



UNA GENERALIZACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

KARLA ADRIANA ORTEGA GALLEGOS

RESUMEN. Siguiendo la referencia [2], presentamos una generalización de la transformada de Fourier discreta al caso de dos subespacios de Hilbert de dimensiones diferentes. Identificamos y demostramos sus correspondientes propiedades de convolución, traslación, dilatación e identidad de Parseval.

1. INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier discreta (DFT, por su siglas del inglés) es una aplicación lineal del espacio de Hilbert complejo \mathbb{C}^N en sí mismo. Se puede considerar como una aplicación del espacio de funciones complejas cuadrado sumables definidas sobre un grupo cíclico (o solo conmutativo) discreto. Es esta forma junto con sus generalizaciones al caso no conmutativo, la base del análisis de Fourier discreto.

Como su análoga de dimensión infinita o variable continua, la DFT tiene una gran cantidad de aplicaciones en ingeniería, física y matemáticas. Por ejemplo, la GFT es una herramienta fundamental en el procesamiento digital de señales, donde se aplica para calcular el espectro de frecuencias de la señal y en el análisis de sistemas en el dominio de frecuencias, veáanse las referencias [6, 1].

Recientemente en [2] se utilizó una generalización de la DFT al caso de dos subespacios de dimensiones diferentes para estudiar un modelo cuántico de transporte de energía relacionado con el fenómeno de la fotosíntesis. El propósito principal de este trabajo es identificar las correspondientes fórmulas de convolución, traslación y dilatación de esta generalización de la transformada de Fourier discreta e ilustrarlas con algunos ejemplos, véase la sección 3.3. Así mismo, identificamos la correspondiente propiedad de Parseval, teorema 16, y para completar el trabajo estudiamos una eigenfunción de la DFT.

Asumiendo que el lector está familiarizado con conceptos básicos de Álgebra Lineal, en la sección 2 presentamos una breve introducción a la transformada de Fourier discreta, mostrando sus propiedades básicas de convolución, traslación, dilatación y la identidad de Parseval. También estudiamos una eigenfunción de la DFT definida en términos del símbolo de Legendre, cuyo eigenvalor está dado por una suma de Gauss. En la sección 3 introducimos la transformada de Fourier discreta generalizada (GDFT), demostramos sus correspondientes propiedades básicas y las ilustramos con algunos ejemplos.

2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

Sea $N \geq 1$ un número natural y \mathbb{C}^N el espacio de Hilbert complejo de dimensión N . Sea $\{e_n : 0 \leq n \leq N - 1\}$ la base ortonormal canónica de \mathbb{C}^N .

La **Transformada de Fourier Discreta** (DFT) es una transformación lineal de \mathbb{C}^N en sí mismo que se define mediante

$$(1) \quad F := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_{n'}\rangle \langle e_n|,$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 42A38.

Palabras clave. Transformada de Fourier discreta generalizada, Espacio de Hilbert complejo, Identidad de Parseval.

donde ζ_N es cualquier raíz N -ésima primitiva de la unidad, por simplicidad tomaremos $\zeta_N = e^{2\pi i \frac{1}{N}}$, y $|e_{n'}\rangle\langle e_n|$ denota al operador de rango uno de \mathbb{C}^N en sí mismo definido mediante $|e_{n'}\rangle\langle e_n|u = \langle e_n, u\rangle e_{n'}$.

Sea $x \in \mathbb{C}^N$, podemos suponer que $x = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e_n$. Nótese que

$$\langle e_n, x \rangle = \langle e_n, \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} e_{n'} \rangle = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \langle e_n, e_{n'} \rangle = x_n.$$

Entonces la acción de F sobre un vector $x \in \mathbb{C}^N$ está dada explícitamente por la fórmula

$$\begin{aligned} Fx &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_{n'}\rangle\langle e_n|x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} x_n e_{n'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} x_n \right) e_{n'}, \end{aligned}$$

lo cual implica que la coordenada n -ésima de Fx es

$$(Fx)_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^{kn} x_k.$$

Por esta razón también se puede definir la transformada de Fourier discreta mediante su acción sobre vectores de \mathbb{C}^N de la siguiente manera:

$$(Fx)_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Los vectores $x \in \mathbb{C}^N$ también se pueden considerar como funciones de los enteros módulo N , \mathbb{Z}_N , en \mathbb{C} , i.e., $x : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$. En este caso la n -ésima coordenada de x corresponde con el valor de la función x en n , i.e., $x_n = x(n)$. Así, la transformada de Fourier discreta transforma cada función $x : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$ en la función $F(x) : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$, definida mediante la relación

$$F(x)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

2.1. Propiedades básicas. El siguiente lema se refiere a la relación de ortogonalidad de las raíces n -ésimas de la unidad.

