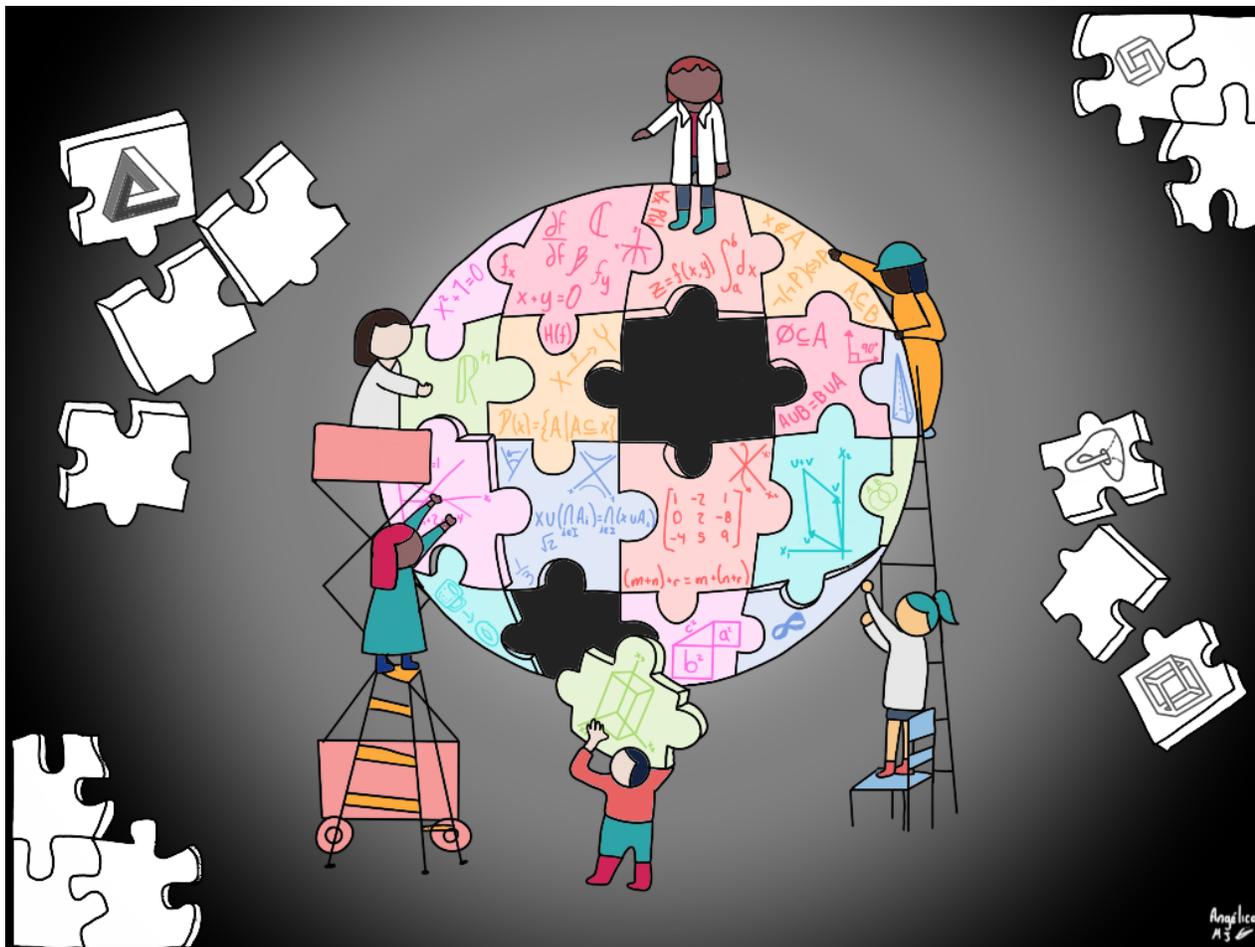


mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas

www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/

e-ISSN 2007-7874



Dibujo: Angélica Martínez Juárez

Revista de divulgación e investigación del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, dedicada a promover las ideas y la creación de todos aquellos interesados en el quehacer matemático.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Directorio

José Antonio de los Reyes Heredia
Rector General

Verónica Medina Bañuelos
Rector Unidad Iztapalapa

Román Linares Romero
Director de la División de Ciencias Básicas
e Ingeniería.
UAM-Iztapalapa

Patricia Saavedra Barrera
Jefa del Departamento de Matemáticas.
UAM-Iztapalapa

Coordinador Editorial

Mario Pineda Ruelas
mpr@xanum.uam.mx

Comité Editorial

Elsa Baez Juárez
ebaez@cua.uam.mx

Shirley Bromberg Silverstein
stbsster@gmail.com

Judith Campos Cordero
judith@ciencias.unam.mx

Martín Celli Siboni,
celli@xanum.uam.mx

Pedro L. del Ángel Rodríguez
luis@cimat.mx

Begoña Fernández
bff@ciencias.unam.mx

Silvia Gavito Ticozzi
sgt@correo.azc.uam.mx

Gustavo Izquierdo Buenrostro
iubg@xanum.uam.mx

L. Héctor Juárez Valencia
hect@xanum.uam.mx

Jorge A. León Vázquez
jleon@ctrl.cinvestav.mx

Roberto Quezada Batalla
roqb@xanum.uam.mx

Edith Corina Sáenz Valadez
ecsv@ciencias.unam.mx

Martha L. Shaid Sandoval Miranda
marlisha@gmail.com

Ekaterina Todorova
todorova@cimat.mx

Luis Miguel Villegas Silva
villegas63@gmail.com

Editor web Pedro Iván Blanco Boa
ivanblc@gmail.com

Diseño logo Michael Rivera Arce

Dibujo portada Angélica Martínez Juárez

MIXBA'AL. Vol. 13, No. 1, agosto de 2022 a septiembre de 2023, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: [http://mat.izt.uam.mx/mat/](http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revistamixba-al/)

Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2010-072017382600-203, ISSN: 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Edificio AT, tercer piso, Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186, Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 22 de agosto de 2022. Tamaño del archivo 15.5 MB. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación. Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana. Contacto: Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Tel: (01) 55 5804 4654.

CONTENIDO

- 7 *Semblanza de José Antonio García Rodríguez*
Martha Álvarez Ramírez y Patricia Saavedra Barrera
- 11 *Introducción a las ecuaciones diferenciales tropicales*
Cristhian Garay López
- 29 *Patrones de flujo en cajas de base cuadrada al inicio de la convección de Rayleigh-Bénard*
Javier Pérez y Joaquín Delgado Fernández
- 47 *Una mirada a la geometría en Galicia a través de la vida y obra de matemáticos pioneros*
Adriana Dapena Janeiro, María José Souto-Salorio, Ana D. Tarrío Tobar
- 57 *Sobre las lógicas abstractas*
Edgar A. Valenzuela Nuncio
- 65 *Desolvidando a Nina Bari*
Carmen Martínez Adame
- 79 *Una generalización de la transformada de Fourier discreta*
Karla Adriana Ortega Gallegos
- 93 *Suma de una serie geométrica mediante sumas telescópicas*
Ángel Plaza de la Hoz
- 95 *Diagonalización de matrices circulantes por medio de la transformada discreta de Fourier sobre campos finitos*
Horacio Tapia-Recillas, Armando Valenzuela-Valenzuela
- 99 *Secciones cónicas, una aproximación analítica*
Gabriel López Garza
- 109 *Introducción a los sistemas dinámicos en variedades diferenciables*
Carla V. Valencia Negrete

A LOS AUTORES

Mixba'al, Revista Metropolitana de Matemáticas, es una revista de publicación anual de divulgación e investigación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana. Los artículos sometidos, pueden ser trabajos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas, por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos; artículos panorámicos sobre un área de investigación; la presentación distinta de algún tema vinculado a la docencia; aplicaciones o aspectos lúdicos de las mismas, entre otros.

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español impecable, aunque eventualmente podrán aceptarse trabajos en inglés. Éstos deben ser enviados a cualquiera de los editores en formato pdf y en un plazo no mayor a dos semanas, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista; es caso que así sea, se enviará a arbitraje.

Cuando un trabajo reciba arbitraje favorable, se le comunicará al autor y en un plazo no mayor a tres semanas, deberá reenviarlo al editor responsable, atendiendo las sugerencias del árbitro y en el formato oficial que la revista le proporcionará. El trabajo debe estar organizado de la siguiente forma: título, resumen no mayor a 100 palabras, clasificación de la AMS 2020, palabras clave, introducción y en seguida el desarrollo del mismo. El formato oficial de la revista es recomendable.



SEMBLANZA DE JOSÉ ANTONIO GARCÍA RODRÍGUEZ

MARTHA ÁLVAREZ RAMÍREZ Y PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

José Antonio García Rodríguez ingresó al Área de Ecuaciones Diferenciales y Geometría del Departamento de Matemáticas de la UAM Iztapalapa en julio de 1998. Durante 24 años trabajó en el Departamento como Profesor-Investigador, asumiendo en varias ocasiones, con profesionalismo e institucionalidad, responsabilidades académico-administrativas. Su desempeño como profesor e investigador le ganaron el respeto de colegas y alumnos. La muerte después de una larga batalla contra el cáncer, cortó su etapa más productiva. Estaba lleno de proyectos: trabajos de investigación que dejó inconclusos y un libro de texto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que alcanzó a terminar y que en fecha próxima aparecerá publicado en la Colección de Libros de Texto de CBI. Esta breve semblanza, recordando su vida y obra, es un merecido homenaje a un colega que contribuyó en forma decidida al fortalecimiento de nuestro departamento.

José Antonio nació en la Ciudad de México el 17 de enero de 1963. Al año su familia se mudó a la Ciudad de Puebla donde su padre abrió un negocio de tenería para la industria del calzado. Sus padres tuvieron cinco hijos: primero tres hombres y después dos mujeres. Fue admitido a la BUAP para estudiar la licenciatura en Ingeniería Eléctrica, pero pronto se dio cuenta que esa no era su vocación y solicitó su cambio a la Facultad de Ciencias para estudiar matemáticas. Se graduó con una tesis en álgebra: Problemas diversos en la teoría de grupos y anillos, en marzo de 1987. Mientras estudiaba su licenciatura, trabajó como profesor de asignatura en la preparatoria de la BUAP. En 1986 ingresó a la Maestría en Ciencias Matemáticas del CINVESTAV de la cual se graduó en 1988 por exámenes generales. En los siguientes años trabajó como profesor en el CCH Vallejo y posteriormente, como profesor de asignatura en la BUAP. Cabe señalar que durante su estancia en la BUAP participó activamente en los movimientos estudiantiles que agitaron a dicha universidad después de la expulsión por la fuerza del Lic. Luis Rivera Terrazas y que continuaron durante los rectorados de Alfonso Vélez Pliego y Samuel Malpica Uribe. En este periodo contrae matrimonio con Beatriz Linerio con quien procreó dos hijas: Ruth, artista visual y Araceli, estudiante de economía.

En 1993 inició sus estudios de doctorado en la prestigiosa Universidad de Northwestern en Illinois con una beca Fullbright-García Robles. Después del error de diciembre del 94, la beca disminuyó por lo que entró a trabajar como asistente de profesor en esta institución hasta su graduación en 1998. Al ingresar al doctorado ya se había inclinado hacia el estudio de los sistemas dinámicos por lo que escogió como director de tesis al Prof. Clark Robinson, reconocido investigador en sistemas dinámicos. Su tesis doctoral lleva por título: Arnold Diffusion near elliptic-hyperbolic fixed points.

Al regresar a México, se incorporó a la planta de profesores del Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa. En 1999 ingresó como Candidato al Sistema Nacional de Investigadores y en 2013 fue admitido como Investigador Nivel I, nombramiento que conservó hasta su muerte.

José Antonio impartió cerca de 95 cursos en la UAM. Además de los cursos básicos de cálculo, ecuaciones diferenciales ordinarias y álgebra lineal, impartió cursos avanzados en ecuaciones diferenciales, geometría diferencial, cálculo de variaciones, modelación matemática y simulación tanto en la licenciatura como en el posgrado. Dirigió 5 proyectos terminales en la Licenciatura en Matemáticas y dos tesis en la Maestría en Ciencias Matemáticas de la UAM. Su último graduado de maestría,

Roberto Albarrán García, presentó su examen de grado en 2021 y José Antonio tenía el proyecto de dirigirle el doctorado. Entre el material docente que escribió están unas notas del curso de Simulación llamadas Taller de introducción a la simulación y el libro de texto en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que será de gran utilidad en la enseñanza de los cursos obligatorios de Ecuaciones Diferenciales I y II como del curso optativo de Geometría Diferencial de la licenciatura.

Su compromiso decidido con la docencia se mostró en varias ocasiones al participar primero como Coordinador de la Licenciatura en Matemáticas de febrero del 2007 a septiembre del 2010; cabe mencionar que durante este periodo la licenciatura obtuvo su certificación por el CIEES lo que implicó dedicar muchas horas a recopilar las evidencias del trabajo realizado en los últimos cinco años. Posteriormente, fue asesor del Comité de Licenciatura que se encargó en 2018 de la acreditación de la licenciatura por el CAPEM. Participó activamente en la modificación del Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas que se llevó a cabo en 2013 y que implicó reelaborar los contenidos sintéticos de varias UEA relacionadas con geometría, ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.

La cultura matemática de José Antonio era muy amplia, lo cual se vio reflejada en su investigación y docencia. Su interés principal estaba en varios aspectos de los sistemas dinámicos, tales como estabilidad estructural, aplicaciones de la dinámica simbólica y la teoría de la variedad estable en la mecánica celeste y los sistemas hamiltonianos, atractores caóticos y la estructura de los sistemas hiperbólicos. Sin lugar a dudas, su mayor contribución a las matemáticas fue la introducción del llamado «scattering map» de una variedad invariante normalmente hiperbólica con variedades invariantes estables e inestables que se cruzan a lo largo de una variedad homoclínica. Este fue el resultado de su tesis doctoral, y hoy día es una herramienta para estudiar el problema de difusión de Arnold en sistemas hamiltonianos.

Su particular razonamiento matemático y conocimiento acerca de estructuras simplécticas, le permitieron tener importantes contribuciones en el estudio del problema de n cuerpos. Sobre este tema publicó cuatro artículos como único autor, y otros más en coautoría con E. Pérez Chavela, A. Susin, J. Palacián, P. Yanguas, M. Álvarez Ramírez, J. Meléndez y J. G. Reyes.

En el tema de bifurcaciones y órbitas periódicas, José Antonio tuvo colaboración con J. Llibre, J. M. Cors, M. Corbera, M. Álvarez Ramírez, J. Meléndez. Por otro lado, sus habilidades matemáticas destacadas en el cómputo científico le llevaron a tener colaboración con E. Gordienko y J. Ruiz de Chávez, con quienes publicó tres artículos acerca de la estabilidad de procesos estocásticos.

En cuanto a difusión, además de publicar sus artículos de investigación en revistas de prestigio internacional y participar en varios congresos internacionales y nacionales, escribió algunos artículos de divulgación. *El movimiento oscilatorio* que apareció en el Número 90 de la Revista Contactos, en coautoría con Martha Álvarez. En la Revista Miscelánea Matemática de la SMM se publicaron dos artículos: *La geometría y la mecánica de Pinball* y *Albert y la mecánica celeste* en los volúmenes 36 y 45, respectivamente. Por último, *La pregunta que Poincaré no pudo contestar* apareció como capítulo del libro: *Henry Poincaré y David Hilbert : los últimos universalistas y los fundamentos de la física matemática moderna*, publicado por la UAM en 2016.

Su participación universitaria fue constante a lo largo de su estadía en la UAM: en dos ocasiones fue Jefe del área de EDO y Geometría, en 2004 al 2006 y del 2015 al 2019; Representante del Departamento de Matemáticas ante el Consejo Divisional del 2001 al 2002 y como integrante de la Dictaminadora Divisional de CBI del 2003 al 2004. Cabe señalar que participó en varias ocasiones en el Comité de Selección de Becarios del Programa Fullbright-García Robles, en los Comités de Evaluación de Estancias Postdoctorales del CONACYT y en el Comité de Evaluación de PRODEP.

Toño, como lo llamaban sus colegas y amigos, era una persona alegre, bromista, de talante amable y tranquilo. Sus familiares y amigos lo describen como un optimista objetivo, honesto y comprometido con las causas sociales. Le gustaban los niños;

con gusto jugaba con ellos y les platicaba cuentos. Le encantaba andar en bicicleta. Durante su estancia en Estados Unidos se trasladaba a la universidad por este medio sin importar la lluvia o la nieve. Continuó con esta afición en México, los domingos de cada mes, cuando cierran la circulación de Churubusco a los autos, recorría esta vía en compañía de sus hijas. Era cinéfilo y desde niño le gustaba leer temas de historia y política. Era muy agradable conversar con él porque estaba abierto a escuchar otros puntos de vista. ¡Nos pesará su ausencia tanto a sus colegas como a sus alumnos!



INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES TROPICALES

CRISTHIAN GARAY LÓPEZ

RESUMEN. Presentamos una introducción a la teoría de las ecuaciones diferenciales tropicales y explicamos cómo estas se pueden aplicar de manera concreta a problemas de sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales algebraicas.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo pretende ser una excursión guiada al formalismo y filosofía detrás de las ecuaciones diferenciales tropicales, con el propósito de presentar una versión del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical como aparece en [3]. Este resultado abre la puerta a aplicaciones a la teoría de (soluciones en series de potencias de) ecuaciones diferenciales (algebraicas) clásicas, lo cuál justifica la importancia de un desarrollo más amplio de esta teoría.

Como excursión guiada, se enfatiza la presentación de las ideas para que sea accesible a un público amplio, digamos, para estudiantes a partir del último año de la licenciatura en matemáticas o carreras afines que sepan rudimentos de estructuras algebraicas y de ecuaciones diferenciales. El lector interesado en un primer acercamiento más riguroso y general al estado del arte de este tema puede consultar [2]. La forma en la que lo presentamos es mediante ejercicios básicos esparcidos a lo largo del documento, que aunque no son esenciales para llenar huecos en la exposición, creemos que ayudan a la comprensión y apreciación de los conceptos.

Más allá de las posibles aplicaciones ofrecidas por el teorema fundamental, creemos que esta teoría representa un buen ejemplo de aplicación de los semianillos (conmutativos con identidad) y de las valuaciones generalizadas. Estos son básicamente los dos pilares sobre los que se basa la teoría, y se pueden ver como extensiones naturales de sus contrapartes usuales, a saber, los anillos conmutativos y las valuaciones de Krull.

El presente trabajo está dividido de la siguiente manera: en la sección 2 presentamos la motivación de la teoría de las ecuaciones diferenciales tropicales. En la sección 3 introducimos el concepto de semianillo como objeto algebraico rector de la teoría, ya que este describe de manera unificada tanto el marco clásico como el tropical. Los objetos relevantes son los polinomios diferenciales con coeficientes en un semianillo de series de potencias formales y sus soluciones en series de potencias.

En la sección 4, vemos como los conceptos introducidos en la sección anterior interactúan por medio de los mapeos de tropicalización, los cuales permiten describir una correspondencia entre soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales clásicas con sus contrapartes tropicales. Finalmente, en la sección 5, discutiremos otros caminos y conceptos complementarios, como el de seminorma no arquimedea, el cual es una generalización reciente del concepto de valuación de Krull o de seminorma de anillo (podemos decir que es una valuación que toma valores en un semianillo idempotente y que no necesariamente es multiplicativa).

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13N99, 14T10, 13P15, 52B20.

Palabras clave. geometría algebraica diferencial, geometría tropical, series de potencias, ecuaciones diferenciales algebraicas, poliedros de Newton.

2. MOTIVACIÓN

Contrariamente a la Matemática, sin adjetivos, la Matemática *tropical* no existe como tal; lo que tenemos son aplicaciones, o métodos tropicales aplicados a la Matemática *clásica*. En esencia, existen dos mundos paralelos: el clásico y el tropical, y el segundo está frecuentemente subordinado al primero. En esta sección vamos a explicar esto.

El computólogo brasileño Imre Simon fue de los primeros en estudiar problemas de matemáticas aplicadas usando cierto tipo de estructuras algebraicas, cuyo representante más conocido (probablemente) es el siguiente: $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot, -\infty, 0)$, donde $a \odot b := a + b$ y $a \oplus b := \max\{a, b\}$ con respecto al orden usual en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Estos se nombraron como semianillos max-plus, puesto que \mathbb{T} es muy cercano al concepto de anillo con estas operaciones, o con el galicismo semianillos *tropicales*, porque Simon es Brasileño, que es tropical a ojos de los franceses. Esta historia se puede consultar en [10].

Una vez que el origen del nombre ha sido aclarado, el lector se podrá convencer sin mucho esfuerzo que varios de los conceptos básicos del álgebra conmutativa se pueden formular sobre \mathbb{T} de manera análoga al caso de anillos, por ejemplo, un polinomio tropical (o con coeficientes en \mathbb{T}) es una suma de la forma

$$p(x) = a_0 \oplus a_1 \odot x \oplus \cdots \oplus a_d \odot x^{\odot d}, \quad a_0, \dots, a_d \in \mathbb{T}.$$

De la misma manera, podemos definir módulos tropicales (o \mathbb{T} -módulos), series de potencias tropicales, etc. Inclusive conceptos más atrevidos fuera del álgebra conmutativa, como curvas algebraicas tropicales planas (conjuntos de *ceros* en \mathbb{T}^2 de polinomios tropicales en dos variables), o como será el caso de este artículo, soluciones de ecuaciones diferenciales tropicales (los *ceros* de polinomios diferenciales tropicales).

En este contexto, cuando hablamos de un objeto matemático, tendremos dos tipos: clásicos o usuales, y nuevos o tropicales, y *tropicalizar* es viajar del mundo clásico al tropical, con el fin de analizar un problema desde otra perspectiva, frecuentemente con el fin de entenderlo mejor o de resolverlo. Una vez tropicalizado, la forma del problema cambia, pero algunos de sus aspectos fundamentales se conservan. O quizá el problema sea tan complicado que solo queramos entender mejor algunos aspectos de él. Este último es el caso de las soluciones de ecuaciones diferenciales. A continuación daremos un ejemplo de la aplicación concreta de esta metodología.

2.1. El teorema de la correspondencia de Mikhalkin. Los problemas de conteo o *combinatorios*¹ son propensos a ser transformados, y uno de los ejemplos más exitosos (sino es que el más) de tropicalización de un problema fue dado por Grigory Mikhalkin [9] para contar curvas algebraicas. Recordemos que una curva algebraica de grado $d \geq 1$ en el plano proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo de grado d en las variables x, y, z .

Problema 1. Dados dos números naturales $d \geq 1$, $0 \leq g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ y \mathcal{P} una configuración de $3d + g - 1$ puntos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, contar cuántas curvas algebraicas de grado d (y género g) pasan por \mathcal{P} .

Este número no depende² de \mathcal{P} , por lo que se puede denotar como $N(d, g)$.

Ejemplo 1. Este problema es una generalización de nociones bien conocidas de geometría. Por ejemplo, si $d = 1$, entonces $g = 0$, y \mathcal{P} consta de 2 puntos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, luego $N(1, 0) = 1$, pues por dos puntos en el plano pasa una única línea.

¹Entendiendo combinatoria como el dominio de lo discreto.

²Siempre y cuando la configuración sea genérica.

Elegimos este problema por varias razones: tiene una larga historia, es difícil de resolver (aunque no es difícil de formular), y básicamente fue el trabajo que puso lo tropical en el mapa de la matemática mundial, o al menos de la geometría algebraica. Mikhalkin lo resolvió, pero no contando curvas algebraicas de grado d –lo cual es difícil– sino de la siguiente manera:

1. primero notó que había un problema tropical análogo: dada una configuración \mathcal{Q} de $3d + g - 1$ puntos en el plano proyectivo tropical \mathbb{TP}^2 , podemos calcular el número $N^{\text{trop}}(d, g, \mathcal{Q})$ de curvas tropicales de grado d (y género g) que pasan por \mathcal{Q} , digamos que son $C_1, \dots, C_{N^{\text{trop}}(d, g, \mathcal{Q})}$,
2. después vio que el problema original se podía tropicalizar, lo que significa que si $D_1, \dots, D_{N(d, g)}$ son las curvas que pasan por la configuración original \mathcal{P} y si $\mathcal{Q} = \text{trop}(\mathcal{P})$ es la tropicalización de \mathcal{P} , entonces $\{\text{trop}(D_j) : j = 1, \dots, N(d, g)\} = \{C_i : i = 1, \dots, N^{\text{trop}}(d, g, \mathcal{Q})\}$,
3. defines la multiplicidad $\mu(C_i)$ de C_i como el número de curvas D_j que se tropicaliza en C_i . Luego, el problema sale por definición, pues $N(d, g)$ es la suma de las multiplicidades $\mu(C_1) + \dots + \mu(C_{N^{\text{trop}}(d, g, \mathcal{Q})})$.

Aunque este problema ya estaba resuelto, este método tiene dos ventajas: primero, el mundo tropical es independiente del mundo algebraico, es decir, podemos comenzar directamente eligiendo una configuración tropical \mathcal{Q} ventajosamente, y segundo, las multiplicidades de las curvas tropicales se calculan combinatoriamente, –a diferencia de recursivamente, como los métodos disponibles anteriormente–.

TEOREMA 1 (El teorema de la correspondencia de Mikhalkin). *El número $N(d, g)$ se puede calcular tropicalmente.*

Se llama teorema de la correspondencia porque cada una de las curvas algebraicas D_j que nos interesan se envía en una de las curvas tropicales C_i ; básicamente queremos usar la combinatoria para resolver problemas clásicos, como el anterior. Es difícil hacerle justicia a un resultado tan bello en un espacio tan pequeño, pero se puede consultar [8, Section 1.7], o el artículo original [9] para saber más.

Después del teorema de la correspondencia de Mikhalkin, el punto fuerte de la aplicación de métodos tropicales a problemas clásicos fue la obtención de resultados tipo teorema de correspondencia. El propósito de este artículo es mostrar que el teorema fundamental (Teorema 14) se puede ver como un caso particular de teorema de correspondencia para el caso de soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales.

2.2. Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales. Está de más decir que las ecuaciones diferenciales siempre han sido un área importantísima no solo de las matemáticas tanto puras como aplicadas, sino también de casi cualquier otra rama del conocimiento humano. También está de más decir que resolverlas es bastante complicado, y que dentro de los métodos de solución particularmente tratables está el de proponer soluciones en series de potencias formales.

Concretamente, consideraremos K un campo de característica cero (podemos suponer $K = \mathbb{C}$) y relaciones *algebraicas* con coeficientes en el anillo $K[[t, u]]$ de series de potencias formales en las variables t, u , de tipo

$$(1) \quad P(t, u; x, x_t, x_u, x_{tu} \dots, y, y_t, y_u, y_{tu}, \dots).$$

Una ecuación diferencial clásica es el enunciado $P = 0$, y buscamos parejas $\varphi(t, u)$, $\psi(t, u) \in K[[t, u]]$ de manera que al hacer la sustitución $x = \varphi, y = \psi$ en (1), la siguiente expresión

$$(2) \quad P|_{x=\varphi, y=\psi} := P(t, u; \varphi, \varphi_t, \varphi_u, \varphi_{tu}, \dots, \psi, \psi_t, \psi_u, \psi_{tu}, \dots) = 0$$

sea verdadera, donde $\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\psi_{tu} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial u}$, etc. Insistimos en que las relaciones (1) deben de ser algebraicas, por lo que no permitimos expresiones que involucren cosas como raíces cuadas, normas o valores absolutos, o funciones trigonométricas.

Entonces lo que hacemos es considerar expansiones $\varphi(t, u) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} t^i u^j$, $\psi(t, u) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} b_{i,j} t^i u^j$ con $a_{i,j}, b_{i,j} \in K$, las sustituimos en (2) para obtener una serie $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} f_{i,j}(\{a_{m,n}, b_{m,n}\}) t^i u^j = 0$, y luego resolvemos el sistema infinito de ecuaciones algebraicas $\{f_{i,j}(\{a_{m,n}, b_{m,n}\}) = 0 : (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$ para los vectores infinitos de coeficientes $(a_{m,n}), (b_{m,n}) \in K^{\mathbb{N}^2}$.

Ejemplo 2. Sea $P(t; x, x') = x - x'$. Al proponer $\varphi(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i t^i$ y hacer la substitución $x = \varphi$, obtenemos $P|_{x=\varphi} = \varphi - \varphi' = \sum_{i \geq 1} (a_{i-1} - i a_i) t^{i-1} = 0$, lo que da $\{a_i = \frac{a_{i-1}}{i} : i \geq 1\}$, y finalmente $\varphi(t) = \varphi(t, a_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_0}{i!} t^i$, $a_0 \in K$.

Ahora consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas $\{P_i = 0\}_i$ con coeficientes en $K[[t, u]]$ como en (1). Una cuestión muy importante, pero claramente muy difícil, es la siguiente:

Problema 2. ¿Qué se puede decir del conjunto de todas las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ que satisfacen el sistema $\{P_i = 0\}_i$?

Luego, no estamos interesados ni en hallar soluciones concretas de estos sistemas ni en interpretarlas, contrariamente a lo que ocurre comúnmente en Física u otras ciencias; más bien nos interesan las propiedades de los conjuntos de soluciones. Hasta aquí llega el repaso de todo lo que necesitamos saber de ecuaciones diferenciales clásicas.

A inicios de 2015, Dima Grigoriev introdujo en [7] el concepto de ecuación diferencial tropical. Él ya había estudiado previamente la estructura de las soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales algebraicas, y se preguntó si había un *teorema de correspondencia* similar al de la sección 2.1 entre las soluciones de sus ecuaciones diferenciales tropicales y las soluciones de un sistema clásico. Por lo tanto, el objetivo inicial de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales era aplicarla al estudio del conjunto de soluciones en series de potencias de sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales.

El mismo año se probó que dicha correspondencia existía para el caso ordinario [1], y después para el caso parcial en [3]. A partir de ahora, nos dedicaremos a explicar esta correspondencia, la cual se puede consultar en el Teorema 14.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES EN UN SEMI ANILLO

En esta parte, asumiremos que el lector tiene conocimientos básicos de estructuras algebraicas. En particular todas nuestras estructuras serán conmutativas y con identidad, por lo que procuraremos no estarlo repitiendo.

Como ya comentamos, los semianillos ofrecen un marco algebraico capaz de describir la teoría de ecuaciones diferenciales tanto tropical como la clásica de la sección 2.2. Por lo tanto, en un intento de poner ambos mundos al mismo nivel, los introduciremos como casos particulares de la teoría de semianillos. El lector que quiera saber más sobre esta estructura algebraica, puede consultar [6].

Los semianillos conmutativos con identidad son 5-tuples $S = (S, +, \times, 0, 1)$ muy comunes en la naturaleza matemática, donde cada símbolo representa lo que el lector tiene en mente. De entrada cualquier anillo conmutativo con identidad es un semianillo, pero la clase de semianillos es estrictamente más grande que la de anillos; por ejemplo, los números naturales $S = \mathbb{N}$ equipados con la suma y el producto usuales, o el conjunto potencia $S = \mathcal{P}(X)$ de un conjunto $X \neq \emptyset$, equipado con la unión y la intersección como suma y producto, respectivamente.

Ejercicio 1. Verificar que lo único que le falta a los ejemplos anteriores para ser anillos es que la ecuación $a + b = 0$ a veces no tiene solución en S .

Pretenderemos que un semianillo S es un anillo en el que no siempre nos es posible hacer restas, o mejor aún: que un anillo es un semianillo en el que podemos restar. En un curso *clásico* de álgebra abstracta probablemente se nos diga que no es bueno trabajar en una estructura S en el que las ecuaciones del Ejercicio 1 no tengan solución en S , después de todo hemos estado acostumbrados a trabajar con grupos, que son estructuras algebraicas donde todo elemento es invertible: por ejemplo las simetrías de figuras geométricas bajo la composición, el grupo de Galois de una extensión de campos, o la construcción K de Grothendieck, la cual le asocia a todo monoide un grupo (de manera universal).

El hecho de no tener inversos aditivos a veces puede ser remediado agregándolos artificialmente –como cuando pasamos de \mathbb{N} a \mathbb{Z} .– Sin embargo, estaremos interesados en un cierto tipo de semianillos en los que esto no tiene remedio, y de los cuales $\mathcal{P}(X)$ es un ejemplo.

Ejercicio 2 (No se le pueden añadir inversos a $(\mathcal{P}(X), \cup)$). Probar que el único homomorfismo de semigrupos $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset) \rightarrow (G, +, 0)$ con G un grupo, es el homomorfismo 0.

En este trabajo, nuestro ejemplo principal de semianillo será el siguiente.

Definición 2. El *semianillo booleano* \mathbb{B} es el conjunto ordenado $\{0 < 1\}$ con la suma $a + b = \max\{a, b\}$ y el producto de toda la vida.

Al semigrupo $(\mathbb{B}, +, 0)$ tampoco se le pueden añadir inversos (se prueba como en el Ejercicio 2). Si seguimos con la idea de que esto es *problemático*, entonces la moraleja es que a veces se pueden *remediar los problemas*, y a veces no. Sin embargo nosotros estaremos contentos con estos fenómenos porque los veremos como oportunidades de acceder a nuevos mundos sin alejarnos tanto del contexto usual; después de todo, dentro de los semianillos se encuentran los anillos.

