Mixba'al,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.13, No.1, 2022, páginas 65-77.
Recibido 04-01-2022. Aceptado 27-04-2022.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v13n1/carma

DESOLVIDANDO A NINA BARI

CARMEN MARTÍNEZ-ADAME

RESUMEN. Se conoce poco sobre las matemáticas más antiguas, en parte porque porciones sustanciales de sus escritos se han perdido. Sin embargo, este no es el caso de las matemáticas de los siglos XIX y XX, se conoce poco sobre ellas por otras razones. El objetivo de este texto es *desolvidar* a una de las primeras matemáticas soviéticas, heredera de una importante tradición científica de mujeres rusas a finales del siglo XIX. Nina Bari fue la primera mujer matemática en graduarse de la Universidad Estatal de Moscú tras la revolución rusa. Dedicó su vida al estudio de la teoría de funciones y en este texto intentamos dar un breve panorama sobre su vida.

1. Introducción

No fueron pocas las mujeres rusas que durante la segunda mitad del siglo XIX optaron por una carrera científica, por otro lado, no son muchas las que son recordadas. El objetivo de este texto es traer a la luz a una de las primeras matemáticas soviéticas: Nina Karlovna Bari.

> Hay un aspecto importante y descuidado de la historia de la ciencia. Es la historia de mujeres que han continuado la tradición del avance científico y tecnológico desde la prehistoria hasta nuestros días.[1,2] [2, p. 11]

1.1. Breve contexto de la situación matemática general en Moscú a inicios del siglo XX. En la segunda mitad del siglo XIX y principios del siglo XX San Petersburgo era la capital del Imperio Ruso y su escuela de matemáticas era una de las líderes en Europa. Fue de manera muy paulatina con la vuelta del siglo que la Universidad de Moscú empezó a cobrar importancia en el desarrollo de las matemáticas.

Un momento clave para la escuela matemática moscovita fue la llegada de matemáticos como Boleslav K. Mlodzeevskii (1858-1923) y Dmitri Fyodorovich Egorov (1869-1931). En particular, el curso de teoría de funciones de una variable real dado por Mlodzeevskii en la Universidad de Moscú por primera vez durante el otoño de 1900 se volvió muy popular y atrajo a un amplio público, posteriormente el curso fue repetido en 1902, 1904 y en 1907. En estos cursos se abordaban temas de la aún naciente teoría de conjuntos[3] y estos temas empezaron a cobrar gran importancia. En 1904 P. Florenski, un estudiante graduado de la Universidad de Moscú, publicó el artículo *Símbolos de un infinito* que contenía el primer esbozo en ruso de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos de Cantor. En 1907 se publicó el libro *Números Transfinitos* de Zhegalkin y con esto se marcó el verdadero inicio de las matemáticas en Moscú.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 01A60, 26-03.
Palabras clave. Mujeres matemáticas, historia de la teoría de funciones.

[1] El presente texto tiene un fuerte componente histórico por lo que consideramos importante preservar las citas en su idioma original. Sin embargo, para facilitar la lectura, éstas aparecen como notas al pie de página y en el cuerpo del texto aparecerán traducciones al castellano.

[2] There is an important and neglected aspect of the history of science. It is the story of women who have carried on the tradition of scientific and technological advance from prehistoric times up to the present day.

[3] De hecho fue Mlodzeevskii quien estableció la terminología rusa en estos temas.

Egorov había comprendido con profundidad la importancia de las nuevas ideas de Cantor, Borel y Lebesgue y para 1912 sus seminarios eran el escenario para la discusión de nuevos descubrimientos matemáticos a los cuales asistían todas las personas que se dedicaban a las matemáticas en Moscú. Entre sus estudiantes se encontraban futuras grandes personalidades de las matemáticas como Vladimir Golubev, Vyacheslav Stepanov y Nikolai Luzin; este último sería además, maestro y mentor de Nina Bari.

2. La vida temprana de Nina Karlovna Bari

Nina Karlovna Bari nació en Moscú el 19 de noviembre de 1901, hija de Karl Adolfovich Bari y Olga Eduardovna Seligson. Él era médico y no hay mucha información sobre su madre.

Nina Karlovna asistió a la escuela secundaria privada para mujeres de L. O. Vyazemska y en 1918 presentó y aprobó el examen para obtener el certificado equivalente al de una escuela secundaria para hombres. Con este certificado pudo entrar a la Facultad de Física y Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú en 1918 cuando reabrió trás la revolcuión rusa. La Universidad había existido como una institución de educación superior para hombres pero fue hasta después de la revolución que se permitió la entrada a mujeres.

Lazar Aronovich Lyusternik (1899-1981) fue un matemático soviético, también estudiante de Luzin, que en 1967 publicó un artículo en cuatro partes, que se tradujo al inglés como *The early years of the Moscow mathematical school*. Lyusternik comienza este artículo diciendo que en 1961 sus actividades habituales se vieron interrumpidas durante algún tiempo por mala salud y durante ese tiempo escribió sus memorias. En ellas menciona en muchas ocasiones a Nina Bari y le dedica una pequeña sección que comienza de la siguiente manera:

> Hasta antes de la revolución, a las mujeres no se les había permitido ingresar a la universidad. En 1918 tuvo lugar la primera admisión de mujeres a la MGU.[4] Entre los estudiantes de esta matrícula estaba Nina Karlovna Bari [...] Quienes conocieron a Nina Karlovna en sus años posteriores podrían imaginarla sin dificultad en su juventud. Era una mujer esbelta de tez morena, cabello negro rizado, ojos vivos y brillantes, con un andar enérgico y voz clara [...] Ya como estudiante, Nina Karlovna se destacó por su sobresaliente habilidad matemática. Se graduó antes de tiempo y fue, con toda probabilidad, la primera mujer graduada de la universidad y la primera en inscribirse como estudiante de posgrado.[5] [26, p. 79]

Cuando Nina Bari ingresó a la universidad en 1918, se convirtió en una de las primeras mujeres en ser aceptadas en el Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú. Se graduó en 1921, solo tres años después de ingresar y de hecho fue la primera mujer en egresar. Después de graduarse, Bari comenzó su carrera docente; dio clases en el Instituto Comunista de Sverdlov de 1921 a 1922, en el Instituto Politécnico de Moscú de 1921 a 1923 y en el Instituto Forestal de Moscú de 1921 a 1925.

