



## PATRONES DE FLUJO EN CAJAS DE BASE CUADRADA AL INICIO DE LA CONVECCIÓN DE RAYLEIGH-BÉNARD

JAVIER PÉREZ Y JOAQUÍN DELGADO

RESUMEN. Mostramos patrones al inicio de movimiento de fluido, el cual se mueve debido a suministro de calor por la parte de abajo. Los patrones de movimiento dependen del tamaño del contenedor del fluido y de la diferencia de temperaturas en la parte inferior y superior del contenedor. Proponemos una manera sencilla de seguir la evolución de los patrones debido al cambio de tamaño de los contenedores.

### 1. INTRODUCCIÓN

Consideramos un fluido en reposo contenido en un recipiente paralelepípedo con base cuadrada. La parte inferior se calienta provocando la expansión del fluido y la consecuente disminución en su densidad. Ello causa una competencia entre las fuerzas de flotación y de gravedad, haciendo posible que se genere movimiento en el fluido. Ésto se logra cuando se sobrepasa el valor crítico del número de Rayleigh,  $Ra_c$ , que mide la relevancia de las fuerzas gravitacional, la flotación y la diferencia de temperatura con respecto a la viscosidad y conductividad térmica en el fluido. Este escenario da lugar a una inestabilidad hidrodinámica y al flujo correspondiente se le llama convección de Rayleigh-Bénard.

El inicio de la convección, ha sido ampliamente estudiado en contenedores paralelepípedos de base rectangular, incluyendo las bases cuadradas, ver por ejemplo [4], [1], [6], [13], [14] y [12]. Las diferencias entre el trabajo de los autores recién citados están en las condiciones de frontera y en las funciones base que usan para aproximar soluciones. Parte primordial de éstos trabajos es el cálculo de los valores  $Ra_c$ , en donde, al menos las primeras investigaciones fueron motivados por patrones de movimiento observados experimentalmente.

Sin embargo el análisis de patrones en el caso de bases cuadradas aún no ha sido estudiado en detalle. Por ejemplo, Daniels y Jhugroo [3], identifican patrones al inicio de inestabilidad, con el modelo unidimensional de Swift-Hohenberg, el cual solo es válido en el caso de que los contenedores sean suficientemente grandes horizontalmente. Gelfgat [8], consideró contenedores paralelepípedos de base rectangular, incluidas las cuadradas, y con condiciones de frontera mixtas en la parte superior del contenedor, el autor incluye la descripción de algunos patrones de velocidad y temperatura.

En el problema que aquí abordamos, los contenedores tienen base cuadrada y todas sus paredes son rígidas, las laterales son aisladas térmicamente, y las tapas, inferior y superior, son perfectamente conductoras de calor (diatérmicas). En el estado inicial el fluido está en reposo, y la temperatura y la presión varían respectivamente, lineal y cuadráticamente con respecto a la variable  $z$ . El problema está modelado por la aproximación de Boussinesq, i.e., ecuaciones de balance de masa, momento y energía, en donde la densidad es considerada constante excepto en los términos debido al flotamiento, ver por ejemplo [2, p.16]. Realizamos un análisis lineal del inicio de inestabilidad al cambiar de un estado estacionario y sin movimiento a uno convectivo. De acuerdo al principio de intercambio de inestabilidad, [2, p.24], el sistema alcanza un estado de estabilidad neutral cuando al menos uno de los eigenvalores de

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 76D99, 76E06, 76M22, 76R10.

*Palabras clave.* Convección, Rayleigh-Bénard, Método de Galerkin, Número de Rayleigh, Patrones de flujo, Rollos.

la aproximación lineal se hace cero. El primer eigenvalor de valor real que se hace cero cuando el número de Rayleigh se incrementa, define el número crítico de Rayleigh.

Calculamos el número de Rayleigh crítico para un rango amplio de los valores de la longitud del lado de la base  $L$ , para dichos cálculos usamos el método de Galerkin y tomamos en cuenta las simetrías del problema. Mostramos resultados en forma numérica y con curvas  $Ra$  vs.  $L$ . Además, con el objeto de probar la precisión de nuestros cálculos, comparamos los valores críticos obtenidos para diferentes números de funciones base y de iteraciones.

Nuestros resultados nos permiten determinar la forma en que los patrones de flujo varían con respecto a  $L$ . Mostramos la evolución de los patrones a lo largo de las curvas  $Ra(L)$ , en las dos formas posibles: una con una simetría particular y la otra con la curva envolvente de cuatro de las ocho simetrías del problema. En la parte final de este documento, mostramos un diagrama simple de la evolución de patrones para valores crecientes de  $L$ .

Los patrones que reportamos, tienen diferentes simetrías dependiendo de los valores de  $L$ . Sin embargo es necesaria más investigación para determinar patrones en los cambios de simetría, debido a que se incrementa la multiplicidad de los eigenvalores del problema lineal.

## 2. LAS ECUACIONES

Consideramos fluido calentado por debajo, en un contenedor paralelepípedo de paredes rígidas con longitudes laterales  $L$  y altura  $d$ . Las paredes horizontales del contenedor mantienen la temperatura y las verticales son adiabáticas. Las temperaturas para las paredes superior e inferior son  $T_{cold}$  y  $T_{hot}$  y el gradiente de temperatura del fluido es  $\Delta T = T_{hot} - T_{cold} > 0$ .

Usamos variables adimensionales de posición  $(x, y, z)$ , velocidad  $\vec{u} = (u, v, w)$ , temperatura  $\theta$ , tiempo  $t$  y presión  $p$ , cuyas escalas características son respectivamente:  $d$ ,  $\alpha Ra^{1/2}/d$ ,  $\Delta T$ ,  $d^2/\alpha$  y  $\rho_0 \nu \alpha Ra^{1/2}/d^2$ . Donde  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\alpha$  son los coeficientes de expansión térmica, viscosidad cinemática y difusión térmica,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\rho_0$  es la densidad a la temperatura de referencia  $T_0 = (T_{hot} + T_{cold})/2$  y  $Ra = \beta \Delta T g d^3 / \alpha \nu$  es el número de Rayleigh.

El coeficiente de difusividad térmica  $\alpha$  es proporcional al coeficiente de conductividad térmica  $k$ , ésto es:  $\alpha = k/c_v \rho_0$ , donde  $c_v$  es el calor específico a volumen constante. Usamos la ecuación de estado  $\rho = \rho_0(1 - \beta[T - T_0])$ , la cual relaciona linealmente la densidad con la temperatura.

Los perfiles estacionarios de temperatura y velocidad están dados respectivamente por  $T_s(z) = -\Delta T z + T_0$  y  $\vec{u}_s = 0$ , las desviaciones de los perfiles estacionarios son:  $\theta = (T - T_s)/\Delta T$  y  $\vec{u}$ .

Usamos las ecuaciones de la aproximación de Boussinesq para las desviaciones de la velocidad y temperatura, en la forma (ver [13]):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ (2) \quad & Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} = Ra^{1/2} \theta \hat{e}_3 - \nabla p + \nabla^2 \vec{u} - Ra^{1/2} Pr^{-1} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}, \\ (3) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \theta = Ra^{1/2} \vec{u} \cdot \hat{e}_3 + \nabla^2 \theta - Ra^{1/2} (\vec{u} \cdot \nabla) \theta, \end{aligned}$$

donde  $Pr = \nu/\alpha$  es el número de Prandtl,  $\nabla^2 \vec{u} = (\nabla^2 u, \nabla^2 v, \nabla^2 w)$  y  $\hat{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

De aquí en adelante fijamos la altura del contenedor a  $d = 1$ , por lo que

$$(x, y, z) \in \Omega = \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \times \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \times \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

ver Figura 1.

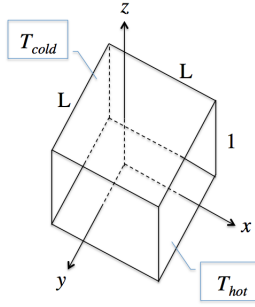


FIGURA 1. Esquema de la posición y las medidas del contenedor.

