Mixba'al,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.13, No.1, 2022, páginas 99-107.
Recibido 21:06-2022. Aceptado 09-08-2022.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v13n1/galoga

SECCIONES CÓNICAS, UNA APROXIMACIÓN ANALÍTICA

GABRIEL LÓPEZ GARZA

Resumen. En varios libros de texto la demostración basada en las ideas de Dandelin del teorema atribuido a Apolonio que establece que una cónica resulta de la intersección de un plano con un cono circular recto utiliza geometría sintética y la definición mediante la excentricidad de una cónica. Aquí presentamos una demostración que usa solo la definición elemental de cónica mediante distancias entre puntos con cálculos e imágenes realizadas dentro del contexto de la Geometría Analítica.

1. Introducción

El teorema más destacado de la geometría de las cónicas dice que se obtiene una parábola o una elipse o una hipérbola al intersectar un plano con un cono circular (de ahí el nombre "cónica" para estas curvas). Este hecho conocido desde Apolonio de Perga tiene una fina demostración debida a Dandelin [2] quien publicó sus resultados en 1822. La demostración que conocimos quienes fuimos estudiantes antes de que existiera la internet no utiliza la definición analítica de un cono ni sus propiedades desde un punto de vista de la geometría analítica, por ejemplo la que aparece en el celebrado libro de Courant y Robbins [1] página 200. Además, la demostración típica de geometría analítica no utiliza la ecuación de un cono ni las propiedades analíticas, sino un enfoque sintético (véase, por ejemplo, [3]). Por si fuera poco, la demostración de [3] y otros libros de texto requiere definir la excentricidad de una cónica. Como se sabe, la más básica definición de cónica en geometría analítica requiere la fórmula de distancia entre puntos. Sin embargo, Dandelin no requirió del concepto de excentricidad como se puede ver en el original en la página 172, pero no utilizó geometría analítica en sus demostraciones. Quien desee una aproximación histórica del desarrollo e ideas de Dandelin puede consultar [5].

En este artículo se presenta una demostración del Teorema de Apolonio que utiliza las técnicas y métodos de la geometría analítica en $\mathbb{R}^3$, la cual está basada en la construcción de esferas inscritas en un cono, llamadas esferas de Dandelin.

Cabe señalar que todas las gráficas del presente artículo se realizaron con GeoGebra utilizando las ecuaciones presentadas en este trabajo. Ojalá que este artículo pudiera servir como motivación para que algún lector realice los cálculos por sí mismo y sus propias gráficas ya que es un buen ejercicio para un estudiante maduro en geometría analítica.

2. Teorema principal

Las definiciones básicas de cono, sección cónica, elipse, hipérbola y parábola se encuentran en la sección 3. Con las definiciones básicas de la referida sección, el famoso Teorema de Apolonio de Perga puede expresarse, omitiendo los casos triviales, de la siguiente manera.

Teorema 1. *Una sección cónica es una elipse o una hipérbola o una parábola.*

En este artículo, la demostración del Teorema de Apolonio se basa en la construcción de las esferas de Dandelin. Considere un cono circular $\mathcal{P}$ y un plano $\mathcal{C}$ de modo que el vértice del cono no esté en el plano. La esfera de Dandelin es una esfera inscrita en

Palabras clave. Secciones cónicas, Geometría analítica.

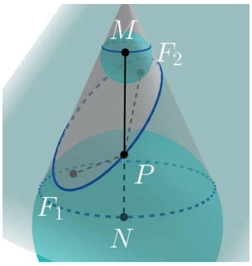


FIGURA 1. Elipse: por Lema 2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y P a M son las mismas. Según el Lema 3, la distancia de M a N es constante para P en la curva. Por lo tanto, la curva es una elipse.

el cono $\mathcal{C}$, tangente al plano $\mathcal{P}$. La existencia de las esferas de Dandelin se demuestra fácilmente en la sección 3 dentro del contexto de la geometría analítica. Demostraremos que se obtiene una parábola con un plano paralelo a una línea generadora que no está en el plano y que se obtienen elipses e hipérbolas con planos no paralelos a ninguna línea generadora. Veremos en la sección 3 que dentro del contexto de la Geometría Analítica, no hay pérdida de generalidad al considerar el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y los planos de la forma $ax - z + d = 0$, $a, d \neq 0$. Con esta configuración tenemos los siguientes casos: i) $|a| < 1$, elipse; ii) $|a| > 1$, hipérbola; iii) $a = \pm 1$, parábola.