Para poder comprender cabalmente el trabajo de Bari consideramos importante conocer el contexto en el cual se desarrolló y este es el objetivo de la siguiente sección.

---

[4] Al hacer la transliteración del nombre de la univeridad se obtiene Moskóvskiy gosudárstvenniy universitét ímeni M. V. Lomonósova y de ahí las siglas, MGU.

[5] Until the revolution women had not been allowed into the university. In 1918 the first admission of women to MGU took place. Among the students of this enrolment was Nina Karlovna Bari [...] Those who knew Nina Karlovna in her later years could easily picture her in her youth. She was a slim woman with a dark complexion, black curly hair, lively brilliant eyes, energetic walk and clear voice [...] Already as a student Nina Karlovna was noted for her outstanding mathematical ability. She graduated ahead of time and was, in all probability, the first woman graduate of the university and the fisrt to enrol as a research student.

3. Algunos comentarios sobre la teoría de funciones

3.1. Teoría de funciones. La intención de esta sección no es hacer una historia global de la teoría de funciones ni mucho menos del análisis funcional, el objetivo es presentar el estado del arte de la teoría de funciones al interior de la escuela soviética como contexto para el trabajo realizado por Nina Bari.

Uno de los problemas centrales de la teoría de funciones durante el siglo XIX fue la posibilidad de representar a una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica. Esta idea se planteó por primera vez por Leonhard Euler en relación con el trabajo de Daniel Bernoulli sobre la cuerda vibrante y fue uno de los problemas centrales del trabajo de Fourier desde 1811.

Esta teoría tiene como punto de partida a la serie (hoy conocida como serie de Fourier) para funciones $f(t)$ que sean continuas y 2π-periódicas

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{1}$$

en donde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ y $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$ para $n = 0, 1, \dots$

El problema de si una función arbitraria tiene una expansión en una serie de Fourier evolucionó durante el siglo XIX para convertirse de un problema de existencia a un problema de unicidad en la segunda mitad del siglo; y es este problema de unicidad el que más nos interesa aquí. Este problema se puede expresar de la siguiente manera: ¿Existen dos series trigonométricas distintas que converjan a la misma función en cada punto del intervalo $[0, 2\pi]$? Sobre este tema Heinrich Eduard Heine, en 1870, publicó el siguiente resultado:

Teorema 1. *Una función $f(x)$, continua en general pero no necesariamente finita, puede representarse de solo una manera mediante una serie trigonométrica de la forma $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$ si la serie converge uniformemente en general.*[6] [22, p. 355]

La pregunta sobre la unicidad es claramente equivalente a: ¿Existe una serie trigonométrica que converge a cero en todos sus puntos sin que todos sus coeficientes sean cero? Cantor, también en 1870, dio una respuesta negativa a esta pregunta, probó que si para todo valor real de una variable x entre límites dados ($a < x < b$), $\lim(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$, entonces $\lim a_n = 0$ y $\lim b_n = 0$.[7] [17, p. 135]

A partir de esto Cantor pudo concluir en [18, p. 142] que si una función $f(x)$ de una variable real x está dada por una serie trigonométrica convergente para todo valor de x, entonces no existe otra serie de la misma forma que también converja para todo valor de x y represente a la misma función $f(x)$.[8] Posteriormente Cantor generalizó este resultado para que la convergencia no se tuviera que pedir en *todos* los puntos o dicho de otra manera, si la serie expresada en (1) converge a cero para toda $t \in [0, 2\pi] \setminus E$ en donde E es un conjunto finito o infinto que cumple ciertas

[6]El teorema está enunciado por Heine de la siguiente manera: Satz. Eine im allgemeinen stetige, nicht nothwendig endliche Function $f(x)$ lässt sich höschstens auf einer Art in eine trigonometrische Reihe von der Form $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$ entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im allgemeien in gleichem Grade convergiren. Hemos modificado la traducción ligeramente para utilizar la nomenclatura actual de algunos conceptos en aras de una mejor comprensión. La expresión en general usada por Heine se refiere a la posible excepción de un número finito de puntos.

[7]Lehrsatz. Wenn für jeden reellen Werth von x zwischen gegebenen Grenzen ($a < x < b$): $\lim(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$, so ist sowohl: $\lim a_n = 0$, wie $\lim b_n = 0$.

[8]Satz: Wenn eine Function $f(x)$ einer reellen Veranderlichen x durch eine für jeden Werth von x convergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so giebt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Werth von x convergirt und die nämliche Function $f(x)$ darstellt.

propiedades específicas, entonces todos los coeficientes de la serie son iguales a cero.[9] Esta idea de que la condición deseada se cumpliera fuera de un conjunto excepcional E marcaría de ahí en adelante no solo el trabajo matemático de Cantor sino a la teoría de funciones en general.

Para lograr esto, Cantor introdujo la noción de conjunto derivado que es el conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto dado y enunció y demostró el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Si una ecuación que tiene la forma*

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \ldots$$

en donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$*,* $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ *es satisfecha para todos los valores de* x*, con la posible excepción de aquellos que corresponden a los puntos de un conjunto de puntos* P *de* ν*-ésima especie*[10] *dado en el intervalo* $(0 \ldots (2\pi))$*, en donde* ν *designa a un número entero tan grande como se quiera, entonces* $d_0 = 0$ *y* $c_n = d_n = 0$.[11] [19, p. 130]

Posteriormente, en 1882 [21], Harnack generalizó el resultado de Cantor probando que cuando el conjunto de puntos en los que la oscilación de la función es mayor que un número dado es denso en ninguna parte, entonces los límites de las sucesiones de coeficientes serán cero.