Adicionalmente a las propiedades térmicas de las paredes enunciadas arriba, suponemos que en éstas el fluido no resbala, por lo que las condiciones de frontera son:

$$(4) \quad \begin{aligned} u = v = w = \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, & \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \\ u = v = w = \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, & \text{en } y = \pm \frac{L}{2}, \\ u = v = w = \theta &= 0, & \text{en } z = \pm 1/2. \end{aligned}$$

### 3. APROXIMACIÓN LINEAL

La parte lineal y estacionaria del sistema (1-3) es:

$$(5) \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

$$(6) \quad \mathcal{L} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 0 \end{pmatrix},$$

Donde el operador lineal  $\mathcal{L}$  y la matriz  $J$  que acopla la velocidad vertical con la temperaturas son:

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix} \equiv \nabla^2 \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix} + Ra^{1/2} J \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usamos el método de Galerkin para aproximar las soluciones del sistema (6) por medio de:

$$(7) \quad (\vec{u}_{approx}, \theta_{approx})^T = \sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \vec{F}_l,$$

donde las funciones base

$$(8) \quad \vec{F}_n = \begin{pmatrix} \vec{\chi}_n \\ \phi_n \end{pmatrix},$$

están por definirse y los coeficientes desconocidos  $a_l$  se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones dado por el producto en  $L^2(\Omega)$ :

$$(9) \quad \left\langle \vec{R} \left( \sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \vec{F}_l \right), \vec{F}_n \right\rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_{tot},$$

con  $N_{tot}$  número total de funciones base y  $\vec{R}(\cdot) \equiv \mathcal{L}(\cdot) - (\nabla p, 0)^T$  el residual del sistema (6).

Como se muestra enseguida, es posible construir las funciones base (8) de tal manera que se satisfagan las condiciones de frontera (4) y la ecuación de continuidad (5), por lo que una vez establecidas las funciones base ya no nos ocuparemos de estas restricciones.

Dado que la base del campo de velocidades debe satisfacer  $\nabla \cdot \vec{\chi}_n = 0$ , existe  $\vec{A}_n$  tal que  $\vec{\chi}_n = \nabla \times \vec{A}_n$  donde  $\vec{A}_n = \tau_n \hat{e}_1 - \varphi_n \hat{e}_2 + \psi_n \hat{e}_3$  para algunos potenciales escalares  $\tau_n$ ,  $\varphi_n$  y  $\psi_n$ . Sin embargo, de acuerdo a Puigjaner et al. [13] podemos expresar el campo vectorial que satisface las condiciones de frontera (4) como sumas de campos vectoriales proyectados en espacios 2-dimensionales ( $x$ -rollos y  $y$ -rollos) los cuales dependen de las tres variables espaciales  $x, y, z$ . Por lo tanto, en lo que respecta a la completéz, es suficiente buscar solo dos tipos de potenciales escalares para la velocidad  $\varphi_n$  y  $\tau_n$ , y uno para la temperatura  $\phi_n$  tal que  $\vec{F}_n$  sea un  $x$ -rollo,  $y$ -rollo o un vector de temperatura, es decir

$$(10) \quad \vec{F}_n \in \left\{ \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_n \\ 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_n \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \tau_n \\ -\frac{\partial}{\partial y} \tau_n \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_n \end{array} \right) \right\}.$$

El costo numérico de no incluir el potencial escalar  $\psi_n$  ha sido evaluado en [14]. En su trabajo, los autores notaron una diferencia significativa en el análisis no lineal, no así en el análisis lineal, particularmente en la predicción numérica del número crítico de Rayleigh en el contenedor cúbico.

De acuerdo con la discusión previa, usamos una base completa de funciones escalares dependientes de  $(x, y, z)$  como sigue,

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x, y, z) &= \varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_k(z), \\ \tau_n(x, y, z) &= \tau_i(x) \tau_j(y) \tau_k(z), \\ \phi_n(x, y, z) &= \phi_i(x) \phi_j(y) \phi_k(z); \end{aligned}$$

donde el conjunto de índices  $i, j, k$  puede relacionarse biunívocamente con  $n$ , ver sección 3.2.

Construiremos las funciones (11) usando las funciones base de Puigjaner et al. [13]:

$$\begin{aligned} \hat{g}_k(\hat{x}) &= \begin{cases} \cos((2k-1)\pi\hat{x}) \\ 0 \\ \text{sen}(2k\pi\hat{x}), \end{cases} \\ \hat{h}_k(\hat{x}) &= \begin{cases} \cos(2(k-1)\pi\hat{x}) \\ 0 \\ \text{sen}((2k-1)\pi\hat{x}), \end{cases} \\ \hat{f}_k(\hat{x}) &= \begin{cases} \frac{\cosh(\hat{\lambda}_k \hat{x})}{\cosh(\hat{\lambda}_k/2)} - \frac{\cos(\hat{\lambda}_k \hat{x})}{\cos(\hat{\lambda}_k/2)} \\ 0 \\ \frac{\text{senh}(\hat{\mu}_k \hat{x})}{\text{senh}(\hat{\mu}_k/2)} - \frac{\text{sen}(\hat{\mu}_k \hat{x})}{\text{sen}(\hat{\mu}_k/2)}, \end{cases} \end{aligned}$$

para  $\hat{x} \in [-1/2, 1/2]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , y donde  $\hat{\lambda}_k, \hat{\mu}_k$  son respectivamente, las raíces positivas de:

$$\tanh(\hat{\lambda}_k/2) + \tan(\hat{\lambda}_k/2) = 0 \quad \text{y} \quad \tanh(\hat{\mu}_k/2) - \tan(\hat{\mu}_k/2) = 0.$$

Estas familias son soluciones de los problemas de Sturm–Liouville:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \hat{a}_g g(x) \quad \text{con} \quad g(\pm 1/2) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{a}_g < 0 \\ h''(x) &= \hat{a}_h h(x) \quad \text{con} \quad h'(\pm 1/2) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{a}_h < 0 \\ f^{IV}(x) &= \hat{a}_f f(x) \quad \text{con} \quad f(\pm 1/2) = f'(\pm 1/2) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{a}_f > 0 \end{aligned}$$

donde  $\hat{a}_g, \hat{a}_h$  y  $\hat{a}_f$  son valores constantes. Las familias  $f_k$  son conocidas en la literatura como *beam-functions* o funciones de Chandrasekhar.

Reescalando para  $x \in [-L/2, L/2]$  definimos:

$$g_k(x) = \hat{g}\left(\frac{x}{L}\right), \quad h_k(x) = \hat{h}\left(\frac{x}{L}\right), \quad f_k(x) = \hat{f}\left(\frac{x}{L}\right);$$

los parámetros  $\lambda_k$  y  $\mu_k$ , de las funciones base  $f_k(x)$  se obtienen con las relaciones

$$\hat{\lambda}_k = L\lambda_k \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_k = L\mu_k.$$

Con este reescalamiento las funciones base (10) son:

$$(12) \quad \vec{F}_n^x = \begin{pmatrix} f_i(x)g_j(y)\hat{f}'_k(z) \\ 0 \\ -f'_i(x)g_j(y)\hat{f}_k(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(13) \quad \vec{F}_n^y = \begin{pmatrix} 0 \\ g_i(x)f_j(y)\hat{f}'_k(z) \\ -g_i(x)f'_j(y)\hat{f}_k(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(14) \quad \vec{F}_n^\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_i(x)h_j(y)\hat{g}_k(z) \end{pmatrix},$$

note que no es necesario usar funciones reescaladas en la variable  $z$ .

**3.1. La elección de paridades de las funciones base.** Siguiendo a Puigjaner [13], agrupamos las funciones base de acuerdo a la paridad de las funciones dependientes de  $x, y$  ó  $z$ , ver Tabla 1, donde  $e$  denota función par y  $o$  función impar. Las paridades de la temperatura son las mismas, contando derivadas, que las del componente vertical de la velocidad de cada rollo. Así, las paridades de los componentes horizontales de la velocidad quedan determinadas, vía la velocidad vertical, por las paridades de la temperatura, dando un total de ocho bloques.

Bloque	x-rollo	y-rollo	Temperatura
1	<i>eee</i>	<i>ooe</i>	<i>oee</i>
2	<i>eoe</i>	<i>oeo</i>	<i>ooe</i>
3	<i>ooo</i>	<i>oeo</i>	<i>eee</i>
4	<i>ooe</i>	<i>eee</i>	<i>eoe</i>
5	<i>eeo</i>	<i>ooo</i>	<i>oeo</i>
6	<i>eoo</i>	<i>oeo</i>	<i>ooo</i>
7	<i>oeo</i>	<i>eoo</i>	<i>eeo</i>
8	<i>ooo</i>	<i>eeo</i>	<i>eoo</i>

TABLA 1. Asignación de paridades de las funciones base de (12), (13) y (14).

**3.2. El problema de valor propio.** Dado que el campo de velocidades definido por las funciones base es solenoidal y los gradientes de los campos vectoriales son ortogonales con respecto al producto interior  $L_2(\Omega)$ , la ecuación residual (9) se puede escribir como:

$$\left\langle \mathcal{L} \left( \sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \vec{F}_l \right), \vec{F}_n \right\rangle = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N_{tot}.$$

Aplicando linealidad

$$\sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \left[ \left\langle \nabla^2 \vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle + Ra^{1/2} \left\langle J\vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle \right] = 0,$$

o equivalentemente, donde índices repetidos denotan suma

$$(15) \quad M_{ln}a_l = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_{tot},$$

donde

$$(16) \quad M_{ln} = \left\langle \nabla^2 \vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle + Ra^{1/2} \left\langle J\vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle,$$

para  $l, n \in \{1, 2, \dots, N_{tot}\}$ . Note que debido a las condiciones de no resbalamiento en las fronteras la matriz  $M_{ln}$  es simétrica, por lo que podemos escribir (15) como  $M_{nl}a_l = 0$  o, en forma matricial

$$(17) \quad M(Ra)\vec{a} = 0,$$

donde se muestra explícitamente la dependencia de la matriz  $M$  del número de Rayleigh y  $\vec{a}$  es el vector con entradas  $a_l$ .