El objeto principal de estudio de esta sección serán las soluciones en series de potencias (formales) de ecuaciones diferenciales en dos mundos muy diferentes: el clásico y el tropical. Entonces, lo primero que vamos a hacer es construir las series de potencias con coeficientes en un semianillo.

Definición 3. Si S es un semianillo, definimos el semianillo $S[[t, u]]$ de *series de potencias formales* en las variables t, u como el conjunto de todas las expresiones

$$(3) \quad a = a(t, u) = \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} t^i u^j, \quad a_{i,j} \in S, \quad A \subset \mathbb{N}^2,$$

equipado con la suma y el producto de series usuales.

El conjunto soporte de la serie (3) es $\text{Supp}(a) := \{(i, j) \in A : a_{i,j} \neq 0\}$.

Vamos a equipar a $S[[t, u]]$ con tantas derivaciones (i.e. operador lineal que satisface la regla de Leibniz para la derivación de un producto) como variables: si a es de la forma (3), definimos

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sum_{(i,j) \in A} i a_{i,j} t^{i-1} u^j, \quad \frac{\partial a}{\partial u} = \sum_{(i,j) \in A} j a_{i,j} t^i u^{j-1},$$

donde $ia = \underbrace{a + \dots + a}_{i \text{ veces}}$ para $i \in \mathbb{N}$. Notemos que $\frac{\partial}{\partial t} \circ \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \circ \frac{\partial}{\partial t}$, por lo que

denotamos a esta composición en común como $\frac{\partial^2}{\partial t \partial u}$.

Ejercicio 3. Muestre que $(\mathbb{B}[[t, u]], +, \times, 0, 1)$ (donde \mathbb{B} es el semianillo booleano) es un semianillo conmutativo con identidad, y describa concretamente sus elementos.

Luego, muestre que $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} : \mathbb{B}[t, u] \rightarrow \mathbb{B}[t, u]$ son derivaciones y describa cómo actúan concretamente en los elementos de $\mathbb{B}[t, u]$.

Ya que tenemos algunas derivadas con que trabajar, introduzcamos ahora operadores diferenciales. El formalismo algebraico que utilizaremos es el de polinomios diferenciales, el cual se puede consultar en la Definición 8.

Definición 4. Un *monomio diferencial* con coeficientes en el semianillo $S[[t, u]]$ en las variables x, y es un producto finito de las variables $\{x_{(i,j)}, y_{(k,l)} : (i,j), (k,l) \in \mathbb{N}^2\}$, es decir, una expresión de la forma

$$(4) \quad ax_{I_1}^{m_{I_1}} \cdots x_{I_s}^{m_{I_s}} y_{J_1}^{m_{J_1}} \cdots y_{J_t}^{m_{J_t}}, \quad \text{con } a \in S[[t, u]], I_i, J_j \in \mathbb{N}^2, m_{I_i}, m_{J_j} \in \mathbb{N}.$$

Se supone que cada sub-índice $I = (i, j)$ que aparece en las variables x, y codifica el operador diferencial $\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial u^j}$, por lo que si $I_i = (a_i, b_i), J_j = (c_j, d_j)$, el monomio (4) es una forma abreviada de escribir el siguiente operador diferencial:

$$(5) \quad S[[t, u]] \times S[[t, u]] \rightarrow S[[t, u]] \\ (\varphi(t, u), \psi(t, u)) \mapsto a \prod_{i=1}^s \left(\frac{\partial^{a_i+b_i} \varphi(t, u)}{\partial t^{a_i} \partial u^{b_i}} \right)^{m_{I_i}} \prod_{j=1}^t \left(\frac{\partial^{c_j+d_j} \psi(t, u)}{\partial t^{c_j} \partial u^{d_j}} \right)^{m_{J_j}}.$$

Para ahorrar espacio, podemos escribir la sucesión $x_{I_1}^{m_{I_1}} \cdots x_{I_s}^{m_{I_s}}$ (respectivamente $y_{J_1}^{m_{J_1}} \cdots y_{J_t}^{m_{J_t}}$) como $x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_I}$ (respectivamente $y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m}_J}$) donde \mathbf{m}_I y \mathbf{m}_J son ciertas matrices con entradas en \mathbb{N} , como mencionamos el Ejercicio 4. Escribiremos $ax_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_I} y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m}_J} |_{x=\varphi, y=\psi}$ en vez de la forma desarrollada de la evaluación del operador a la derecha de (5).

Dado que una suma finita de monomios es un polinomio, una suma finita $P = a_1(t, u)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{I_1}} y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{J_1}} + \cdots + a_n(t, u)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{I_n}} y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{J_n}}$ de monomios diferenciales se llama un polinomio diferencial, y en este caso induce por linealidad un operador diferencial $P : S[[t, u]] \times S[[t, u]] \rightarrow S[[t, u]]$ que manda $(\varphi(t, u), \psi(t, u))$ en $P(\varphi, \psi)$, la suma de las evaluaciones $\sum_k a_k x_{\mathbf{I}_k}^{\mathbf{m}_{I_k}} y_{\mathbf{J}_k}^{\mathbf{m}_{J_k}} |_{x=\varphi, y=\psi}$.

Ejercicio 4. Sea S un semianillo y considere el siguiente polinomio diferencial:

$$P = a(t, u)x_{(1,0)}y_{(1,0)} + b(t, u)y_{(1,1)}^2 + c(t, u)x_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4.$$

Como indicamos anteriormente, cada monomio diferencial se puede codificar con una pareja de matrices $(\mathbf{m}_I, \mathbf{m}_J)$, por ejemplo, el tercero estaría inducido por la pareja $\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, 0 \right)$. Describa las parejas de matrices de los dos monomios restantes, y el operador diferencial determinado por P .

La ventaja de este acercamiento general es que el operador $P : S[[t, u]] \times S[[t, u]] \rightarrow S[[t, u]]$ inducido por un polinomio P es válido para series con coeficientes en cualquier semianillo S . A partir de ahora nos enfocaremos solamente en dos semianillos radicalmente diferentes, a saber \mathbb{B} y \mathbb{C} .

Definición 5. Si P es un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$, decimos que una pareja $(\varphi(t, u), \psi(t, u)) \in \mathbb{C}[[t, u]] \times \mathbb{C}[[t, u]]$ es *solución* de P si $P(\varphi, \psi) = 0$.

Ejercicio 5. Calcular todas las soluciones $\varphi = \sum_{(i,j)} a_{i,j} t^i u^j \in \mathbb{C}[[t, u]]$ del polinomio diferencial complejo $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ de una variable x .

Ahora viene una pequeña discusión filosófica. Si P es un polinomio diferencial con coeficientes $S[[t, u]]$, entonces el enunciado $P = 0$ es una ecuación (de igualdad) diferencial (pues P es un polinomio diferencial). Este enunciado tiene sentido para cualquier semianillo S , y podemos investigar la naturaleza del conjunto de parejas $(\varphi, \psi) \in S[[t, u]] \times S[[t, u]]$ que satisfacen la ecuación diferencial $P = 0$. Si acaso S es un anillo, recuperamos la noción usual de solución de una ecuación diferencial de la sección 2.2, sin embargo, veremos que esta definición no da buenos resultados en

el caso $S = \mathbb{B}$, por lo que tendremos que definir el concepto de solución de manera diferente.

Es por eso que la Definición 5 tiene un cambio sutil, ya que reemplazamos los conceptos de anillos de *ecuación diferencial* $P = 0$ y de *solución de* $P = 0$ por el de *solución del polinomio* P , evitando hacer mención a la condición $P = 0$. Por lo tanto, aunque el acercamiento por semianillos unifica ciertas cosas, otras deben de ser tratadas por separado.

3.1. Soluciones para polinomios diferenciales con coeficientes en \mathbb{B} . Recordemos que \mathbb{B} solo tiene dos elementos, y del Ejercicio 3 sabemos que los elementos de $\mathbb{B}[[t, u]]$ y las derivaciones son fáciles de describir, puesto que si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, entonces el operador $\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial u^n} : \mathbb{B}[[t, u]] \rightarrow \mathbb{B}[[t, u]]$ envía $a = \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j$ en $\frac{\partial^{m+n} a}{\partial t^m \partial u^n} = \sum_{(i,j) \in (A + (-m, -n))_{\geq (0,0)}} t^i u^j$. Así que derivar series booleanas es muy fácil: el operador $\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial u^n}$ actúa en los elementos $a \in \mathbb{B}[[t, u]]$ como operadores de desplazamiento por el vector entero $(-m, -n)$ en su soporte $\text{Supp}(a) \subset \mathbb{N}^2$. Ver Figura 1.

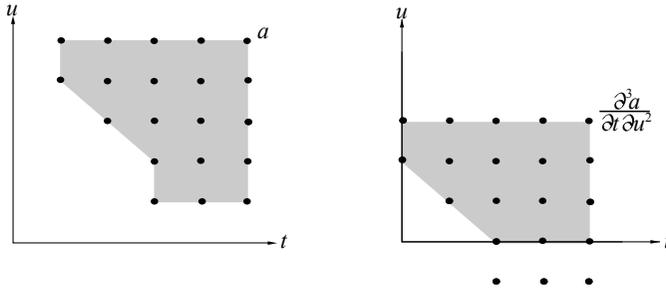


FIGURA 1. La serie booleana $a(t, u)$ identificada con su soporte y la acción del operador $\frac{\partial^3}{\partial t \partial u^2}$ en ella.

Ahora nos preguntamos,

Problema 3. Dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, ¿cuándo decimos que la pareja $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ es una solución de P ?

Veremos a continuación que aunque la definición usual $P(\varphi, \psi) = 0$ tiene sentido también en este caso, nos da resultados incompletos.

Ejercicio 6. Un semianillo S es idempotente si $a + a = a$ para todo $a \in S$. Mostrar que en un semianillo idempotente, si $\sum_i a_i = 0$, entonces $a_i = 0$ para todo i .

En el siguiente ejercicio nos damos cuenta de que como la estructura de semianillo es muy cercana a la de anillo, muchos de los conceptos de anillos *se transfieren* de manera natural a semianillos.

Ejercicio 7. Mostrar que $\mathbb{B}[[t, u]]$ es idempotente, y que no tiene divisores de cero, esto es, si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Sean $P = a_1(t, u)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_1}}y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_1}} + \dots + a_n(t, u)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_n}}y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_n}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ y $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$. Del Ejercicio 7, tenemos que $\mathbb{B}[[t, u]]$ es idempotente, por ende obtenemos que $P(\varphi, \psi) = 0$ si y solo si la evaluación de cada monomio $a_i(t, u)x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_i}}y_{\mathbf{J}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_i}}|_{x=\varphi, y=\psi}$ es 0, y por el mismo ejercicio sabemos que $\mathbb{B}[[t, u]]$ no tiene divisores de cero, por lo tanto deducimos que $x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_i}}|_{x=\varphi} = 0$ o que $y_{\mathbf{J}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_i}}|_{y=\psi} = 0$.

Luego $x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_i}} = x_{I_1}^{m_{I_1}} \cdots x_{I_s}^{m_{I_s}}$ con $I_j = (a_j, b_j)$, usamos la definición (5) para obtener $x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_i}}|_{x=\varphi} = \prod_j \left(\frac{\partial^{a_j+b_j} \varphi(t,u)}{\partial t^{a_j} \partial u^{b_j}} \right)^{m_{I_j}} = 0$, y esto sucede si $\frac{\partial^{a_j+b_j} \varphi(t,u)}{\partial t^{a_j} \partial u^{b_j}} = 0$ para algún $I_j = (a_j, b_j)$.

Ejercicio 8. Dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, formular las condiciones concretas sobre $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ para tener $P(\varphi, \psi) = 0$.

Al trabajar sobre semianillos idempotentes, frecuentemente encontramos fenómenos como los del Ejercicio 8, en el que la traducción literal de los conceptos clásicos no sirve de mucho, por lo que se tiene que encontrar un reemplazo adecuado a nuestros fines. Para formular *correctamente* el concepto de solución de un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, necesitaremos lo siguiente.

Definición 6. El *polígono de Newton* $\text{New}(A)$ de $A \subset \mathbb{N}^2$ es la envoltura convexa en \mathbb{R}^2 del conjunto

$$\{I + J \in \mathbb{N}^2 : I \in A \text{ y } J \in \mathbb{N}^2\}.$$

El conjunto $\text{Vert}(A)$ de vértices de A son los puntos extremos del polígono $\text{New}(A)$.

Luego $\text{New}(A)$ son todas las combinaciones convexas finitas de elementos de la forma $(i + m, j + n)$ con $(i, j) \in A$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Es un hecho básico de teoría de la convexidad que $\text{Vert}(A)$ siempre es un conjunto finito (cf. [5, Theorem 3.1.29]). Dada una serie booleana $\varphi = \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j$ con conjunto soporte A , decimos que el polinomio $\sum_{(i,j) \in \text{Vert}(A)} t^i u^j$ es el polinomio de vértices de φ y lo denotamos por $V(\varphi)$.

Ejemplo 3. El polinomio de vértices de la serie booleana $\varphi = tu^4 + t^2u^3 + t^3u^3 + t^4u$ es $V(\varphi) = tu^4 + t^4u$, de acuerdo a la Figura 2.

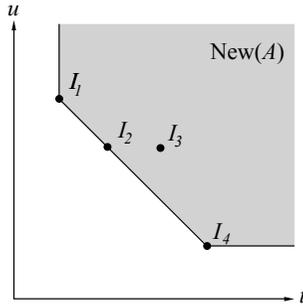


FIGURA 2. El conjunto soporte A de la serie $\varphi = tu^4 + t^2u^3 + t^3u^3 + t^4u$, su polígono de Newton $\text{New}(A)$, y su conjunto de vértices $\text{Vert}(A) = \{I_1, I_4\}$. Luego $V(\varphi) = tu^4 + t^4u$.

Con lo anterior podemos dar la definición de soluciones de polinomios diferenciales con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$.

Definición 7. Sea $P = a_1(t, u)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_1}}y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_1}} + \cdots + a_n(t, u)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_n}}y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_n}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$. Decimos que una pareja $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ es *solución* de P si cada monomio $t^i u^j$ del polinomio $V(P(\varphi, \psi))$ aparece en $V(a_i(t, u)x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_i}}y_{\mathbf{J}_i}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_i}}|_{x=\varphi, y=\psi})$ para al menos dos monomios diferentes de P .

Ejemplo 4. Retomemos el polinomio $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$ del Ejercicio 5. Ya que todos los coeficientes numéricos de las series $t, u, t^2 + u^3$ son 1, podemos interpretar a P también como un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$.

Vamos a probar que $\varphi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[[t, u]]$ es una solución de P según la Definición 7. Primero evaluamos cada monomio de P en $x = \varphi = t^2 + tu + u^3$:

$$tx_{(1,0)}|_{x=\varphi} = t \frac{\partial}{\partial t}(t^2 + tu + u^3) = t^2 + tu,$$

y de manera similar para los otros dos monomios. Así obtenemos el valor de P evaluado en φ :

$$P(\varphi) = (t^2 + tu) + (tu + u^3) + (t^2 + u^3) = t^2 + tu + u^3.$$

Luego, de la Figura 3b calculamos el conjunto de vértices $V(P(\varphi)) = V(t^2 + tu + u^3) = t^2 + tu + u^3$, y de la Figura 3a calculamos el conjunto de vértices de cada uno de los tres monomios de P evaluados en φ : $V(t^2 + tu) = t^2 + tu$, $V(tu + u^3) = tu + u^3$ y $V(t^2 + u^3) = t^2 + u^3$. Finalmente vemos que la condición de la Definición 7 se satisface.

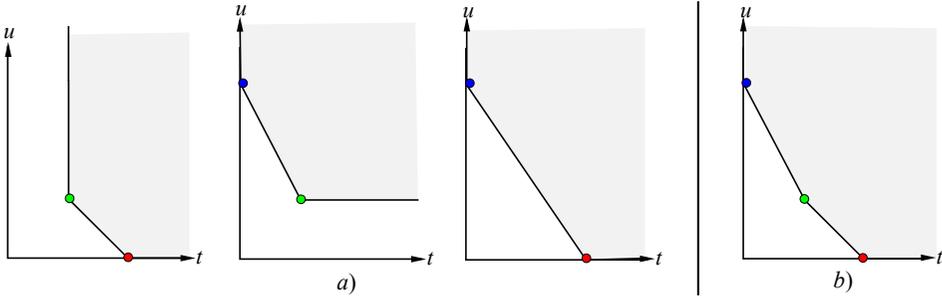


FIGURA 3. Polígonos de Newton junto con sus conjuntos de vértices para los elementos del Ejemplo 4: a) para cada uno de los tres monomios de P evaluados en φ ; y b) para $V(P(\varphi))$.