El trabajo sobre la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica estaba lejos de estar terminado cuando en 1902 Egorov realizó una estancia en Berlín, París y Gottingen. A partir de ésta y el tiempo compartido con Schwarz, Lebesgue y Hilbert (entre otros) su interés por la teoría de funciones aumentó notablemente.

También durante la primera década del siglo XX, Hobson publicó su famoso tratado *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, y W. H. Young, en 1909, publicó su nota sobre series trigonométricas que comienza de la siguiente manera:

> El teorema fundamental de la teoría de las series trigonométricas es el que establece que no pueden existir dos series trigonométricas distintas que converjan al mismo valor para todos los puntos del intervalo $(-\pi, \pi)$ con excepción de un conjunto reducible[12] de puntos en los que no se sabe que la serie converja al mismo valor, o que converja en absoluto.[13] [33, p. 44]

Lo que Young hace notar en su breve artículo es que este teorema se puede modificar de la misma manera que Harnack modificó el de Cantor para probar que

[9] Este estudio y la posibilidad de presentar una demostración rigurosa fueron el origen de la teoría de conjuntos cantoriana que parte de una teoría rigurosa de los números reales y la posibilidad de relacionar al continuo geométrico con el continuo aritmético.

[10] Un conjunto P es de la ν-ésima especie si su ν-ésimo conjunto derivado es finito.

[11] Wenn eine Gleichung besteht von der Form:

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \ldots$$

wo $C_0 = \frac{1}{2}d_0$, $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, für alle Werthe von x mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervalle gegebenen Punktmenge P der ν^{ten} Art entsprechen, wobei ν eine beliebig grosse ganze Zahl bedeutet, si ist:

$$d_0 = 0; c_n = d_n = 0.$$

[12] Un conjunto es llamado reducible si su conjunto derivado es numerable.

[13] The fundamental theorem in the theory of trigonometrial series is that which states that two distinct trigonometrial series cannot existe which converge to the same value for all points of the interval $(-\pi, \pi)$ with the exception of a reducible set of points at which the series are not known to converge to the same value, or to converge at all.

TEOREMA 3. *Si los valores de una función se asignan a todos menos a un conjunto numerable de puntos, [la función] se puede expresar como una serie trigonométrica de a lo más una manera.*[14] *Ibid.*

Para 1910 Egorov, ya de regreso en Moscú, organizó su famoso seminario de teoría de funciones y en 1916 Dmitrii Men'shov presentó su tesis sobre la teoría riemanniana de series trigonométricas. Poco tiempo después él obtuvo uno de los resultados fundamentales sobre el problema de la unicidad que marcó el inicio de una nueva dirección en la investigación de la matemática rusa (y también la polaca). En *Sur l'únicite du dévelopment trigonometrique* Men'shov demostró algo totalmente inesperado: la existencia de una serie trigonométrica, con una infinidad de coeficientes distintos de cero, que converge uniformemente a cero excepto en los puntos de un conjunto perfecto de medida cero. Según A. Zygmund, este descubrimiento puede ser considerado un punto de partida para la teoría moderna sobre las series trigonométricas [36, p. 591-2].

Lo que Men'shov probó fue el siguiente resultado:

TEOREMA 4. *Existe una serie trigonométrica uniformemente convergente a cero en $(0, 2\pi)$, excepto en un conjunto perfecto de medida cero, y que posee una infinidad de coeficientes distintos de cero.*[15] [28, p. 435]

Y a partir de este teorema se sigue el siguiente corolario:

COROLARIO 5. *Si una función $f(x)$ admite un desarrollo trigonométrico que converge a ella en casi todas partes, admite una infinidad de desarrollos trigonométricos de esta naturaleza.*[16] [28, p. 436]

Estos resultados promovieron ampliamente una discusión sobre los conjuntos que comenzaron a llamarse los conjuntos de unicidad y son éstos los que Nina Bari comenzaría a estudiar. Este tema de investigación resultó ser particularmente rico e incluso para 1935 cuando Zygmund publicó la primera edición de su tratado *Trigonometric Series* él escribió en el prefacio que:

> Dos [...] grandes problemas de la teoría esperan también su solución. Estos son la estructura de los conjuntos de unicidad y la estructura de las funciones con series de Fourier absolutamente convergentes.[17] [35, p. xi]

3.2. Luzitania. Como mencionamos anteriormente la situación de las matemáticas en Moscú cambió a inicios del siglo XX, en particular debido al trabajo de Mlodzeevskii y Egorov. Entre los estudiantes de Egorov se encontraba Nikolai Nikolayevich Luzin quien tuvo un importante papel en la vida de Nina Bari.

Luzin estudió matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú, ingresó en 1901 y se graduó en 1905. Posteriormente, de 1910 a 1914 estudió en Gottingen y París, y de regreso en Moscú obtuvo su doctorado en 1916 con una tesis llamada *La Integral y Series Trigonométricas.* En 1911 obtuvo su primer resultado imporante que fue la construcción de una serie de potencias de variable compleja con coeficientes que tienden a cero pero que diverge en todas partes en el círculo unitario, [23]. A partir de esto, construyó una serie trigonométrica real divergente en casi todas partes con coeficientes que convergen a cero. Este ejemplo era inesperado y de hecho refutó una conjetura de Pierre Fatou.

[14]If the values of a function be assigned at all but a countable set of point, it can be expressed as a trigonometrical series in at most one way.

[15]Il existe une série trigonometrique uniformément convergente vers zéro dans $(0, 2\pi)$, sauf un ensemble parfait de mesure nulle, et possédant une infinité de coefficients non nuls.

