Mixba'al,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.13, No.1, páginas 109-123.
Recibido 26-10-2021. Aceptado 16-08-2022.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v13n1/cavn

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS EN VARIEDADES DIFERENCIABLES

CARLA VICTORIA VALENCIA NEGRETE

RESUMEN. Las definiciones formales de sistema dinámico y campo vectorial describen cualidades distintas de un mismo fenómeno: la evolución de un espacio en el tiempo; y es en el desarrollo de uno a otro donde se explica la relación que hay entre ellos. Desde un punto de vista histórico, ambas nociones tienen origen en la búsqueda de una explicación del Sistema Solar. Si bien las piezas que conforman una introducción a los sistemas dinámicos en variedades diferenciables pueden encontrarse por separado y en contextos distintos, presentamos aquí su construcción completa desde un punto de vista histórico y formal.

1. LEVANIA Y OTROS ANTECEDENTES

Johannes Kepler (1571 – 1628) partió de la descripción de Copérnico, en la que los planetas giran alrededor del Sol [4]; pero sigue la pista de la causa y con base en los datos recopilados por Tycho Brahe descubre la forma elíptica de sus órbitas. Con un conocimiento preciso de sus trayectorias diseña un viaje a la Luna, o *Levania* como la llamaría en su relato *El Sueño* [10]. Así, utiliza un primer sistema dinámico en una ilusión, pues, como diría Karel Kosík, *todo concepto tiene un elemento de fantasía* [7]

> *Habiendo llegado a la ecuación preferí la elipse, pensando que correspondía a una hipótesis distinta... pero ambas resultaron ser una y la misma* [11].

Newton (1642 – 1727) parte del trabajo de Kepler y enuncia las leyes del movimiento en forma de las primeras ecuaciones diferenciales [3], donde aparecen ya las fuerzas como un impulso preciso. Sin embargo, es bien sabido lo difícil que es resolverlas. Es hasta 1881 que Poincaré (1854 – 1912), en *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* [13], propone una manera nueva de abordar este problema: Estudiar las propiedades geométricas de las soluciones. Este es el surgimiento de la Teoría Cualitativa de Sistemas Dinámicos:

> *El estudio completo de una función comprende dos partes:*
>
> 1^o *la parte cualitativa (por así llamarla), o el estudio geométrico de la curva definida por la función; y*
>
> 2^o *la parte cuantitativa, o el cálculo numérico de los valores que toma la función* [13].

2. SISTEMAS DINÁMICOS Y CAMPOS VECTORIALES.

Una familia de curvas solución de una ecuación diferencial es un *sistema dinámico*. De acuerdo a Hirsch y Smale en [6], es una forma de describir el cambio en el tiempo de todos los puntos de cierto espacio, el conjunto de todas las trayectorias que recorren sus elementos.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 37-00, 37-01, 37C05.

Palabras clave. Sistemas dinámicos, Variedades diferenciables.

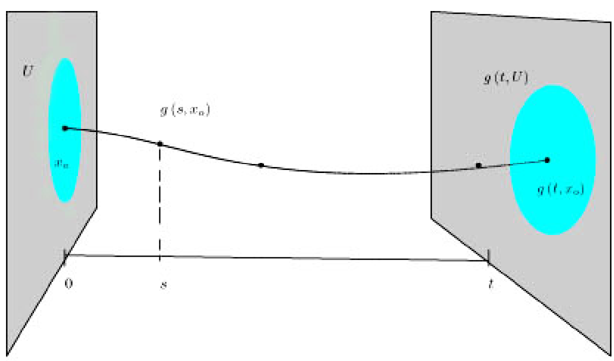
Definición 1. Sea U un dominio en $\mathbb{R}^n$. Un *difeomorfismo* $f\colon U \longrightarrow U$ es una función biyectiva y diferenciable cuya función inversa f^{-1} también lo es. Un *sistema dinámico* es un *grupo de difeomorfismos a un parámetro*, una familia de difeomorfismos $\{g^t\colon U \longrightarrow U\}_{t\in R}$ que se operan mediante la composición: $g^t \circ g^s = g^{t+s}, g^o = Id_U$; y a partir de la cual se define una acción del grupo $\mathbb{R}$ en U que se considera equivalente:

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} \times U \longrightarrow &\quad U, \\ (t, x) \longmapsto &\quad g^t(x). \end{aligned}$$

Cada g^t indica la transformación de U al tiempo t. Si consideramos $x_o \in U$ fijo y dejamos a t variar en $\mathbb{R}$, la curva descrita por los puntos $g(t, x_o)$ es la trayectoria que recorre x_o en el tiempo. Es decir,

$$\begin{aligned} \sigma_{x_o}\colon \mathbb{R} \longrightarrow &\quad U, \\ t \longmapsto &\quad g(t, x_o), \end{aligned}$$

es una curva diferenciable respecto a t que traza en U el movimiento de x_o respecto a este grupo de difeomorfismos a un parámetro.