Observación 1. Aunque la Definición 7 es misteriosa, es importante notar que dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ y una pareja $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ (que a priori es un objeto infinito), solo es necesario verificar un número finito de condiciones para ver si (φ, ψ) es o no solución de P . En general, P impone un número finito de condiciones sobre el soporte de los elementos de su espacio de soluciones, como podemos ver en el Ejercicio 9.

Ejercicio 9. En el Ejemplo 4, mostramos que la serie $\varphi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[[t, u]]$ es una solución de $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$. Muestre usando la Definición 7 que el espacio de soluciones de P está descrito por el siguiente número finito de condiciones:

$$\left\{ \varphi = \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j : (1,0), (0,1), (0,2) \notin A, \text{ y } (2,0), (0,3) \in A \right\}.$$

Es claro que el fenómeno descrito en la Observación 1 no sucede para las soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales con coeficientes en un anillo. Por ejemplo, el polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ impone un conjunto infinito de ecuaciones sobre los coeficientes de los elementos $\varphi = \sum_{i,j} a_{i,j} t^i u^j \in \mathbb{C}[[t, u]]$ de su espacio de soluciones, los cuales incluyen $a_{i,i} = 0$ para todo $i \geq 1$, y $ia_{i,j} + ja_{i,j} = 0$ cada vez que $i, j \geq 1$, $i \neq j$. Volveremos sobre esto más tarde.

Ya hemos definido de manera separada el concepto de solución de un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$ y en $\mathbb{B}[[t, u]]$, y hemos visto que los formalismos obtenidos son bastante diferentes. Lo que haremos a continuación será conectar estos dos mundos con diversos mapeos de *tropicalización*, es decir asociarle a objetos definidos sobre \mathbb{C} ciertos objetos definidos sobre \mathbb{B} . Esto nos dará acceso a enunciados de comparación, y lo increíble será que ¡los soportes de las soluciones de ciertos sistemas sobre estos dos semianillos coinciden!

4. ¿PARA QUÉ SIRVEN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES TROPICALES?

Como dijimos al inicio, el objetivo inicial de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales tal y como se introdujo en la sección 3.1, era el de aplicarla al problema de encontrar soluciones en series de potencias formales para sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales. De hecho, para muchas personas, los desarrollos ofrecidos por los métodos tropicales son estériles si no se pueden aplicar a los problemas de la matemática clásica.

Concretamente, sea K un campo de característica cero y $\{P_i\}_i$ un conjunto de polinomios diferenciales con coeficientes en $K[[t, u]]$, como los que manejamos en la sección anterior para el caso $K = \mathbb{C}$. Recordemos que en el problema 2 nos preguntamos la naturaleza del conjunto de todas las parejas de series $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales $\{P_i = 0\}_i$.

Esto cae en la rama conocida como geometría algebraica (diferencial), puesto que nos interesa hallar las soluciones comunes de un sistema de polinomios (diferenciales).

En esta sección discutiremos algunos aspectos del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical, tal y como está en [3]. Esta es la parte más técnica de este trabajo, pues tiende el puente entre el mundo clásico y el tropical. Para poder hablar de cosas interesantes, en esta sección vamos a cambiar \mathbb{C} por un campo de característica cero K , y como no queremos dar falsas esperanzas, aunque complique las cosas, lo supondremos algebraicamente cerrado y no-numerable. Luego, campos como la cerradura algebraica de los números racionales \mathbb{Q}^{alg} , o el campo de los números reales \mathbb{R} , quedarán excluidos.

Definición 8. Sea S un semianillo. El *semianillo de polinomios diferenciales* con coeficientes en $S[[t, u]]$ y en dos variables diferenciales x, y es el siguiente semianillo de polinomios en infinitas variables:

$$(6) \quad S[[t, u]][x_{(i,j)}, y_{(k,l)} : (i, j), (k, l) \in \mathbb{N}^2]$$

Recordemos que los elementos de (6) son sumas finitas de monomios diferenciales como en (4). Para ahorrar espacio, vamos a denotar el semianillo (6) como $S[[t, u]][x, y]$, lo cual es un pequeño abuso de notación, pero lo corregiremos más adelante.

Sea $\Sigma \subset K[[t, u]][x, y]$ un conjunto arbitrario de polinomios diferenciales. Denotaremos por $\text{Sol}(\Sigma)$ el conjunto de las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ que sean solución común a todos los elementos $P \in \Sigma$, en el sentido de la Definición 5. El sueño sería poder describir el conjunto $\text{Sol}(\Sigma)$, pero dado que este problema es muy difícil³, nos contentaremos con poder decir algo –cualquier cosa– sobre él.

Para hacer esto, trasladaremos la discusión al mundo discreto al tropicalizar tanto nuestros polinomios diferenciales de Σ como las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ de las soluciones del sistema $\{\Sigma = 0\}$.

Definición 9. Si $\varphi = \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} t^i u^j$ es un elemento de $K[[t, u]]$ con conjunto soporte $\text{Supp}(\varphi) = A$, su *soporte booleano* es el elemento de $\mathbb{B}[[t, u]]$ definido por

$$\text{sp}(\varphi) := \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j.$$

Notemos que al pasar al contexto de objetos sobre \mathbb{B} estamos tropicalizando, ya que las series $\mathbb{B}[[t, u]]$ se pueden identificar efectivamente con su soporte, que son subconjuntos del conjunto discreto \mathbb{N}^2 .

Si P es un polinomio diferencial con coeficientes en $K[[t, u]]$, lo podemos transformar en un polinomio diferencial $\text{sp}(P)$ con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ al tomar el soporte booleano de los coeficientes de sus monomios diferenciales.

³De hecho es algorítmicamente imposible, según los trabajos de J. Denef y L. Lipschitz.

Definición 10. Sea $P = a_1(t, u)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_1}}y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_1}} + \cdots + a_n(t, u)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_n}}y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_n}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $K[[t, u]]$. Definimos su *soporte* como

$$\text{sp}(P) := \text{sp}(a_1)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_1}}y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_1}} + \cdots + \text{sp}(a_n)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_n}}y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_n}}.$$

Como se dice frecuentemente en el área, los objetos que acabamos de definir son *sombras combinatorias* de los objetos clásicos de los que provienen.

Ejemplo 5. En el Ejemplo 4, consideramos el polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$, y justificamos el hecho de que podíamos tratarlo como un polinomio con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ simplemente diciendo que las series $t, u, t^2 + u^3$ tenían coeficientes $\{0, 1\}$. Lo que en realidad hicimos fue tomar $\text{sp}(P) = \text{sp}(t)x_{(1,0)} + \text{sp}(u)x_{(0,1)} + \text{sp}(t^2 + u^3) = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$, y aunque P y $\text{sp}(P)$ se escriben igual, representan objetos distintos.

La primera relación que nos indica que vamos por el camino correcto es la siguiente.

Ejercicio 10. En el Ejercicio 5, se calcularon las soluciones $\varphi = \sum_{(i,j)} a_{i,j}t^i u^j \in \mathbb{C}[[t, u]]$ de $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$. Muestre que si φ es una solución de P , entonces la serie booleana $\text{sp}(\varphi)$ es una solución de $\text{sp}(P)$ en el sentido de la Definición 7.

Con el ejercicio anterior queremos motivar la validez del siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 11. Sea $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$. Si $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ es una solución de P , entonces $(\text{sp}(\varphi), \text{sp}(\psi)) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ es solución de $\text{sp}(P) \in \mathbb{B}[[t, u]]\{x, y\}$.

Demostración. Para probar esto necesitamos un poco más de herramientas que las que hemos introducido, pero trataremos de dar una idea de las partes esenciales. Un concepto clave es el de valuación, el cual se puede consultar en la sección 5.

Primero escribimos $P = a_1(t, u)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_1}}y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_1}} + \cdots + a_n(t, u)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_n}}y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_n}}$, $A_i = \text{Supp}(a_i)$ para $i = 1, \dots, n$, y $A = \text{Supp}(\varphi)$, $B = \text{Supp}(\psi)$, de manera que $\text{sp}(a_i) = \sum_{(i,j) \in A_i} t^i u^j$, $\text{sp}(\varphi) = \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j$ y $\text{sp}(\psi) = \sum_{(i,j) \in B} t^i u^j$.

Por definición, $\text{sp}(P) = \text{sp}(a_1)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_1}}y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_1}} + \cdots + \text{sp}(a_n)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_n}}y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_n}}$ es un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, y $(\text{sp}(\varphi), \text{sp}(\psi)) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ son un par de series booleanas, por lo que la siguiente evaluación tiene sentido :

$$(7) \quad \begin{aligned} \text{sp}(P)(\text{sp}(\varphi), \text{sp}(\psi)) &= \text{sp}(a_1)x_{\mathbf{I}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_1}}y_{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_1}}|_{x=\text{sp}(\varphi), y=\text{sp}(\psi)} + \cdots \\ &\quad + \text{sp}(a_n)x_{\mathbf{I}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}_n}}y_{\mathbf{J}_n}^{\mathbf{m}_{\mathbf{J}_n}}|_{x=\text{sp}(\varphi), y=\text{sp}(\psi)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la evaluación (7) es por definición una serie booleana en las variables t, u , y si C es su conjunto soporte, entonces podemos escribir

$$\text{sp}(P)(\text{sp}(\varphi), \text{sp}(\psi)) = \sum_{(i,j) \in C} t^i u^j = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j + \xi,$$

donde $V(\text{sp}(P)(\text{sp}(\varphi), \text{sp}(\psi))) = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j$ es el polinomio de vértices de la evaluación (7) y ξ tiene soporte $C \setminus \text{Vert}(C)$. De acuerdo a la Definición 7, tenemos que verificar que para cualquier monomio en $t^i u^j$ con $(i, j) \in \text{Vert}(C)$, existen al menos dos monomios diferentes en la expansión (7) que lo contienen en su respectivo polinomio de vértices. Claro, suponiendo que $P(\varphi, \psi) = 0$ se satisface.

Ahora notamos que si tenemos un monomio diferencial $x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}}}$ y una serie $\varphi \in K[[t, u]]$, entonces

$$(8) \quad \text{sp}(x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}}}|_{x=\varphi}) = x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_{\mathbf{I}}}|_{x=\text{sp}(\varphi)},$$

que quiere decir que, en este caso, las operación de tomar el soporte booleano y la operación de evaluar conmutan. Invitamos al lector a convencerse de (8), pero debe

de ser claro puesto que el campo K es de característica cero y los soportes son los mismos.

En general tenemos

$$(9) \quad \text{sp}(ax_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_I} y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m}_J} |_{x=\varphi, y=\psi}) \subseteq \text{sp}(a)x_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_I} y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m}_J} |_{x=\text{sp}(\varphi), y=\text{sp}(\psi)},$$

lo que quiere decir que el mapeo sp *no es multiplicativo*. Esto viene del hecho de que puede haber cancelaciones aditivas del lado izquierdo de (9), pero éstas no son reflejadas del lado derecho puesto que no hay inversos aditivos. Sin embargo, veremos que esto no afecta de ninguna manera el cálculo del polinomio de vértices que nos interesa, ¡por una maravillosa propiedad de unicidad de los vértices de la suma de dos politopos convexos que se halla escondida en el siguiente enunciado!

Hecho: sean $\varphi, \psi \in \mathbb{B}[[t, u]]$ con conjuntos soportes A y B respectivamente, y sea $\gamma = \varphi\psi$ su producto con conjunto soporte C . Si $(i_C, j_C) \in \mathbb{N}^2$ es un vértice de C , entonces existen únicos vértices (i_A, j_A) de A y (i_B, j_B) de B tales que $(i_C, j_C) = (i_A, j_A) + (i_B, j_B)$. Ver [4, Lemma 6].

En particular, esto quiere decir que el polinomio de vértices del lado derecho de (9) *tiene un único levantamiento* $p(t, u)$ en la evaluación $ax_{\mathbf{I}}^{\mathbf{m}_I} y_{\mathbf{J}}^{\mathbf{m}_J} |_{x=\varphi, y=\psi}$, ya que la unicidad de la expresión $(i_C, j_C) = (i_A, j_A) + (i_B, j_B)$ implica que no puede haber cancelaciones aditivas. Luego podemos escribir

$$a_i x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{I_i}} y_{\mathbf{J}_i}^{\mathbf{m}_{J_i}} |_{x=\varphi, y=\psi} = p_i(t, u) + \Xi_i,$$

donde $\text{sp}(p_i(t, u)) = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j$ es un polinomio que agrupa los *términos iniciales* (el levantamiento del polinomio de vértices), y Ξ_i es una serie con *términos de orden superior* (todo lo demás). Ahora tenemos

$$P(\varphi, \psi) = (p_1(t, u) + \Xi_1) + \cdots + (p_n(t, u) + \Xi_n) = 0,$$

y nos concentramos en los soportes de los elementos de la expresión anterior. Vemos que $\text{sp}(p_i(t, u))$ consiste de los *mínimos* de $\text{sp}(a_i)x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{I_i}} y_{\mathbf{J}_i}^{\mathbf{m}_{J_i}} |_{x=\text{sp}(\varphi), y=\text{sp}(\psi)}$, y los mínimos de la suma $\sum_i \text{sp}(a_i)x_{\mathbf{I}_i}^{\mathbf{m}_{I_i}} y_{\mathbf{J}_i}^{\mathbf{m}_{J_i}} |_{x=\text{sp}(\varphi), y=\text{sp}(\psi)}$ forman el polinomio de vértices $V(\text{sp}(P)(\text{sp}(\varphi), \text{sp}(\psi))) = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j$ de la evaluación (7).

Finalmente, dado que $P(\varphi, \psi) = 0$, entonces cada mínimo global debe de aparecer como mínimo local en al menos dos monomios de P para que los coeficientes puedan ser capaces de sumar 0, luego, como los mínimos locales (monomiales) sí pasan a mínimos locales en $\text{sp}(p)$, hemos deducido que éste último polinomio se anula en el punto indicado, de acuerdo a la Definición 7. \square

Por lo tanto, dado un polinomio diferencial $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$, ya vimos que los soportes booleanos de sus soluciones son soluciones de su polinomio diferencial soporte $\text{sp}(P)$. El siguiente paso es preguntarse :

¿Qué tanto difieren los conjuntos de soluciones de $\text{sp}(P)$, y de los soportes booleanos de las soluciones algebraicas de P del conjunto ? En general, un levantamiento de una solución (φ, ψ) de $\text{sp}(P)$ es una solución (Φ, Ψ) de P tal que $(\text{sp}(\Phi), \text{sp}(\Psi)) = (\varphi, \psi)$.

No es difícil ver que en general $\text{sp}(P)$ tiene soluciones *artificiales* (combinatorias), es decir, que no tienen un levantamiento.

Ejercicio 11 (Soluciones tropicales artificiales). Sea P el polinomio diferencial complejo del Ejemplo 5. Del Ejemplo 4 sabemos que $\psi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[[t, u]]$ es solución del polinomio booleano $\text{sp}(P)$. Muestre que ψ no tiene un levantamiento a una solución de P .

Ejercicio 12 (Soluciones tropicales artificiales, bis). Sea $P = x - x_1 \in \mathbb{C}[[t]]\{x\}$ el polinomio del Ejemplo 2. Muestre que el conjunto de soluciones de $\text{sp}(P)$ es

$$\left\{ a = \sum_i t^i \in \mathbb{B}[[t]] : 0, 1 \in \text{Supp}(a) \right\} \cup \{0\}.$$

Concluimos que tropicalizando nuestras ecuaciones, aparte de recuperar los soportes de las soluciones algebraicas obtenemos también soluciones artificiales. Entonces podemos preguntarnos: ¿qué utilidad tiene la teoría tropical para la teoría clásica? Es aquí donde entra el enunciado del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical, el cual dice :

dado un sistema $\Sigma \subset K[[t, u]][x, y]$, si es posible, usando métodos tropicales, calcular exactamente el conjunto de soportes de sus soluciones

$\{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) : \text{existe } (\varphi, \psi) \in \text{Sol}(\Sigma) \text{ con } \text{Supp}(\varphi) = A, \text{Supp}(\psi) = B\}$, a condición de que calculemos los conjuntos de soluciones de suficientes polinomios diferenciales tropicales asociados a Σ .

Esto es, bajo ciertas condiciones, las soluciones comunes de ciertos sistemas de polinomios diferenciales tropicales serán exactamente los soportes booleanos de soluciones de sistemas clásicos. Clarifiquemos esto.