[16]Si une fonction $f(x)$ admet un développment trigonométrique convergent vers elle presque partuout, elle admet une infinité de développments trigonométrique de cette nature.

[17]Two [...] major problems of the theory also await their solution. These are the structure of the sets of uniqueness and the structure of the functions with absolutely convergent Fourier series.

En 1912 demostró lo que ahora se llama el teorema de Luzin en análisis real que establece que una función finita en casi todas partes es medible si y solo si es una función continua en casi todo su dominio. En los años de 1915 a 1918 comenzó un seminario sobre la teoría descriptiva de funciones que jugó un papel importante en el desarrollo de las matemáticas en Moscú. Como miembro de este seminario, P. S. Aleksandrov, siendo aún estudiante, resolvió un problema planteado por el mismo Luzin al demostrar que todo B-conjunto (o boreliano) no numerable tiene la potencia del continuo, y otro estudiante, Mikhail Suslin, probó que esta construcción de hecho daba una clase de conjuntos mucho más amplia que los B-conjuntos a los que llamó A-conjuntos (siguiendo la nomenclatura para los borelianos en honor a Aleksandrov). Suslin posteriormente demostró una gran cantidad de propiedades fundamentales de estos conjuntos.

En 1917, poco antes de la revolución, Luzin fue nombrado profesor de matemáticas puras en la Universidad de Moscú. Sin embargo, durante la guerra civil rusa que se extendió de 1918 a 1920, Luzin dejó Moscú para ir al Instituto Politécnico Ivanovo-Voznesensk[18] y regresó a Moscú en 1920. A partir de esa fecha organizó nuevamente un seminario de matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú. En esta ocasión entre sus estudiantes se encontraban algunas y algunos de los matemáticos soviéticos más famosos, y entre ellos, Nina Bari.

Este fue un periodo imporante para la matemática soviética y en particular para la matemática moscovita que vivió un rápido desarrollo en torno del trabajo de Luzin. El grupo de estudiantes que trabajan con él se empezó a conocer como *Luzitania* a partir del otoño de 1920 y entre las y los *luzitanos* originales se encontraban V. V. Stepanov, P. S. Alexandrov, P. S. Urysohn y evidentemente Nina Bari. Lyusternik se unió un poco más tarde. El interés central de este grupo era la teoría de funciones.

Formaban un grupo cercano y organizaban reuniones, muchas veces en el departamento de Luzin y muchas veces organizadas por Bari. Previo a la existencia de Luzitania en la Universidad de Moscú existía el Círculo de Estudiantes de Matemáticas pero éste fue absorbido por Luzitania rápidamente. Luzin fue nombrado presidente honorario y Bari fue electa como vicepresidenta.

4. La vida matemática de Nina Karlovna Bari

El grupo Luzitania estaba dedicado a estudiar la teoría de funciones y Bari se dedicó a esto el resto de su vida. Fue como estudiante de Luzin cuando primero se enteró del problema de unicidad y este problema la apasionó para siempre.

Poco después de que Bari empezara su carrera como docente, el Instituto de Investigación de Matemáticas y Mecánica reabrió sus puertas y ella decidió continuar enseñando pero también comenzar su carrera como investigadora. Fue de las primeras estudiantes en el Instituto y Luzin era su director de tesis. Solamente había una plaza para estudiantes de posgrado oficialmente, pero había 10 estudiantes en el Instituto. El nombramiento oficial fue dado a Bari por ser la primera en la lista alfabética.[19]

En 1922 Bari presentó su investigación ante la Sociedad Matemática de Moscú; fue la primera mujer en dar una conferencia en ese foro y en 1923 publicó estos resultados en el artículo *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, [3]. En 1925 Bari completó sus estudios de doctorado y en enero de 1926 defendió su tesis, *Sobre la unicidad de los desarrollos trigonométricos*, para obtener el grado. La tesis contenía soluciones a diversos problemas de la teoría de series trigonométricas centrándose en el problema de unicidad que hemos mencionado. Algunos de los resultados de su tesis habían sido publicados en [3] y en 1927 publicó un artículo detallado con estos resultados, [4]. Por su trabajo recibió el premio Glavnauk.[20]

[18]El Instituto ahora es llamado Universidad Estatal de Química y Tecnología de Ivanovo.

[19]Al ser oficialmente estudiante de posgrado Bari recibía una beca, misma que compartía con los demás estudiantes.

[20]Glavnauka es el acrónimo (transliterado) de la Administración Central de Instituciones Científicas, Académicas, Artísticas y Museográficas.

En el artículo de 1923 Bari comienza diciendo que

> El problema de unicidad de la expansión trigonométrica llama la atención sobre "conjuntos (U)" que tienen la siguiente propiedad: Si una serie
>
> $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$
>
> converge a cero en todas partes, excepto quizás en los puntos de tal conjunto, todos los coeficientes a_n y b_n de esta serie son cero. Llamaremos "conjuntos (M)" a aquellos que no tienen esta propiedad.[21] [3, p. 1195]

En otras palabras los conjuntos de unicidad, conjuntos (U), y los conjuntos de multiplicidad, conjuntos (M), se definen de la siguiente manera:

Definición 6. *Decimos que un conjunto E es un* conjunto (U) *si la convergencia a cero de una serie trigonométrica fuera del conjuto E solo es posible en el caso en el cual todos los coeficientes de la serie son cero.*

Definición 7. *Decimos que un conjunto E es un* conjunto (M) *si existe una serie trigonométrica con coeficientes distintos de cero que converja a cero en todas partes fuera del conjunto E.*

Es inmedianto a partir de estas definiciones que cada conjunto de puntos es o bien un conjunto (M) o bien un conjunto (U) y con esta terminología el resultado de Cantor que mencionamos en la sección anterior se podría enunciar de la siguiente manera: todo conjunto finito, o numerable reducible, es un conjunto (U). Y en virtud de los resultados de Young y Men'shov se tiene que todo conjunto numerable es un conjunto (U) y que existen conjuntos perfectos (M) de medida cero.