LEMA 1. *Los coeficientes $\zeta_N^{nn'} = e^{2\pi i \frac{nn'}{N}}$ satisfacen la relación*

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{(j-k)n} = N\delta_{jk}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

donde δ_{ij} denota la función delta de Kronecker.

Demostración. Claramente, si $j = k$ se tiene $\sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{(j-k)n} = N$. Ahora si $j \neq k$, entonces, como (2) es una suma geométrica,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{(j-k)n} = \frac{\zeta_N^{N(j-k)} - 1}{\zeta_N^{(j-k)} - 1} = 0$$

como se quería. □

2.2. La identidad de Parseval. El operador conjugado de F se define mediante la relación

$$(3) \quad \bar{F} := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-nn'} |e_{n'}\rangle \langle e_n|.$$

TEOREMA 2. (*Identidad de Parseval*)
La DFT es un operador unitario es decir,

$$FF^* = F^*F = I$$

donde F^* es el operador adjunto de F , definido como el transpuesto del conjugado, i.e.,

$$F^* = \bar{F}^\Gamma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}|.$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{C}^N$. Por definición de producto escalar y el lema 1 tenemos que

$$\begin{aligned} FF^* &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_{n'}\rangle \langle e_n| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m,m'=0}^{N-1} \zeta_N^{-mm'} |e_{m'}\rangle \langle e_m| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n,m,n',m'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'-mm'} \delta_{nm'} |e_{n'}\rangle \langle e_m| = \frac{1}{N} \sum_{n,m,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{n(n'-m)} |e_{n'}\rangle \langle e_m| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m,n'=0}^{N-1} N \delta_{n'm} |e_{n'}\rangle \langle e_m| = \sum_{m=0}^{N-1} |e_m\rangle \langle e_m| = I. \end{aligned}$$

Y de manera análoga, $F^*F = I$. □

COROLARIO 3. F es una transformación invertible con inversa F^* .

2.3. Fórmulas de convolución, traslación y dilatación. Sean x y y funciones, $x, y : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$, entonces se define:

- i) La convolución $x * y$ de x con y como la función cuyo valor en $k \in \mathbb{Z}_N$ está dado por

$$(x * y)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l).$$

Consecuentemente, $x * y = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) e_k$.

- ii) El producto xy de x con y como la función cuyo valor en $k \in \mathbb{Z}_N$ es

$$(xy)(k) = x(k)y(k).$$

TEOREMA 4. La transformada de Fourier discreta satisface la propiedad de convolución

$$F(x * y) = F(x)F(y),$$

donde el producto en el lado derecho es el producto de funciones.

Demostración.

$$\begin{aligned}
F(x * y) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}| (x * y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}| \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) e_k \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) |e_n\rangle \langle e_{n'}, e_k\rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(n'-l) \right) e_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{n(m+l)} x(l)y(m) e_n \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{nl} x(l) \sum_{m=0}^{N-1} \zeta_N^{nm} y(m) e_n = \sum_{n=0}^{N-1} F(x)(n) F(y)(n) e_n.
\end{aligned}$$

Entonces, $F(x * y)(n) = (F(x) F(y))(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}_N$. Esto termina la demostración. \square

2.4. Una función propia de la DFT. Es bien conocido que la función gaussiana $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ es una función propia de la transformada de Fourier usual. En esta sección discutiremos su análoga discreta $h_N(k)$.