4.1. El teorema fundamental. Notemos que $S[[t, u]] \subset S[[t, u]][x_{(i,j)}, y_{(k,l)}] : (i, j), (k, l) \in \mathbb{N}^2$, y por razones técnicas, necesitamos extender las derivadas $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}$ que ya tenemos en los elementos de $S[[t, u]]$ a derivadas de polinomios diferenciales.

Entonces, dado un polinomio diferencial P , queremos definir los polinomios diferenciales $\frac{\partial P}{\partial t}$ y $\frac{\partial P}{\partial u}$. Como $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}$ deben ser lineales, basta definir su acción en un monomio diferencial $a(t, u)x_{\mathbf{I}}^{m_{\mathbf{I}}}y_{\mathbf{J}}^{n_{\mathbf{J}}}$ como en (4), y finalmente como debe extender las derivadas de series que ya teníamos, y satisfacer la regla de Leibniz para la derivación de un producto, es suficiente definir su acción en las variables $x_{(i,j)}, y_{(k,l)}$. Los definimos como operadores de desplazamiento, concretamente:

$$\frac{\partial x_{(i,j)}}{\partial t} := x_{(i+1,j)} \quad \frac{\partial x_{(i,j)}}{\partial u} := x_{(i,j+1)},$$

y de manera similar para las $y_{(k,l)}$.

Ejemplo 6. Sea $P = ax_{(1,0)}y_{(1,0)} + by_{(1,1)}^2 + cx_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4$ el polinomio del Ejercicio 4. Calculemos $\frac{\partial P}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial a}{\partial t}x_{(1,0)}y_{(1,0)} + a\frac{\partial}{\partial t}(x_{(1,0)}y_{(1,0)}) + \frac{\partial b}{\partial t}y_{(1,1)}^2 + 2by_{(1,1)}y_{(2,1)} + \\ &+ \frac{\partial c}{\partial t}x_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4 + c\frac{\partial}{\partial t}(x_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4), \end{aligned}$$

y luego tenemos que desarrollar cada uno de los términos entre paréntesis, por ejemplo: $\frac{\partial}{\partial t}(x_{(1,0)}y_{(1,0)}) = x_{(1,0)}y_{(2,0)} + x_{(2,0)}y_{(1,0)}$, etc.

Ahora si ya podemos introducir el concepto más importante de esta sección. Es la pareja $(S[[t, u]][x_{(i,j)}, y_{(k,l)}], \{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}\})$ la que se denota tradicionalmente como $S[[t, u]][x, y]$.

Definición 12. Un ideal $G \subset K[[t, u]][x, y]$ es *diferencial* si $\frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial u} \in G$ cada vez que $P \in G$.

Ejercicio 13. Sea $P \in K[[t, u]][x, y]$. Muestre que el ideal (usual) $[P]$ generado por $\{\frac{\partial^{m+n}P}{\partial t^m \partial u^n} : (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ en $K[[t, u]][x, y]$ es un ideal diferencial, y que es el más pequeño que contiene a P .

Recordemos que dada una familia $\Sigma \subset K[[t, u]][x, y]$, denotamos por $\text{Sol}(\Sigma)$ el conjunto de las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ que son solución común a todos los elementos $P \in \Sigma$, en el sentido de la Definición 5. También existe el ideal diferencial $[\Sigma]$ generado por Σ (ver Ejercicio 13), y ambos sistemas tienen las mismas soluciones (ver Ejercicio 15). Insistimos en que hallar $\text{Sol}(\Sigma)$ se parece mucho a encontrar el conjunto de puntos $K[[t, u]]$ -racionales de un esquema afín no Noetheriano, por lo que a veces las llamamos AD-variedades, por Algebraica Diferencial.

De manera similar, si $P \in \mathbb{B}[[t, u]][x, y]$, denotamos por $\text{Sol}(P) \subset \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ el conjunto de todas las parejas $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]] \times \mathbb{B}[[t, u]]$ que son solución de P .

Definición 13. Una *AD-variedad tropical* es cualquier conjunto de la forma

$$X := \bigcap_{P \in G} \text{Sol}(\text{sp}(P))$$

donde $G \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ es un ideal diferencial.

Dada cualquier familia $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$, la tropicalización $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$ de su AD-variedad asociada $\text{Sol}(\Sigma)$ es la AD-variedad tropical asociada al ideal diferencial $[\Sigma]$.

Ejemplo 7 (AD-Hipersuperficies tropicales). Llamamos AD-hipersuperficie al conjunto de ceros $\text{Sol}(P)$ de un solo polinomio $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$ (por razones obvias).

Para calcular la tropicalización de esta hipersuperficie, primero tenemos que calcular el ideal diferencial $[P] \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ como en el Ejercicio 13, y la tropicalización es $\bigcap_{Q \in [P]} \text{Sol}(\text{sp}(Q))$.

Ahora si estamos listos para ver cuáles sistemas tropicales vienen del álgebra.

TEOREMA 14 (Teorema fundamental). *Sea $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ arbitrario, con K un campo de característica cero, algebraicamente cerrado y no numerable.*

Entonces para cualquier (φ, ψ) en la AD-variedad tropical $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$, existe una solución $(\Phi, \Psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ del sistema $\{\Sigma = 0\}$ tal que $\text{sp}(\Phi) = \varphi$, $\text{sp}(\Psi) = \psi$.

Como mencionamos al inicio en la sección 2.1, este es un teorema de correspondencia similar al de la Correspondencia de Mikhalkin (Teorema 1), porque dice que el conjunto de soportes $\{(\text{sp}(\Phi), \text{sp}(\Psi))\}$ de soluciones (Φ, Ψ) de un sistema $\{\Sigma = 0\}$ se tropicaliza precisamente en la AD-variedad tropical $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$. Para complementarlo, tenemos que describir las fibras

$$\text{sp}^{-1}(\varphi, \psi) = \{(\Phi, \Psi) \in \text{Sol}(\Sigma) : \text{sp}(\Phi) = \varphi, \text{sp}(\Psi) = \psi\}, \quad (\varphi, \psi) \in \text{Sol}(\text{sp}([\Sigma])).$$

Este resultado es el caso $m = n = 2$ del teorema fundamental, el cual es válido para cualquier número de variables $K[[t_1, \dots, t_m]]\{x_1, \dots, x_n\}$, $m, n \geq 1$.

Observación 2. En la Observación 1 vimos que podíamos cambiar un sistema infinito de ecuaciones (las impuestas sobre los coeficientes de una serie φ que deben satisfacer una ecuación diferencial $P = 0$ dada) por un sistema finito de ecuaciones (las restricciones sobre el conjunto soporte de una serie φ que satisface el polinomio diferencial tropical $\text{sp}(P)$). Tenemos que pagar este cambio de la siguiente forma. Todo sistema clásico $\{\Sigma = 0\}$ es equivalente a un sistema finito $\{P_1 = \dots = P_k = 0\}$, de esto *sentimos* que muy probablemente debamos de resolver un número infinito de ecuaciones diferenciales tropicales del sistema $\{\text{sp}(Q) : Q \in [\Sigma]\}$ para describir completamente el conjunto $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$. Por lo tanto, tenemos acceso a los siguientes dos paradigmas:

- Clásico: Resolver un número finito de sistemas (de ecuaciones) infinitos,
- Tropical: Resolver un número infinito de sistemas (de ecuaciones) finitos.

Ejercicio 14. Use el Teorema Fundamental para calcular la AD-hipersuperficie tropical $\text{Sol}(\text{sp}([P]))$ asociada al polinomio diferencial ordinario $P = x - x_1$ del Ejemplo 2, así como la fibra $\text{sp}^{-1}(\varphi)$ para cada $\varphi \in \text{Sol}(\text{sp}([P]))$.

Ejemplo 8. Continuando con el Ejemplo 7, vamos calcular la AD-hipersuperficie tropical X asociada al polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + t^2 + u^3$ en $\mathbb{C}[[t, u]]\{x, y\}$. Por definición tenemos que $X = \bigcap_{Q \in [P]} \text{Sol}(\text{sp}(Q))$, y por el Teorema 14, tenemos que $X = \{\text{sp}(\Phi) : P(\Phi) = 0\}$. Dado que la solución general de P es de la forma $\Phi = c - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3$, $c \in \mathbb{C}$, tenemos $X = \{1 + t^2 + u^3, t^2 + u^3\}$. Vemos que las fibras son

$$\text{sp}^{-1}(\varphi) = \begin{cases} \{c - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3 : c \in \mathbb{C}^*\}, & \text{si } \varphi = 1 + t^2 + u^3, \\ \{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3\}, & \text{si } \varphi = t^2 + u^3 \end{cases}$$

Para terminar de reforzar esto, veamos una diferencia clara entre el comportamiento de estos dos conjuntos de soluciones.

Ejercicio 15. Demuestre que si $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$ y $(\varphi, \psi) \in \text{Sol}(P)$, entonces $(\varphi, \psi) \in \text{Sol}(\frac{\partial P}{\partial t})$. De esto deduzca que Σ y $[\Sigma]$ tienen las mismas soluciones.

Veamos que esto no es cierto si $P \in \mathbb{B}[[t, u]]\{x\}$. Sea $P = x_{1,0} + x_{(0,1)} + (t^2 + u^2)$ y $\varphi = t^2u + u^3$. Muestre que $\varphi \in \text{Sol}(P)$, pero $\varphi \notin \text{Sol}(\frac{\partial P}{\partial t})$.

A continuación, ilustramos con [4, Example 28] cómo esta teoría se puede usar concretamente para hallar condiciones necesarias y relaciones en los soportes de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 9. Consideremos $\{P_1, P_2, P_3\} = \Sigma \subset \mathbb{C}[[t, u]]\{x, y\}$ dado por

$$P_1 = x_{(1,0)}^2 - 4x_{(0,0)}, P_2 = x_{(1,1)}y_{(0,1)} - x_{(0,0)} + 1, P_3 = y_{(2,0)} - x_{(1,0)}.$$

Ahora consideramos $\text{sp}(P_1) = x_{(1,0)}^2 + x_{(0,0)}$, y evaluamos en (φ, ψ) de soportes A y B respectivamente, lo que da $\text{sp}(P_1)(\varphi, \psi) = (\frac{\partial \varphi}{\partial t})^2 + \varphi$. Si la coordenada φ es solución, podemos probar de la Definición 7 que $(0, 0) \in A$ si y solo si $(1, 0) \in A$.

Ahora $\text{sp}(\frac{\partial P_1}{\partial t})(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ y supongamos que $(i, 0)$ es un vértice de esta expresión para algún $i > 0$. Si la coordenada φ es solución, entonces $2i - 3 = i - 1$, lo que da $i = 2$.

Se puede probar que las parejas $(\Phi, \Psi) \in \text{Sol}(\Sigma)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi &= a^2 + 2at + \sqrt{2}au + t^2 + \sqrt{2}tu + \frac{u^2}{2}, \\ \Psi &= b + ct + \frac{a^2 - 1}{\sqrt{2}}u + at^2 + \sqrt{2}atu + \frac{au^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2u}{\sqrt{2}} + \frac{tu^2}{2} + \frac{u^3}{6\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

donde $a, b, c \in K$ son arbitrarios. Vemos que las restricciones tropicales se reflejan en los soportes de las soluciones clásicas, ya que los monomios correspondientes $a^2 + 2at$ en un levantamiento Φ de φ son simultáneamente nulos o no nulos.

En la Figura 4 codificamos los coeficientes de las series soluciones del sistema del Ejemplo 9 como funciones de tres parámetros $a, b, c \in K$

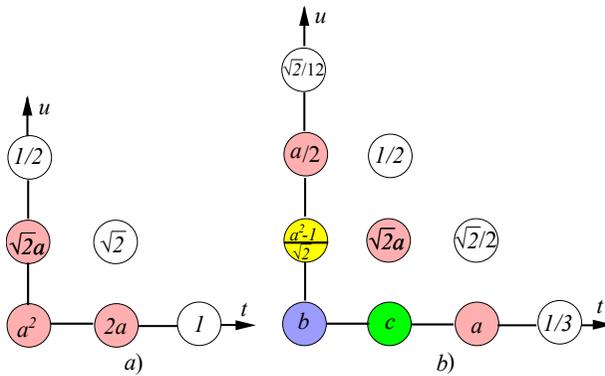


FIGURA 4. Coeficientes de las parejas de soluciones del sistema del Ejemplo 9 a) para Φ ; y b) para Ψ .

Ejercicio 16. Calcule la AD-variedad tropical $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$ para el sistema del Ejemplo 9 usando la Figura 4. Además, dada $(\varphi, \psi) \in \text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$, calcule la fibra $\text{sp}^{-1}(\varphi, \psi)$.

5. OTRAS DIRECCIONES

Es importante mencionar que existe una tercera caracterización de las AD-variedades tropicales de la Definición 13 en términos de ideales iniciales libres de monomios (ver [4]). Esta caracterización es *local* en el sentido que permite concentrarse en la siguiente pregunta:

Problema 4. Dados $A, B \subset \mathbb{N}^2$, ¿será que el sistema $\{\Sigma = 0\}$ tiene una solución $(\Phi, \Psi) \in K[[t, u]] \times K[[t, u]]$ con soporte (A, B) ?

Cuando se le adjunta esa tercera caracterización, se le conoce como el teorema fundamental porque es el análogo en geometría algebraica diferencial del llamado teorema fundamental de la geometría algebraica tropical [8, Theorem 3.2.3], el cual da tres formas equivalentes de definir variedades tropicales sobre un campo no arquimedeano, esto es, una pareja (K, v) de un campo con un valor absoluto no arquimedeano $v : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Hablando de valuaciones, y como comentamos al inicio, éstas son muy importantes en esta teoría.

Definición 15. Una *seminorma no arquimedea* es un mapeo $v : R \rightarrow S$ de un anillo R a un semianillo idempotente S que para $a, b \in R$ satisface

1. $v(0) = 0$ y $v(\pm 1) = 1$;
2. $v(a + b) + v(a) + v(b) = v(a) + v(b)$; y
3. $v(ab) + v(a)v(b) = v(a)v(b)$.

La seminorma v es multiplicativa si satisface $v(ab) = v(a)v(b)$ para $a, b \in R$. Una *valuación no arquimedea* es una norma multiplicativa.

Este concepto es una generalización del de valuación clásica⁴, o de Krull, que se obtiene al usar el orden de un monoide totalmente ordenado $(M, \times, 1, \leq)$ para inducir una suma idempotente $a + b := \max\{a, b\}$ y convertir a M en un semianillo idempotente.

Gran parte de la riqueza y novedad combinatoria de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales es que podemos construir un semianillo idempotente S y una valuación no arquimedea $v : K[[t, u]] \rightarrow S$ en el sentido de la Definición 15 que no es de Krull. Veamos esto de manera rápida y sin tantos detalles: dado $A \subset \mathbb{N}^2$, decimos que A es un conjunto de vértices si $\text{Vert}(A) = A$, en el sentido de la Definición 6. Si S es la familia que consta de todos los conjuntos de vértices, definimos $v : K[[t, u]] \rightarrow S$ como la función que a cada serie $\varphi \in K[[t, u]]$ le asigna los vértices de su conjunto soporte $v(\varphi) = \text{Vert}(\text{Supp}(\varphi))$. Entonces con las definiciones adecuadas de suma y producto en S , la aplicación v se vuelve una valuación no arquimedea. Como comentamos en la prueba de la Proposición 11, la propiedad multiplicativa de v es la más sutil, y se deduce de una propiedad de vértices de una suma de Minkowski de dos politopos descritos en términos de sus vértices.

Ahora sí, vamos a discutir el orden de S .

Ejercicio 17. Dados dos conjuntos de vértices $P, Q \in S$, escribimos $P \leq Q$ si $P \subset \text{New}(Q)$ (ver la Definición 6). Mostrar que \leq es una relación de orden, y que no es total, al encontrar dos monomios $(i, j), (k, l) \in \mathbb{N}^2$ que no sean comparables.

Lo interesante es que la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales da una razón concreta para estudiar este tipo de seminormas no arquimedeanas.

Es necesario mencionar que de momento, las restricciones del Teorema fundamental 14 no pueden ser aligeradas. En particular, hay ejemplos concretos de ecuaciones diferenciales con coeficientes en \mathbb{Q}^{alg} (el cual satisface todas las hipótesis, excepto ser

⁴Al mismo tiempo, las valoraciones no están muy lejos del concepto usual de seminorma de un álgebra, el cual se obtiene tomando $S = \mathbb{R}_{\geq 0}$, inclusive del concepto de homomorfismo de semianillos.

no numerable) en donde el teorema falla. Y apenas se está empezando a explorar que pasa en el caso de campos de característica positiva: notemos en particular que nuestras derivaciones $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} : S[[t, u]] \rightarrow S[[t, u]]$ no funcionan correctamente si S es un anillo de característica positiva.