Aquí presentamos dentro del marco analítico una demostración simple del Teorema de Apolonio basada en dos lemas siguientes, los cuales se demuestran dentro del contexto de la geometría analítica en la sección final de este artículo.

LEMA 2. *Las distancias desde un punto fuera de una esfera hasta los puntos de tangencia en la esfera son iguales.*

LEMA 3. *La distancia entre los puntos de intersección de una generatriz de un cono circular con dos círculos situados en planos paralelos ortogonales al eje del cono es constante.*

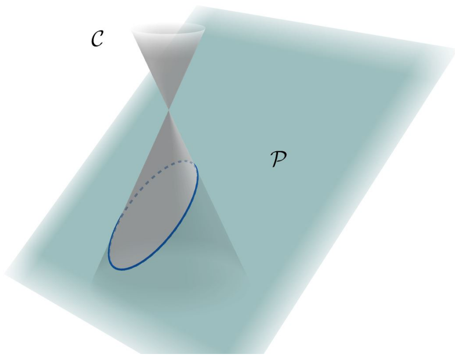
Generalmente, los estudiantes comprenden ambos lemas de forma intuitiva, excepto el caso cuando los círculos están en distintas ramas de un cono del Lema 3, el cual es un caso relevante para la hipérbola. En este artículo se demuestran ambos lemas en la sección final utilizando las técnicas básicas de la geometría analítica.

Demostración del Teorema 1. La siguiente demostración está esbozada en la Memoria de Dandelin [2] en las páginas 172 y 173. Vamos a denotar por P a cualquier punto en la curva de intersección del cono $\mathcal{C}$ y el plano $\mathcal{P}$. Se denotará la distancia entre dos puntos P y Q cualesquiera por $|PQ|$.

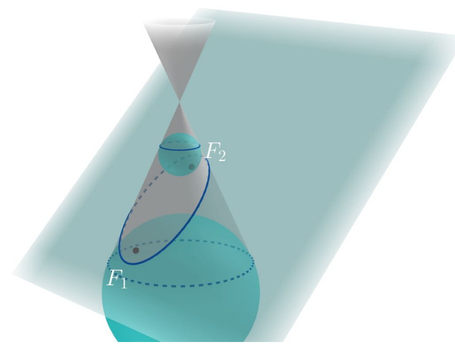
i) Demostración de la elipse. Para la elipse, se muestra fácilmente en la sección 3 que hay dos esferas de Dandelin. Denotemos por F_1 y F_2 los puntos de tangencia entre las esferas y el plano $\mathcal{P}$ (vea las Figuras 2 (B), (C)). Ahora considere la línea recta (generatriz) que pasa por P y el vértice del cono. Deje M y N los puntos de intersección de la generatriz con las esferas de Dandelin (Figura 2 (D)). Por Lema 2, $|PF_2| = |PM|$ y $|PF_1| = |PN|$. Por otro lado, según el Lema 3, para cualquier punto P en la curva de intersección, la distancia $|MN|$ es constante. Pero $|PF_1| + |PF_2| = |MN|$, por lo tanto, por definición (ver sección 3) la curva es una elipse.

ii) Demostración de la hipérbola. Esta demostración es similar a la demostración de elipse. Sea P, F_1, F_2, M y N como en las Figuras 3 y 4. Nuevamente por el Lema 2, $|PF_2| = |PM|$ y $|PF_1| = |PN|$. Por el Lema 3, $|MN|$ es constante y $|PF_1| - |PF_2| = |MN|$. Por lo tanto, la curva es una hipérbola.