A continuación agrupamos las funciones base de acuerdo a su paridad

$$(18) \quad \{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_{M'}\}, \{\vec{F}_{M'+1}, \dots, \vec{F}_{2M'}\}, \dots, \{\vec{F}_{7M'+1}, \dots, \vec{F}_{8M'}\},$$

donde  $M'$  es el número de funciones base en cada bloque. Siguiendo a Puigjaner [13], denotamos  $nb(l)$  el número de bloque de índice  $l$ , de acuerdo a esta forma de agrupar tenemos, por ejemplo  $nb(l) = 1$  para  $l = 1, \dots, M'$ ,  $nb(l) = 2$  para  $l = M'+1, \dots, 2M'$ , etc.

Con esta agrupación la matriz  $M$  se descompone en una matriz diagonal de  $8 \times 8$  bloques, cada bloque de dimension  $M' \times M'$ , esto último se sigue del siguiente lema:

LEMA 1. Si  $M_{ln}$  denota la matriz (16), y  $nb(l)$  es el número de bloque de índice  $l$ , entonces  $M_{ln} = 0$  si  $nb(l) \neq nb(n)$ , para  $n, l = 1, 2, \dots, 8$ .

*Demostración.* Los productos interiores de la ecuación (16) se obtienen integrando, con respecto a  $x, y$  ó  $z$ , sobre un intervalo simétrico, productos de la forma  $G_n^{(i)} F_l^{(i)}$  con  $i = 1, 2, 3$  ó  $4$ , y donde la función escalar  $G_n^{(i)}$  es alguno de los componentes de  $\nabla^2 F_n^{(i)}$  ó de  $JF_n^{(i)}$ , en cualquier caso, ambas transformaciones conservan las paridades de  $F_n^{(i)}$ , con que de acuerdo a la Tabla de paridades 1 y suponiendo  $nb(l) \neq nb(n)$ , estas integrales involucran la integración de una función impar sobre un dominio simétrico, lo cual da cero.  $\square$

Adicionalmente, en cada bloque de (18), usamos las funciones siguiendo el esquema:

$$\{\vec{F}_1^x, \dots, \vec{F}_N^x\}, \{\vec{F}_{N+1}^y, \dots, \vec{F}_{2N}^y\} \quad \text{y} \quad \{\vec{F}_{2N+1}^\theta, \dots, \vec{F}_{3N}^\theta\},$$

donde  $3N = M'$ . Por ejemplo, si  $i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_y, k = 1, 2, \dots, n_z$ , entonces  $N = n_x n_y n_z$  y  $M' = 3n_x n_y n_z$ . Mientras que

$$n = (i-1)n_x n_z + (j-1)n_z + k,$$

es la relación entre los índices  $\{i, j, k\}$  y  $n$ .

Usando el lema 1, cada subsistema de (17) queda

$$(19) \quad \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & Ra^{1/2} B_{x\theta} \\ A_{yx} & A_{yy} & Ra^{1/2} B_{y\theta} \\ Ra^{1/2} B_{\theta x} & Ra^{1/2} B_{\theta y} & A_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}^x \\ \vec{a}^y \\ \vec{a}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $(\vec{a}^x, \vec{a}^y, \vec{a}^\theta)^T$  son los coeficientes  $\{a_l\}_l, l = 1, 2, \dots, N, N+1, \dots, 2N, 2N+1, \dots, 3N$ ,

$$A_{\alpha\beta} = \left\{ \left\langle \nabla^2 \vec{F}_n^\alpha, \vec{F}_l^\beta \right\rangle \right\}_{n,l} \quad \text{y} \quad B_{\alpha\beta} = \left\{ \left\langle J\vec{F}_n^\alpha, \vec{F}_l^\beta \right\rangle \right\}_{n,l},$$

con  $\alpha, \beta = x, y$  ó  $\theta$ .

El problema (19) resulta en el problema de valor propio

$$(20) \quad A^{-1} B^T C^{-1} B \vec{c} = \frac{1}{Ra} \vec{c},$$

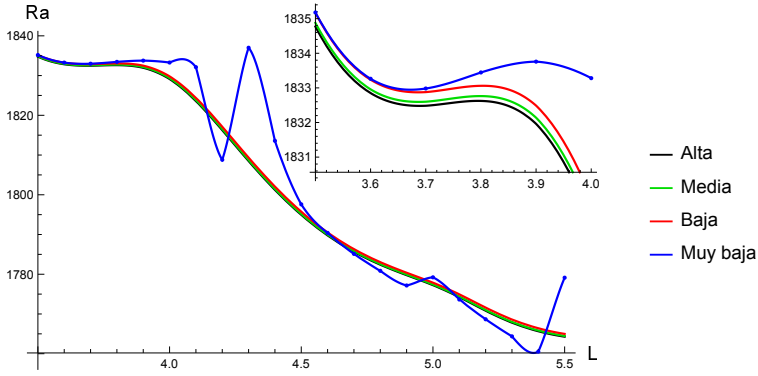


FIGURA 2. Números crítico de Rayleigh del bloque 1, usando diferentes estrategias numéricas.

donde

$$A = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix}, \quad B = (B_{\theta x}, B_{\theta y}), \quad C = A_{\theta\theta}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \vec{a}^x \\ \vec{a}^y \end{pmatrix},$$

y

$$\vec{a}^\theta = -Ra^{1/2}C^{-1}B\vec{c}.$$

Dado que las funciones base pueden elegirse con paridades de cada uno de los ocho bloques, el problema de valor propio (20) representa en realidad ocho problemas. En cada uno de ellos, usamos el método de potencias para obtener el valor propio dominante  $\lambda_{max} = 1/Ra_c$ , y su vector propio asociado. En consecuencia obtenemos el menor valor  $Ra$  tal que se satisfaga (20). Con los valores de  $Ra_c$  y los coeficientes  $\{a_l\}$  queda determinada la solución aproximada (7).

La dimensión de la matriz  $A$  es  $2n_x n_y n_z \times 2n_x n_y n_z$ , lo cual, para números grandes de funciones base, dificulta el cálculo de  $A^{-1}$ , ver por ejemplo la Tabla 3, en donde se muestra la cantidad de funciones base para alcanzar una precisión alta. En caso de grandes dimensiones, nuestra estrategia para calcular  $A^{-1}$ , consistió en descomponer recursivamente a la matriz  $A$  en cuatro matrices, llegado a su fin el proceso recursivo, calculamos la inversa de las matrices más pequeñas factorizándolas previamente, con rotaciones de Householder, en la forma  $QR$ , donde  $Q$  es ortogonal y  $R$  es triangular.

#### 4. VALIDACIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO

Clasificamos las estrategias en la precisión de nuestros cálculos con etiquetas: Muy baja, Baja, Media y Alta, dependiendo del valor del número de funciones base y del número de iteraciones, por ejemplo en la Tabla 3 se muestran los valores usados para lograr precisión Alta. Las precisiones Muy baja y Baja solo cambian en el número de iteraciones, en el primer caso 100 iteraciones, en el segundo de 100 a 4000 dependiendo del valor de  $L$ , en ambos casos se usaron 7 funciones base en cada dirección, i.e.,  $n_x = n_y = n_z = 7$ . En el caso de la precisión Media se usaron 10 funciones base en cada dirección y el número de iteraciones fué de 100 a 4000 dependiendo del valor  $L$ .

Como prueba adicional calculamos separadamente los números de Rayleigh de los bloques 1 y 4 y de los bloques 5 y 8, los cuales deben ser los mismos por simetría.

En las Figuras 2 y 3 comparamos curvas con diferentes precisiones en diferentes bloques. La estimación del error relativo entre las estrategias de precisión Alta y Media es del orden de  $10^{-4}$ .

En las Figuras 4-5 usamos precisión Media, en las figuras 7-12, usamos precisión Baja.

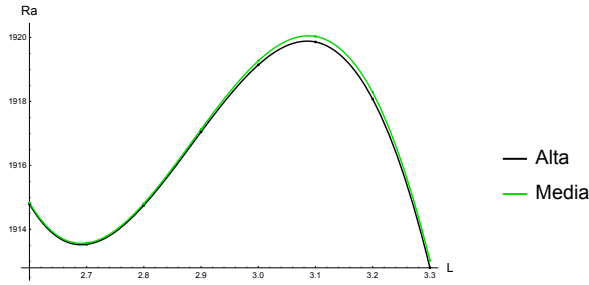


FIGURA 3. Comparación de las estrategias Alta y Media de los números críticos de Rayleigh del bloque 3. Note la no-monotonía.