DEFINICIÓN 5. Para cualquier entero a , no divisible por un primo impar N , el símbolo de Legendre $\left(\frac{a}{N}\right)$ se define como

$$\left(\frac{a}{N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } b^2 = a \text{ modulo } N, \text{ para algún } b \in \mathbb{Z}_N \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 6. (Criterio de Euler, ver [3]) Sean $a \in \mathbb{N}$ y N un primo impar que no es divisor de a , entonces

$$\left(\frac{a}{N}\right) = a^{\frac{N-1}{2}}.$$

Mostraremos ahora algunos resultados concernientes a la transformada de Fourier discreta del símbolo de Legendre como función de su numerador, al que llamaremos función gaussiana discreta; cuya representación gráfica para $N = 11$ se encuentra en la figura 1. Iniciamos con una definición.

DEFINICIÓN 7. Sea N un primo impar, defínase para cada k entero,

$$h_N(k) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right) & \text{si } N \text{ no divide a } k \\ 0 & \text{si } N \text{ divide a } k. \end{cases}$$

y el correspondiente vector h_N con coordenadas $h_N(k)$, mediante $h_N = \sum_{k=0}^{N-1} h_N(k) e_k$, con $\{e_k : 1 \leq k \leq N\}$ la base canónica de \mathbb{C}^N .

LEMA 8. Para cualquier $a, b \in \mathbb{Z}$, si N no es divisor de a ni de b , entonces se cumple que

$$\left(\frac{ab}{N}\right) = \left(\frac{a}{N}\right) \left(\frac{b}{N}\right).$$

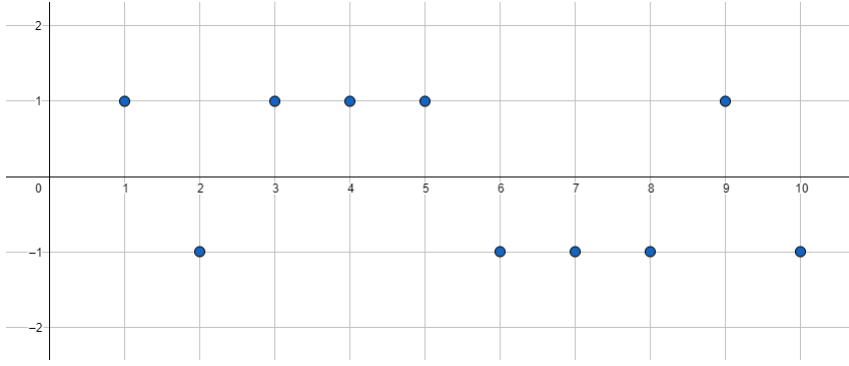


FIGURA 1. Símbolo de Legendre N=11

Demostración. Por el criterio de Euler tenemos que

$$\left(\frac{ab}{N}\right) = (ab)^{\frac{N-1}{2}} = (a)^{\frac{N-1}{2}} (b)^{\frac{N-1}{2}} = \left(\frac{a}{N}\right)\left(\frac{b}{N}\right).$$

□

LEMA 9. Para N primo impar y N, k primos relativos en modulo N se cumple que

$$\left(\frac{k}{N}\right) = \left(\frac{k^{-1}}{N}\right),$$

Demostración. Como k no es divisible por N , entonces k tiene inverso en \mathbb{Z}_N , i.e., existe $k^{-1} \in \mathbb{Z}_N$ y $kk^{-1} = 1$. Ahora si $b^2 = k \pmod N$ tenemos que

$$1 = \left(\frac{kk^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k}{N}\right)\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = 1\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k^{-1}}{N}\right).$$

Si k no es residuo cuadrático y no es divisible por N , tenemos que $\left(\frac{k}{N}\right) = -1$ y consecuentemente

$$1 = \left(\frac{kk^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k}{N}\right)\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = -1\left(\frac{k^{-1}}{N}\right).$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = -1.$$

Esto demuestra el lema.

