Mixba'al,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.13, No.1, 2022, páginas 57-64.
Recibido 01-05-2021. Aceptado 08-03-2022.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v13n1/edva

SOBRE LAS LÓGICAS ABSTRACTAS

EDGAR A. VALENZUELA NUNCIO

RESUMEN. Presentaremos un panorama de las lógicas abstractas. Mostramos la utilidad e inspiración de estas con varios ejemplos. Además, recorremos temas que son objeto de estudio de la Lógica Abstracta, presentamos una serie de aplicaciones breves.

1. Carencias de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$

La lógica de primer orden $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ tiene una plétora de resultados y herramientas: compacidad, Löwenheim-Skolem, saturación, interpolación, entre muchas otras. Pero si de expresividad se trata, esta vastedad de teoremas e instrumentos resulta ser una límitación. Hay resultados que utilizan fuertemente compacidad, indicando la expresión restringida que posee $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. Por ejemplo, decir que un conjunto está bien ordenado está fuera del rango de expresión de la lógica de primer orden. Recordamos esta definición.

Decimos que $\langle A, < \rangle$ está bien ordenado cuando cualquier $X \subset A$ tiene un $<$-mínimo.

Si Φ fuera un conjunto de fórmulas de primer orden que define el buen orden entonces

$$\mathcal{A} \models \Phi \iff \text{ está bien ordenado.}$$

Pero consideremos $\Theta = \Phi \cup \{c_{i+1} < c_i : i < \omega\}$. Si Θ tuviera un modelo $\mathcal{A}$, deduciríamos que $\{c_i^{\mathcal{A}} : i < \omega\}$ no tiene un mínimo. Para obtener un modelo de Θ acudimos a compacidad: sea $\Delta \subset \Theta$ un conjunto finito. En Δ ocurren a lo más n constantes c_i para algún natural $n < \omega$. Si tomamos $\mathcal{A}_\Delta = \langle \omega, <, a_1, \ldots, a_n \rangle$, vemos que está bien ordenado y satisface Δ con las interpretaciones $c_i^{\mathcal{A}} = a_i$. Entonces Θ tiene como modelo un conjunto que no está bien ordenado. Concluimos que el buen orden no es definible en $\mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Esto nos indica que la compacidad nos imposibilita acceder a ciertas características naturales del orden y, en general, de estructuras matemáticas que ocurren en muchos ámbitos.

Otra carencia expresiva con respecto a los órdenes, que la encontramos en una de las estructuras más estudiadas, es la propiedad arquimediana. De nuevo usando compacidad podemos demostrar que la teoría de $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ junto con

$$c \neq 0 \wedge c \neq 1$$
$$\{n \cdot 1 \leqslant c : n \in \mathbb{N}\},$$

tiene un modelo $\mathcal{A}$. Este modelo a pesar de ser elementalmente equivalente a $\mathcal{R}$, no posee la propiedad arquimediana porque le agrega el punto $c^{\mathcal{A}}$ a $\mathbb{R}$ y funge como un contraejemplo a dicha propiedad.

2. Expresividad Reclamada

Tanto la propiedad arquimediana y el axioma del buen orden pueden ser formuladas en una lógica más expresiva que es la lógica de segundo orden $\mathcal{L}^{II}$. Esta lógica

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C95.
Palabras clave. Lógica, Teoría de Modelos, Lógicas no Clásicas.

extiende a $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ al permitir una nueva cuantificación sobre un conjunto de variables $\{X, X_0, X_1, \dots\}$ de segundo orden,

$$\varphi(X) \in \mathcal{L}^{II} \Longrightarrow \exists X\varphi(X), \forall X\varphi(X) \in \mathcal{L}^{II}.$$