$L/nb$	1 y 4	2	3
6	1756.33	<b>1754.58</b>	1759.24
5	<b>1777.27</b>	1783.56	1779.30
4	1829.14	<b>1812.92</b>	1815.00
3	<b>1894.80</b>	1983.10	1919.14
2	2454.22	2616.64	<b>2084.89</b>
1	<b>3388.58</b>	5900.60	7456.24
1/2	<b>17085.02</b>	47361.85	77769.86
1/4	<b>200307.88</b>	636184.23	1124580.63
1/6	<b>958540.79</b>	3121016.37	5592399.77
1/8	<b>2971362.50</b>	9757932.48	17567042.39
1/10	<b>7190279.64</b>	23705400.82	42768590.22
1/12	<b>14838646.36</b>	49024076.24	88550854.85

TABLA 2. Números de Rayleigh críticos  $Ra_c$  de alta precisión, obtenidos en el presente trabajo, para diferentes longitudes de la base cuadrada  $L$  y para bloques  $nb = 1, \dots, 4$ . Las negritas indican el valor mínimo de  $Ra_c$  para cada  $L$ . En la Tabla 3 se muestran los valores de los parámetros usados en rutinas numéricas.

$L$	6	5	4	3	2	1	1/2	1/4	1/6	1/8	1/10	1/12
$n_{iter}$	4000	4000	1000	400	400	100	100	400	400	400	400	1000
$n_x$	36	34	32	30	20	20	20	14	14	10	9	9
$n_y$	36	34	32	30	20	20	20	14	14	10	9	9
$n_z$	7	7	8	9	20	20	20	40	40	80	100	100

TABLA 3. Números de iteraciones y funciones base, para cada  $L$ , usados en cálculos reportados en Tabla 2.

## 5. RESULTADOS

En las Tablas 2 y 3 reportamos respectivamente, números críticos de Rayleigh con precisión Alta y los parámetros usados para el cálculo de estos valores. En las Figuras 4 y 5 mostramos las gráficas del número crítico  $Ra$  versus  $L$  para todos los bloques de paridades.

Los números críticos de Rayleigh que reportamos en la Tabla 2, se comparan bien con los resultados de otros autores, ver Tablas 4, 5, y 6. En el caso de valores pequeños de  $L$ , los cuales representan paralelepípedos delgados, se espera un número crítico de Rayleigh grande para iniciar la convección, como es evidente en la Tabla 2.

Mizushima y Nakamura [11], reportan valores mostrados en las Tablas 4 y 6, para sus cálculos usaron el método de Galerkin y paquetes de resolución numérica con



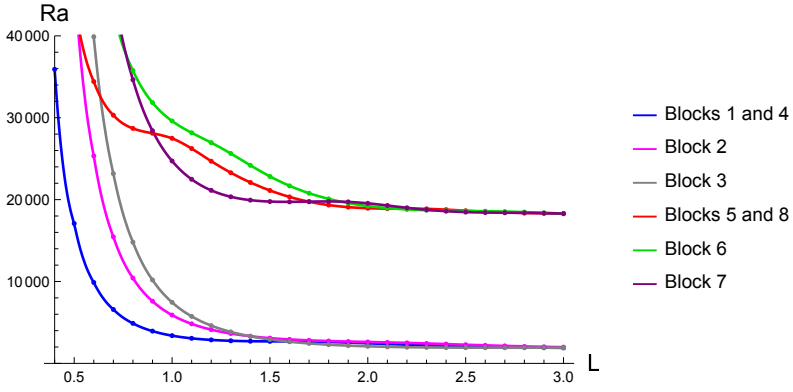


FIGURA 4. Gráfica del número crítico  $Ra$  versus  $L$  para todos los bloques. Los modos de la temperatura impares en  $z$  están en las curvas superiores, los impares en las curvas inferiores. Para valores fijos de  $L$  el valor crítico de Rayleigh  $Ra_c$  es el mínimo de los valores críticos de todos los bloques. La Figura 5 muestra detalles de los modos de la temperatura pares de  $z$ .

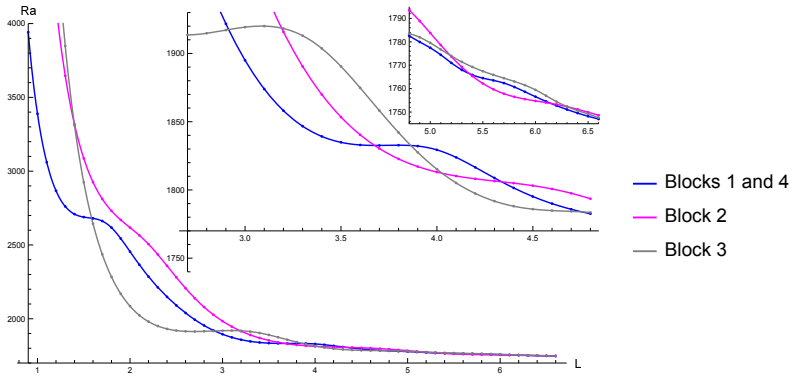


FIGURA 5. Detalles de la Figura 4 para los modos pares en  $z$ , bloques 1, 2, 3 y 4.

	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
Mizushima y Nakamura[11]	3388.5		
Puigjaner et al.[14]	3389	5903	7458
Torres et al. [15]	3388.527	5900.449	7456.149
Presente trabajo	3388.58	5900.60	7456.24

TABLA 4. Comparación de valores del número crítico de Rayleigh en contenedor cúbico ( $L = 1$ ).

L	Catton [1]	Presente trabajo
1/2	17 307	17 085.02
1/4	203 163	200 307.88
1/8	3011718	297136.5

TABLA 5. Comparación de resultados del presente trabajo con los de Catton ( $L < 1$ ). Ver Tabla 3 para número de funciones base e iteraciones.

L	Edwards[6]	Mizushima y Nakamura[11]	Presente Trabajo
2	2107		2084.89
4	1827		1812.92
5		1777	1777.27
6	1765		1754.58
12	1729		1719.05

TABLA 6. Comparación de valores del número crítico de Rayleigh ( $L > 1$ ), los espacios en blanco no fueron reportados.

doble o cuadruple precisión. Ellos muestran que a pesar de que los patrones críticos son similares a rollos 2D, éstos tienen valores diferentes de cero en la componente de la velocidad de dirección transversal de los ejes de simetría del patrón de movimiento, por lo que los rollos son realmente 3-dimensionales. Ésto es consistente con nuestros resultados.

Puigjaner et al. [13] (p. 29, Fig. 14) reportan gráficamente valores de  $Ra_c$  versus la longitud de un lado de contenedores paralelepípedicos de base rectangular, para los bloques 1 a 4. Como casos particulares están las bases cuadradas de longitud  $1/2$ , 1 y 2. También se muestra que  $Ra_c$  pertenece al tercer bloque de paridades para una base cuadrada de longitud 2. Nuestros resultados son consistentes con los de estos autores.

## 6. PATRONES

Como es evidente de la Figura 4, el número mínimo de Rayleigh en cada uno de los bloques tiende a agruparse en una de dos clases, de acuerdo a las paridades de las funciones base de la temperatura en la dirección  $z$ . Los bloques 1, 2, 3 y 4 correspondientes a las funciones  $z$ -pares y los bloques 5, 6, 7 y 8 correspondientes a las funciones  $z$ -impares. El mínimo número de Rayleigh se alcanza sistemáticamente en los bloques correspondientes a las funciones  $z$ -pares. Ésto en concordancia con el principio general de que la primera bifurcación se alcanza dentro del bloque con un número mínimo de ceros en la dirección  $z$ , Chandrasekhar [2, p.36], Drazin [5, p.239].

Fukazawa y Funakoshi [7], analizaron la convección de Rayleigh-Bénard en contenedores paralelepípedicos con paredes térmicamente conductoras. Estos autores encontraron que un intercambio de modos inestables sucede en contenedores con base cercana a ser cuadrada de lado 4 ó 5.5. En estos valores particulares de  $L$  ocurre una interacción de modos. Es necesaria más investigación para entender los mecanismos de bifurcación en modos que compiten por el valor mínimo y las reglas de selección de patrones, ver [9] y [10]. Por ejemplo, para valores  $L$  en el intervalo  $(0, 1.58449)$ , el valor crítico de  $Ra$  se da en los bloques 1 y 4, debido a los dos bloques, hay dos vectores propios linealmente independientes con lo que, de acuerdo a la teoría lineal, cualquier combinación lineal de ellos da un posible patrón de bifurcación.