Pero veamos dónde sí se puede aplicar este teorema. Básicamente cuando decimos K campo algebraicamente cerrado, característica 0 y no numerable, pensamos en dos arquetipos muy diferentes entre sí, a saber:

1. Arquimediano: \mathbb{C} ,
2. No-Arquimediano: $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$ (los números p -ádicos),

Los nombres vienen del hecho de que estos campos se pueden volver campos topológicos métricos por medio de una norma usual $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ arquimedea en el primer caso, y no-arquimedea en el segundo. Hasta el momento solo hemos discutido soluciones en series de potencias formales de nuestros sistemas $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$, pero si consideramos como K a uno de estos campos topológicos, sería natural estudiar las propiedades de convergencia de dichas soluciones en la completación métrica \widehat{K} de estos campos, siendo $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ ya completo y $\widehat{\mathbb{C}}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}}$ los *complejos p -ádicos*.

Luego, las series $\varphi \in \widehat{K}[[t, u]]$ con radio de convergencia positivo se pueden interpretar como funciones analíticas $\varphi : U \rightarrow \widehat{K}$ en una vecindad $U \ni 0$ del origen en el plano analítico asociado a \widehat{K} ; lo que es interesante es que el teorema fundamental 14 es ciego ante campo \widehat{K} , pero las condiciones de convergencia son radicalmente diferentes en los dos casos anteriores: el caso \mathbb{C} lleva a la teoría de soluciones holomorfas en varias variables de ecuaciones diferenciales parciales, y el segundo lleva a la teoría de soluciones analíticas no-arquimedeanas de ecuaciones diferenciales parciales p -ádicas. Esto también se encuentra todavía muy inexplorado.

Las dos consideraciones finales es que esta teoría se puede percibir como una aplicación de la teoría semianillos. Para un tratamiento más completo véase [6].

El presente trabajo representa una de las primeras referencias para varias ideas y conceptos de esta área, la cual es tan nueva que, si se complementa con [2], resulta en una descripción auto contenida de prácticamente todo lo que se ha hecho en el área hasta el momento.

Finalmente, los poliedros (polígonos) de Newton que aparecen aquí se pueden expresar en la forma $\text{New}(A) = \Delta + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$, donde Δ es la envoltura convexa de $\text{Vert}(A)$, y es un polígono de retícula. Encontrar los vértices de este tipo de politopos es un problema muy activo en estos momentos, y sería interesante saber si se pueden diseñar algoritmos eficientes para aplicarlos a la resolución de ecuaciones diferenciales tropicales.

AGRADECIMIENTOS. Queremos agradecer a Violeta López de la ESFM-IPN, y al M. en C. Alejandro Martínez Méndez, quienes hicieron comentarios sobre una versión preliminar de este artículo los cuales ayudaron a mejorar la exposición. Expresamos también nuestro agradecimiento al árbitro anónimo que revisó este trabajo e hizo observaciones valiosas para volverlo más claro.

REFERENCIAS

- [1] F. Aroca, C. Garay López, and Z. Toghani, *The fundamental theorem of tropical differential algebraic geometry*, Pacific J. Math. **283** (2016) no. 2, 257–270.
- [2] E. Cotterill, C. Garay, and J. Luviano, *Exploring tropical differential equations*, preprint. [arXiv:2012.14067](https://arxiv.org/abs/2012.14067) (2020).
- [3] S. Falkensteiner, C. Garay López, M. Haiech, M.P. Noordman, Z. Toghani and F. Boulier, *The fundamental theorem of tropical partial differential algebraic geometry*, Proc. 45th ISSAC (2020), 178–185.
- [4] S. Falkensteiner, C. Garay López, M. Haiech, M.P. Noordman, Z. Toghani and F. Boulier, *On initials and the fundamental theorem of tropical partial differential geometry*, to appear in Journal of Symbolic Computation, Special Issue ISSAC 2020. [hal-03122437](https://doi.org/10.1017/S0923048021000011) (2021).

- [5] I. Gitler and R. H. Villarreal, *Graphs, Rings and Polyhedra*. Aportaciones Mat. Textos, 35, Soc. Mat. Mexicana, Mexico, 2011.
- [6] J. Golan, *Semirings and their applications*, Springer, 1999.
- [7] D. Grigoriev, *Tropical differential equations*, Adv. Appl. Math. **82** (2017), 120–128.
- [8] D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, AMS, 2015.
- [9] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2* , J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 313–377.
- [10] J.-E. Pin. *Tropical Semirings*, J. Gunawardena. Idempotency (Bristol, 1994), Cambridge Univ.Press, Cambridge, pp.50-69, Publ. Newton Inst. **11** (1998). hal-00113779

Cristhian Garay López

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT),

Jalisco s/n, Col. Valenciana C.P. 36023.

Guanajuato, Gto, México

e-mail: `cristhian.garay@cimat.mx`



PATRONES DE FLUJO EN CAJAS DE BASE CUADRADA AL INICIO DE LA CONVECCIÓN DE RAYLEIGH-BÉNARD

JAVIER PÉREZ Y JOAQUÍN DELGADO

RESUMEN. Mostramos patrones al inicio de movimiento de fluido, el cual se mueve debido a suministro de calor por la parte de abajo. Los patrones de movimiento dependen del tamaño del contenedor del fluido y de la diferencia de temperaturas en la parte inferior y superior del contenedor. Proponemos una manera sencilla de seguir la evolución de los patrones debido al cambio de tamaño de los contenedores.

1. INTRODUCCIÓN

Consideramos un fluido en reposo contenido en un recipiente paralelepípedo con base cuadrada. La parte inferior se calienta provocando la expansión del fluido y la consecuente disminución en su densidad. Ello causa una competencia entre las fuerzas de flotación y de gravedad, haciendo posible que se genere movimiento en el fluido. Ésto se logra cuando se sobrepasa el valor crítico del número de Rayleigh, Ra_c , que mide la relevancia de las fuerzas gravitacional, la flotación y la diferencia de temperatura con respecto a la viscosidad y conductividad térmica en el fluido. Este escenario da lugar a una inestabilidad hidrodinámica y al flujo correspondiente se le llama convección de Rayleigh-Bénard.

El inicio de la convección, ha sido ampliamente estudiado en contenedores paralelepípedos de base rectangular, incluyendo las bases cuadradas, ver por ejemplo [4], [1], [6], [13], [14] y [12]. Las diferencias entre el trabajo de los autores recién citados están en las condiciones de frontera y en las funciones base que usan para aproximar soluciones. Parte primordial de éstos trabajos es el cálculo de los valores Ra_c , en donde, al menos las primeras investigaciones fueron motivados por patrones de movimiento observados experimentalmente.

Sin embargo el análisis de patrones en el caso de bases cuadradas aún no ha sido estudiado en detalle. Por ejemplo, Daniels y Jhugroo [3], identifican patrones al inicio de inestabilidad, con el modelo unidimensional de Swift-Hohenberg, el cual solo es válido en el caso de que los contenedores sean suficientemente grandes horizontalmente. Gelfgat [8], consideró contenedores paralelepípedos de base rectangular, incluidas las cuadradas, y con condiciones de frontera mixtas en la parte superior del contenedor, el autor incluye la descripción de algunos patrones de velocidad y temperatura.

En el problema que aquí abordamos, los contenedores tienen base cuadrada y todas sus paredes son rígidas, las laterales son aisladas térmicamente, y las tapas, inferior y superior, son perfectamente conductoras de calor (diatérmicas). En el estado inicial el fluido está en reposo, y la temperatura y la presión varían respectivamente, lineal y cuadráticamente con respecto a la variable z . El problema está modelado por la aproximación de Boussinesq, i.e., ecuaciones de balance de masa, momento y energía, en donde la densidad es considerada constante excepto en los términos debido al flotamiento, ver por ejemplo [2, p.16]. Realizamos un análisis lineal del inicio de inestabilidad al cambiar de un estado estacionario y sin movimiento a uno convectivo. De acuerdo al principio de intercambio de inestabilidad, [2, p.24], el sistema alcanza un estado de estabilidad neutral cuando al menos uno de los eigenvalores de

2010 *Mathematics Subject Classification.* 76D99, 76E06, 76M22, 76R10.

Palabras clave. Convección, Rayleigh-Bénard, Método de Galerkin, Número de Rayleigh, Patrones de flujo, Rollos.

la aproximación lineal se hace cero. El primer eigenvalor de valor real que se hace cero cuando el número de Rayleigh se incrementa, define el número crítico de Rayleigh.

Calculamos el número de Rayleigh crítico para un rango amplio de los valores de la longitud del lado de la base L , para dichos cálculos usamos el método de Galerkin y tomamos en cuenta las simetrías del problema. Mostramos resultados en forma numérica y con curvas Ra vs. L . Además, con el objeto de probar la precisión de nuestros cálculos, comparamos los valores críticos obtenidos para diferentes números de funciones base y de iteraciones.

Nuestros resultados nos permiten determinar la forma en que los patrones de flujo varían con respecto a L . Mostramos la evolución de los patrones a lo largo de las curvas $Ra(L)$, en las dos formas posibles: una con una simetría particular y la otra con la curva envolvente de cuatro de las ocho simetrías del problema. En la parte final de este documento, mostramos un diagrama simple de la evolución de patrones para valores crecientes de L .

Los patrones que reportamos, tienen diferentes simetrías dependiendo de los valores de L . Sin embargo es necesaria más investigación para determinar patrones en los cambios de simetría, debido a que se incrementa la multiplicidad de los eigenvalores del problema lineal.

2. LAS ECUACIONES

Consideramos fluido calentado por debajo, en un contenedor paralelepípedo de paredes rígidas con longitudes laterales L y altura d . Las paredes horizontales del contenedor mantienen la temperatura y las verticales son adiabáticas. Las temperaturas para las paredes superior e inferior son T_{cold} y T_{hot} y el gradiente de temperatura del fluido es $\Delta T = T_{hot} - T_{cold} > 0$.

Usamos variables adimensionales de posición (x, y, z) , velocidad $\vec{u} = (u, v, w)$, temperatura θ , tiempo t y presión p , cuyas escalas características son respectivamente: d , $\alpha Ra^{1/2}/d$, ΔT , d^2/α y $\rho_0 \nu \alpha Ra^{1/2}/d^2$. Donde β , ν y α son los coeficientes de expansión térmica, viscosidad cinemática y difusión térmica, g es la aceleración de la gravedad, ρ_0 es la densidad a la temperatura de referencia $T_0 = (T_{hot} + T_{cold})/2$ y $Ra = \beta \Delta T g d^3 / \alpha \nu$ es el número de Rayleigh.

El coeficiente de difusividad térmica α es proporcional al coeficiente de conductividad térmica k , ésto es: $\alpha = k/c_v \rho_0$, donde c_v es el calor específico a volumen constante. Usamos la ecuación de estado $\rho = \rho_0(1 - \beta[T - T_0])$, la cual relaciona linealmente la densidad con la temperatura.

Los perfiles estacionarios de temperatura y velocidad están dados respectivamente por $T_s(z) = -\Delta T z + T_0$ y $\vec{u}_s = 0$, las desviaciones de los perfiles estacionarios son: $\theta = (T - T_s)/\Delta T$ y \vec{u} .

Usamos las ecuaciones de la aproximación de Boussinesq para las desviaciones de la velocidad y temperatura, en la forma (ver [13]):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ (2) \quad & Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} = Ra^{1/2} \theta \hat{e}_3 - \nabla p + \nabla^2 \vec{u} - Ra^{1/2} Pr^{-1} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}, \\ (3) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \theta = Ra^{1/2} \vec{u} \cdot \hat{e}_3 + \nabla^2 \theta - Ra^{1/2} (\vec{u} \cdot \nabla) \theta, \end{aligned}$$

donde $Pr = \nu/\alpha$ es el número de Prandtl, $\nabla^2 \vec{u} = (\nabla^2 u, \nabla^2 v, \nabla^2 w)$ y $\hat{e}_3 = (0, 0, 1)$.

De aquí en adelante fijamos la altura del contenedor a $d = 1$, por lo que

$$(x, y, z) \in \Omega = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \times \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

ver Figura 1.

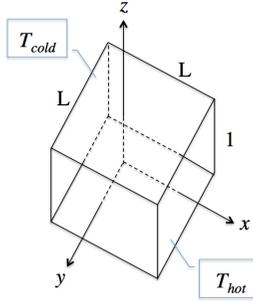


FIGURA 1. Esquema de la posición y las medidas del contenedor.

Adicionalmente a las propiedades térmicas de las paredes enunciadas arriba, suponemos que en éstas el fluido no resbala, por lo que las condiciones de frontera son:

$$(4) \quad \begin{aligned} u = v = w = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, & \quad \text{en } x = \pm \frac{L}{2}, \\ u = v = w = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, & \quad \text{en } y = \pm \frac{L}{2}, \\ u = v = w = \theta = 0, & \quad \text{en } z = \pm 1/2. \end{aligned}$$

3. APROXIMACIÓN LINEAL

La parte lineal y estacionaria del sistema (1-3) es:

$$(5) \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

$$(6) \quad \mathcal{L} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 0 \end{pmatrix},$$

Donde el operador lineal \mathcal{L} y la matriz J que acopla la velocidad vertical con la temperaturas son:

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix} \equiv \nabla^2 \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix} + Ra^{1/2} J \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usamos el método de Galerkin para aproximar las soluciones del sistema (6) por medio de:

$$(7) \quad (\vec{u}_{approx}, \theta_{approx})^T = \sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \vec{F}_l,$$

donde las funciones base

$$(8) \quad \vec{F}_n = \begin{pmatrix} \vec{\chi}_n \\ \phi_n \end{pmatrix},$$

están por definirse y los coeficientes desconocidos a_l se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones dado por el producto en $L^2(\Omega)$:

$$(9) \quad \left\langle \vec{R} \left(\sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \vec{F}_l \right), \vec{F}_n \right\rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_{tot},$$

con N_{tot} número total de funciones base y $\vec{R}(\cdot) \equiv \mathcal{L}(\cdot) - (\nabla p, 0)^T$ el residual del sistema (6).

Como se muestra enseguida, es posible construir las funciones base (8) de tal manera que se satisfagan las condiciones de frontera (4) y la ecuación de continuidad (5), por lo que una vez establecidas las funciones base ya no nos ocuparemos de estas restricciones.

Dado que la base del campo de velocidades debe satisfacer $\nabla \cdot \vec{\chi}_n = 0$, existe \vec{A}_n tal que $\vec{\chi}_n = \nabla \times \vec{A}_n$ donde $\vec{A}_n = \tau_n \hat{e}_1 - \varphi_n \hat{e}_2 + \psi_n \hat{e}_3$ para algunos potenciales escalares τ_n , φ_n y ψ_n . Sin embargo, de acuerdo a Puigjaner et al. [13] podemos expresar el campo vectorial que satisface las condiciones de frontera (4) como sumas de campos vectoriales proyectados en espacios 2-dimensionales (x -rollos y y -rollos) los cuales dependen de las tres variables espaciales x, y, z . Por lo tanto, en lo que respecta a la completéz, es suficiente buscar solo dos tipos de potenciales escalares para la velocidad φ_n y τ_n , y uno para la temperatura ϕ_n tal que \vec{F}_n sea un x -rollo, y -rollo o un vector de temperatura, es decir

$$(10) \quad \vec{F}_n \in \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_n \\ 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_n \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \tau_n \\ -\frac{\partial}{\partial y} \tau_n \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_n \end{array} \right) \right\}.$$

El costo numérico de no incluir el potencial escalar ψ_n ha sido evaluado en [14]. En su trabajo, los autores notaron una diferencia significativa en el análisis no lineal, no así en el análisis lineal, particularmente en la predicción numérica del número crítico de Rayleigh en el contenedor cúbico.

De acuerdo con la discusión previa, usamos una base completa de funciones escalares dependientes de (x, y, z) como sigue,

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x, y, z) &= \varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_k(z), \\ \tau_n(x, y, z) &= \tau_i(x) \tau_j(y) \tau_k(z), \\ \phi_n(x, y, z) &= \phi_i(x) \phi_j(y) \phi_k(z); \end{aligned}$$

donde el conjunto de índices i, j, k puede relacionarse biunívocamente con n , ver sección 3.2.