Estas fórmulas nuevas cuantifican sobre relaciones y funciones en nuestra estructura, por eso se dicen de segundo orden y el primer orden lo forman los elementos del universo. El buen orden lo podemos expresar como

$$\varphi(<) \wedge \forall X \exists x \big(X(x) \wedge \forall y (X(y) \to x \leqslant y\big),$$

donde $\varphi(<) \in \mathcal{L}_{\omega\omega}(\{<\})$ expresa que $<$ es un orden lineal. Y la propiedad arquimediana la podemos formular con

$$\exists N \big(N(0) \wedge \forall x (N(x) \to N(x+1)) \wedge \forall x \exists y (x < y \wedge N(y)\big).$$

Notemos como en ambas expresiones utilizamos $X(x)$ que se interpreta como $x \in X$. Otra cosa que podemos expresar en $\mathcal{L}^{II}$ es que un conjunto tenga tamaño infinito

$$|M| \geqslant \omega \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \mathcal{M} \models \exists N, s \exists x \big(N(x) \wedge \\ \forall y (y \nless x) \wedge \forall y (y < s(y)) \wedge \\ \forall y (N(y) \to N(s(y))\big) \wedge \\ < \text{ es un orden lineal sin punto final.} \end{array}$$

En el álgebra también encontramos ejemplos que no pueden ser expresados en primer orden. En la teoría de grupos decimos que un grupo es de torsión si todo elemento tiene orden finito, es decir, existe un natural $n < \omega$ tal que[1] $a^n = e$, donde e es el elemento neutro del grupo. Para ver esto considérese cualquier conjunto de fórmulas Φ en el lenguaje de teoría de grupos (o incluso en cualquier lenguaje más grande), la teoría T de grupos y el conjunto $\{c^n \neq e : 0 < n < \omega\}$ y proceda por compacidad, entonces el grupo resultante no puede ser de torsión. Pero sí podemos expresarlo, por ejemplo, al permitir disyunciones infinitas

$$\forall x \bigvee_{n<\omega} x^n = e.$$

Esta regla genera una nueva lógica $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ que permite conjunciones y disyunciones de longitud infinita ω y por lo recién argumentado, queda claro que es más expresiva que $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. De hecho, también tiene la propiedad de interpolación.

Teorema 1. *Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ con $\models \varphi \to \psi$. Podemos encontrar $\theta \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ tal que $\models \varphi \to \theta$ y $\models \theta \to \varphi$, además en θ solo aparecen símbolos que comparten φ y ψ.*

Pero esta lógica infinitaria no posee una propiedad de Löwenheim-Skolem en el mismo sentido que $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, para ver esto simplemente notemos que la fórmula

$$\forall x \bigvee_{m<\omega} x = c_m,$$

solo puede tener modelos a lo más numerables. Además de tampoco poseer compacidad por un argumento similar; consideremos

$$\{c \neq c_i : i < \omega\} + \forall x \bigvee_{i<\omega} x = c_i, \quad (\star)$$

cualquier conjunto finito de $(\star)$ tiene un modelo (por ejemplo $\langle \omega, 0, n_i \rangle_{i<k}$), pero la totalidad no puede tener un modelo porque por un lado la interpretación de c no es igual a ninguna de las interpretaciones de las constantes $c_i, i < \omega$, y por otro lado sí es igual al menos a una.

Aunque perdemos compacidad y Löwenheim-Skolem en general, logramos conservar algunas herramientas como interpolación, y teoremas de transferencia cardinal. Aún más, hemos ganado suficiente poder expresivo como para caracterizar estructuras numerables.

[1]Aquí $a^n = a \cdot \dots \cdot a$, n veces.

Teorema 2 (Scott). *Para cualquier estructura numerable $\mathcal{A}$ (con lenguaje numerbale), existe $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ tal que para cualquier estructura numerable $\mathcal{B}$*

$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Por supuesto podemos fortalecer $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ al permitir conjunciones más grandes, incluso permitir cuantificaciones infinitarias, de esta forma llegamos a $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$. Esta lógica permite tener $< \kappa$ conjunciones y disyunciones, además permite cuantificación de orden infinito, es decir, si $\bar{x} = x_1, \ldots, x_\xi, x_{\xi+1}, \ldots$ es de longitud $< \lambda$ entonces $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_{\kappa\lambda}$.