Las curvas de nivel en el plano  $z = 0$ , particularmente la curva  $w = 0$ , son especialmente útiles para describir la evolución de los patrones a lo largo de un único bloque. En términos de evolución, primero se forma un patrón de convección complejo en las esquinas del contenedor, el cual para valores crecientes de  $L$ , termina apareciendo en el plano  $z = 0$  como nuevas curvas las cuales satisfacen  $w = 0$ , dichas curvas tienden a crecer hasta que terminan cerrándose, de esta manera aparecen nuevas regiones, separadas por  $w = 0$ , en las cuales el fluido sube o baja. Además siempre que haya una paridad impar en funciones dependientes de  $x$  ó  $y$  (por ejemplo en el bloque de paridades 1 las funciones dependientes de  $x$  son impares), el eje  $x = 0$  ó  $y = 0$ , respectivamente, es también parte de la curva  $w = 0$ . Este mecanismo de desarrollo fué observado a lo largo de todos los bloques. Por ejemplo la Figura 6 muestra la evolución de los patrones de convección a lo largo del bloque 1.

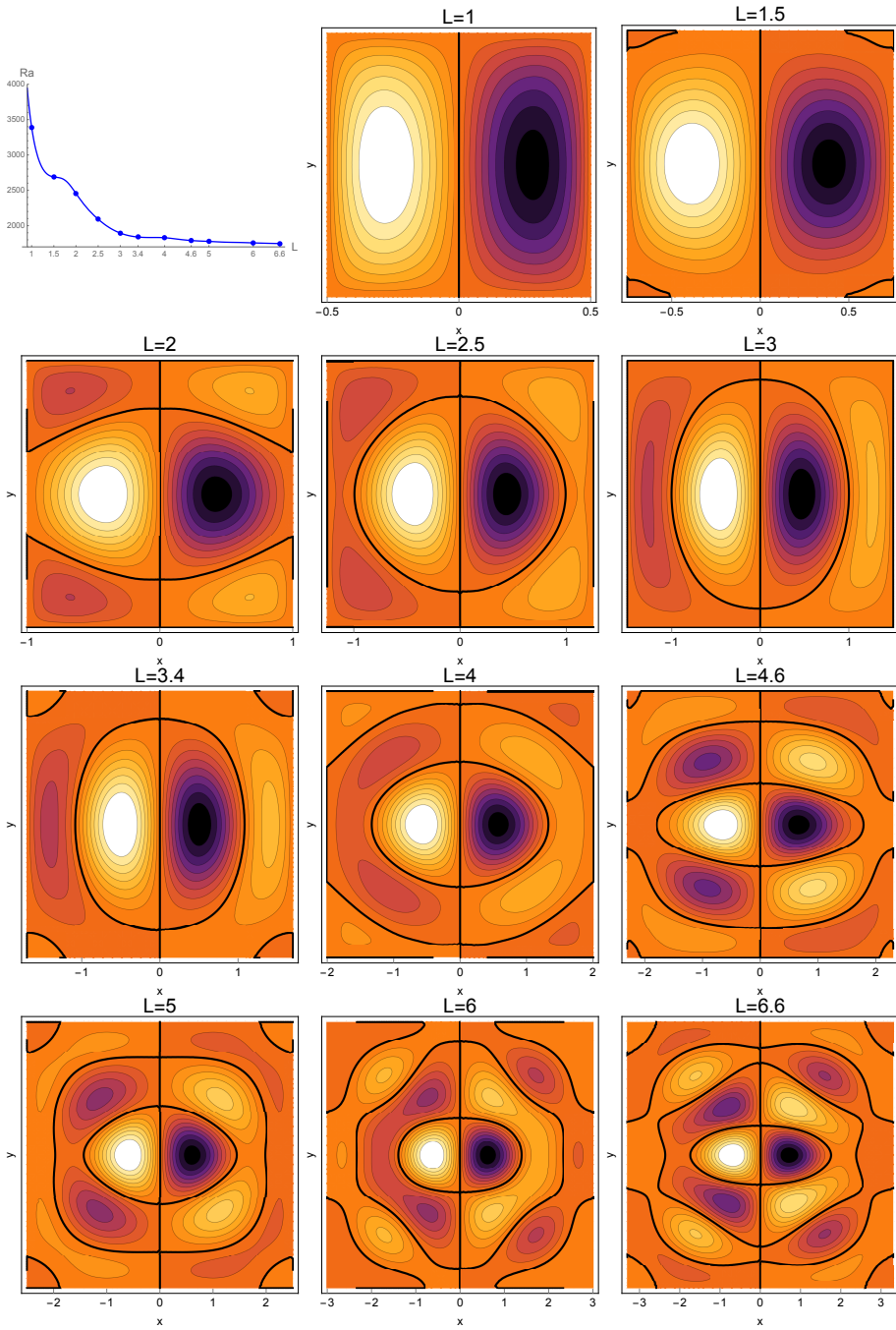


FIGURA 6. Serie de gráficas que inicia con la curva  $Ra(L)$  del bloque 1, los puntos sobre ella indican los valores de  $L$  con los cuales se obtuvieron el resto de las gráficas de esta Figura: curvas de contorno del campo de velocidad vertical  $w$  en  $z = 0$  (las líneas negras se corresponden a  $w = 0$ ). Para valores crecientes de  $L$  se aprecia la evolución de patrones descrita en el texto.

Como es evidente en la Figura 5 el número crítico de Rayleigh se alcanza en diferentes bloques dependiendo del valor de  $L$ , En la Figura 7, se muestra la curva  $Ra_c(L)$  y la evolución de patrones para valores crecientes de  $L$ . La curva  $Ra_c(L)$  es la envolvente de las curvas  $Ra(L)$  de la Figura 4. Los puntos de colores marcados sobre

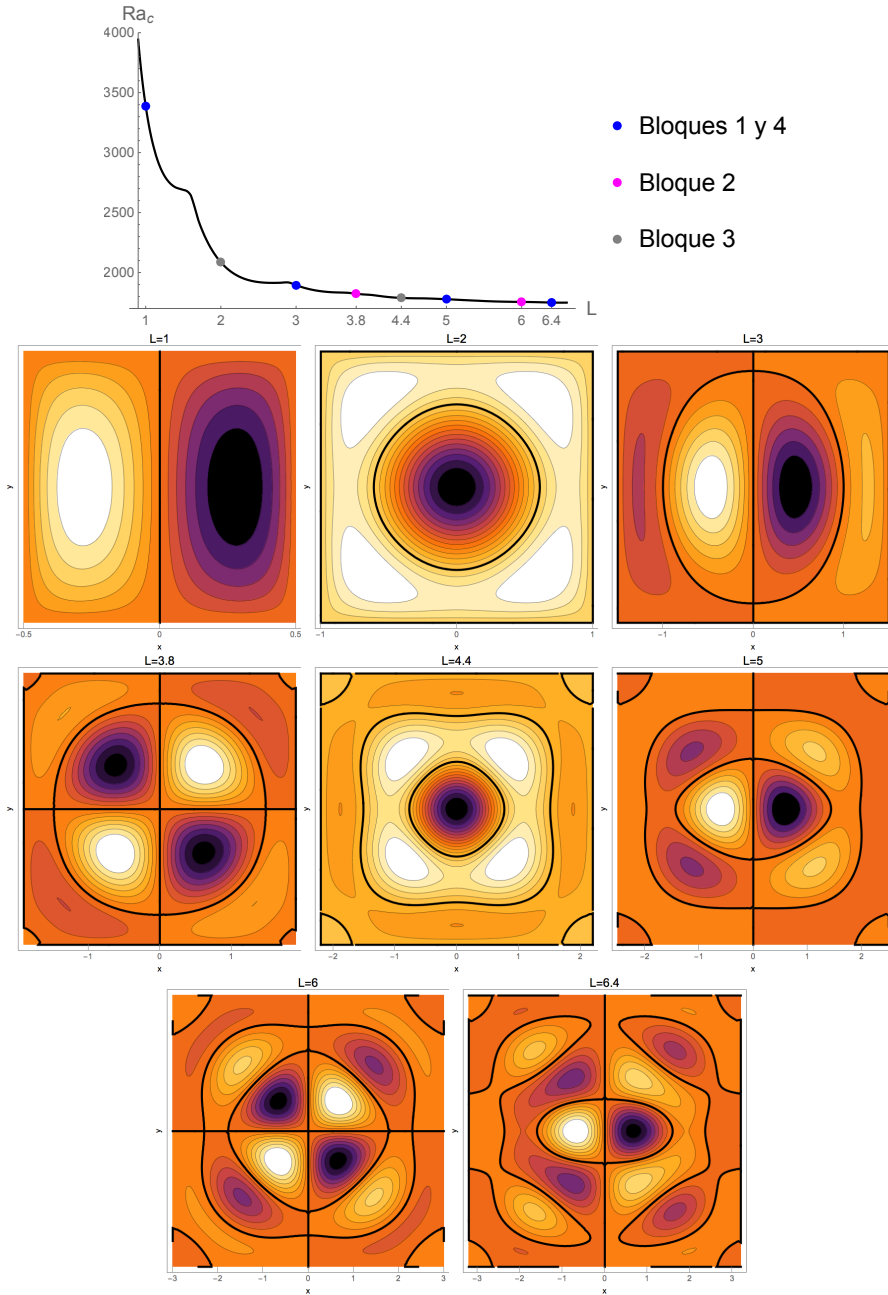


FIGURA 7. La curva inicial  $Ra_c(L)$  es la envolvente de las curvas de la Figura 4, los puntos sobre ella, indican valores de  $L$  y bloques dominantes con los cuales se obtuvieron las figuras restantes. Para valores crecientes de  $L$  se aprecia la evolución de los patrones con curvas de contorno del campo de velocidad vertical  $w$  en  $z = 0$ . la versión simplificada se muestra en Figura 8 y la versión 3D se muestra en Figuras 9-12.