□

LEMA 10.

$$(4) \quad F(h_N)(-k) = h_N(k)F(h_N)(-1).$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} F(h_N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}| \sum_{l=0}^{N-1} h_N(l) e_l \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n',l=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} h_N(l) \langle e_{n'}, e_l \rangle e_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} h_N(n') e_n, \end{aligned}$$

lo cual implica que $F(h_N)(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} h_N(n')$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces si N no divide a k , por el lema 9

$$\begin{aligned} F(h_N)(-k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-kn'} h_N(n') = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-kn'} \left(\frac{n'}{N}\right), \text{ con } b = kn', \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=0}^{N-1} \zeta_N^{-b} \left(\frac{bk^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k^{-1}}{N}\right) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=0}^{N-1} \zeta_N^{-b} \left(\frac{b}{N}\right) \\ &= h_N(k)F(h_N)(-1), \end{aligned}$$

pues N no divide a n' ni a kn' si $0 \leq n' \leq N-1$. Ahora, si N divide a k

$$\begin{aligned} F(h_N)(-k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-kn'} h_N(n') \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=0}^{N-1} \zeta_N^{-b} h_N(k^{-1}b) = 0, \end{aligned}$$

pues N divide a cada $b = kn'$. Esto completa la demostración. \square

TEOREMA 11. *La función h_N es una función propia de la transformada de Fourier discreta, de hecho,*

$$(5) \quad F(h_N) = g^{-1}h_N,$$

donde g es la suma de Gauss $g = F(h_N)(-1) = \sum_{a=1}^{N-1} \left(\frac{a}{N}\right)\zeta_N^a$, que satisface $g^2 = (-1)^{\frac{N-1}{2}}$, i.e.,

$$g = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \frac{N-1}{2} \text{ es par} \\ \pm i & \text{si } \frac{N-1}{2} \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Tomando transformada de Fourier discreta en (4) y usando la fórmula de inversión se obtiene que

$$(6) \quad h_N(k) = F(F(h_N))(-k) = F(h_N)(-1)F(h_N)(k) = gF(h_N)(k), \quad \forall k.$$

Ahora, evaluando (6) en $k = -1$ se obtiene que $h_N(-1) = g^2$. Recordando que

$$h_N(-1) = \left(\frac{-1}{N}\right) = (-1)^{\frac{N-1}{2}},$$

la última identidad es por el Criterio de Euler, se concluye que $g^2 = (-1)^{\frac{N-1}{2}}$ y termina la demostración. \square

Con un poco de más trabajo usando estas y otras propiedades de la gaussiana discreta h_N , se puede demostrar la bien conocida ley de reciprocidad cuadrática. Pero esto queda fuera de los objetivos de este trabajo. El lector interesado puede consultar la referencia [7].

3. UNA GENERALIZACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA.

Sean E_N, E_M subespacios mutuamente ortogonales del espacio de Hilbert \mathbb{C}^{N+M} , con dimensiones $\dim E_M = M \leq N = \dim E_N$. Sean $\{e_n : 0 \leq n \leq N-1\}$ y $\{f_m : 0 \leq m \leq M-1\}$ bases ortonormales de E_N y E_M , respectivamente.

Una proyección ortogonal es una transformación lineal P que es autoadjunta, i.e., $\langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle$ que satisface la identidad $P^2 = P$.

Sea P una proyección ortogonal y sea $E = \text{Ran}P = \{Px : x \in \mathbb{C}^{N+M}\}$ su rango. E es un subespacio de \mathbb{C}^{N+M} , pues $0 = P0 \in E$ y $Px + \alpha Py = P(x + \alpha y) \in E$. El complemento ortogonal de un subespacio E es el subespacio E^\perp definido mediante

$$E^\perp := \{x \in \mathbb{C}^{N+M} : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in E\}.$$

Si P es una proyección ortogonal y $E = \text{Ran}P$, para cada $x \in \mathbb{C}^{N+M}$, se tiene $Px \in E$ y $x - Px \in E^\perp$, pues para cada $y \in E$ tenemos que

$$(7) \quad \langle x - Px, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, Py \rangle = 0$$

En particular los vectores Px y $x - Px$ son mutuamente ortogonales y se tiene la descomposición ortogonal $x = Px + (x - Px)$, i.e., podemos escribir $I = P + (I - P)$. De ahora en adelante, si P es una proyección ortogonal y $E = \text{Ran}P$ es su rango, la denotaremos mediante el símbolo P_E . Así por ejemplo, P_N y P_M , denotarán las proyecciones ortogonales de \mathbb{C}^{N+M} sobre los subespacios E_N y E_M , respectivamente, como $\mathbb{C}^{N+M} = E_N + E_M$ y $E_N \perp E_M$, tenemos que $E_M = I - E_N = E_{N^\perp}$.