Otro concepto fuera del alcance de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es la expresión de cardinalidad. $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ no es la herramienta adecuada para expresar que algo es infinito. Aunque sí podemos expresar que algo tenga un tamaño finito determinado, por ejemplo tener cardinalidad $\leqslant 20$ se puede expresar en un lenguaje con 20 constantes y con el enunciado

$$\forall x \bigvee_{i<20} x = c_i.$$

Pero no podemos distinguir entre cardinalidades infinitas, esto es una consecuencia de los teoremas de Löwenheim-Skolem ascendente y descendente.

Definición 3. (Descendente) si φ tiene un modelo de cardinalidad $> \omega$ entonces tiene uno de cardinalidad ω y (Ascendente) modelos en cardinalidades arbitrariamente grandes; donde φ viene de un lenguaje numerable.

Esto nos hace pensar que debe de haber una herramienta que nos ayude a expresar esto y esta la encontramos por el lado de los *cuantificadores generalizados*. Entre estos cuantificadores generalizados encontramos los cuantificadores de cardinalidad: $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ es la lógica que extiende a primer orden al permitir formulas del tipo

$$Q_\alpha x \varphi(x),$$

cuya interpretación es

$$\mathcal{M} \models Q_\alpha \varphi(x) \iff |\{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi[a]\}| \geqslant \omega_\alpha,$$

es decir, existen al menos ω_α elementos a que satisface φ. En esta lógica se puede ver que también perdemos Löwenheim-Skolem al considerar la fórmula

$$\varphi \equiv Q_\alpha x(c \neq x),$$

que nos dice que tenemos al menos ω_α elementos en el dominio de nuestra estructura; si $\alpha > 0$, entonces φ no puede tener modelos con cardinalidad ω, de hecho ninguna cardinalidad $< \omega_\alpha$. Pero Keisler [8] logró demostrar que el caso $\alpha = 1$ sí satisface compacidad.

Considerando el caso $\alpha = 0$ tenemos que cualquier fórmula en $\mathcal{L}(Q_0)$ de hecho se puede expresar en $\mathcal{L}^{II}$ con la siguiente equivalencia

$$\mathcal{M} \models Q_0 x \psi(x) \iff \mathcal{M} \models \exists Y(\varphi^Y \wedge \forall v(Y(v) \to \psi(v)),$$

donde φ es el enunciado que expresa infinitud, pero φ^Y es la relativización a Y, es decir,

$$\varphi^Y \quad \equiv \quad \begin{array}{c} \exists N, s \forall xy\big((N(x) \to Y(x)) \wedge (s(x) = y \to Y(x) \wedge Y(y)) \wedge \\ \exists z(N(z) \wedge \forall w(w \nless z)) \wedge \forall w(w < s(w)) \wedge \\ \forall w(N(w) \to N(s(y)) \wedge \\ < \text{ es un orden lineal sin punto final en } Y\big). \end{array}$$

Con esto obtenemos que $\mathcal{L}^{II}$ es tan expresiva como $\mathcal{L}(Q_0)$.

Otra variación de segundo orden considera un nuevo cuantificador $\mathfrak{aa}$, cuyas letras provienen del inglés *almost all*. La sintaxis de la lógica obedece las siguientes reglas

$$\varphi(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{aa}) \Longrightarrow \mathfrak{aa} s \varphi(s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{aa}).$$

Para aclarar la semántica tenemos que pasar por unas definiciones técnicas.