$Ra_c(L)$  indican los valores  $L$  y sus correspondientes bloques de paridades. Para estos puntos se graficaron curvas de nivel en el plano  $z = 0$ .

La Figura 8 muestra un esquema sobresimplificado de la sucesión de patrones de la figura 7. Una vez que las superficies  $w = 0$  cruzan el plano  $z = 0$ , ellas se desarrollan completamente como curvas cerradas. Así, el campo de velocidades tiende a formar

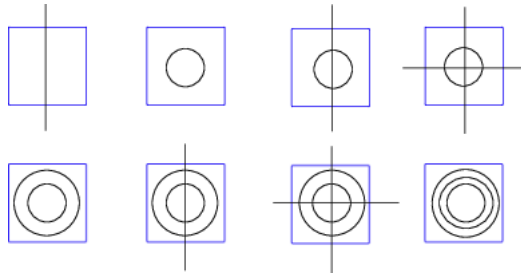


FIGURA 8. Esquema simplificado de la sucesión de patrones de bifurcación para valores de  $L$  crecientes. Las líneas negras son la intersección de las superficies  $w = 0$  con  $z = 0$ , y son los ejes de rotación de los rollos 3D formando patrones complejos. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, los valores son  $L = 1, 2, 3, 3.8, 4.4, 5, 6, 6.4$  y se corresponden con la sucesión de patrones de las Figuras 7 y 9 a 12.

patrones en forma de toros que rodean el origen y con eje de simetría en el plano  $z = 0$ .

Las Figuras 9-12, muestran en 3 dimensiones los patrones de movimiento asociados a la Figura 7. Por ejemplo en la primer columna de la Figura 9 mostramos diferentes gráficas del patrón de movimiento, correspondientes al eigenvector en  $L = 1$  y bloque 1. Las gráficas se muestran en el siguiente orden: mostramos la superficie  $w = 0$  y el campo de velocidad sobre ella, el cual la cruza horizontalmente; enseguida mostramos la misma superficie  $w = 0$  pero ahora con algunas líneas de flujo para dar una idea del flujo global; la última figura muestra en detalle líneas de flujo en planos cercanos a la frontera, ésto para mostrar la complejidad del flujo cerca de las fronteras. Las figuras siguientes, hasta la Figura 12, muestran los patrones de movimiento correspondientes a los valores indicados en la Figura 7.

Con el propósito de describir los patrones dominantes al inicio de la convección, consideramos los valores mínimos de Rayleigh para cada  $L$ , ver Figuras 4, 5 y 7. Resumimos la sucesión de patrones para valores crecientes de  $L$  como sigue:

Para  $L = 1$ , la primer columna de la Figura 9, describe un rollo finito a lo largo del eje  $x$ ; la superficie  $w = 0$  contiene el plano de simetría  $x = 0$ , consistente con las funciones base del componente  $w$  del bloque 1, las cuales son impares en  $x$ . Dado que las condiciones de frontera requieren que el campo de velocidades se haga cero en las fronteras, el rollo tiene que deformarse dando un flujo complejo cerca de las mismas. Note los pequeños componentes de la superficie  $w = 0$  cerca de las esquinas los cuales anticipan puntos de retorno en las líneas de flujo, este hecho es difícil de identificar debido a que la velocidad cerca de las fronteras es pequeña comparada con velocidades del centro.

Para  $L = 2$ , segunda columna de Figura 9, el número crítico de Rayleigh ahora se alcanza en el bloque 3. La superficie  $w = 0$  es un cilindro a lo largo del eje  $z$  y el campo de velocidad describe un patrón en forma de toro. En este bloque el flujo cerca de las fronteras tiene ahora una estructura más complicada. Dado que las funciones base para el componente  $w$  son pares en  $x$  y  $y$ , la simetría hace que ninguno de los planos,  $x$  ó  $y$ , estén contenidos en la superficie  $w = 0$ , como en el caso previo.

Para valores crecientes de  $L$  aparecen cerca de las esquinas, nuevos componentes de la superficie  $w = 0$  y éstos se desarrollan hasta que cruzan verticalmente el plano  $z = 0$  formando cilindros. Dependiendo de la simetría del bloque en donde el número crítico de Rayleigh se alcanza, los planos  $x$  ó  $y$  forman parte de la superficie  $w = 0$ , Por ejemplo, si el número crítico de Rayleigh se alcanza en el bloque 1, el plano  $x = 0$  siempre esta presente, y si se alcanza en el bloque 2, ambos planos  $x$  y  $y$  están presentes, este es el caso mostrado en la segunda columna de la Figura 10 para  $L = 3.8$ .

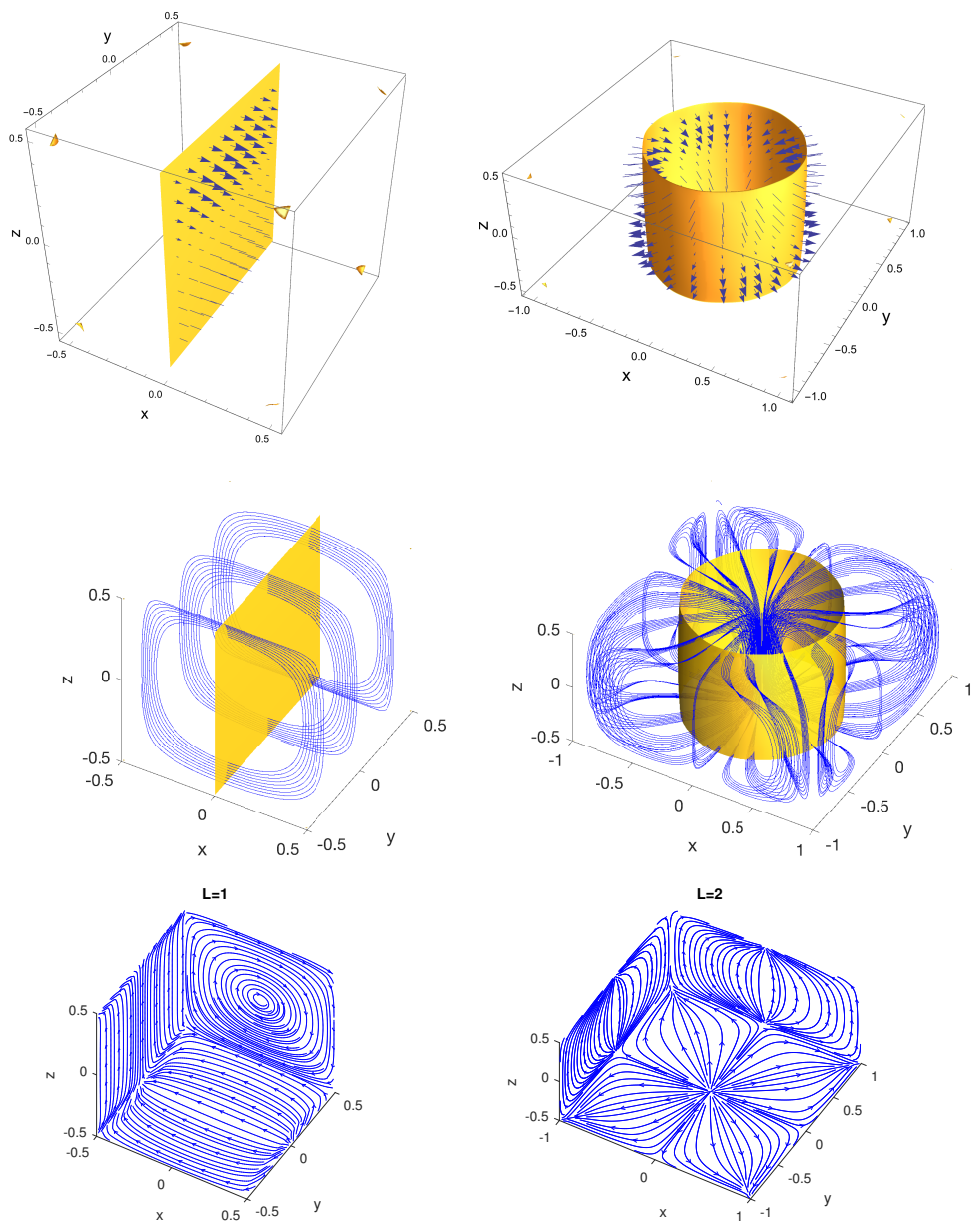


FIGURA 9. Patrones al inicio de convección, primer columna  $L = 1$  y bloque 1, segunda columna  $L = 2$  y bloque 3. De arriba a abajo: superficies  $w = 0$  y campo de velocidad en ellas; superficie  $w = 0$  y líneas de flujo en 3D; líneas de flujo sobre planos cercanos a las fronteras.