3.1. Definición y propiedades básicas. La transformada de Fourier discreta generalizada (GDFT) se define como la transformación lineal $Z_{N,M} : E_N \rightarrow E_M$ dada por

$$(8) \quad Z_{N,M} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n|$$

donde, como en la sección anterior, $\zeta_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$.

Consecuentemente, si $x \in E_N$, $x = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e_n$, entonces

$$(9) \quad \begin{aligned} Z_{N,M}x &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n| \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} e_{n'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_{n'} \delta_{nn'} f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n f_m. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$(Z_{N,M}x)(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n$$

La GDFT $Z_{N,M}$ se puede extender a una transformación lineal de \mathbb{C}^{N+M} en sí mismo definiéndola como cero en $E_N^\perp = E_M$. Abusando de la notación pero sin causar confusión, denotaremos con el mismo símbolo a esta extensión de $Z_{N,M}$.

Recordemos que la adjunta T^* de una transformación lineal T de \mathbb{C}^{N+M} en sí mismo, está caracterizada por la relación

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^{N+M}$$

PROPOSICIÓN 12. La GDFT $Z_{N,M}$ es lineal y cumple con las siguientes condiciones

- (i) $Z_{N,N} = I_N$
- (ii) $Z_{N,M}^2 = 0$ y $Z_{N,M}^* = 0$, donde $Z_{N,M}^*x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn'} x_m e_{n'}$
- (iii) $P_M Z_{N,M} = Z_{N,M}$ y $Z_{N,M} P_N = Z_{N,M}$.

Demostración. Inmediatamente de la definición de $Z_{N,M}$ se obtiene (i) tomando $N = M$.

Nótese que

$$\begin{aligned}
\langle x, Z_{N,M} y \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} x_n e_n + \sum_{m'=0}^{M-1} x_{m'} f_{m'}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} y_{n'} f_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_n y_{n'} \langle e_n, f_m \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_{m'} y_{n'} \langle f_{m'}, f_m \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_m y_{n'} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_m \langle e_{n'}, y \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \left\langle \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn'} x_m e_{n'}, y \right\rangle = \langle Z_{N,M}^* x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que $Z_{N,M}^* x = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn} x_m e_n$. Ahora, tenemos para cada $x \in \mathbb{C}^{N+M}$

$$Z_{N,M}^{*2} x = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn} x_m Z_{N,M}^* e_n = 0,$$

pues $\ker Z_{N,M}^* = E_N$

De manera similar se demuestra que $Z_{N,M}^2 = 0$. Eso demuestra (ii).

Finalmente,

$$\begin{aligned}
P_M Z_{N,M} x &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n P_M f_m \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n f_m = Z_{N,M} x.
\end{aligned}$$

De manera similar se demuestra la segunda identidad en (iii). Esto concluye la demostración. \square

3.2. El Teorema de Parseval. Denotaremos mediante $|Z_{N,M}|$ al operador

$$Z_{N,M}^* Z_{N,M}.$$

PROPOSICIÓN 13. (i) $Z_{N,M} Z_{N,M}^* = P_M$ la proyección ortogonal de \mathbb{C}^{N+M} sobre E_M .

(ii) $|Z_{N,M}|$ es una proyección ortogonal y $|Z_{N,M}| \leq P_N$ con igualdad si y sólo si $N = M$, i.e., $|Z_{N,M}|$ es una subproyección de P_N .

Demostración.

$$\begin{aligned}
Z_{N,M} Z_{N,M}^* &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n| \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \zeta_N^{-m'n'} |e_{n'}\rangle \langle f_{m'}| \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \sum_{m,m'=0}^{M-1} \zeta_N^{mn-m'n'} \delta_{nn'} |f_m\rangle \langle f_{m'}| \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m,m'=0}^{M-1} \zeta_N^{(m-m')n} |f_m\rangle \langle f_{m'}| = \frac{1}{N} \sum_{m,m'=0}^{M-1} N \delta_{m,m'} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} |f_m\rangle \langle f_m| = P_M.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el inciso (i).