Definición 4. Sea M un conjunto $|M| \geqslant \omega$,

$$\mathcal{P}_\omega M = \{s \subset M : |s| = \omega\}.$$

Un conjunto $X \subset \mathcal{P}_\omega M$ es *cerrado* si $\{s_n : n < \omega\} \subset X$ implica $\bigcup_{n<\omega} s_n \in X$, *no está acotado* si para cada $s \in \mathcal{P}_\omega M$ existe $s' \in X$ con $s \subset s'$. Decimos que X es un *club*[2] si es cerrado y no está acotado. El filtro[3] club es el conjunto $\mathcal{C}_M = \{X \subset \mathcal{P}_\omega M : X$ contiene a un club $\}$. Finalmente decimos que $Y \subset \mathcal{P}_\omega M$ es *estacionario* si intersecta a cada elemento del filtro club.

Entonces la semántica de $\mathcal{L}(\mathfrak{aa})$ se define extendiendo la de primer orden de la siguiente forma

$$\mathcal{M} \models \mathfrak{aa}s\varphi(s) \Longleftrightarrow \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\} \in \mathcal{C}_M.$$

Si definimos $\mathfrak{stat}s\varphi(s) \equiv \neg\mathfrak{aa}s\neg\varphi(s)$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \mathfrak{stat}s\varphi(s) &\Longleftrightarrow \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \neg\varphi[s]\} \notin \mathcal{C}_M \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{P}_\omega M \backslash \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\} \notin \mathcal{C}_M \end{aligned}$$

Es decir que para todo club $X \in \mathcal{C}_M$ tenemos que $X \not\subset \mathcal{P}_\omega M \backslash \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\}$, esto es

$$\text{para todo club } X \in \mathcal{C}_M \text{ existe } t \in \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\} \text{ con } t \in X.$$

Lo que equivale a afirmar que $\{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\}$ es estacionario. Consideremos el siguiente enunciado

$$\mathfrak{stat}s\exists x(\varphi(x) \wedge \neg s(x)), \quad (\star)$$

que equivale a $\neg\mathfrak{aa}s\forall x(\varphi(x) \to s(x))$. Si $\mathcal{M} \models (\star)$ tenemos que $A = \{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi[a]\}$ satisface $|A| \geqslant \omega_1$ y a la inversa, si $|A| \geqslant \omega_1$ entonces $\mathcal{M} \models (\star)$. Para ver esta equivalencia notemos que si $|A| \geqslant \omega_1$ entonces no existe $s \in \mathcal{P}_\omega M$ con $A \subset s$, por tanto $\mathcal{M} \models \neg\mathfrak{aa}s\forall x(\varphi(x) \to s(x))$. Luego si $|A| \leqslant \omega$, tenemos que $\hat{A} = \{s \in \mathcal{P}_\omega M : A \subset s\}$ es estacionario, de hecho es un club y por tanto

$$\mathcal{M} \models \mathfrak{aa}s\forall x(\varphi(x) \to s(x)).$$

Es decir, hemos probado que $Q_1 x\varphi(x) \equiv \mathfrak{stat}s\exists x(\varphi(x) \wedge \neg s(x))$. Por tanto $\mathcal{L}(\mathfrak{aa})$ extiende a $\mathcal{L}(Q_1)$. De esto deducimos que perdemos Löwenheim-Skolem descendente, pero Barwise, Makkai y Kaufmann [2] probaron compacidad para esta lógica.

Además notemos que si $\mathcal{M}$ es numerable entonces $\{M\}$ es un club y de hecho está contenido en cualquier club. Por tanto

$$\mathcal{M} \models \mathfrak{aa}s\varphi(s) \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[M],$$

es decir, el cuantificador se comporta como el cuantificador universal $\forall$ en cualquier modelo numerable.