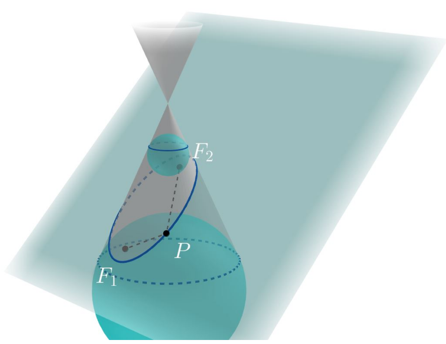
iii) Demostración de la parábola. Para la parábola (ver Figuras 5 y 6), solo hay una esfera de Dandelin y, por lo tanto, solo un foco F. En este caso especial, $\mathcal{P}$ es paralelo



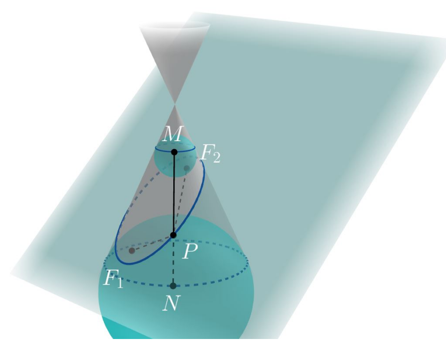
(A)



(B)



(C)



(D)

Figura 2. (A) El cono $\mathcal{C}$ se cruza con el plano $\mathcal{P}$. (B) Las esferas con cono inscrito son tangentes al plano $\mathcal{P}$. (C) Los puntos de tangencia de las esferas con el plano $\mathcal{P}$ son los focos de la elipse. P es cualquier punto de la elipse. (D) Por el Lema 2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y P a M son las mismas. Según el Lema 3, la distancia de M a N es constante para P en la curva. Por lo tanto, la curva es una elipse.

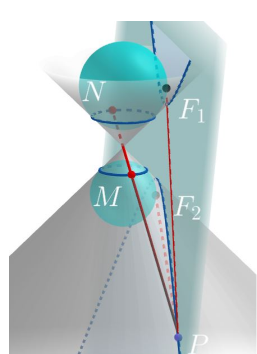
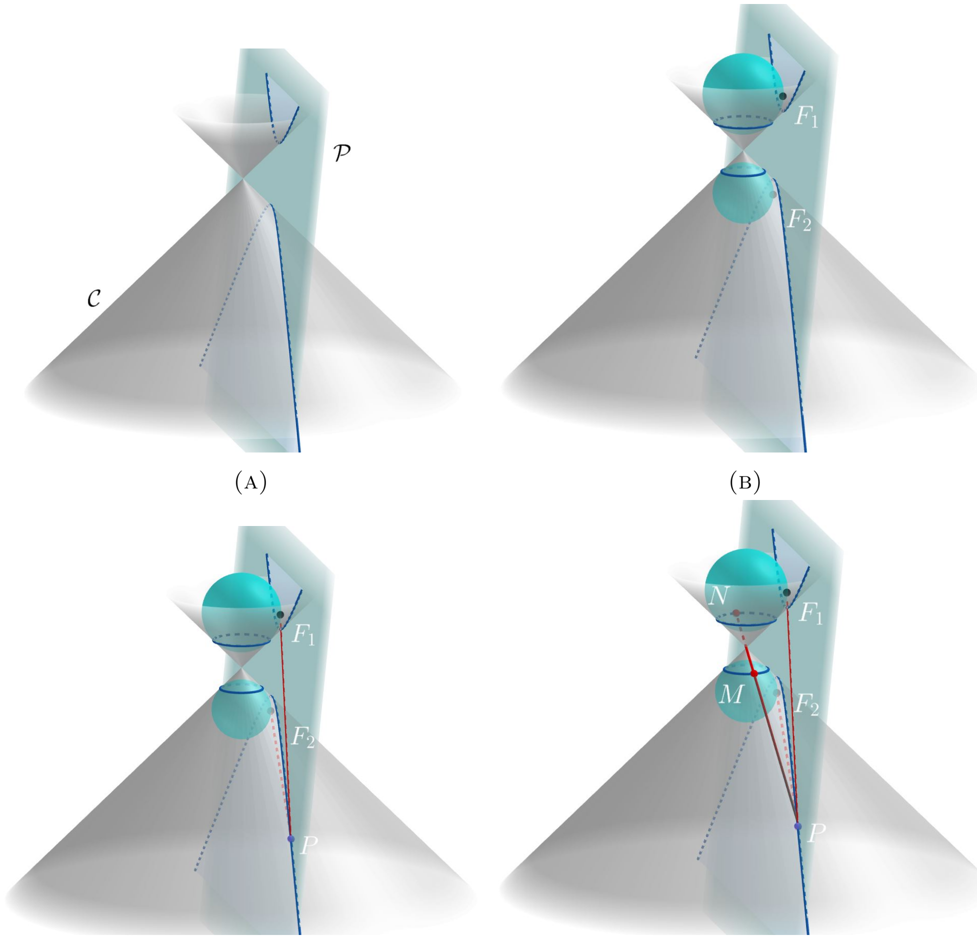


Figura 3. Hipérbola: según el Lema 2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. Dado el Lema 3, la distancia de M a N es constante para cada punto P en la curva. Esta distancia es la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2. Por lo tanto, la curva es una hipérbola.