Ahora, $|Z_{N,M}|^* = (Z_{N,M}^* Z_{N,M})^* = Z_{N,M}^* Z_{N,M} = |Z_{N,M}|$, entonces $|Z_{N,M}|$ es autoadjunto. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |Z_{N,M}|^2 &= (Z_{N,M}^* Z_{N,M})^2 = Z_{N,M}^* Z_{N,M} Z_{N,M}^* Z_{N,M} \\ &= Z_{N,M}^* P_M Z_{N,M} = Z_{N,M}^* Z_{N,M} = |Z_{N,M}|. \end{aligned}$$

Entonces $|Z_{N,M}|$ es una proyección ortogonal. Pero $P_N - |Z_{N,M}|$ es autoadjunto y del punto (iii) de la proposición 12,

$$\begin{aligned} (P_N - |Z_{N,M}|)^2 &= (P_N - Z_{N,M}^* Z_{N,M})^2 \\ &= P_N^2 + (Z_{N,M}^* Z_{N,M})^2 - P_N Z_{N,M}^* Z_{N,M} - Z_{N,M}^* Z_{N,M} P_N \\ &= P_N + Z_{N,M}^* Z_{N,M} - (Z_{N,M} P_N)^* Z_{N,M} - Z_{N,M}^* Z_{N,M} \\ &= P_N - Z_{N,M}^* Z_{N,M} = P_N - |Z_{N,M}| \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces $|Z_{N,M}|$ es una subproyección de P_N . Esto concluye la demostración. \square

Demostremos un resultado que generaliza al teorema de Parseval, teorema 2. Para esto necesitamos definir una base ortonormal distinguida, llamada base ortonormal de vectores de máximo entrelazamiento y demostrar un lema.

DEFINICIÓN 14. Los vectores de máximo entrelazamiento $\varphi_n \in E_N$ se obtienen como la transformada inversa de Fourier de los vectores básicos, i.e.,

$$\varphi_n = F_N^* e_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-nn'} e_{n'}.$$

LEMA 15. (i) El conjunto de vectores de máximo entrelazamiento es una base ortonormal de E_N .

(ii) $\ker |Z_{N,M}| = \ker Z_{N,M} = \text{Span}\{\varphi_n : M \leq n \leq N-1\}$

Demostración. Como la transformada de Fourier es un operador unitario, el inciso (i) se sigue inmediatamente de esta propiedad.

Ahora, mediante cálculos directos se obtiene que

$$\begin{aligned} Z_{N,M} F_N^* &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n',n''=0}^{N-1} \zeta_N^{-n'n''} |e_{n''}\rangle \langle e_{n'}| \\ (10) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n,n',n''=0}^{N-1} \zeta_N^{mn-n'n''} \delta_{nn''} |f_m\rangle \langle e_{n'}| = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{n(m-n')} |f_m\rangle \langle e_{n'}| \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \delta_{m,n'} |f_m\rangle \langle e_{n'}| = \sum_{m=0}^{M-1} |f_m\rangle \langle e_m|. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} Z_{N,M} \varphi_n &= Z_{N,M} F_N^* e_n \\ (11) &= \sum_{m=0}^{M-1} |f_m\rangle \langle e_m| e_n = \begin{cases} f_n & \text{si } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{si } M \leq n \leq N-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esto demuestra la segunda identidad del inciso (ii). Por otra parte, la desigualdad $\ker Z_{N,M} \subset \ker |Z_{N,M}|$ es inmediata y por el inciso (ii) de la proposición 13 junto con el inciso (iii) de la proposición 12, si $u \in \ker |Z_{N,M}|$ entonces

$$0 = Z_{N,M} Z_{N,M}^* Z_{N,M} u = P_M Z_{N,M} u = Z_{N,M} u.$$

Esto completa la demostración del lema. \square

TEOREMA 16. (*Parseval generalizado*)

Los operadores $Z_{N,M}$ y $Z_{N,M}^*$ son isomorfismos isométricos que preservan el producto interno entre los subespacios $\text{Ran}|Z_{N,M}| \subset E_N$ y E_M .