Dado el ejemplo construido por Men'shov era natural esperar que todo conjunto perfecto de medida cero fuera un conjunto (M), sin embargo, Bari refutó esto mediante la construcción de una clase de conjuntos perfectos (U). En 1921, Bari se planteó la pregunta "¿Existen conjuntos (U) que tengan la potencia del continuo?"[22] [3, p. 1195] y respondió de manera afirmativa a ella. Sobre este mismo tema, y de manera independiente Rajchman publicó en [31, 32] la construcción de una clase particular de conjuntos perfectos (U), que llamó conjuntos de tipo (H) entre los que se encontraba, por ejemplo, el conjunto de Cantor,[23] y así surgieron de manera natural las preguntas sobre la existencia de conjuntos perfectos (U) que no sean de tipo (H) y conjuntos (U) no perfectos.

Este primer resultado le sirvió a Bari como punto de partida para demostrar que la unión numerable de conjuntos cerrados (U) es un conjunto (U).[24]

En 1927 Bari seguía trabajando este problema y lo plantea de la siguiente manera:

---

[21]Le problème de l'unicité du développement trigonométrique appelle l'attention sur les "ensembles (U)" jouissant de la propriété suivante: Si une série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

converge vers zéro partout, sauf peut-être aux points d'un tel ensemble tous les coefficients a_n et b_n de cette série sont nuls. Nous appellerons "ensembles (M)" ceux qui ne jouissent pas de cette propriété.

[22]Existe-t-il des ensembles (U) ayant la puissance du continu?

[23]La construcción de los conjuntos (H) es muy interesante y muy bonita, sin embargo por cuestiones de espacio no la inlcuimos aquí. Las personas interesadas la pueden consultar en [31] disponible en http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm3/fm3127.pdf

[24]Este resultado no ha sido mejorado aún, es un problema abierto si la unión de dos conjuntos (U) medibles arbitrarios (no necesariamente cerrados) es necesariamente un conjunto (U).

> Dado un conjunto de puntos E, determinar si existe una serie trigonométrica, con coeficientes distintos de cero, que converja a cero en todas partes fuera del conjunto E.[25] [4, p. 62]

El interés de Bari ahora era encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto perfecto fuera un conjunto (U). Descubrió algunas propiedades extremadamente finas tanto de los conjuntos de unicidad como de los de multiplicidad y demostró que la solución del problema de la unicidad que tanto le intersaba no se podía obtener únicamente estudiando la estructura geométrica de los conjuntos, sino que la estructura aritmética de los conjuntos debía ser tomada en cuenta. Este trabajo le llevó varios años.

Bari probó en [5] y [6] que si $P \subset [0, 2\pi]$ es un conjunto simétrico[26] con razón constante $\lambda = \frac{p}{q} > 0$ en donde $(p, q) = 1$, entonces P es un conjunto (M) si $p \neq q - 1$ y $p \neq q - 2$. Y por otro lado, que si $p = q - 1$ ó $p = q - 2$, entonces P es un conjunto (U).

Para cuando Bari demostró estos resultados ella era ya considerada experta mundial en el tema y en los años en los que había llevado a cabo esta investigación también había logrado tener una carrera académica sobresaliente.

Después de obtener el grado, Nina Bari trabajó como calculadora y luego como investigadora asociada en el Instituto de Matemáticas y Mecánica. En 1927 pasó seis meses estudiando en la Sorbona y en el Collège de France en París en donde asitió al seminario de Hadamard y tuvo una participación activa en éste. Poco después viajó a Lvov en Polonia en donde asistió al Congreso Matemático Polaco en 1927 y en 1928 viajó a Bologna en donde dió una conferencia llamada *Sobre la estructura analítica de una función continua arbitraria*[27] en el Congreso Internacional de Matemáticos. En 1929 recibió una beca Rockefeller lo que le permitió continuar estudiando en París hasta finales de ese año y en 1932 se convirtió en profesora titular de la Universidad Estatal de Moscú.

Para 1935 Bari contaba con 16 publicaciones y era conocida por su trabajo en la teoría de funciones reales, en ese año le fue conferido el grado de Doctora en las Ciencias Físico-matemáticas.[28] Para la década de los años 40, Bari era ya una profesora respetada en la URSS quien, junto con Men'shov, estaba a cargo del trabajo de investigación y docencia en teoría de funciones que se hacía en la universidad.

Consideramos que vale la pena señalar que aun cuando gran parte de la vida de Bari giraba en torno de las matemáticas, éstas no eran su único interés. Le gustaban la poesía, la literatura, la música y las artes en general. Lysuternik recuerda que

> Era ingeniosa y le encantaba escribir poemas para una ocasión especial. Así, escribió sobre uno de sus compañeros de clase y Uryson, de quienes se sospechaba tenían un romance [...] Nina Karlovna tenía buena memoria para la poesía. Ella no sólo participaba en la creación del folclore de Luzitania, lo memorizaba.[29] [26, p. 79]

y también que

> Nina Karlovna era muy animada; le encantaban todo tipo de excursiones y paseos. En 1924, ella y un grupo de amigos y los jóvenes Mlodzeevskiis

[25] Un ensemble E de points étant donné, reconnaître s'il existe une série trigonometrique, à coefficients non nuls, qui converge vers zéro partout en dehors de l'ensemble E.

[26] Un conjunto simétrico con razón constante es un conjunto que se obtiene de la misma manera que se obtiene el conjunto de Cantor pero en lugar de quitar intervalos de longitud $\frac{1}{3}$ se quitan intervalos de longitud $\lambda = \frac{p}{q} > 0$.

[27] Sur la structure analytique d'une fonction continue arbitraire.

[28] Este grado no tiene un equivalente directo en las universidades occidentales, es más elevado que el de un doctorado.