Sin embargo, la información obtenida usualmente al observar un proceso se interpreta en términos del impulso

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{x_o}(\tau)$$

y motiva el siguiente concepto:

Definición 2. Un *campo vectorial* definido en U es una aplicación continua

$$\nu\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

que asocia a cada $x \in U$, un vector $\nu(x)$, basado en x.

La ecuación

$$\dot{x} = \nu(x)$$

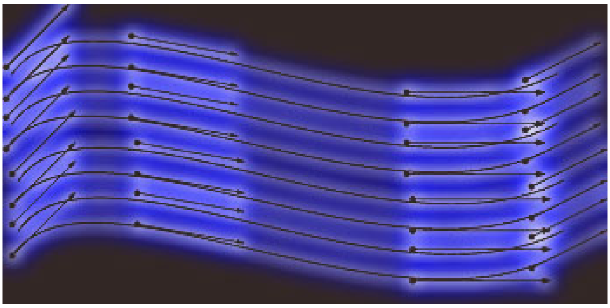
se conoce como la *ecuación diferencial autónoma* correspondiente al campo vectorial ν. El dominio U es llamado el *espacio fase* de la ecuación diferencial autónoma y el producto $\mathbb{R} \times U$, el *espacio fase extendido.*

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una curva diferenciable $\sigma\colon I \longrightarrow U$ tal que, para todo $\tau \in I$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma(\tau) = (\nu \circ \sigma)(\tau) = \nu(\sigma(\tau)),$$

es una *solución* de la ecuación $\dot{x} = \nu(x)$ y su gráfica en el espacio fase extendido es una *curva integral.*

Por cada punto del espacio $\Omega = I \times U$ y cada campo vectorial $\nu\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en él, pasa una sola curva integral. La solución está determinada en forma única por el *Teorema de Existencia y Unicidad* bajo ciertas condiciones sobre el espacio fase extendido Ω.



El Teorema de Existencia y Unicidad

La primera demostración del Teorema de Existencia y Unicidad fue realizada por Cauchy (1789 – 1857). Lipschitz (1834 – 1903) hizo después una simplificación de los requisitos enunciados por Cauchy para garantizar la existencia de las soluciones [12]. Su planteamiento es más general y se conoce como la *condición de Lipschitz*.

Definición 3. Sea $B_\lambda(x) \subset U$ la vecindad $B_\lambda(x_o) = \{\tilde{x} \in U \mid \| \tilde{x} - x_o \| < \lambda\}$; $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto; y $\Omega = I \times B_\lambda(x_o)$. Un campo vectorial $\nu\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Lipschitz* en Ω si dados $(t, x), (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$,

$$\| \nu(t, x) - \nu(\tilde{t}, \tilde{x}) \| \leq k \| x - \tilde{x} \|$$

para alguna constante k que puede depender de x_o.

Teorema 4. *Bajo estas condiciones, aplicando el método de aproximaciones sucesivas de Picard, puede obtenerse una solución única de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = \nu(t, x),$$

para la condición inicial $(t_o, x_o) \in \Omega$.

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $B_\lambda(x_o)$ tal que $x_n \to x_o$ cuando n tiende a infinito; y

$$u_n(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} \nu(t, x_n(t))\, dt$$

una sucesión de funciones.

La sucesión $(u_n)_n$ converge uniformemente a la solución $x(t)$ y cumple la condición inicial $x(t_o) = x_o$ porque toda $u_n(t_o) = x_o$ y la sucesión u_n es de Cauchy [1]:

$$\|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| \leq k \int_{t_o}^{t} \|x_{n-1}(t) - x_n(t)\| dt$$

para toda $t \in I$.

[1] Es en este acotamiento de la integral donde se utiliza fuertemente la condición de Lipschitz, pues garantiza el no haber *hoyos negros* u otros comportamientos irregulares que serían una complicación.

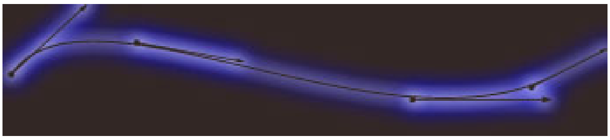
Utilizando el hecho de que la convergencia es uniforme, el límite es único y

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o + \lim_{n\to\infty} \int_{t_o}^{t} \nu(t, x_n(t))dt \\ &= x_o + \int_{t_o}^{t} \lim_{n\to\infty} \nu(t, x_n(t))dt \\ &= x_o + \int_{t_o}^{t} \nu(t, x(t))dt \end{aligned}$$

es la solución de la ecuación $\dot{x} = \nu(t, x)$ con la condición inicial (t_o, x_o) a lo largo del intervalo I donde la función ν cumple la condición de Lipschitz. □