Demostración. De la ecuación (11) se obtiene que $Z_{N,M}\varphi_n = f_n$ si $0 \leq n \leq M-1$. Multiplicando en ambos lados por $Z_{N,M}^*$ se obtiene que

$$Z_{N,M}^* f_n = Z_{N,M}^* Z_{N,M} \varphi_n = |Z_{N,M}| \varphi_n = \varphi_n,$$

pues $|Z_{N,M}|$ es una proyección. Esto demuestra que la base ortonormal de E_M es enviada por $Z_{N,M}^*$ en una base ortonormal de

$$\text{Ran}|Z_{N,M}| = \text{Span}\{\varphi_n : 0 \leq n \leq M-1\},$$

i.e., $Z_{N,M}^*$ es una isometría que preserva el producto interno entre estos subespacios. \square

Salvo isomorfismo, el teorema anterior se reduce al teorema de Parseval cuando $N = M$.

Denotemos por $|Z_{N,M}|^\perp$ al operador $P_N - |Z_{N,M}|$.

PROPOSICIÓN 17. *La transformada de Fourier generalizada cumple con*

$$\begin{aligned} |Z_{N,M}| &= \sum_{b=0}^{M-1} |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b| \\ |Z_{N,M}|^\perp &= \sum_{n=M}^{N-1} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|. \end{aligned}$$

Demostración. De la identidad (10) se obtiene $Z_{N,M}\varphi_n = f_n$ y aplicando el adjunto en ambos lados se ve que $Z_{N,M}^* f_n = \varphi_n$, consecuentemente $|Z_{N,M}| \varphi_n = \varphi_n$ para $n = 1, \dots, M-1$. Por el lema 15 tenemos que

$$|Z_{N,M}|^\perp = \sum_{b=k}^{M-1} |\varphi_{bN}\rangle\langle\varphi_{bN}|$$

y

$$|Z_{N,M}| = P_N - |Z_{N,M}|^\perp = \sum_{b=0}^{k-1} |\varphi_{bN}\rangle\langle\varphi_{bN}|.$$

\square

3.3. Fórmulas de convolución, traslación y dilatación.

TEOREMA 18. *La GDFT satisface la propiedad de convolución*

$$Z_{N,M}(x * y) = Z_{N,M}(x) Z_{N,M}(y).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}(x * y) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n | \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) e_k \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) \delta_{nk} f_m \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(n-l) \right) f_m \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{m(n'+l)} x(l)y(n') f_m \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{ml} x(l) \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} y(n') f_m \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} Z_{N,M}(x)(m) Z_{N,M}(y)(m) f_m.
\end{aligned}$$

Entonces, $Z_{N,M}(x * y)(m) = (Z_{N,M}(x) Z_{N,M}(y))(m)$ para cada $0 \leq m \leq M-1$. Esto termina la demostración. \square

DEFINICIÓN 19. Para cada $x \in \mathbb{C}^N$ definimos su trasladado por $a \in \mathbb{Z}_N$ mediante

$$T_a(x)(k) = x(k-a), \quad k \in \mathbb{Z}_N$$

y su dilatación por $a \in \mathbb{Z}_N$ mediante

$$D_a(x)(k) = x(ak), \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

PROPOSICIÓN 20. Para cada $a \in \mathbb{Z}_N$, la GDFT satisface las siguientes fórmulas:

(i) (**Traslación**)

$$Z_{N,M}(T_a(x))(m) = e^{\frac{2\pi i a n}{N}} Z_{N,M}(x)(m).$$

(ii) (**Dilatación**)

$$Z_{N,M}(D_a(x))(m) = D_{a^{-1}}(Z_{N,M}x)(m).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}T_a(x)(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi mn}{N}} T_a(x)_n = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi mn}{N}} x_{n-a} \\
&= \sum_{n'=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m(n'+a)}{N}} x_{n'} = e^{\frac{2i\pi a m}{N}} Z_{N,M}(x)(m).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}(D_a(x))(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi mn}{N}} x_{an} = \sum_{n'=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi a^{-1} m n'}{N}} x_{n'} \\
&= D_{a^{-1}}(Z_{N,M}x)(m).
\end{aligned}$$