[29] She was witty, and loved to write poems for a special occasion. Thus, she wrote about one of her classmates and Uryson, who were suspected of having a romance [...] Nina Karlovna had a good memory for poetry. She not only took part in the creation of Luzitanian folklore, but she committed it to memory.

> participaron en una excursión al Cáucaso. Pero el apogeo de su carrera turística pertenece a un período muy posterior, cuando estaba casada con V. V. Nemytskii, y no solo formaban una pareja matemática, sino también viajera.[30] [26, p. 79]

No es clara la fecha en la que contrajo matrimonio con Viktor Vladimirovich Nemytskii, él era un año mayor que ella e ingresó a la Universidad en 1921 cuando Bari se graduó, posteriormente fue estudiante de posgrado bajo la dirección de Aleksandrov y Stepanov y también obtuvo el grado Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, falleció repentinamente el 7 de agosto de 1967.[31]

Fue Nemytskii quien introdujo a Bari en el montañismo y fue un deporte que practicaron juntos durante muchos años, hicieron excursiones al Cáucaso, a las montañas de Altai, Pamir y Tyanshan e incluso Kamchatka que era la región más al este de la Unión Soviética. Lyusternik comenta que sus compañeros en estas expediciones la recordaban como la que los animaba en momentos difíciles:

> Sus compañeros decían que encontraban dificultades en sus expediciones turísticas, y en tales ocasiones Nina Karlovna siempre mantenía el ánimo, animando a los demás.[32] [26, p. 80]

De regreso a la vida matemática de Bari, otro tema, dentro de la teoría de funciones, que atrajo su atención durante la década de 1940 fue el de bases y sistemas ortogonales o biortogonales. En el estudio de los sistemas ortogonales una de las preguntas de mayor interés es la estabilidad de distintas propiedades y este fue el tema estudiado por Bari en una serie de artículos, [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].[33] También introdujo una serie de conceptos nuevos en torno de la proximidad de sistemas de funciones con base en los cuales se estableció posteriomente el término *bases de Bari.*

En [10, p. 56] Bari presentó la siguiente definición[34]:

Definición 8. *Decimos que dos sistemas* $(\varphi_n(x))$ *y* $(\psi_n(x))$ *están en* proximidad cuadrática *si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ *converge, donde*

$$\rho_n = \rho(\varphi_n, \psi_n) = \sqrt{\int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]^2 dx}.$$

Bari presentó esta definición en el contexto de espacios de Hilbert por lo que la condición de convergencia de la serie se puede escribir también como

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\varphi_n - \psi_n||^2 < \infty.$$

Con base en esta noción es que se introdujo el término de base de Bari:

Definición 9. *Una* base de Bari para X *es una base para* X *que se encuentra en proximidad cuadrática de una base ortonormal de* X*.*

Bari también presentó la siguiente definición, [10, p. 63], que resulta fundamental para un teorema que demuestra en su artículo. Vale la pena notar que el concepto que

[30]Nina Karlovna was very lively; she loved all kinds of excursions and walks. In 1924 she and a group of friends and the younger Mlodzeevskiis took part in an excursion to the Caucasus. But the heyday of her tourist career belongs to a much later period, when she was married to V. V. Nemytskii, and they made not only a mathematical, but also a touring couple.

[31]Después de morir, el cuerpo de Nemytskii fue llevado a Moscú, donde fue enterrado junto a Nina Bari quien había fallecido 6 años antes.

[32]Her companions said that they met with difficulties on their tourist expeditions, and on such occasions Nina Karlovna invariably kept up her spirits, encouraging the others.

[33]Una lista completa de las publicaciones de Nina Bari se puede consultar en [29, p. 128-131].

[34]Nous dirons que deux systèmes $(\varphi_n(x))$ et $(\psi_n(x))$ sont en proximité quadratique si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ converge, où

$$\rho_n = \rho(\varphi_n, \psi_n) = \sqrt{\int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]^2 dx}.$$

ella define es al que hoy nos referiríamos como una independencia lineal débil o una w-independencia lineal.

Definición 10. *Diremos que las funciones normadas* $(\varphi_n(x))$ *son* linealmente independientes *en el espacio de Hilbert si no existe ninguna sucesión de números* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$*, no todos cero, tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[\sum_{m=1}^{n} c_m \varphi_m(x) \right]^2 dx = 0.$$ [35]

En 1944, [10], Bari demostró el siguiente resultado ya clásico:

Teorema 11. *Sean* $(\varphi_n(x))$ *y* $(\psi_n(x))$ *dos sistemas ortonormales que están en proximidad cuadrática. Entonces* $(\varphi_n(x))$ *es completo si y solo si* $(\psi_n(x))$ *es completo.*

Y si usamos el nombre de bases de Bari podemos reformular otro de los resultados obtenidos por Bari en el mismo artículo:

Teorema 12. *Sean* X *un espacio de Hilbert,* $(\varphi_n(x))$ *una base ortonormal para* X *y* $(\psi_n(x))$ *una sucesión linealmente independiente en* X *que está en proximidad cuadrática de* $(\varphi_n(x))$ *tales que* $\sum_{n=1}^{\infty} ||\varphi_n - \psi_n||^2 < 1$*. Entonces* $(\psi_n(x))$ *es una base de Bari para* X*.*

Este trabajo llevado a cabo por Bari dio lugar a un amplio trabajo por parte de la comunidad matemática y fue un tema central de un gran número de artículos. Además, en la teoría de funciones la cuestión de trasladar propiedades básicas de sistemas ortogonales a sistemas biortogonales arbitrarios o bases juega un papel importante. Para estos fines, Nina Bari introdujo una vez más conceptos nuevos como el de sistema de Bessel, sistema de Hilbert, sistema de Riesz-Fischer, base de Bessel y base de Riesz. Esta innovación creó un campo completo de investigación sobre bases y sistemas biortogonales sobre los que se trabajó arduamente.