(A) (B)

(C) (D)

Figura 4. (A) El cono $\mathcal{C}$ se cruza con el plano $\mathcal{P}$ para formar una hipérbola. (B) Esferas inscritas en cono tangentes al plano $\mathcal{P}$. (C) Los puntos de tangencia de las esferas con el plano $\mathcal{P}$ son los focos F_1, F_2 de la hipérbola. P es cualquier punto de la curva. (D) Por el Lema 2 las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. Dado el Lema 3, la distancia de M a N es constante para cada punto P en la curva. Esta distancia es la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2. Por lo tanto, la curva es una hipérbola.

a una generatriz del cono. Aquí, por el Lema 2, $|PF| = |PM|$. Por otro lado, sea $\mathcal{P}_o$ el plano que contiene el círculo de tangencia de la esfera de Dandelin y el cono, y sea $\mathcal{L}$ la intersección de los planos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_o$. Desde P, trace un segmento ortogonal hasta $\mathcal{L}$ y deje que N sea el punto de intersección del segmento con $\mathcal{L}$. Ahora, el segmento PM está en el cono y PN está en $\mathcal{P}$. Por tanto, el ángulo entre PM y el plano $\mathcal{P}$ es el mismo que el ángulo entre PN y $\mathcal{P}$. Los ángulos son iguales porque $\mathcal{P}$ es por construcción paralelo a una generatriz del cono, y PM está en el cono. Por lo tanto, el triángulo MPN es isósceles y, en consecuencia, $|PM| = |PN|$ para cualquier punto de la curva. De esta manera, la curva es una parábola por definición (ver sección 3).$\square$

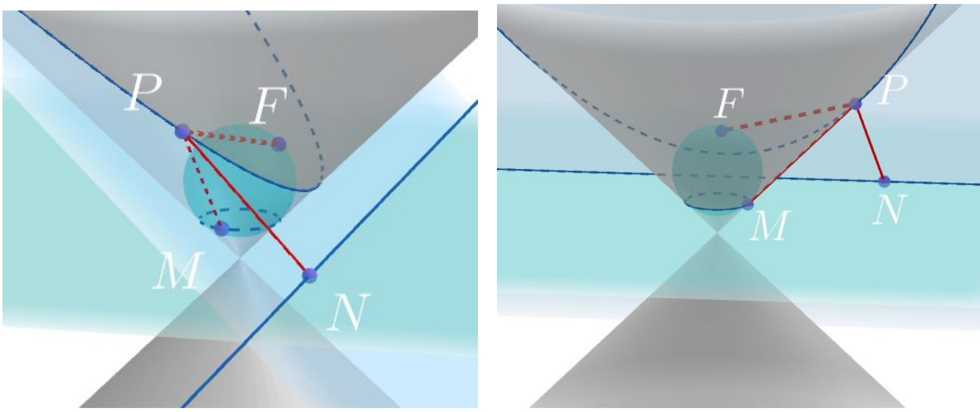


FIGURA 5. Dos vistas diferentes del caso de la parábola. Según el Lema 2, las distancias de P a F y de P a M son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. El triángulo MPN es isósceles. Por lo tanto, la distancia de P a F es la misma que la distancia de P a N. Por lo tanto, la curva es una parábola.

3. Construcciones y definiciones básicas

Antes de demostrar los lemas 2, 3 y que así quede completamente demostrado el Teorema de Apolonio, comenzamos con algunas definiciones elementales y la construcción de las esferas de Dandelin.

Para los efectos de este artículo emplearemos un cono con eje paralelo al eje z, el cual es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-(z-z_0)^2=0.$$

El cono se llama *circular* si y solo si $a=b$. Si $a\neq b$, el cono se llama elíptico. El punto (x_0,y_0,z_0) se llama vértice del cono. Las líneas rectas en el cono que pasan a través del vértice se llaman *rectas generadoras* o *generatrices* del cono.