3. Comparando Lógicas

Para estudiar lógicas requerimos una herramienta que nos permita relacionarlas entre ellas, lo más natural es pensar en una relación de orden entre lógicas que nos permita evaluar cuándo una es más expresiva que otra. En seguida la ilustramos aprovechando considerar una forma muy natural de obtener nuevas lógicas a partir de una. Podemos considerar $\mathcal{L}^{II}_{\kappa\omega}$, $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}(Q_0)$ y semejantes. También podemos tomar su unión $\mathcal{L}^{II} \cup \mathcal{L}_{\kappa\omega}$. La diferencia entre $\mathcal{L}^{II}_{\kappa\omega}$ y $\mathcal{L}_{\kappa\omega} \cup \mathcal{L}^{II}$ es que la primera permite tener fórmulas con conjunciones infinitas y cuantificaciones sobre relaciones, mientras que la segunda solo permite que las fórmulas tengas cuantificaciones de segundo orden o conjunciones infinitas, no puede tener ambas, en ese sentido $\mathcal{L}^{II}_{\kappa\omega}$ es más expresiva que $\mathcal{L}_{\kappa\omega} \cup \mathcal{L}^{II}$. En este caso tenemos una forma obvia de comparar las fórmulas ya que de hecho $\mathcal{L}_{\kappa\omega} \cup \mathcal{L}^{II} \subset \mathcal{L}^{II}_{\kappa\omega}$ porque la sintaxis coincide. Pero eso no es necesariamente el caso al tratar con dos lógicas arbitrarias, tomemos como ejemplo $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(Q_\alpha)$ y

[2]Club por *closed*, cerrado en inglés, y *unbounded*, no acotado.

[3]es un filtro porque es cerrado bajo supraconjuntos y bajo intersecciones, de hecho es cerrado bajo intersecciones.

$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{\kappa\omega_{\alpha+1}}$. En $\mathcal{L}_2$ tenemos permitido cuantificar hasta ω_α variables, por lo cual podemos fijar el siguiente enunciado

$$\exists \bar{x}\big(\bigwedge_{\xi\neq\zeta} x_\xi \neq x_\zeta \wedge \bigwedge_{\xi<\omega_\alpha} \varphi(x_\xi)\big), \qquad (\heartsuit)$$

donde la longitud de $\bar{x}$ es ω_α. Claramente estamos afirmando la existencia de al menos ω_α elementos que satisfacen φ. Esto nos dice que existe una traducción natural de $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$:

$$Q_\alpha x\varphi(x) \mapsto (\heartsuit).$$

Notemos que en este caso $\mathcal{L}_2$ resulta ser estrictamente más expresiva porque podemos definir el buen orden en $\mathcal{L}_2$ pero en $\mathcal{L}_1$ no necesariamente se puede hacer porque aunque podamos cuantificar la existencia de un conjunto infinito (incluso más fuerte que eso cuando $\alpha \neq 0$) no podemos definir que de hecho este conjunto infinito genere una cadena decreciente. Esta discusión nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5. Decimos que $\mathcal{L}_1$ *es más expresiva que* $\mathcal{L}_0$, o $\mathcal{L}_1$ *es tan expresiva como* $\mathcal{L}_0$, en símbolos $\mathcal{L}_0 \leqslant \mathcal{L}_1$, siempre que para cada enunciado $\varphi \in \mathcal{L}_0$ exista un enunciado $\psi \in \mathcal{L}_1$ tal que

$$\{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi\} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \psi\}.$$

Ejemplo 1. Ya probamos las siguientes relaciones.

- $\mathcal{L}(Q_0) \leqslant \mathcal{L}^{II}$,
- $\mathcal{L}(Q_1) \leqslant \mathcal{L}(\mathfrak{aa})$,
- $\mathcal{L}(Q_\alpha) \leqslant \mathcal{L}_{\kappa\omega_{\alpha+1}}$,
- $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}_{\kappa\mu}, \mathcal{L}(Q_\alpha), \mathcal{L}(\mathfrak{aa})$.