Gracias a este último resultado, el desarrollo entre ambos conceptos es:

$$\begin{array}{cl} \{g^t : U \to U\}_{t\in I} & \text{flujo local o evolución de } U; \\ \updownarrow & \\ \{\sigma_x : I \to U\}_{x\in U} & \text{familia de curvas integrales o soluciones de } \dot{x} = \nu(x); \\ \updownarrow & \\ \nu : U \to \mathbb{R}^n & \text{campo vectorial local.} \end{array}$$



3. Ejemplo. Sistemas Dinámicos Lineales

Remolinos, cónicas y otras curvas cerradas modeladas por un *sistema dinámico lineal* son dibujos recurrentes en la naturaleza y soluciones de la ecuación diferencial matricial $\dot{X} = AX$, con $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definición 5. Sea $A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, t un número real y

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (t, x) &\longmapsto e^{tA}(x). \end{aligned}$$

La función e^{tA} es la serie

$$Id_{\mathbb{R}^n} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$$

y es un operador lineal.

Observación 1. La prueba de este último hecho es la conclusión de la siguientes secciones, donde se presentan el espacio $L(\mathbb{R}^n)$ y sus condiciones de convergencia.

3.1. El álgebra $\mathbf{L}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$. La estructura algebraica en $L(\mathbb{R}^n)$ nos permite trabajar con las transformaciones lineales a partir de las matrices en $M_n(\mathbb{R})$.

3.1.1. Expresión matricial del operador $\mathbf{T}$. La expresión matricial A de cada transformación lineal T se construye de acuerdo al siguiente proceso:

Sea $\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, hay una colección única de coeficientes reales $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j.$$

T es lineal, de modo que

$$T(x) = \sum_{j=o}^{n} \alpha_j T(e_j).$$

A su vez, cada $T(e_j)$ tiene una expresión única en términos de la base β,

$$T(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k.$$

El operador $T \in L(\mathbb{R}^n)$ se relaciona de manera única, respecto a la base β, con la matriz cuyo vector columna es precisamente (a_{kj}):

$$T(x) \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(e_j) \longleftrightarrow [\,T(e_1), T(e_2), ..., T(e_n)] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Observación 2. Si en cambio nos interesa ver a T en términos de sus funciones coordenadas, cada una de ellas corresponde al producto de renglones:

$$[\,a_{11}, ..., a_{1n}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} = a_{11}\alpha_1 + ... + a_{1n}\alpha_n = T_1(x).$$

3.1.2. Estructura algebraica en $\mathbf{L}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$.

Definición 6. Un *álgebra* $\mathcal{F}$ sobre un campo F es un espacio vectorial sobre F que es además un anillo con distributividad en el producto:

Para cualquier par de vectores $A, B \in \mathcal{F}$ y todo escalar $\alpha \in F$,

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

TEOREMA 7. *El espacio de operadores $L(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra.*

Demostración. La representación matricial

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon L(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}), \\ T & \longmapsto & A = [\,T(e_1), \ldots, T(e_n)] \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras ya que

1) φ relaciona adecuadamente a las operaciones:

$$\begin{array}{rcl} (T_1 + T_2)(x) & \longleftrightarrow & (A_1 + A_2)(x), \\ (T_1 \circ T_2)(x) & \longleftrightarrow & (A_1 A_2)(x), \\ (\alpha T)(x) & \longleftrightarrow & (\alpha A)(x); \end{array}$$

2) y φ es biyectiva: Dada una base η de R^{n^2}, el vector $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$ corresponde a la única matriz (a_{kj}) que representa a la transformación T.

Además, la dimensión es un invariante de espacios vectoriales (no cambia por el efecto de un isomorfismo lineal) [5]. Por lo tanto, $L(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de dimensión n^2. □

3.2. Convergencia en $\mathbf{L}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$.

Teorema 8. *La norma del supremo hace que la convergencia uniforme de una sucesión de operadores en $\mathbb{R}^n$ sea una condición equivalente para la convergencia de la misma sucesión en $L(\mathbb{R}^n)$ al asignar a cada operador la magnitud de la variación que provoca en la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.*

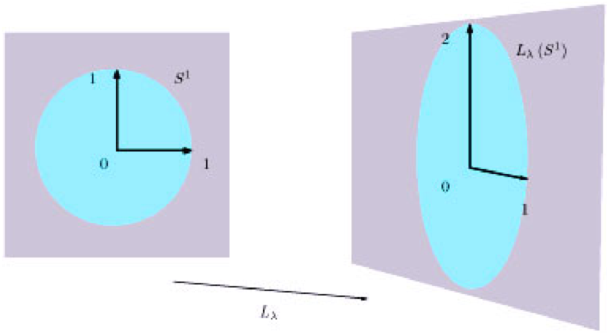
Demostración. La norma de un operador A en $L(\mathbb{R}^n)$ es

$$\|A\|_L = \sup_{x \in S^{n-1}} \{\| A(x) \|\},$$

a partir de la cual se define la distancia

$$\begin{array}{rccc} d_L: & L(\mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & R^+, \\ & (A, B) & \longmapsto & \|A - B\|_L. \end{array}$$

Observación 3. Toda rotación R_θ tiene norma 1 y toda λ-*expansión* diagonal L_λ tiene norma λ.