De ahora en adelante, consideramos sin pérdida de generalidad un cono circular con $a=b=1$ que tiene vértice en $(0,0,0)$. Entonces, el cono en consideración tiene la ecuación,

$$x^2+y^2-z^2=0. \tag{1}$$

Para simplificar, supusimos que el eje del cono es el eje z ya que se pueden dar pruebas idénticas con los conos. $x^2+z^2-y^2=0$ y $y^2+z^2-x^2=0$.

Definición 4 (Sección cónica)**.** Una sección cónica es el conjunto de todos los puntos en la intersección de un cono con un plano que no contiene el vértice del cono.

Ahora establecemos las definiciones de elipse, hipérbola y parábola a partir de la distancia entre puntos.

Definición 5 (Elipse, hipérbola y parábola)**.** Dado un plano $\mathcal{P}$, una *elipse* es el conjunto de todos los puntos $P\in\mathcal{P}$ de manera que la suma de distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 llamados focos de la elipse es una constante mayor que la distancia entre los focos. *Hipérbola* es el conjunto de todos los puntos $P\in\mathcal{P}$, de modo que el valor absoluto de la diferencia de las distancias desde dos puntos fijos F_1, F_2 (llamados focos de la hipérbola) es una constante positiva menor que la distancia entre los focos. *Parábola* es el conjunto de todos los puntos $P\in\mathcal{P}$ de tal manera que la distancia de P a un punto F (llamado foco de parábola) y la distancia de P a una recta la línea $\mathcal{L}\subset\mathcal{P}$ son iguales.