Durante la década de los cincuenta la carrera académica de Bari siguió floreciendo, continuó como profesora en la Universidad Estatal de Moscú y participó en múlitples congresos internacionales como el Congreso Internacional de Matemáticas en Edimburgo en 1958, y el Tercer Congreso Soviético de Matemáticas en Moscú en 1956 en el que presentó un artículo sobre el estado de la teoría de las series trigonométricas.

Durante esta época también publicó un importante artículo, [14], sobre funciones primitivas y series trigonométricas en el que prueba el siguiente resultado que combina teoremas clásicos de Luzin y Men'shov:

Teorema 13. *Para cualquier función* $f(x)$*, medible y finita casi todas partes en* $[-\pi, +\pi]$*, existe una función continua* $F(x)$ *en ese intervalo tal que* $F'(x) = f(x)$ *casi en todas partes en* $[-\pi, +\pi]$*, y el resultado de la diferenciación término a término de la serie de Fourier de* $F(x)$ *es una serie trigonométrica que converge a* $f(x)$ *casi en todas partes.* [14, p. 687]

Bari era una profesora muy popular entre los estudiantes de la Universidad de Moscú y en su obituario Men'shov, Stechkin y Ul'yanov recuerdan que

> Teniendo un carácter enérgico y un temperamento vivo, Nina Karlovna se dedicó activamente a atraer a los jóvenes a la investigación. Varios de sus alumnos han defendido tesis (Ph.D. o D.Sc), entre ellos V.Ya. Kozlov, P. L. Ul'yanov, Yu. A. Kaz'min, Z. N. Kazhdan, R. S. Guter y M. P. Shcheglov. Muchos jóvenes investigadores matemáticos se han

[35] Nous dirons que les fonctions normées $(\varphi_n(x))$ sont linéairement indépendantes dans l'espace de Hilbert s'il n'existe aucune suite de nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ non tous nuls et tels que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[\sum_{m=1}^{n} c_m \varphi_m(x) \right]^2 dx = 0.$$

> desarrollado bajo su dirección y han obtenido resultados originales de primer nivel.[36] [29, p. 126]

Durante su carrera, Bari escribió también varios libros de texto: *Algebra superior* en 1932 y *Teoría de series* en 1936 que tuvo una segunda edición en 1938. Además tradujo al ruso el libro de Lebesgue, *Lecons sur l'integration et la recherche de fonctions primitives* y editó la publicación de las obras completas de Luzin así como de su libro *La integral y series trigonométricas.* Para la publicación de este último se agreron un buen número de apéndices y notas que ella consideraba muy importantes dada la cantidad de tiempo que había pasado desde que Luzin había escrito su tesis doctoral en 1915. Durante varios años, Nina Bari también fue editora en jefe de la serie matemática de la revista *Uchenye Zapiski Moskovskogo Universiteta* y una de las editoras de la revista *Vestnik Moskovskogo Universiteta.*

La carrera académica de Bari culminó con 55 publicaciones de las cuales, la última es un texto de más de 900 páginas sobre series trigonométricas. Este texto, *Series Trigonométricas*,[37] merece mención especial. El texto está escrito con el estilo usual de Bari y abarca un gama excepcionalmente amplia de temas; se presenta material sobre los fundamentos de la teoría de series trigonométricas hasta el estado del arte de la misma. En el prefacio Bari nota que

> ... el interés de los matemáticos por las series trigonométricas no ha disminuido y el progreso alcanzado ha sido tan notable que parece necesario informar sobre el estado actual de nuestros conocimientos en este campo.
>
> La gama de cuestiones que deben ser consideradas es tan amplia que es inmediatamente necesario limitarla. Por lo tanto, excluyo completamente las integrales de Fourier, series trigonométricas de varias variables y solo toco muy brevemente la investigación de las mejores aproximaciones de funciones por polinomios trigonométricos.
>
> Además, me refiero a sistemas ortogonales sólo en aquellos casos en los que parece más sencillo derivar un teorema en la teoría de series trigonométricas a partir de teoremas más generales relativos a sistemas ortogonales; si el pasar teoremas a sistemas ortogonales generales requiere una investigación especializada, me limito a formularlos para series trigonométricas.
>
> A pesar de las limitaciones impuestas al material aquí publicado, aún queda mucho por incluir.[38] [16, p. xix]

---

[36] Possessing an energetic character and a lively temperament, Nina Karlovna was active in drawing young people into research. A number of her pupils have defended Ph.D. or D.Sc. theses, among them V.Ya. Kozlov, P.L. Ul'yanov, Yu.A. Kaz'min, Z.N. Kazhdan, R.S. Guter and M.P. Shcheglov. Many young research mathematicians have developed under her guidance and obtained first-rate original results.

[37] El texto se tradujo al inglés y apareció publicado en 1964 en dos volúmenes bajo el título *A Treatise on Trigonometric Series*, [16].

[38] ... the interest of mathematicians in trigonometric series has not diminished and the progress achieved has been so considerable that it seems necessary to report the present state of our knowledge in this field.

The range of questions which should be considered is so large that it is immediately necessary to limit this. Therefore, I completely exclude Fourier integrals, trigonometrical series of several variables and I only touch very briefly on the investigation of best approximations of functions by trigonometric polynomials.

Furthermore I refer to orthogonal systems only in those cases where it seems simpler to derive a theorem in the theory of trigonometric series from more general theorems concerning orthogonal systems; if the transfer of theorems into general orthogonal systems requires specialized investigation, I confine myself to formulating them for trigonometric series.

In spite of the limitations imposed on the material published here, there still remains very much to include.

El texto fue (y sigue siendo) sin duda un referente estándar para todos los matemáticos que se especializan en la teoría de funciones y la teoría de series trigonométricas y está dedicado con cariño a "la memoria de mi maestro, Nikolai Nikolayevich Luzin."