Sea $(A_m)_m$ una sucesión de operadores en $L(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$d_L(A_m, A) = \sup_{x \in S^{n-1}} \{ \|(A_m - A)(x)\| \}.$$

Si $(A_m)_m$ converge uniformemente al operador A en $\mathbb{R}^n$ cuando $m \to \infty$, la sucesión de números reales

$$q_m(x) = \|(A_m - A)(x)\| \to 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $(A_m)_m$ converge a A en $L(\mathbb{R}^n)$.

Por otra parte, consideremos la sucesión $r_m = \|A_m - A\|_L$. Entonces,

$$r_m \geq \frac{q_m(x)}{\|x\|}$$

para todo $x \neq 0$. Si $(A_m)_m$ converge a A en $L(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$;

$$\lim_{m\to\infty} \frac{q_m(x)}{\|x\|} = 0; \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\|x\|} \lim_{m\to\infty} q_m(x) = 0.$$

Los números reales son un dominio entero y $1/\|x\| \neq 0$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} q_m(x) = 0$$

para todo $x \neq 0$. Es decir, $\|(A_m - A)(x)\| \to 0$ cuando $m \to \infty$ y la sucesión $(A_m)_m$ converge uniformemente a A en $\mathbb{R}^n$. □

3.3. El álgebra de Banach $\mathbf{L}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$.

TEOREMA 9. *El álgebra $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio completo. Así, si una función A es el límite de una sucesión de operadores en $L(\mathbb{R}^n)$, A es un operador lineal.*

Demostración. Sea $(A_m)_m$ una sucesión de Cauchy en $L(\mathbb{R}^n)$ y sea $\{B_j\}_{j=o}^{n^2}$ una base del espacio de operadores. Para cada índice m, existe una colección única de números reales $\{\alpha_j^{(m)}\}_{j=o}^{n^2}$ tal que $A_m = \alpha_1^{(m)} B_1 + \alpha_2^{(m)} B_2 + \cdots + \alpha_{n^2}^{(m)} B_{n^2}$.

Si $\{B_j\}_{j=1}^{s}$ es un conjunto de operadores linealmente independiente, no hay una combinación lineal de sus elementos cuyos coeficientes sean grandes pero el vector mismo sea pequeño [8]. En otras palabras, dada una colección de escalares $\{\alpha_j\}_{j=1}^{s}$, no todos cero, existe un número $c \neq 0$ tal que

$$\|\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots + \alpha_s B_s\|_L \geq c\,(\,|\,\alpha_1\,| + |\,\alpha_2\,| + \cdots + |\,\alpha_s\,|)\,.$$

Como $(A_m)_m$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_o(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m, k > n_o(\epsilon)$,

$$\epsilon > \|A_m - A_k\|_L = \left\| \sum_{j=1}^{n^2} \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}\right) B_j \right\|_L \geq c \sum_{j=1}^{n^2} \left|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}\right|.$$

De manera que para cada índice j de la base,

$$\left|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}\right| \leq \sum_{j=1}^{n^2} \left|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}\right| < \frac{\epsilon}{c}$$

y la sucesión $\left(\alpha_j^{(m)}\right)_m$ converge en R. Sean $\alpha_j = \lim_{m\to\infty} a_j^{(m)}$ y

$$A = \sum_{j=1}^{n^2} \alpha_j B_j.$$

Entonces, el operador $A \in L(\mathbb{R}^n)$ es el límite de la sucesión (A_m), el espacio $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio completo. Por lo tanto, $L(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach real. □

3.4. La serie $\mathbf{e^{tA}}$.

Teorema 10. *La serie e^{tA} converge absolutamente en el espacio $L(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. La sucesión $\left(S_n(t)\right)_n = \left(\sum_{j=o}^{n} \frac{t^j}{j!}A^j\right)_n$ es de Cauchy en $L(\mathbb{R}^n)$. Sea $\eta(t) = \|tA\|_L \in R$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\| S_j(t) - S_i(t)\|_L &= \left\| \sum_{k=i+1}^{j} \frac{t^k}{k!}A^k \right\|_L, \\
&\leq \sum_{k=i+1}^{j} \left\| \frac{t^k}{k!}A^k \right\|_L, \\
&= \sum_{k=i+1}^{j} \frac{\eta(t)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Al aplicar el *criterio del radio* para confirmar la convergencia de la última serie y el *criterio de comparación de Weierstrass* para acotar la primera, se prueba que la sucesión $\left(S_n(t)\right)_n$ converge absolutamente en $L(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, la serie e^{tA} es un operador lineal. □