En la definición de la relación $\leqslant$ se hace más explícito el uso de las clases de estructuras. Esto extiende la equivalencia de foŕmulas de primer orden de forma natural, en primer orden decimos que dos fórmulas φ, ψ son equivalentes cuando

$$\mathcal{M} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \psi,$$

dado cualquier modelo $\mathcal{M}$. Formulado en otro sentido y teniendo en mente que las fórmulas pueden ser sintácticamente diferentes, podemos decir que para comparar dos lógicas necesitamos una traducción que asegure la misma expresividad y esto lo comprobamos al ver las clases de modelos de ambos enunciados, si las clases son iguales entonces los enunciados expresan lo mismo pero en diferentes lógica. En este punto ya se puede hasta comparar lógicas abstractas pero seguimos sin poseer una definición formal. Acudimos a dos definiciones para abrir un panorama formal en esta discusión, pero queremos señalar que no son las únicas y que quizá usar una u otra en diferentes momentos sea más conveniente.

4. Diferentes Lógicas

Definición 6. Decimos que una lógica $\mathcal{L}$ es

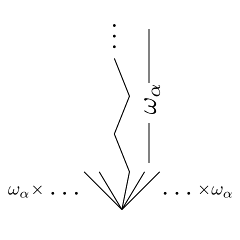
- *atómica* si para cada vocabulario υ y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}(\upsilon)$ atómica, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(\upsilon)$ con
$$Mod_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi) = Mod_{\mathcal{L}}(\vartheta);$$
- *cerrada bajo conjunciones* si para cada vocabulario υ y cualesquier $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\upsilon)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(\upsilon)$ con
$$Mod_{\mathcal{L}}(\vartheta) \cap Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}}(\vartheta);$$
- *cerrada bajo disyunciones* si para cada vocabulario υ y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}(\upsilon)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(\upsilon)$ con
$$Mod_{\mathcal{L}}(\varphi) \cup Mod_{\mathcal{L}}(\psi) = Mod_{\mathcal{L}}(\vartheta);$$

- *cerrada bajo negaciones* si para cada vocabulario υ y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}(\upsilon)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(\upsilon)$ con
$$Mod_{\mathcal{L}}(\varphi) = Est(\upsilon)\backslash Mod_{\mathcal{L}}(\vartheta),$$
donde $Est(\upsilon)$ es la clase de todas las υ-estructuras;
- *cerrada bajo particularización* si para cada vocabulario υ con una constante c y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}(\upsilon)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(\upsilon\backslash\{c\})$ con
$$Mod_{\mathcal{L}}(\vartheta) = \{(\mathcal{M}, a) : (\mathcal{M}, a) \models \varphi(a) \text{ para alguna } a \in M\};$$
- *cerrada bajo relativización* si dados dos vocabularios υ_0, υ_1, $c \notin \upsilon_0 \cup \upsilon_1$ y $\varphi \in \mathcal{L}(\upsilon_0), \psi \in \mathcal{L}(\upsilon_1 \cup \{c\})$ arbitrarias, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(\upsilon_0 \cup \upsilon_1)$ con
$$Mod_{\mathcal{L}}(\vartheta) = \{\mathcal{M} : U_\psi^{\mathcal{M}} \text{ es } \upsilon_0\text{-cerrado}, \langle U_\psi^{\mathcal{M}}, \varsigma^{\mathcal{M}}\rangle_{\varsigma\in\upsilon_0} \models \varphi\},$$
aquí $U_\psi^{\mathcal{M}} = \{a \in M : \langle\mathcal{M}, a\rangle \models \psi\}$.

Una lógica $\mathcal{L}$ se dice *regular* si satisface cada una de las propiedades anteriores. Estas lógicas satisfacen $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$, aunque no necesariamente $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leqslant \mathcal{L}$ implica que la lógica es regular.

Estas definiciones resaltan que no toda lógica satisface propiedades de cerradura que consideramos básicas. Incluso con los ejemplos que hemos dado de lógicas que extienden a primer orden podemos ver que todas satisfacen al menos la cerradura bajo negación, conjunción y particularización. A continuación vemos ejemplos de lógicas que no satisfacen algunas de estas propiedades.