Esta sucesión de patrones de inicio de convección se repite tal como se muestra desde la Figura 10 a la Figura 12. Los patrones para los valores  $L = 2, 3, 5$ , mostrados en las Figuras 9, 10 y 11, se comparan bien con los campos vectoriales horizontales en el plano  $z = 0.4$  obtenidos por Edwards [6].

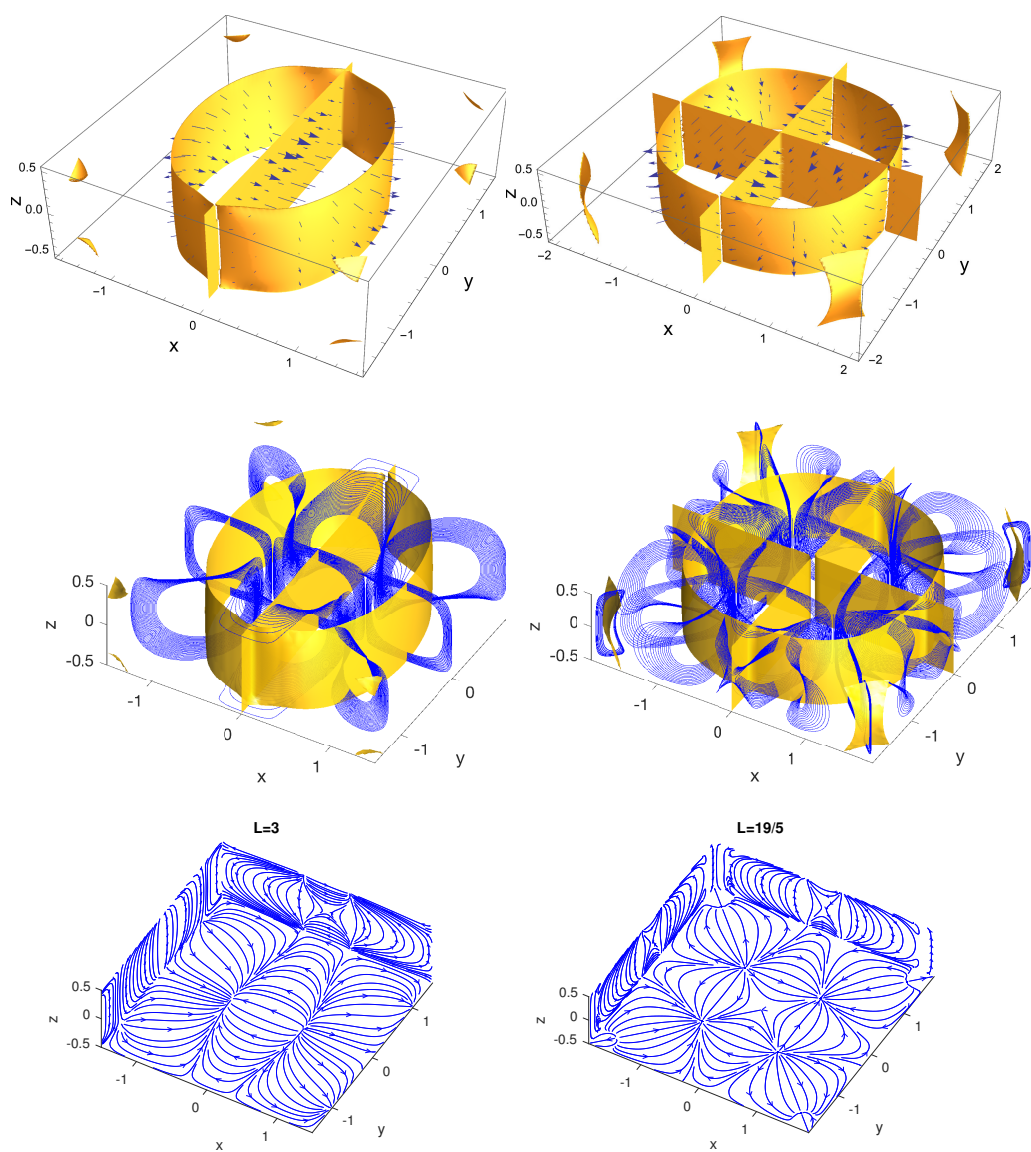


FIGURA 10. Patrones al inicio de convección, primer columna  $L = 3$  y bloque 1, segunda columna  $L = 3.8$  y bloque 2. Mismo orden enunciado que en la Figura 9.

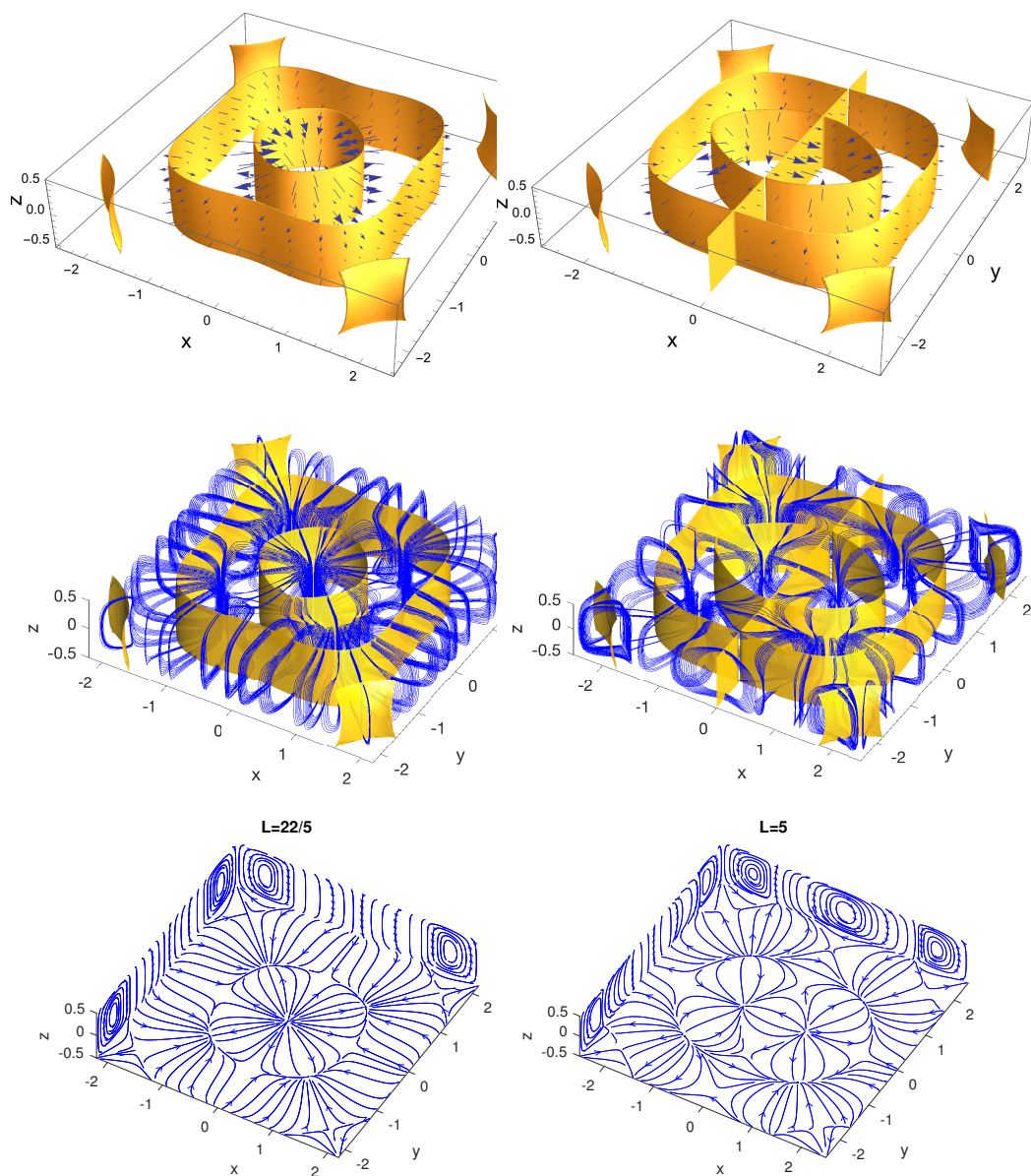


FIGURA 11. Patrones al inicio de convección, primer columna  $L = 4.4$  y bloque 3, segunda columna  $L = 5$  y bloque 1. Mismo orden que el enunciado en figura 9.