\square

3.4. Ejemplos.

EJEMPLO 21. Si para cada $a \in \mathbb{Z}_N$ se define $\mathbf{a} : E_N \mapsto \mathbb{C}$ tal que

$$\mathbf{a}_k = e^{\frac{2\pi i a k}{N}} = \zeta_N^{ak}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1),$$

entonces se cumple que $Z_{N,M}(\mathbf{a}) = \sqrt{N} f_a$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}a &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} |f_m\rangle \langle e_n | a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} |f_m\rangle \langle e_n, a \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} \zeta_N^{an} f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{(m+a)n} f_m \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} N \delta_{m,-a} f_m = \sqrt{N} f_{N-a}.
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 22. Para $a \in \mathbb{Z}_N$, se cumple que $Z_{N,M}(e_a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{ma} f_m$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(12) \quad Z_{N,M}(e_a) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} |f_m\rangle \langle e_n | e_a \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} \delta_{a,n} f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{ma} f_m.
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 23. Si $x = \frac{1}{2}(e_1 + e_{-1}) : E_N \mapsto \mathbb{C}$, se cumple que

$$Z_{N,M}(x)(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos \frac{2\pi l}{N}, \quad 0 \leq l \leq M-1.$$

Demostración. Para cada $0 \leq l \leq M-1$ tenemos por (12) que,

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}(x)(l) &= \frac{1}{2\sqrt{N}} (\zeta_N^l + \zeta_N^{-l}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi il}{N}} + e^{-\frac{2\pi il}{N}}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi l}{N}\right).
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 24. Si $x = \frac{1}{3}(e_1 + e_{-1} + e_0) : E_N \mapsto \mathbb{C}$, se cumple que

$$Z_{N,M}(x)(l) = \frac{1}{3\sqrt{N}} (1 + 2 \cos \frac{2\pi l}{N}), \quad 0 \leq l \leq M-1.$$

Demostración. Si $0 \leq l \leq M-1$, entonces (12) implica que,

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}(x)(l) &= \frac{1}{3\sqrt{N}} (\zeta_N^l + \zeta_N^{-l} + \zeta_N^{(0)l}) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi il}{N}} + e^{-\frac{2\pi il}{N}} + 1) = \frac{1}{3\sqrt{N}} (1 + 2 \cos(\frac{2\pi l}{N})).
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 25. Si $x = \frac{1}{2}(e_1 + e_0) : E_N \mapsto \mathbb{C}$, se cumple que

$$Z_{N,M}(x)(l) = \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi il}{N}} + 1), \quad 0 \leq l \leq M-1.$$

Demostración. Usando (12) para cada $0 \leq l \leq M-1$ obtenemos que,

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}(x)(l) &= \frac{1}{2\sqrt{N}} (\zeta_N^l + \zeta_N^{(0)l}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi il}{N}} + e^{\frac{2\pi i(0)l}{N}}) = \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi il}{N}} + 1).
\end{aligned}$$

□

AGRADECIMIENTOS. La autora agradece profundamente a los dos árbitros, por su cuidadosa revisión y sugerencias que mejoraron la presentación de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Arar S., An Introduction to the Discrete Fourier Transform, *ALL ABOUT CIRCUITS*, Technical article, July, 2017. <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/an-introduction-to-the-discrete-fourier-transform/>
- [2] Bolaños-Servín J.R., Ríos-Cangas J.I. and Quezada R., *Transition Maps between Hilbert Subspaces and Quantum Energy Transport*, Open Systems & Information Dynamics Vol. 27, No. 3 (2020) 1950001 (22 pages) DOI:S1230161220500134
- [3] Dence Joseph B., Dence Thomas P., *Elements of the Theory of Numbers*. Harcourt Academic Press. p. 197, 1999, ISBN 9780122091308.
- [4] Euler Leonhard, *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1741, pp. 141-146, Reprinted in Opera Omnia: Series 1, Volume 2, pp. 33 - 37.
- [5] Márquez-Martínez A.C. y Quezada R., *El espectro de Gelfand del álgebra circulante*, MIXBA'AL Rev. Met. de Mat., Vol. IX, 2018, 7-12.
- [6] Smith S.W., *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists*, Newness an imprint of Elsevier Science, 2003. doi:10.1016/b978-0-7506-7444-7/50046-7
- [7] Terras Audry, *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, Cambridge University Press, 1999.

Karla Adriana Ortega Gallegos

Departamento de Matemáticas,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186,
Col. Leyes de Reforma 1ra sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: adri.mate3017@gmail.com