Observación 4. Una reescritura de la serie e^{tA} permite notar que es una función analítica de t. La curva en el espacio $L(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$\begin{aligned}
\gamma\colon \mathbb{R} &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n), \\
t &\longmapsto \sum c_j t^j,
\end{aligned}$$

donde cada coeficiente es el operador $c_j = (1/j!)\, A^j$ y es una curva diferenciable cuya derivada $\frac{\partial}{\partial t}\, e^{\tau A}$ (como probaremos más adelante) es el operador $A\, e^{\tau A}$.

4. Propiedades del operador $\mathbf{e^{tA}}$

Cada uno de los sistemas dinámicos lineales $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ se caracteriza de acuerdo a tres aspectos fundamentales: su relación con el campo vectorial matricial $v(x) = Ax$; la forma descrita por sus soluciones; y las propiedades algebraicas que tiene como grupo.

4.1. Propiedades dinámicas. La familia de operadores exponenciales $G_A = \{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\}$, definida a partir de una transformación lineal $A \in L(\mathbb{R}^n)$, es un grupo bajo la composición y es el sistema dinámico correspondiente al campo vectorial $\nu(x) = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 11. *La función $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow G_A$, tal que $t \mapsto e^{tA}$, es un homomorfismo de grupos y lleva la estructura de la suma en $\mathbb{R}$ al producto en G_A*

Demostración.

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \left(Id_{\mathbb{R}^n} + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots\right)\left(Id_{\mathbb{R}^n} + sA + \frac{s^2}{2}A^2 + \cdots\right) \\ &= Id_{\mathbb{R}^n} + (t+s)A + \left(\frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2}\right)A^2 + \cdots \\ &= e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

Entonces, $h(-t) = e^{-tA}$ es el inverso multiplicativo de cada e^{tA} y $h(0) = e^o$ es el elemento neutro $Id_{\mathbb{R}^n}$ de G. □

TEOREMA 12. *La sucesión* $\frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau))$ *converge al operador* Ae^{tA} *en* $L(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{\tau A} = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau)) = Ae^{\tau A}.$$

Demostración. El límite de una sucesión en $L(\mathbb{R}^n)$ es único y está determinado por la convergencia uniforme de la sucesión. Una vez que existe el límite de la sucesión de derivadas, este coincide con la derivada del límite [2].

Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau))(x) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau^j}{j!}A^j\right)(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!}\right)A^j\,(x) \\ &= A\,S_{n-1}(\tau)(x). \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau)) = Ae^{\tau A} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t}e^{\tau A} = Ae^{\tau A}.$$

De manera que el campo vectorial

$$\begin{aligned} \nu\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

corresponde a la ecuación diferencial matricial $\dot{X} = AX$; y las curvas diferenciables

$$\begin{aligned} \sigma_x\colon R &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \tau &\longmapsto e^{\tau A}(x). \end{aligned}$$

son las soluciones de la ecuación diferencial para cada condición inicial (τ, x). □

TEOREMA 13. *El campo vectorial* ν *es* autónomo *(no depende del tiempo) y cumple la condición de Lipschitz en el espacio fase extendido* $\Omega = R \times \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean $(t, x), (s, y) \in \Omega$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\nu(x) - \nu(y)\| &= \|A(x) - A(y)\| \\ &= \|A(x-y)\| \\ &\leq \|A\|_L\|x-y\|. \end{aligned}$$

□

Observación 5. Esto implica que el Teorema de Existencia y Unicidad se cumple en Ω; y aún si sólo supieramos que $\frac{\partial}{\partial t}e^{\tau A}(x_o) = Ae^{\tau A}(x_o)$ para algún $x_o \in \mathbb{R}^n$, esto sería suficiente para concluir que la solución $\sigma_{x_o}: R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es única.

4.2. Propiedades algebraicas. Los objetos no persisten si se encuentran aislados; lo hacen si interactúan, en principio, con sus semejantes. Es el álgebra quien estudia las leyes y consecuencias de esta interacción al formularla como una operación. El operador exponencial es especial en este contexto porque relaciona las estructuras de los espacios $M_n(\mathbb{R})$ y $GL_n(\mathbb{R})$.

