretar como funciones analíticas $\varphi : U \longrightarrow \widehat{K}$ en una vecindad $U \ni 0$ del origen en el plano analítico asociado a $\widehat{K}$; lo que es interesante es que el teorema fundamental 14 es ciego ante campo $\widehat{K}$, pero las condiciones de convergencia son radicalmente diferentes en los dos casos anteriores: el caso $\mathbb{C}$ lleva a la teoría de soluciones holomorfas en varias variables de ecuaciones diferenciales parciales, y el segundo lleva a la teoría de soluciones analíticas no-arquimedeanas de ecuaciones diferenciales parciales p-ádicas. Esto también se encuentra todavía muy inexplorado.

Las dos consideraciones finales es que esta teoría se puede percibir como una aplicación de la teoría semianillos. Para un tratamiento más completo véase [6].

El presente trabajo representa una de las primeras referencias para varias ideas y conceptos de esta área, la cual es tan nueva que, si se complementa con [2], resulta en una descripción auto contenida de prácticamente todo lo que se ha hecho en el área hasta el momento.

Finalmente, los poliedros (polígonos) de Newton que aparecen aquí se pueden expresar en la forma $\mathrm{New}(A) = \Delta + \mathbb{R}^2_{\geq 0}$, donde Δ es la envoltura convexa de $\mathrm{Vert}(A)$, y es un polítopo de retícula. Encontrar los vértices de este tipo de politopos es un problema muy activo en estos momentos, y sería interesante saber si se pueden diseñar algoritmos eficientes para aplicarlos a la resolución de ecuaciones diferenciales tropicales.

Agradecimientos. Queremos agradecer a Violeta López de la ESFM-IPN, y al M. en C. Alejandro Martínez Méndez, quienes hicieron comentarios sobre una versión preliminar de este artículo los cuales ayudaron a mejorar la exposición. Expresamos también nuestro agradecimiento al árbitro anónimo que revisó este trabajo e hizo observaciones valiosas para volverlo más claro.

Referencias

[1] F. Aroca, C. Garay López, and Z. Toghani, *The fundamental theorem of tropical differential algebraic geometry*, Pacific J. Math. **283** (2016) no. 2, 257–270.

[2] E. Cotterill, C. Garay, and J. Luviano, *Exploring tropical differential equations*, preprint. `arXiv:2012.14067` (2020).

[3] S. Falkensteiner, C. Garay López, M. Haiech, M.P. Noordman, Z. Toghani and F. Boulier, *The fundamental theorem of tropical partial differential algebraic geometry*, Proc. 45th ISSAC (2020), 178–185.

[4] S. Falkensteiner, C. Garay López, M. Haiech, M.P. Noordman, Z. Toghani and F. Boulier, *On initials and the fundamental theorem of tropical partial differential geometry*, to appear in Journal of Symbolic Computation, Special Issue ISSAC 2020. `hal-03122437` (2021).

[5] I. Gitler and R. H. Villarreal, *Graphs, Rings and Polyhedra.* Aportaciones Mat. Textos, 35, Soc. Mat. Mexicana, Mexico, 2011.
[6] J. Golan, *Semirings and their applications*, Springer, 1999.
[7] D. Grigoriev, *Tropical differential equations*, Adv. Appl. Math. **82** (2017), 120–128.
[8] D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, AMS, 2015.
[9] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbb{R}^2$, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 313-377.
[10] J.-E. Pin. *Tropical Semirings*, J. Gunawardena. Idempotency (Bristol, 1994), Cambridge Univ.Press, Cambridge, pp.50-69, Publ. Newton Inst. **11** (1998). hal-00113779

Cristhian Garay López
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT),
Jalisco s/n, Col. Valenciana C.P. 36023.
Guanajuato, Gto, México
e-mail: cristhian.garay@cimat.mx