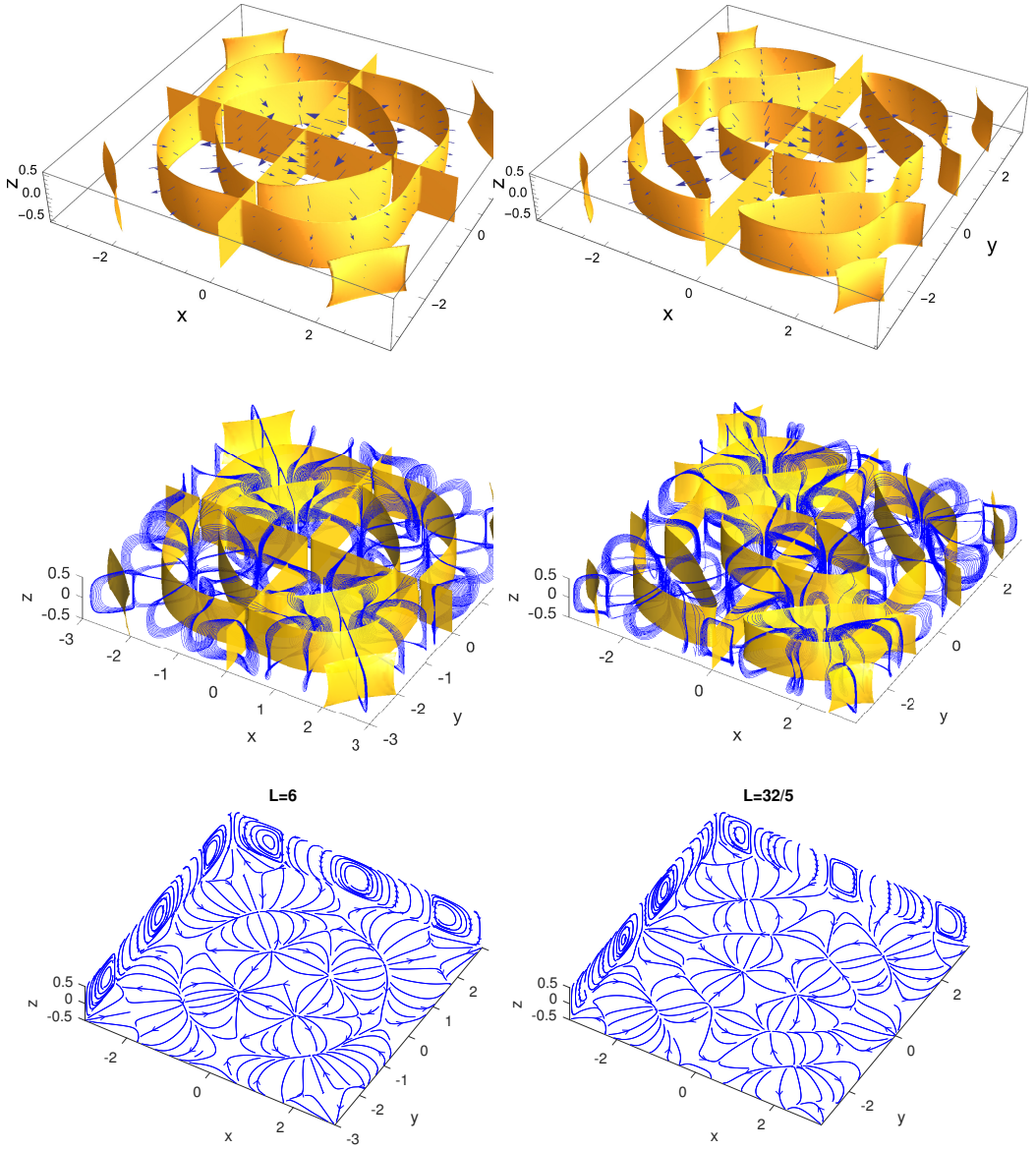


FIGURA 12. Patrones al inicio de convección, primer columna  $L = 6$  y bloque 2, segunda columna  $L = 6.4$  y bloque 1. Mismo orden que el enunciado en figura 9.

### 7. PALABRAS FINALES

Proponemos una manera sencilla de seguir la evolución de los patrones de convección para  $L$  creciente. Para establecer esta propuesta procedimos en primer lugar a identificar valores de  $L$  en donde las simetrías del flujo cambian, para  $L \in (0, 6.6]$  identificamos 7 valores, ver Figura 4, en estos valores particulares de  $L$  los valores propios tienen la misma multiplicidad algebraica y geométrica, igual a 2 o 3, según el número de curvas  $Ra_c(L)$  que se intersectan. Adicionalmente, graficamos de cuatro formas diferentes el patrón de flujo para valores de  $L$  con una sola simetría, Figuras 7 y 9 a 12, estas visiones múltiples nos permitieron proponer un diagrama simplificado de la evolución de patrones para los modos dominantes. Un trabajo futuro es el de aclarar el papel, dentro del contexto de la teoría de bifurcaciones, de los valores propios con misma multiplicidad algebraica y geométrica.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue patrocinado por el Proyecto CONACYT de Ciencia Básica A1-S-41007 “Bifurcaciones en el estudio de la existencia y estabilidad de soluciones de EDP”.

## REFERENCIAS

- [1] Catton I. *The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below*, Int. J. of Heat Mass Transfer, 15, 665-672, 1972.
- [2] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover, New York, 1981.
- [3] Daniels P. G. & Jhugroo E. *Pattern formation in square planform containers*, IMA Journal of Applied Mathematics, 76, no. 4, 524-553, 2011.
- [4] Davis S. H. *Convection in a box: linear theory*, J. Fluid Mech., 30, no. 3, 465-478, 1967.
- [5] Drazin P. G. *On the effects of side walls on Bénard convection*, ZAMP, 26, 239-243, 1975.
- [6] Edwards B. E. *Crossed rolls at onset of convection in a rigid box*, J. Fluid Mech., 191, 583-597, 1988.
- [7] Fukazawa Y. & Funakoshi M. *Onset of thermal convection and its flow patterns in a rectangular cavity*, Fluid Dyn. Res., 47, no. 6, 065505 (33pp), 2015.
- [8] Gelfgat A. Y. *Different modes of Rayleigh-Bénard instability in two- and three-dimensional rectangular enclosures*, J. Comput. Phys., 156, no. 2, 300-324, 1999.
- [9] Golubitsky M. & Stewart I. & Schaeffer D. G. *Singularities and groups in bifurcation theory, volume II*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] Hirschberg P. & Knobloch R. *Mode interaction in large aspect ratio convection*, J. Nonlinear Sci., 7, 537-556, 1977.
- [11] Mizushima J. & Nakamura T. *Onset of Three-Dimensional Thermal Convection in a Rectangular Parallelepiped Cavity*, J. Phys. Soc. Japan, 72, no. 2, 197-200, 2003.
- [12] Puigjaner D. & Herrero J. & Simó C. & Giral F. *Bifurcation analysis of steady Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity with conducting sidewalls*, J. Fluid Mech., 598, 393-427, 2008.
- [13] Puigjaner D. & Simó C. & Grau F. X. & Giral F. *Stability Analysis of the Flow in a Cubical Cavity Heated From Below*, <http://www.maia.ub.es/dsg/1999/9901puigjaner.ps.gz>
- [14] Puigjaner D. & Simó C. & Herrero J. & Giral F. *Stability analysis of the flow in a cubical cavity heated from below*, Phys. Fluids, 16, no. 10, 3639-3655, 2004.
- [15] Torres J. F. & Henry D. & Komiya A. & Maruyama S. *Bifurcation analysis of steady natural convection in a tilted cubical cavity with adiabatic sidewalls*, J. Fluid Mech., 756, 650-688, 2014.

*Javier Pérez*

Instituto de Educación Media Superior,  
Plantel Iztapalapa,  
Academia de Matemáticas.  
Calz. Ermita Iztapalapa s/n, Col. Lomas de Zaragoza  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09620, CDMX, México  
e-mail: [javier.perez@iems.edu.mx](mailto:javier.perez@iems.edu.mx)

*Joaquín Delgado Fernández*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección,  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México  
e-mail: [jdf@xanum.uam.mx](mailto:jdf@xanum.uam.mx)