Representaciones

Para llevar conceptos y resultados de un sistema a otro (en su significado general como un conjunto de reglas o principios sobre una materia, enlazados entre sí por una cualidad); se construyen analogías entre objetos con características similares, al considerarlos elementos de una *categoría* $\mathcal{F}$: una colección de objetos y *morfismos* que respecto a la composición tienen el siguiente comportamiento:

i: Para cada objeto $A \in \mathcal{F}$ hay una identidad $Id_A: A \to A \in \mathcal{F}$ tal que
si $f: A \to B$, $g: B \to A \in \mathcal{F}$,
$f \circ Id_A = f$ y $Id_A \circ g = g$.

ii: Si A, B, C, D, f, g, $h: C \to D \in \mathcal{F}$,
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

El conjunto de morfismos es un *monoide*, la estructura más simple reconocida por el álgebra. Dentro de éste pueden escogerse aquellos morfismos que sean invertibles, *isomorfismos*, en búsqueda de un primer *grupo* de transformaciones de los espacios pertenecientes a la categoría. Si el morfismo va un objeto a sí mismo, es llamado *endomorfismo*; y si es invertible, *automorfismo*.

Para la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita, cuyos morfismos son precisamente los operadores lineales, el grupo de endormorfismos $End(\mathbb{R}^n)$ es también el grupo de automorfismos $Aut(\mathbb{R}^n)$, el *Grupo Lineal General real* de matrices $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$, pues la dimensión es un invariante de espacios vectoriales.

Sea G un grupo y $\rho: G \longrightarrow End(X)$ un homomorfismo, con $X \in \mathcal{F}$. Entonces, para cada elemento $g \in G$ hay un endomorfismo $\rho(g) \in End(X)$ y la operación en G es reinterpretada como la composición de transformaciones en X:

$$g_1 g_2 \longmapsto \rho(g_1) \circ \rho(g_2).$$

Al homomorfismo ρ se le llama *representación* de G en X porque G actúa en X mediante ρ y la evaluación

$$\begin{array}{rccc} ev: & End(X) \times X & \longrightarrow & X, \\ & (f, x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \rho(G) \times X & \longrightarrow & X, \\ (\rho(g), x) & \longmapsto & \rho(g)(x). \end{array}$$

En nuestro caso, $\rho(A) = e^{tA}$ es una representación del grupo G de operadores lineales invertibles en el grupo de endomorfismos $GL_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} \rho\colon G & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}), \\ A & \longmapsto & e^{tA}. \end{array}$$

5. Sistemas Dinámicos en Variedades Diferenciables

Las variedades diferenciables son el modelo natural de los lugares en los que se observa el movimiento (el universo es una variedad) y nos es indispensable para un estudio más general entender las nociones de sistemas dinámicos y campos vectoriales en estos espacios. Para hacerlo recurriremos al Teorema de Existencia y Unicidad en variedades diferenciables.

6. Variedades Diferenciables

Definición 14. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ es una *variedad diferenciable* de dimensión n si cada $x \in M$ tiene una vecindad $W \cap M$ difeomorfa a un conjunto abierto U del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

De manera más general, un conjunto M se dice *variedad diferenciable de dimensión* n si

(a) existe una cubierta abierta de M, $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$
(b) para cada conjunto W_α, existe una familia corresponiente de biyecciones $\varphi_\alpha\colon W_\alpha \longrightarrow U_\alpha$, con U_α abierto en $\mathbb{R}^n$,
(c) se satisface la *condición de consistencia* siguiente:
dadas $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (W_β, φ_β) cuya intersección $W_\alpha \cap W_\beta = W_{\alpha\beta}$ no es vacía, entonces

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta|_{W_{\alpha\beta}} \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})},$$

es un difeomorfismo entre los abiertos de $\mathbb{R}^n$ $\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})$ y $\varphi_\beta(W_{\alpha\beta})$

$$\begin{tikzcd} & W_{\alpha\beta} \arrow[dl, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi_\beta"] & \\ \varphi_\alpha(W_{\alpha\beta}) \arrow[rr, "\varphi_{\alpha\beta}"'] & & \varphi_\beta(W_{\alpha\beta}) \end{tikzcd}$$

Llamamos *sistema de coordenadas* a las funciones φ_α y *cartas* a las parejas $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$.

La colección de cartas $\{(W_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ es un *subatlas* de la variedad M.
Dos altases de la variedad M son equivalentes si sus cartas son consistentes entre sí. Su unión es entonces otro atlas.

Una estructura diferenciable en M es un atlas maximal para la condición [15]; o bien, una clase de equivalencia de atlases de M [1]. A partir de estos últimos conceptos podemos considerar otra definición [1].

Definición 15. Una *variedad diferenciable* M es un conjunto con una estructura diferenciable.

Ejemplos.

Ejemplo 1. El espacio de matrices $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$

Sea X un álgebra normada isomorfa a $\mathbb{R}^n$ y $T\colon \mathbb{R}^n \to X$ un isomorfismo entre ellos. Entonces T es continua; de hecho, una identificación, por ser suprayectiva. Es decir, X tiene la topología de identificación inducida por T, esto es:

- $U \subset X$ es abierto si y sólo si su imagen inversa bajo T es abierta en $\mathbb{R}^n$ [14].