Construiremos las funciones (11) usando las funciones base de Puigjaner et al. [13]:

$$\begin{aligned} \hat{g}_k(\hat{x}) &= \begin{cases} \cos((2k-1)\pi\hat{x}) \\ 0 \\ \text{sen}(2k\pi\hat{x}), \end{cases} \\ \hat{h}_k(\hat{x}) &= \begin{cases} \cos(2(k-1)\pi\hat{x}) \\ 0 \\ \text{sen}((2k-1)\pi\hat{x}), \end{cases} \\ \hat{f}_k(\hat{x}) &= \begin{cases} \frac{\cosh(\hat{\lambda}_k \hat{x})}{\cosh(\hat{\lambda}_k/2)} - \frac{\cos(\hat{\lambda}_k \hat{x})}{\cos(\hat{\lambda}_k/2)} \\ 0 \\ \frac{\text{senh}(\hat{\mu}_k \hat{x})}{\text{senh}(\hat{\mu}_k/2)} - \frac{\text{sen}(\hat{\mu}_k \hat{x})}{\text{sen}(\hat{\mu}_k/2)}, \end{cases} \end{aligned}$$

para $\hat{x} \in [-1/2, 1/2]$, $k = 1, 2, \dots$, y donde $\hat{\lambda}_k, \hat{\mu}_k$ son respectivamente, las raíces positivas de:

$$\tanh(\hat{\lambda}_k/2) + \tan(\hat{\lambda}_k/2) = 0 \quad \text{y} \quad \tanh(\hat{\mu}_k/2) - \tan(\hat{\mu}_k/2) = 0.$$

Estas familias son soluciones de los problemas de Sturm–Liouville:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \hat{a}_g g(x) \quad \text{con} \quad g(\pm 1/2) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{a}_g < 0 \\ h''(x) &= \hat{a}_h h(x) \quad \text{con} \quad h'(\pm 1/2) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{a}_h < 0 \\ f^{IV}(x) &= \hat{a}_f f(x) \quad \text{con} \quad f(\pm 1/2) = f'(\pm 1/2) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{a}_f > 0 \end{aligned}$$

donde \hat{a}_g, \hat{a}_h y \hat{a}_f son valores constantes. Las familias f_k son conocidas en la literatura como *beam-functions* o funciones de Chandrasekhar.

Reescalando para $x \in [-L/2, L/2]$ definimos:

$$g_k(x) = \hat{g}\left(\frac{x}{L}\right), \quad h_k(x) = \hat{h}\left(\frac{x}{L}\right), \quad f_k(x) = \hat{f}\left(\frac{x}{L}\right);$$

los parámetros λ_k y μ_k , de las funciones base $f_k(x)$ se obtienen con las relaciones

$$\hat{\lambda}_k = L\lambda_k \quad \text{y} \quad \hat{\mu}_k = L\mu_k.$$

Con este reescalamiento las funciones base (10) son:

$$(12) \quad \vec{F}_n^x = \begin{pmatrix} f_i(x)g_j(y)\hat{f}'_k(z) \\ 0 \\ -f'_i(x)g_j(y)\hat{f}_k(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(13) \quad \vec{F}_n^y = \begin{pmatrix} 0 \\ g_i(x)f_j(y)\hat{f}'_k(z) \\ -g_i(x)f'_j(y)\hat{f}_k(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(14) \quad \vec{F}_n^\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_i(x)h_j(y)\hat{g}_k(z) \end{pmatrix},$$

note que no es necesario usar funciones reescaladas en la variable z .

3.1. La elección de paridades de las funciones base. Siguiendo a Puigjaner [13], agrupamos las funciones base de acuerdo a la paridad de las funciones dependientes de x, y ó z , ver Tabla 1, donde e denota función par y o función impar. Las paridades de la temperatura son las mismas, contando derivadas, que las del componente vertical de la velocidad de cada rollo. Así, las paridades de los componentes horizontales de la velocidad quedan determinadas, vía la velocidad vertical, por las paridades de la temperatura, dando un total de ocho bloques.

Bloque	x-rollo	y-rollo	Temperatura
1	<i>eee</i>	<i>ooe</i>	<i>oee</i>
2	<i>eo</i> <i>e</i>	<i>oe</i> <i>e</i>	<i>oo</i> <i>e</i>
3	<i>oe</i> <i>e</i>	<i>eo</i> <i>e</i>	<i>ee</i> <i>e</i>
4	<i>oo</i> <i>e</i>	<i>ee</i> <i>e</i>	<i>eo</i> <i>e</i>
5	<i>ee</i> <i>o</i>	<i>oo</i> <i>o</i>	<i>oe</i> <i>o</i>
6	<i>eo</i> <i>o</i>	<i>oe</i> <i>o</i>	<i>oo</i> <i>o</i>
7	<i>oe</i> <i>o</i>	<i>eo</i> <i>o</i>	<i>ee</i> <i>o</i>
8	<i>oo</i> <i>o</i>	<i>ee</i> <i>o</i>	<i>eo</i> <i>o</i>

TABLA 1. Asignación de paridades de las funciones base de (12), (13) y (14).

3.2. El problema de valor propio. Dado que el campo de velocidades definido por las funciones base es solenoidal y los gradientes de los campos vectoriales son ortogonales con respecto al producto interior $L_2(\Omega)$, la ecuación residual (9) se puede escribir como:

$$\left\langle \mathcal{L} \left(\sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \vec{F}_l \right), \vec{F}_n \right\rangle = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N_{tot}.$$

Aplicando linealidad

$$\sum_{l=1}^{N_{tot}} a_l \left[\left\langle \nabla^2 \vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle + Ra^{1/2} \left\langle J\vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle \right] = 0,$$

o equivalentemente, donde índices repetidos denotan suma

$$(15) \quad M_{ln}a_l = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N_{tot},$$

donde

$$(16) \quad M_{ln} = \left\langle \nabla^2 \vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle + Ra^{1/2} \left\langle J\vec{F}_l, \vec{F}_n \right\rangle,$$

para $l, n \in \{1, 2, \dots, N_{tot}\}$. Note que debido a las condiciones de no resbalamiento en las fronteras la matriz M_{ln} es simétrica, por lo que podemos escribir (15) como $M_{nl}a_l = 0$ o, en forma matricial

$$(17) \quad M(Ra)\vec{a} = 0,$$

donde se muestra explícitamente la dependencia de la matriz M del número de Rayleigh y \vec{a} es el vector con entradas a_l .

A continuación agrupamos las funciones base de acuerdo a su paridad

$$(18) \quad \{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_{M'}\}, \{\vec{F}_{M'+1}, \dots, \vec{F}_{2M'}\}, \dots, \{\vec{F}_{7M'+1}, \dots, \vec{F}_{8M'}\},$$

donde M' es el número de funciones base en cada bloque. Siguiendo a Puigjaner [13], denotamos $nb(l)$ el número de bloque de índice l , de acuerdo a esta forma de agrupar tenemos, por ejemplo $nb(l) = 1$ para $l = 1, \dots, M'$, $nb(l) = 2$ para $l = M'+1, \dots, 2M'$, etc.

Con esta agrupación la matriz M se descompone en una matriz diagonal de 8×8 bloques, cada bloque de dimension $M' \times M'$, esto último se sigue del siguiente lema:

LEMA 1. Si M_{ln} denota la matriz (16), y $nb(l)$ es el número de bloque de índice l , entonces $M_{ln} = 0$ si $nb(l) \neq nb(n)$, para $n, l = 1, 2, \dots, 8$.

Demostración. Los productos interiores de la ecuación (16) se obtienen integrando, con respecto a x , y ó z , sobre un intervalo simétrico, productos de la forma $G_n^{(i)} F_l^{(i)}$ con $i = 1, 2, 3$ ó 4 , y donde la función escalar $G_n^{(i)}$ es alguno de los componentes de $\nabla^2 F_n^{(i)}$ ó de $JF_n^{(i)}$, en cualquier caso, ambas transformaciones conservan las paridades de $F_n^{(i)}$, con que de acuerdo a la Tabla de paridades 1 y suponiendo $nb(l) \neq nb(n)$, estas integrales involucran la integración de una función impar sobre un dominio simétrico, lo cual da cero. \square

Adicionalmente, en cada bloque de (18), usamos las funciones siguiendo el esquema:

$$\{\vec{F}_1^x, \dots, \vec{F}_N^x\}, \{\vec{F}_{N+1}^y, \dots, \vec{F}_{2N}^y\} \quad \text{y} \quad \{\vec{F}_{2N+1}^\theta, \dots, \vec{F}_{3N}^\theta\},$$

donde $3N = M'$. Por ejemplo, si $i = 1, 2, \dots, n_x$, $j = 1, 2, \dots, n_y$, $k = 1, 2, \dots, n_z$, entonces $N = n_x n_y n_z$ y $M' = 3n_x n_y n_z$. Mientras que

$$n = (i-1)n_x n_z + (j-1)n_z + k,$$

es la relación entre los índices $\{i, j, k\}$ y n .

Usando el lema 1, cada subsistema de (17) queda

$$(19) \quad \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & Ra^{1/2} B_{x\theta} \\ A_{yx} & A_{yy} & Ra^{1/2} B_{y\theta} \\ Ra^{1/2} B_{\theta x} & Ra^{1/2} B_{\theta y} & A_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}^x \\ \vec{a}^y \\ \vec{a}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $(\vec{a}^x, \vec{a}^y, \vec{a}^\theta)^T$ son los coeficientes $\{a_l\}_l$, $l = 1, 2, \dots, N, N+1, \dots, 2N, 2N+1, \dots, 3N$,

$$A_{\alpha\beta} = \left\{ \left\langle \nabla^2 \vec{F}_n^\alpha, \vec{F}_l^\beta \right\rangle \right\}_{n,l} \quad \text{y} \quad B_{\alpha\beta} = \left\{ \left\langle J\vec{F}_n^\alpha, \vec{F}_l^\beta \right\rangle \right\}_{n,l},$$

con $\alpha, \beta = x, y$ ó θ .

El problema (19) resulta en el problema de valor propio

$$(20) \quad A^{-1} B^T C^{-1} B \vec{c} = \frac{1}{Ra} \vec{c},$$

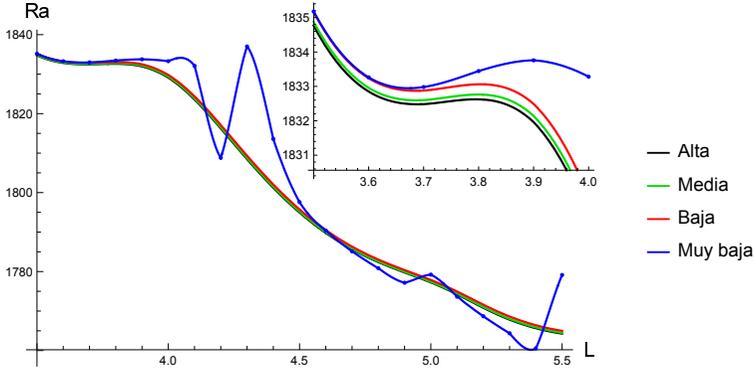


FIGURA 2. Números crítico de Rayleigh del bloque 1, usando diferentes estrategias numéricas.

donde

$$A = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix}, \quad B = (B_{\theta x}, B_{\theta y}), \quad C = A_{\theta\theta}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \vec{a}^x \\ \vec{a}^y \end{pmatrix},$$

y

$$\vec{a}^\theta = -Ra^{1/2}C^{-1}B\vec{c}.$$

Dado que las funciones base pueden elegirse con paridades de cada uno de los ocho bloques, el problema de valor propio (20) representa en realidad ocho problemas. En cada uno de ellos, usamos el método de potencias para obtener el valor propio dominante $\lambda_{max} = 1/Ra_c$, y su vector propio asociado. En consecuencia obtenemos el menor valor Ra tal que se satisfaga (20). Con los valores de Ra_c y los coeficientes $\{a_l\}$ queda determinada la solución aproximada (7).

La dimensión de la matriz A es $2n_x n_y n_z \times 2n_x n_y n_z$, lo cual, para números grandes de funciones base, dificulta el cálculo de A^{-1} , ver por ejemplo la Tabla 3, en donde se muestra la cantidad de funciones base para alcanzar una precisión alta. En caso de grandes dimensiones, nuestra estrategia para calcular A^{-1} , consistió en descomponer recursivamente a la matriz A en cuatro matrices, llegado a su fin el proceso recursivo, calculamos la inversa de las matrices más pequeñas factorizándolas previamente, con rotaciones de Householder, en la forma QR , donde Q es ortogonal y R es triangular.

4. VALIDACIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO

Clasificamos las estrategias en la precisión de nuestros cálculos con etiquetas: Muy baja, Baja, Media y Alta, dependiendo del valor del número de funciones base y del número de iteraciones, por ejemplo en la Tabla 3 se muestran los valores usados para lograr precisión Alta. Las precisiones Muy baja y Baja solo cambian en el número de iteraciones, en el primer caso 100 iteraciones, en el segundo de 100 a 4000 dependiendo del valor de L , en ambos casos se usaron 7 funciones base en cada dirección, i.e., $n_x = n_y = n_z = 7$. En el caso de la precisión Media se usaron 10 funciones base en cada dirección y el número de iteraciones fué de 100 a 4000 dependiendo del valor L .

Como prueba adicional calculamos separadamente los números de Rayleigh de los bloques 1 y 4 y de los bloques 5 y 8, los cuales deben ser los mismos por simetría.

En las Figuras 2 y 3 comparamos curvas con diferentes precisiones en diferentes bloques. La estimación del error relativo entre las estrategias de precisión Alta y Media es del orden de 10^{-4} .

En las Figuras 4–5 usamos precisión Media, en las figuras 7-12, usamos precisión Baja.

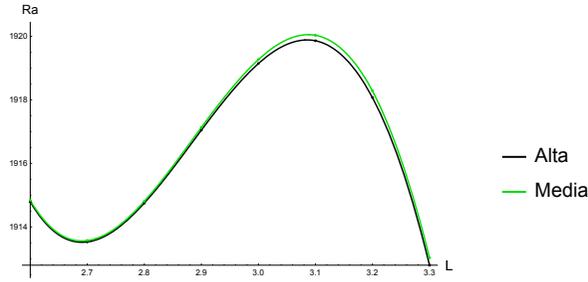


FIGURA 3. Comparación de las estrategias Alta y Media de los números críticos de Rayleigh del bloque 3. Note la no-monotonía.

L/nb	1 y 4	2	3
6	1756.33	1754.58	1759.24
5	1777.27	1783.56	1779.30
4	1829.14	1812.92	1815.00
3	1894.80	1983.10	1919.14
2	2454.22	2616.64	2084.89
1	3388.58	5900.60	7456.24
1/2	17085.02	47361.85	77769.86
1/4	200307.88	636184.23	1124580.63
1/6	958540.79	3121016.37	5592399.77
1/8	2971362.50	9757932.48	17567042.39
1/10	7190279.64	23705400.82	42768590.22
1/12	14838646.36	49024076.24	88550854.85

TABLA 2. Números de Rayleigh críticos Ra_c de alta precisión, obtenidos en el presente trabajo, para diferentes longitudes de la base cuadrada L y para bloques $nb = 1, \dots, 4$. Las negritas indican el valor mínimo de Ra_c para cada L . En la Tabla 3 se muestran los valores de los parámetros usados en rutinas numéricas.

L	6	5	4	3	2	1	1/2	1/4	1/6	1/8	1/10	1/12
n_{iter}	4000	4000	1000	400	400	100	100	400	400	400	400	1000
n_x	36	34	32	30	20	20	20	14	14	10	9	9
n_y	36	34	32	30	20	20	20	14	14	10	9	9
n_z	7	7	8	9	20	20	20	40	40	80	100	100

TABLA 3. Números de iteraciones y funciones base, para cada L , usados en cálculos reportados en Tabla 2.

5. RESULTADOS

En las Tablas 2 y 3 reportamos respectivamente, números críticos de Rayleigh con precisión Alta y los parámetros usados para el cálculo de estos valores. En las Figuras 4 y 5 mostramos las gráficas del número crítico Ra versus L para todos los bloques de paridades.

Los números críticos de Rayleigh que reportamos en la Tabla 2, se comparan bien con los resultados de otros autores, ver Tablas 4, 5, y 6. En el caso de valores pequeños de L , los cuales representan paralelepípedos delgados, se espera un número crítico de Rayleigh grande para iniciar la convección, como es evidente en la Tabla 2.

Mizushima y Nakamura [11], reportan valores mostrados en las Tablas 4 y 6, para sus cálculos usaron el método de Galerkin y paquetes de resolución numérica con

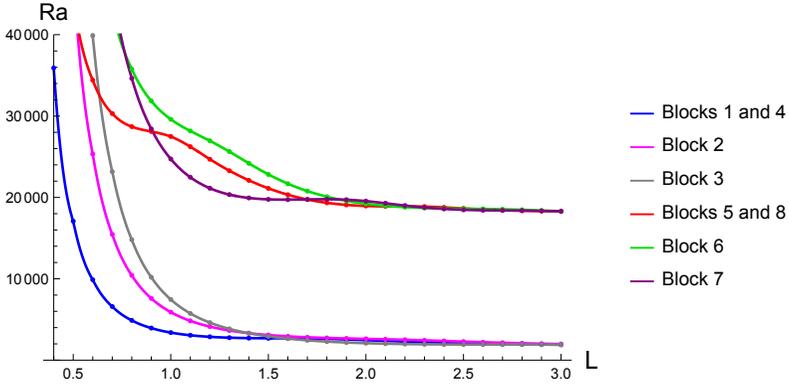


FIGURA 4. Gráfica del número crítico Ra versus L para todos los bloques. Los modos de la temperatura impares en z están en las curvas superiores, los impares en las curvas inferiores. Para valores fijos de L el valor crítico de Rayleigh Ra_c es el mínimo de los valores críticos de todos los bloques. La Figura 5 muestra detalles de los modos de la temperatura pares de z .