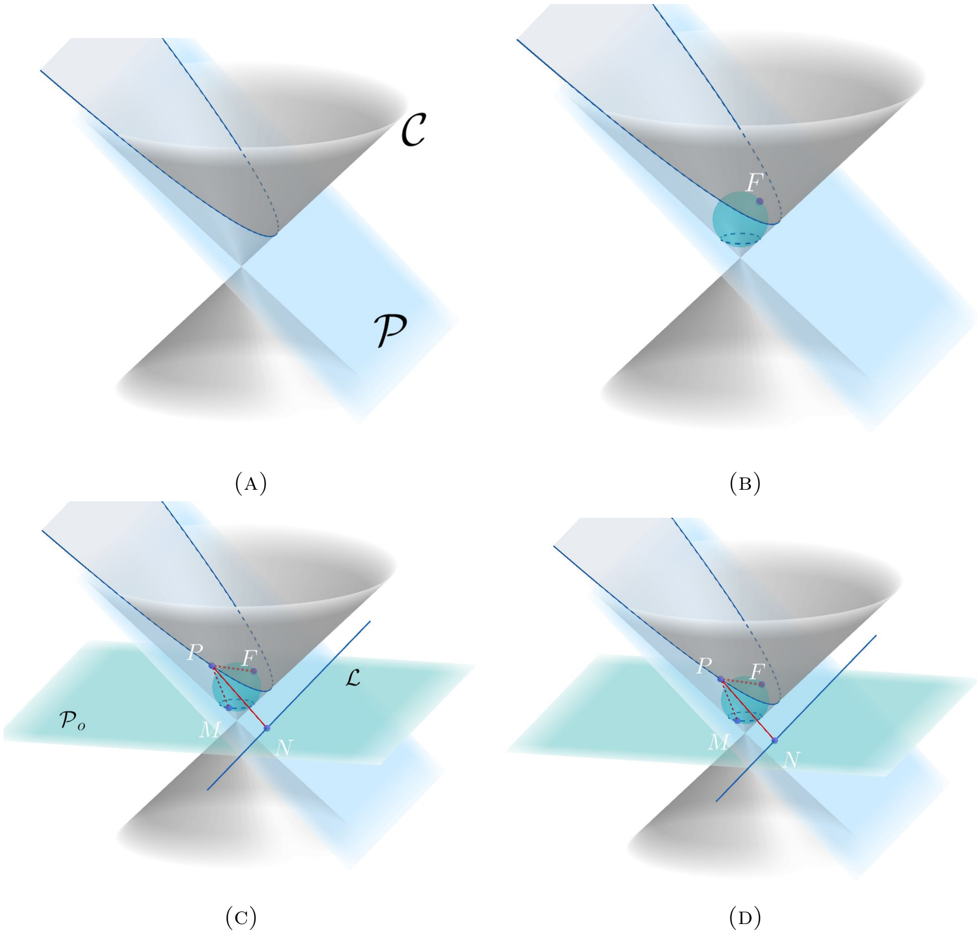


FIGURA 6. (A) El cono $\mathcal{C}$ se cruza con el plano $\mathcal{P}$ paralelo a una de las generatrices de cono. (B) Esfera inscrita en el cono, tangente al plano $\mathcal{P}$. El punto de tangencia de la esfera con el plano $\mathcal{P}$ es el foco de la parábola F. (C) $\mathcal{P}_o$ es el plano donde se encuentra el círculo de tangencia de la esfera con el cono. La intersección de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_o$ es la línea $\mathcal{L}$, la directriz de la parábola. (D) Según el Lema 2, las distancias desde P a F y P a M son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. El triángulo MPN es isósceles. Por lo tanto, la distancia de P a F es la misma que la distancia de P a N. Por lo tanto, la curva es una parábola.

3.1. Construcción de las esferas de Dandelin. La existencia de esferas inscritas en un cono y tangentes a un plano de corte es una consecuencia de la existencia de soluciones de un polinomio de segundo grado. Sea $\mathcal{C}$ el cono dado por la ecuación (1) y $\mathcal{P}$ un plano de intersección a considerar. Denote con P cualquier intersección de puntos entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$. Sin pérdida de generalidad consideramos planos con ecuación de la forma

$$ax - z + d = 0, \quad a, d \neq 0. \tag{2}$$

Hay una o dos esferas inscritas en $\mathcal{C}$ tangentes a $\mathcal{P}$, dependiendo de a. Efectivamente, las esferas tienen ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2 = \rho^2, \tag{3}$$

donde ζ y ρ son parámetros a determinar, ya que, por simetría, las esferas deben tener su centro en el eje del cono. Sea $C = (0, 0, \zeta)$ el centro de dicha esfera, entonces la distancia de C a $\mathcal{P}$ viene dada por

$$dist(C,\mathcal{P}) = \frac{|\zeta - d|}{\sqrt{a^2+1}} = \rho. \tag{4}$$

Por otro lado, considere el plano $\mathcal{P}_t$ tangente al cono que tiene la ecuación $x-z=0$, luego

$$dist(C,\mathcal{P}_t) = \frac{|\zeta|}{\sqrt{2}} = \rho. \tag{5}$$

Al igualar (4) y (5) obtenemos

$$(1-a^2)\zeta^2 - 4\zeta d + 2d^2 = 0$$
$$\zeta = \begin{cases} \frac{d(2\pm\sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)} & \text{si } a \neq \pm 1 \\ \zeta = d/2 \quad \text{si } a = \pm 1. \end{cases} \tag{6}$$

Por lo tanto, ζ y ρ están completamente determinados. En el caso de la parábola, $a=\pm 1$, solo hay una esfera. En el caso de la elipse, $|a|<1$, las dos esferas están en la misma rama del cono, y en el caso de hipérbola, $|a|>1$, hay una esfera en cada rama del cono.

3.2. Círculos de tangencia. Podemos encontrar los círculos de tangencia de las esferas con el cono. Igualando (1) y (3), tenemos

$$\begin{aligned} z^2 + (z-\zeta)^2 &= \rho^2, \\ 2z^2 - 2z\zeta + \zeta^2 - \rho^2 &= 0 \\ z &= \frac{\zeta \pm \sqrt{2\rho^2 - \zeta^2}}{2} \\ z &= \frac{\zeta}{2} \end{aligned}$$

ya que por (5), $2\rho^2 - \zeta^2 = 0$. Ahora de (6), ζ depende de los valores a y d para que podamos parametrizar dichos círculos. En consecuencia:

i) Parábola, $\zeta = \frac{d}{2}$, entonces el círculo de tangencia de la esfera de Dandelin con el cono está dado por

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2}\cos\theta, \\ y = \frac{d}{2}\sin\theta, \\ z = \frac{d}{2}, \quad \theta \in [0,2\pi] \end{cases} \tag{7}$$

ii) Elipse e hipérbola, $\zeta = \zeta_o = \dfrac{d(2\pm\sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)}$, para que tengamos dos círculos. Para la elipse dos en una rama del cono y la hipérbola en cada rama,

$$\begin{cases} x = \zeta_o\cos\theta, \\ y = \zeta_o\sin\theta, \\ z = \zeta_o, \quad \theta \in [0,2\pi] \end{cases} \tag{8}$$

Construyendo la línea generadora a través de P.