Además, T es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ porque X es un espacio métrico y la función lineal más parecida a T es ella misma. La función inversa T^{-1} es similar y también lo es su restricción a conjuntos abiertos. En efecto, T es un difeomorfismo que genera una estructura diferenciable en X,

$$[\ \{(U_\alpha,\ T^{-1}\mid_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n)\}_{\alpha\in\mathcal{F}}\ ].$$

El mismo argumento para R^{n^2} muestra que tanto $M_n(\mathbb{R})$ como $L(\mathbb{R}^n)$ son variedades diferenciables de dimensión n^2.

Ejemplo 2. El Grupo Lineal General real de matrices $\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$

La función $det\colon M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y el conjunto

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$$

es abierto en $M_n\mathbb{R})$ y adquiere la estructura diferenciable relativa a la restricción del isomorfismo T del ejemplo anterior. Por lo tanto, el Grupo Lineal General real de matrices $GL_n(\mathbb{R})$ es una subvariedad diferenciable de $M_n(\mathbb{R})$ con forma de cono:

Demostración. La matriz $Id \in GL_n(\mathbb{R})$, $\parallel Id \parallel_L = 1$; y si A es invertible, para todo $r > 0$ ó $r < 0$, los operadores rA dibujan segmentos de recta contenidos en $GL_n(\mathbb{R})$. Entonces, la subvariedad $GL_n(\mathbb{R})$ de $M_n(\mathbb{R})$ es un cono sólido con eje de rotación en la recta que pasa por la identidad y el origen que no incluye el vórtice $0 \in L(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Observación 6. El espacio $GL_n(\mathbb{R})$ es un *grupo topológico*, un espacio topológico con dos funciones continuas con las que tiene una estructura algebraica de grupo: el producto

$$\begin{array}{rccl} \cdot\colon & GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}), \\ & (A,B) & \longmapsto & AB, \end{array}$$

y la inversión

$$\begin{array}{rcl} inv\colon GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1}. \end{array}$$

Ejemplo 3. El toro $\mathbf{T^n}$

Una familia importante de variedades diferenciables consiste en los *espacios de órbitas* [9] de subgrupos G de $Diff(\mathbb{R}^n)$ que actúan en $\mathbb{R}^n$ mediante su evaluación

$$\begin{array}{rccl} ev\colon & G \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ & (g,x) & \longmapsto & g(x). \end{array}$$

En particular, el *toro* T^n es el cociente $\mathbb{R}^n/G$, donde G es el grupo de translaciones enteras en $\mathbb{R}^n$,

$$G = \{g_m \mid g_m(x) = (x_1 + m_1, ..., x_n + m_n),\ m = (m_1, ..., m_n) \in Z^n\}.$$

Las *órbitas* son los conjuntos $orb\,G(x) = \{g_m(x) \mid g_m \in G\} \subset \mathbb{R}^n$ que se identifican en un punto al hacer el cociente

$$\mathbb{R}^n/G = \{[x] \subset \mathbb{R}^n \mid [x] = orb\,G(x)\};$$

y son las mismas que las generadas por la acción del grupo Z^n

$$\begin{array}{ccc} Z^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ (m,x) & \longmapsto & (x_1+m_1,...,x_n+m_n). \end{array}$$

El *espacio cociente* o espacio de órbitas relativo a cada uno de los grupos es igual, pues la relación de equivalencia que determinan lo es:

$$T^n = \mathbb{R}^n/Z^n = \mathbb{R}^n/G = \mathbb{R}^n/_{\sim},$$

donde $x \sim y$ si y sólo si hay un $m \in Z^n$ tal que $x - y = m$.

Observación 7. De hecho, $End(Z^n) = G$ y el desarrollo anterior nos conduce a la representación

$$\begin{array}{rcl} \rho\colon Z^n & \longrightarrow & G \\ m & \longmapsto & g_m. \end{array}$$

La evaluación es una acción que *actúa propia y discontinuamente* sobre $\mathbb{R}^n$: Todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ tiene una vecindad U, tal que $U \cap g_m U = \emptyset$ para todo $g_m U = \{g_m(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in U\}$ con $m \neq 0$. Entonces $g_{m_1}U \cap g_{m_2}U = \emptyset$, si $m_1 \neq m_2$. En particular, la acción es *libre*: $x \neq g_m(x)$, si $m \neq 0$.