1. La lógica $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ se formula al considerar fórmulas atómicas y sus negaciones y las cerramos bajo $\wedge, \vee, \exists, \forall, Q_\alpha, \rotatebox[origin=c]{180}{Q}_\beta$ y $\alpha < \beta$. Donde
$$\mathcal{M} \models Q_\alpha x\varphi(x) \iff |\{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi[a]\}| \geqslant \omega_\alpha,$$
$$\mathcal{M} \models \rotatebox[origin=c]{180}{Q}_\beta x\varphi(x) \iff \text{ para todos } a \in M, \text{ salvo } < \omega_\beta,\ \mathcal{M} \models \varphi[a].$$
En principio por supuesto que no es cerrada bajo la negación porque solo las fórmulas atómicas tienen negación. Uno se vería tentado a extender esta negación de la siguiente forma
$$\begin{array}{rl}
\sim \phi \equiv \neg\phi, & \phi \text{ atómica},\\
\sim \phi \equiv \phi, & \text{atómica negada},\\
\sim (\phi \wedge \psi) \equiv \sim \phi \vee \sim \psi, & \\
\sim (\phi \vee \psi) \equiv \sim \phi \wedge \sim \psi, & \\
\sim \exists x\phi(x) \equiv \forall x \sim \phi(x), & \\
\sim \forall x\phi(x) \equiv \exists x \sim \phi(x), & \\
\sim Q_\alpha x\phi(x) \equiv \rotatebox[origin=c]{180}{Q}_\beta x \sim \phi(x), & \\
\sim \rotatebox[origin=c]{180}{Q}_\beta x\phi(x) \equiv Q_\alpha x \sim \phi(x). &
\end{array}$$
Consideramos un vocabulario $\upsilon \supset \{<\}$ entonces
$$Q_\alpha x(x < c) \wedge \sim Q_\alpha x(x < c)$$
significa que c tiene al menos ω_α predecesores pero que hay $< \omega_\beta$ elementos que no preceden a c, lo cual no tiene absolutamente nada de contradictorio. Por ejemplo en un árbol con una rama de longitud $\omega_\alpha + 1$ y el orgen con ω_α sucesores



En este caso
$$Mod(Q_\alpha x(x < c)) \neq Est(\upsilon)\backslash Mod(\sim Q_\alpha x(x < c)).$$

2. Consideramos $Cl_{\kappa\lambda}$ cuyas fórmulas $\varphi \in \mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ son de la forma $\forall\bar{x}\psi(x)$, donde $\psi(x) \in \mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ y no aparecen cuantificadores en ψ. Claramente esta lógica no puede ser cerrada bajo particularización y de hecho tampoco bajo negación porque $\neg\forall\bar{x}\psi(\bar{x}) \equiv \exists\bar{x}\neg\psi(\bar{x})$.
3. En general, la unión $\mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$ de dos lógicas no tiene la propiedad de conjunción ni disyunción, esto es fácil de argumentar porque si $\psi_0 \in \mathcal{L}_0, \psi_1 \in \mathcal{L}_1$ son tales que no existe $\varphi_0 \in \mathcal{L}_1$ con
$$\mathcal{M} \models \psi_0 \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi_0$$
ni $\varphi_1 \in \mathcal{L}_0$ tal que
$$\mathcal{M} \models \psi_1 \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi_1,$$
es decir que $\mathcal{L}_0 \nleqslant \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_1 \nleqslant \mathcal{L}_0$. Entonces $\psi_0 \wedge \psi_1, \psi_0 \vee \psi_1 \notin \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$. Pero si ambas satisfacen conjunción y disyunción, podemos encontrar $\mathcal{L} \geqslant \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$ que sí se cierra bajo conjunción y disyunción simplemente al cerrarla "manualmente". Además, la unión tiene la propiedad de negación cuando y solo cuando ambas la tienen.

5. Teorema de Lindström: LS y Compacidad como barreras expresivas

Hemos visto como dos propiedades de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ nos han imposibilitado expresar escenarios muy naturales con los cuales se encuentran los matemáticos. Estas son compacidad y Löwenheim-Skolem. También observamos como al extender $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ perdíamos alguna de estas propiedades. Esto no es ninguna coincidencia ya que Lindström logró caracterizar a primer orden como la mayor lógica que satisface estas dos propiedades.