4. Demostraciones analíticas de los lemas 2 y 3

Demostración del Lema 2. No se pierde generalidad si suponemos que la esfera tiene centro en el punto $(0,0,0)$. Sea $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ cualquier punto fuera de la esfera. Sean $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ puntos de tangencia en la esfera. Se puede demostrar que la ecuación de cualquier plano tangente a la esfera en el punto $P_T = (x_T, y_T, z_T)$ tiene la forma $xx_T + yy_T + zz_T = r^2$ (vea por ejemplo [4]) . Como P_o está en los planos tangentes que contienen P_1 y P_2, se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1x_o + y_1y_o + z_1z_o &= r^2 && (9)\\ x_2x_o + y_2y_o + z_2z_o &= r^2. && (10) \end{aligned}$$

Por otro lado, con la fórmula de la distancia $d(P_o, P_1)$ obtenemos

$$\begin{aligned} d(P_o, P_1)^2 &= (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 + (z_o - z_1)^2 \\ &= x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ &\quad -2(x_ox_1 + y_oy_1 + z_oz_1) \\ &= x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2, \end{aligned}$$

dada la ecuación (9) y dado que $x_1^2+y_1^2+z_1^2 = r^2$, ya que P_1 está en la esfera. Observe que $x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 > r^2$ ya que P_o está fuera de la esfera. Del mismo modo, dada la ecuación (10), tenemos para

$$d(P_o, P_2)^2 = (x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2 + (z_o - z_2)^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2.$$

Por lo tanto, es cierto que $d(P_o, P_1) = d(P_o, P_2)$. □

Demostración del Lema 3. Sea N un punto en el círculo de la ecuación (8) con θ fijo y

$$\zeta_o = \zeta_N = \frac{d(2 - \sqrt{2}\sqrt{1 + a^2})}{(1 - a^2)}, \quad a \neq 1.$$

Una generatriz L que pasa por N tiene una ecuación

$$L(t) = t(\zeta_N \cos\theta, \zeta_N \operatorname{sen}\theta, \zeta_N), \quad t \in [-\infty, \infty]. \tag{11}$$

Ahora, dejemos que M sea el punto de intersección de $L(t)$ con el círculo

$$\begin{cases} x = \zeta_M \cos\theta, \\ y = \zeta_M \operatorname{sen}\theta, \\ z = \zeta_M, \quad \theta \in [0, 2\pi], \end{cases} \tag{12}$$

donde $\zeta_M = \dfrac{d(2 + \sqrt{2}\sqrt{1 + a^2})}{(1 - a^2)}$. Por tanto, la distancia entre M y N es

$$dist(M, N) = \sqrt{2}|\zeta_M - \zeta_N| = 4\sqrt{2}\frac{d\sqrt{1 + a^2}}{|1 - a^2|},$$

que es una constante dependiendo de a y d como se quiere demostrar. □

Agradecimientos. El autor expresa su gratitud a los árbitros por sus comentarios y observaciones.

Referencias

[1] Courant R., Robbins H., Steward I., *What is Mathematics?* Oxford University Press 1996.
[2] Dandelin, G. *Quelques Propriétés remarquables de la focale parabolique.* Nouveaux mémoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, v.2, 171-202, 1822.
[3] Lehmann Ch., *Analytic Geometry.* John Wiley, NY; Sixth printing. (1947)
[4] López G., *Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de tic.* Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. ISBN: 978-607-28-2108. https://libroscbi.izt.uam.mx/index.php/lcbi/catalog/view/15/10/186-2
[5] Machado de Carvalho, T. M., *The Dandelin Spheres and the Method of the Conic Sections of the Greeks.* Nexus Mathematicae v. 1, 2018.

Gabriel López Garza
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa.
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco no. 186,
Col. Leyes de Reforma, Sección 1a,
C.P. 09340, Alcaldía Iztapalapa, CDMX, México.
e-mail: gabl@xanum.uam.mx