Esto hace que la *aplicación cociente*

$$\begin{array}{rcl} q\colon \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T^n \\ x & \longmapsto & [x]. \end{array}$$

sea una *aplicación* [14]; es decir, cada punto $[x] \in T^n$ tiene una vecindad $W \subset T^n$ que satisface:

a) La imagen inversa de W, $q^{-1}(W)$, es la unión ajena de abiertos U_m.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un representante de la clase de equivalencia $[x] \in T^n$; sea U una vecindad abierta de x tal que $g_m U \cap U = \emptyset$ para toda $m \neq 0$; y denotemos como U_m a cada imagen $g_m U$. El espacio de órbitas tiene la topología del cociente, entonces $q(U_m) = W$ es una vecindad abierta de $[x]$; y $q^{-1}(W) = \sqcup_{m \in Z^n} U_m$. □

b) La vecindad W de $[x]$ construida así es abierta.

Demostración. El espacio $q(\mathbb{R}^n)$ adquiere la topología del cociente, donde cada subconjunto W es abierto en T^n si su preimagen $q^{-1}W$ es abierta en $\mathbb{R}^n$. □

c) Para cada $m \in Z^n$, la restricción de $q\,|_{U_m}$ es un homeomorfismo.

Demostración. El que la acción sea libre es suficiente para garantizar que $q\,|_{U_m}$ es inyectiva y $q\,|_{U_m}^{-1}$ está bien definida: Si $y = x + \tilde{m} \in \mathbb{R}^n$ pertenece a la órbita de x pero $m \neq \tilde{m}$, entonces $y \notin U_m$ y $q\,|_{U_m}^{-1}([x]) = x + m$. Por lo tanto $q\,|_{U_m}$ es un homeomorfismo. □

Así, el toro T^n es una variedad diferenciable de dimensión n cuya estructura diferenciable está generada por los atlas

$$\{(W_\alpha, q^{-1}\,|_{W_\alpha})_{\alpha \in \mathcal{F}}\}_{m \in Z^n} = \{(W_\alpha, g_m W_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{F}}\}_{m \in Z^n}$$

tal que $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ es una base de T^n donde el grupo G actúa propia y discontinuamente.

Una ventaja de ver el toro T^n como acabamos de decribirlo, sobre la defnción del toro como es producto $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, es que de la primera se infiere una operación mediante el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{rccc} +\colon & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (q,q) \downarrow & & \downarrow q \\ \oplus\colon & T^n \times T^n & \longrightarrow & T^n \\ & ([x],[y]) & \longmapsto & [x+y], \end{array}$$

con la cual T^n es un grupo topológico.

Ejemplo 4. La esfera $\mathbf{S^{n-1}}$

La esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión $n-1$.

Demostración. La topología en S^{n-1} está determinada por la identificación

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|}. \end{array}$$

Es decir, U es abierto en la esfera cuando $\varphi^{-1}U$ es abierto en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Las cartas son las parejas (U, pU), donde cada U es proyectado a la vecindad

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x\| < 1\},$$

abierta en $\mathbb{R}^{n-1}$: $p(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. La función inversa de la proyección se define como $p^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, (1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{1/2})$.

Por lo tanto, la estructura diferenciable es la clase de equivalencia $[(U_\alpha, pU_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{F}}]$ de atlases correspondientes a la base $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ de S^{n-1}. $\square$

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud a la Universidad Iberoamericana Ciudad de México.

Referencias

[1] Arnol'd, V. I., *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, (1992).
[2] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, (1974).
[3] Da Andrade, E. N. *Isaac Newton*, Sigma Vol. I, Ed. Grijalbo, Barcelona, (1997).
[4] de Gortari, E., *En torno a la astronomía*, Ed. Grijalbo, (1979).
[5] Friedberg, S.H., Insel, A.J., Spence, L.E. *Linear Algebra*, Prentice Hall, (1997).
[6] Hirsch, M.W. , Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, (1974).
[7] Kosík, K. *Dialéctica de lo Concreto (Estudio sobre los problemas del hombre y el mundo)*, Ed. Grijalbo, México, 1976.
[8] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, (1978).
[9] F. Laudenbach, *Topologie Différentielle*, L'École Polytechnique Edition, (1994).
[10] Lear, J. *El sueño de Kepler*, Dirección General de Divulgación de la Ciencia, UNAM, (2005).
[11] Martínez, R. *El arquitecto del cosmos, Johannes Kepler*, Pangea Editores, México, (1994).
[12] Picard, E. *Traité D'Analyse*, Gauthier-Villars, Paris, (1905).
[13] Poincaré, H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1ère partie)*, Jour. Math. Pures et Appl.,7, 375-422, (1881).
[14] Prieto, C. , *Topologı'a Básica*, FCE, (2003).
[15] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, (1983).

Carla Victoria Valencia Negrete
Universidad Iberoamericana,
Departamento de Física y Matemáticas.
Prolongación Paseo de la Reforma 880,
Lomas de Santa Fe. C.P. 01219 CDMX, México.
e-mail: carla.valencia@ibero.mx