Teorema 7 (Lindström). *Si $\mathcal{L}$ es una lógica regular que satisface compacidad y Löwenheim-Skolem descendente, entonces $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es tan expresiva como $\mathcal{L}$.*

Este resultado fue un parteaguas en la historia de la lógica ya que se considera el nacimiento del estudio de las lógicas abstractas. Aunque las lógicas infinitarias han sido incitadas desde el inicio de la lógica formal al interpretar las cuantificaciones como conjunciones o disyunciones infinitarias, o aunque la lógica de segundo orden está formulada desde Leibniz y ha estado en el corazón de la fundamentación de las matemáticas desde finales del siglo XIX, no existía un estudio que diera una caracterización de una lógica. Tampoco existía la noción de comparación entre lógicas (no fuera de los conocimientos básicos como que $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ extendía a primer orden, que era tan obvio que no requería un estudio profundo). Y menos una caracterización que comprendía conceptos modelo-teóricos.

Este teorema no es el único en esta dirección. Antes de enunciar algunas de ellas, establecemos las propiedades. Decimos que $\mathcal{L}$ satisface:

- la *propiedad de Robinson*, si para cualesquier vocabularios v, v_0, v_1 con $v = v_0 \cap v_1$, cualesquier conjuntos de enunciados $\Phi \subset \mathcal{L}(v)$ y $\Phi_i \subset \mathcal{L}(v_i)$, $i < 2$. Si Φ es completa y $\Phi \cup \Phi_i$ tiene modelo, $i < 2$, también lo tiene $\Phi \cup \Phi_0 \cup \Phi_1$.
- la *propiedad de Tarski* cuando al tener una sucesión $\langle \mathcal{A}_n : n < \omega \rangle$ con $\mathcal{A}_n \prec_{\mathcal{L}} \mathcal{A}_{n+1}$, entonces
$$\mathcal{A}_n \prec_{\mathcal{L}} \bigcup_{n<\omega} \mathcal{A}_n.$$

Teorema 8. *$\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es tan expresiva como $\mathcal{L}$ si*

- *$\mathcal{L}$ tiene la propiedad de Löwenheim-Skolem y la propiedad de Robinson.*
- *$\mathcal{L}$ es compacta y tiene la propiedad de Tarski.*

Referencias

[1] Barwise K.J., Axioms for Abstract Model Theory, Annals of Mathematical Logic 7, North-Holland, 221–265, 1974.
[2] Barwise, K.J., Kaufmann, M. & Makkai, M., *Stationary Logic*, Annals of Mathematical Logic 13, North-Holland, 171–224, 1978.
[3] Dickmann, C., Large Infinitary Languages, Model Theory, North-Holland, 1975.

[4] Flum, J. *Characterizing Logics*, Model-Theoretic Logics, editores K. J. Barwise y S. Feferman, Springer-Verlag, 77–120, 1985.
[5] García-Matos, M. & Väänänen, J. *Abstract Model Theory as a Framework for Universal Logic*, Logica Universalis, Birkäuser, 19–33, 2005.
[6] Karp, C. *Infinite-quantifier Languages and ω-chains of Models*, Proceedings of the Tarski Symposium, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXV, American Mathematical Society, 225–232, 1971.
[7] Keisler, H.J. Model Theory for Infinitary Logic, Logic with Countable Conjunctions and Finite Quantifiers, North-Holland, 1971.
[8] Keisler, H.J. Logic with the Quantifier "There Exist Uncountably Many", Annals of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 1970
[9] Lindström, P. *On Extensions of Elementary Logic*, University of Gothenburg, Theoria, 1969.

Edgar A. Valenzuela Nuncio
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Leyes de Reforma 1ra sección.
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: gar_ed_93@hotmail.com