En 1961, el 15 de julio, Nina Bari murió en un trágico accidente en el que cayó frente a un tren en el Metro de Moscú. En su obituario Men'shov, Stechkin y Ul'yanov escribieron:

> La muerte prematura de Nina Bari es una gran pérdida para las matemáticas soviéticas y una gran pena para todos los que la conocieron. El recuerdo de su personalidad -vivaz, directa y con una inagotable reserva de jovialidad- permanecerá siempre en el corazón de quienes trabajaron con ella o la conocieron.[39] [29, p. 127]

5. Un comentario final

Si bien la presentación que hemos hecho aquí no pretende ser exhaustiva, esperamos haber logrado dos cosas: traer a la luz a una matemática excepcional como Nina Bari, y hacer nacer el deseo de conocer a otras matemáticas, que como ella, jugaron un papel clave en el desarrollo de la ciencia.

Agradecimientos. La autora agradece los comentarios hechos por una(un) árbitra(o) anónima(o) que ayudaron a mejorar sustanciamente el texto y también al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN-405620: *Matematización y Cambio Conceptual* en cuyo marco se llevó a cabo esta investigación.

Referencias

[1] Aleksandrov, P., *Mathematics at Moscow University in the First Half of the XXth Century*, Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya, 8, 9-55, 1955.
[2] Alic, M., *Hypatia's Heritage*, Beacon Press, Boston, 1986.
[3] Bari, N. K., Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 177, 1195-1197, 1923.
[4] Bari, N. K., Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Fundamenta Mathematicae* 9, 62-118, 1927.
[5] Bari, N. K., Sur la nature diophantique du problème d'unicité du développement trigonométrique,*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 202, 1901-1903, 1936.
[6] Bari, N. K., Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème d'unicité du développement trigonométrique,*Mat. Sb.*, 2, 44, 699-724, 1937.
[7] Bari, N. K., On the stability of certain properties of orthogonal systems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 33, 342-345, 1941.
[8] Bari, N. K., On the stability of the property of completeness of a system of functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 37, 99-103, 1942.
[9] Bari, N. K., Sur la stabilité de certaines propriétés des systèmes orthogonaux, *Mat. Sb.*, 12, 54, 3-27, 1943.
[10] Bari, N. K., Sur les systèmes complets de fonctions orthogonales, *Mat. Sb.* 14, 56, 51-108, 1944.
[11] Bari, N. K., On bases in Hilbert space, *Dokl. Akad. Nauk SSS*R 54, 383-386, 1946.
[12] Bari, N. K., On bases in Hilbert space, *Uspekhi Mat. Nauk* I, 5-6, 15-16, 242, 1946.
[13] Bari, N. K., Biorthogonal systems and bases in Hilbert space, *Moskov. Gos. Univ. Uch. Zap.* 148, Mat. 4, 69-107, 1951.
[14] Bari, N. K., On primitive functions and trigonometric series converging almost everywhere, *Mat. Sb.*, 31, 73, 687-702, 1952.
[15] Bari, N. K., *Trigonometric series*, Moscú, Fizmatgiz, 1961.
[16] Bari, N. K., *A Treatise on Trigonometric Series*, 2 vols, Macmillan, 1964.
[17] Cantor, G., Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72, 130-138, 1870.
[18] Cantor, G., Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihen gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72, 139-142, 1870.

[39] The untimely death of Nina Bari is a great loss for Soviet mathematics and a great sorrow for all who knew her. The memory of her personality -lively, straightforward and with an inexhaustible reserve of cheerfulness- will always be preserved in the hearts of those who worked or were acquainted with her.

[19] Cantor, G., Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *JMathematische Annalen*, 5, 123-132, 1872.

[20] Grinstein, L. S., Campbell, P. J., *Women of Mathematics: A Biobibliographic Sourcebook*, Greenwood Press, USA, 1987.

[21] Harnack, A., Théorie de la série de Fourier, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, 6, 242-260, 1882.

[22] Heine, E., Ueber trigonometrische Reihen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 71, 353-365, 1870.

[23] Luzin, N., Ueber eine Potenzreihe, *R. C. Circ. Mat. Palermo*, 32, 386-390, 1911.

[24] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, Russ. Math. Surv., 22, 133-157, 1967.

[25] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, Russ. Math. Surv., 22, 171-211, 1967.

[26] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, Russ. Math. Surv., 22, 55-91, 1967.

[27] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, Russ. Math. Surv., 22, 167-174, 1970.

[28] Men'shov, D. E., Sur l'unicité du développment trigonométrique, *Comptes Rendus Acad. Sci*, 163, 433-436, 1916.

[29] Men'shov, D. E., Stechkin, S. B., Ul'yanov P. L., Nina Karlovna Bari - Obituary, *Russ. Math. Surv.* 17, 119-127, 1962.

[30] Phillips, E. R., Nicolai Nicolaevich Luzin and the Moscow School of the Theory of Functions, *Historia Mathematica*, 5, 275-305, 1978.

[31] Rajchman, A., Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 287-302, 1922.

[32] Rajchman, A., Rectification et addition à ma note "Sur l'unicité du développement trigonométrique", *Fundamenta Mathematicae*, 4, 366-367-302, 1923.

[33] Young, W. H., A note on trigonometrical series, *Messenger of Mathematics*, 38, 44-48, 1909.

[34] Zdravkovska, S., Duren, P. L. (eds), *Golden Years of Moscow Mathematics*, American Mathematical Society, 2007.

[35] Zygmund, A., y Fefferman, R. *Trigonometric Series*, Tercera edición, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[36] Zygmund, A. The role of fourier series in the development of analysis, *Historia Mathematica*, 2, 4, 591-594, 1975.

Carmen Martínez-Adame
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas,
Ciudad Universitaria, 04510, CDMX, México.
e-mail: `cmai@ciencias.unam.mx`