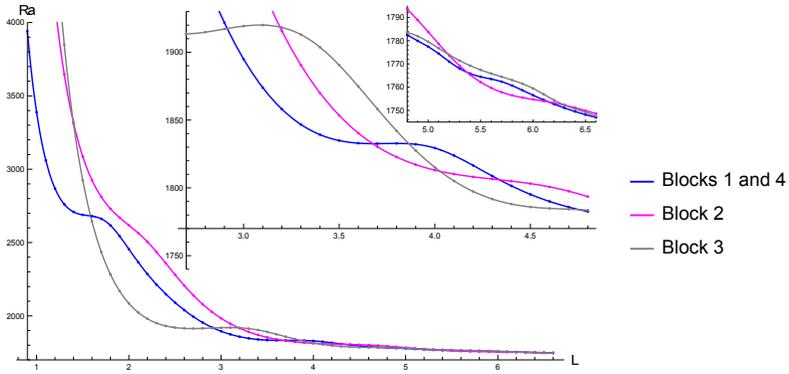


FIGURA 5. Detalles de la Figura 4 para los modos pares en z , bloques 1, 2, 3 y 4.

	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
Mizushima y Nakamura[11]	3388.5		
Puigjaner et al.[14]	3389	5903	7458
Torres et al. [15]	3388.527	5900.449	7456.149
Presente trabajo	3388.58	5900.60	7456.24

TABLA 4. Comparación de valores del número crítico de Rayleigh en contenedor cúbico ($L = 1$).

L	Catton [1]	Presente trabajo
1/2	17 307	17 085.02
1/4	203 163	200 307.88
1/8	3011718	297136.5

TABLA 5. Comparación de resultados del presente trabajo con los de Catton ($L < 1$). Ver Tabla 3 para número de funciones base e iteraciones.

L	Edwards[6]	Mizushima y Nakamura[11]	Presente Trabajo
2	2107		2084.89
4	1827		1812.92
5		1777	1777.27
6	1765		1754.58
12	1729		1719.05

TABLA 6. Comparación de valores del número crítico de Rayleigh ($L > 1$), los espacios en blanco no fueron reportados.

doble o cuadruple precisión. Ellos muestran que a pesar de que los patrones críticos son similares a rollos 2D, éstos tienen valores diferentes de cero en la componente de la velocidad de dirección transversal de los ejes de simetría del patrón de movimiento, por lo que los rollos son realmente 3-dimensionales. Ésto es consistente con nuestros resultados.

Puigjaner et al. [13] (p. 29, Fig. 14) reportan gráficamente valores de Ra_c versus la longitud de un lado de contenedores paralelepípedicos de base rectangular, para los bloques 1 a 4. Como casos particulares están las bases cuadradas de longitud $1/2$, 1 y 2. También se muestra que Ra_c pertenece al tercer bloque de paridades para una base cuadrada de longitud 2. Nuestros resultados son consistentes con los de estos autores.

6. PATRONES

Como es evidente de la Figura 4, el número mínimo de Rayleigh en cada uno de los bloques tiende a agruparse en una de dos clases, de acuerdo a las paridades de las funciones base de la temperatura en la dirección z . Los bloques 1, 2, 3 y 4 correspondientes a las funciones z -pares y los bloques 5, 6, 7 y 8 correspondientes a las funciones z -impares. El mínimo número de Rayleigh se alcanza sistemáticamente en los bloques correspondientes a las funciones z -pares. Ésto en concordancia con el principio general de que la primera bifurcación se alcanza dentro del bloque con un número mínimo de ceros en la dirección z , Chandrasekhar [2, p.36], Drazin [5, p.239].

Fukazawa y Funakoshi [7], analizaron la convección de Rayleigh-Bénard en contenedores paralelepípedicos con paredes térmicamente conductoras. Estos autores encontraron que un intercambio de modos inestables sucede en contenedores con base cercana a ser cuadrada de lado 4 ó 5.5. En estos valores particulares de L ocurre una interacción de modos. Es necesaria más investigación para entender los mecanismos de bifurcación en modos que compiten por el valor mínimo y las reglas de selección de patrones, ver [9] y [10]. Por ejemplo, para valores L en el intervalo $(0, 1.58449)$, el valor crítico de Ra se da en los bloques 1 y 4, debido a los dos bloques, hay dos vectores propios linealmente independientes con lo que, de acuerdo a la teoría lineal, cualquier combinación lineal de ellos da un posible patrón de bifurcación.

Las curvas de nivel en el plano $z = 0$, particularmente la curva $w = 0$, son especialmente útiles para describir la evolución de los patrones a lo largo de un único bloque. En términos de evolución, primero se forma un patrón de convección complejo en las esquinas del contenedor, el cual para valores crecientes de L , termina apareciendo en el plano $z = 0$ como nuevas curvas las cuales satisfacen $w = 0$, dichas curvas tienden a crecer hasta que terminan cerrándose, de esta manera aparecen nuevas regiones, separadas por $w = 0$, en las cuales el fluido sube o baja. Además siempre que haya una paridad impar en funciones dependientes de x ó y (por ejemplo en el bloque de paridades 1 las funciones dependientes de x son impares), el eje $x = 0$ ó $y = 0$, respectivamente, es también parte de la curva $w = 0$. Este mecanismo de desarrollo fué observado a lo largo de todos los bloques. Por ejemplo la Figura 6 muestra la evolución de los patrones de convección a lo largo del bloque 1.

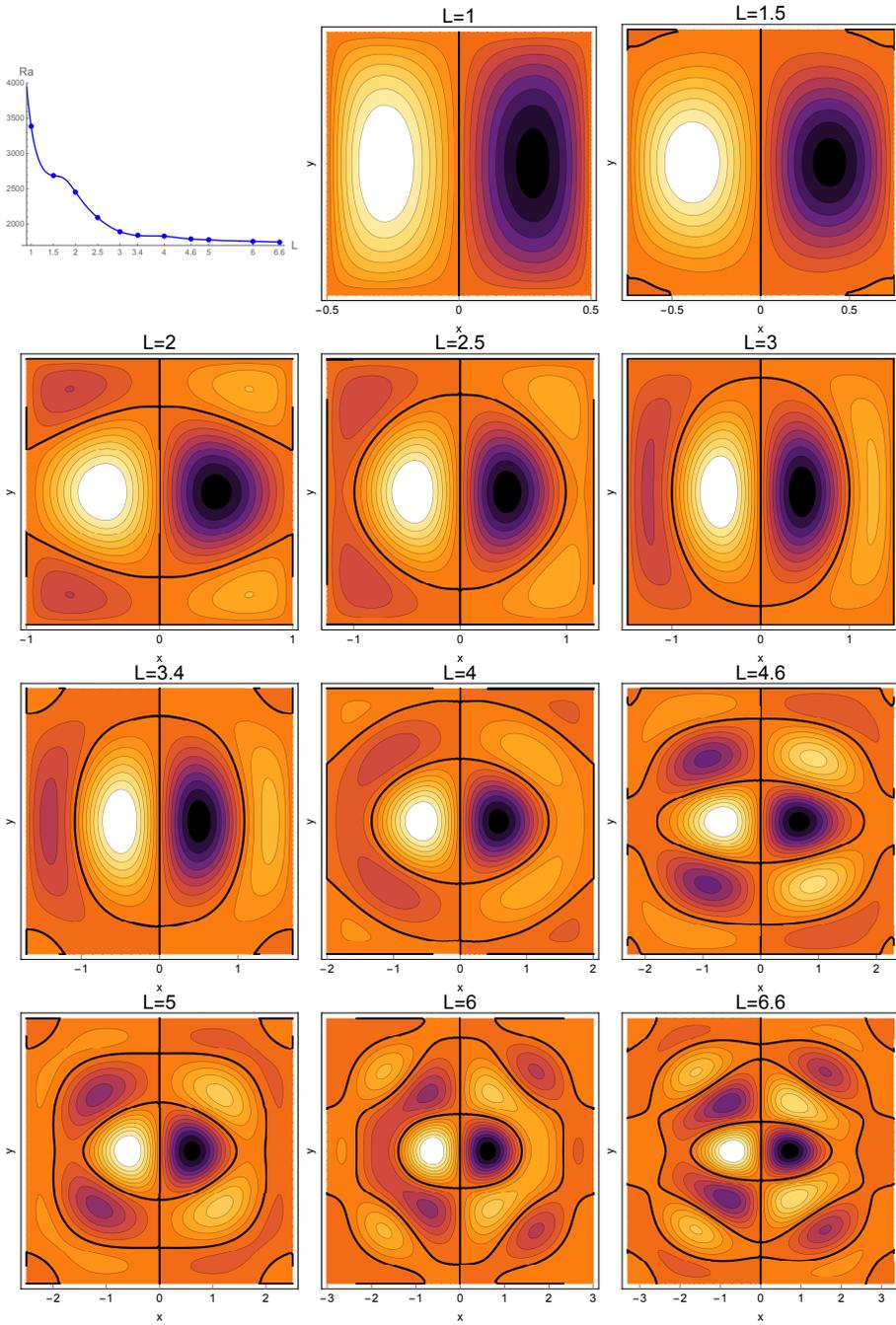


FIGURA 6. Serie de gráficas que inicia con la curva $Ra(L)$ del bloque 1, los puntos sobre ella indican los valores de L con los cuales se obtuvieron el resto de las gráficas de esta Figura: curvas de contorno del campo de velocidad vertical w en $z = 0$ (las líneas negras se corresponden a $w = 0$). Para valores crecientes de L se aprecia la evolución de patrones descrita en el texto.

Como es evidente en la Figura 5 el número crítico de Rayleigh se alcanza en diferentes bloques dependiendo del valor de L , En la Figura 7, se muestra la curva $Ra_c(L)$ y la evolución de patrones para valores crecientes de L . La curva $Ra_c(L)$ es la envolvente de las curvas $Ra(L)$ de la Figura 4. Los puntos de colores marcados sobre

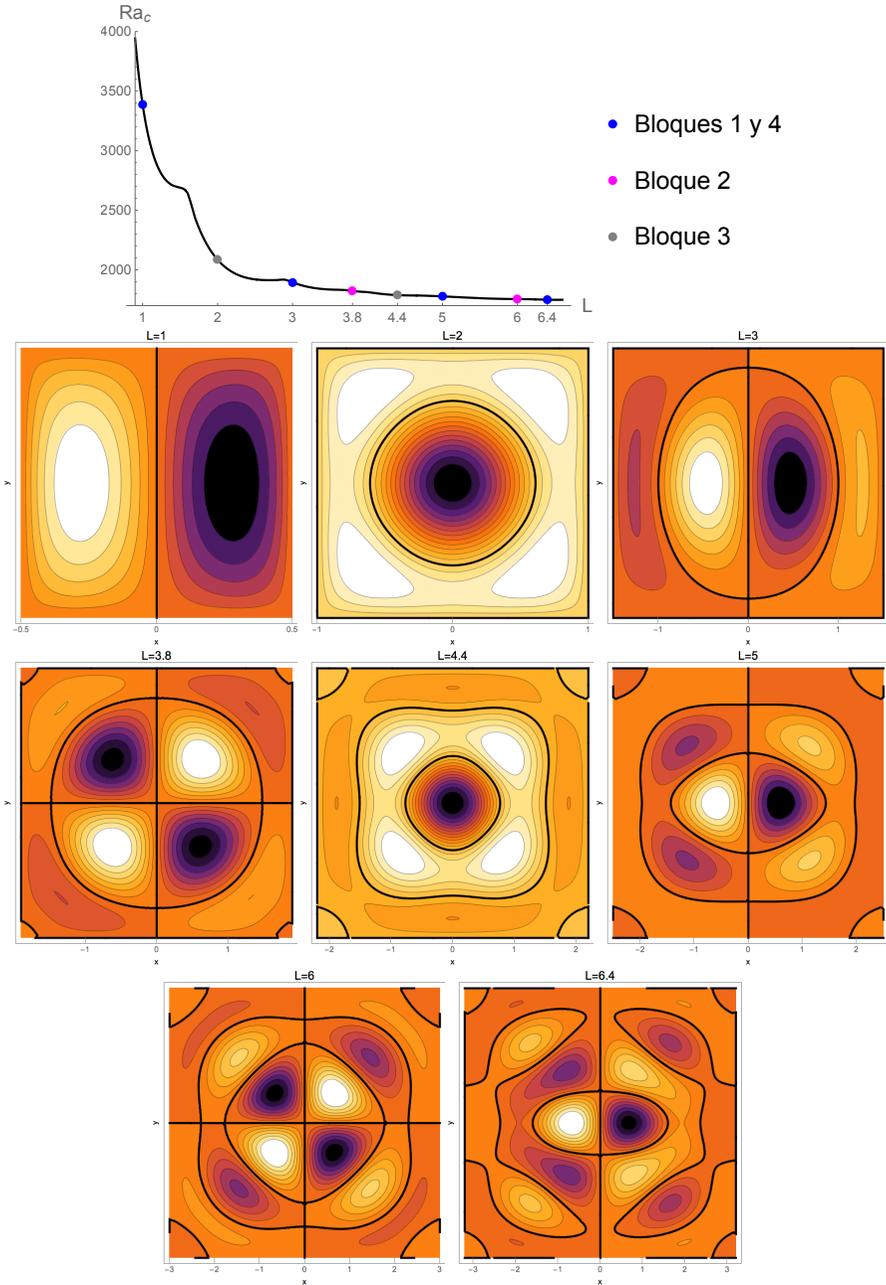


FIGURA 7. La curva inicial $Ra_c(L)$ es la envolvente de las curvas de la Figura 4, los puntos sobre ella, indican valores de L y bloques dominantes con los cuales se obtuvieron las figuras restantes. Para valores crecientes de L se aprecia la evolución de los patrones con curvas de contorno del campo de velocidad vertical w en $z = 0$. la versión simplificada se muestra en Figura 8 y la versión 3D se muestra en Figuras 9-12.

$Ra_c(L)$ indican los valores L y sus correspondientes bloques de paridades. Para estos puntos se graficaron curvas de nivel en el plano $z = 0$.

La Figura 8 muestra un esquema sobresimplificado de la sucesión de patrones de la figura 7. Una vez que las superficies $w = 0$ cruzan el plano $z = 0$, ellas se desarrollan completamente como curvas cerradas. Así, el campo de velocidades tiende a formar

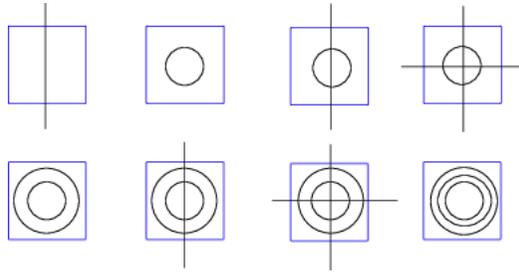


FIGURA 8. Esquema simplificado de la sucesión de patrones de bifurcación para valores de L crecientes. Las líneas negras son la intersección de las superficies $w = 0$ con $z = 0$, y son los ejes de rotación de los rollos 3D formando patrones complejos. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, los valores son $L = 1, 2, 3, 3.8, 4.4, 5, 6, 6.4$ y se corresponden con la sucesión de patrones de las Figuras 7 y 9 a 12.

patrones en forma de toros que rodean el origen y con eje de simetría en el plano $z = 0$.

Las Figuras 9-12, muestran en 3 dimensiones los patrones de movimiento asociados a la Figura 7. Por ejemplo en la primer columna de la Figura 9 mostramos diferentes gráficas del patrón de movimiento, correspondientes al eigenvector en $L = 1$ y bloque 1. Las gráficas se muestran en el siguiente orden: mostramos la superficie $w = 0$ y el campo de velocidad sobre ella, el cual la cruza horizontalmente; enseguida mostramos la misma superficie $w = 0$ pero ahora con algunas líneas de flujo para dar una idea del flujo global; la última figura muestra en detalle líneas de flujo en planos cercanos a la frontera, ésto para mostrar la complejidad del flujo cerca de las fronteras. Las figuras siguientes, hasta la Figura 12, muestran los patrones de movimiento correspondientes a los valores indicados en la Figura 7.

Con el propósito de describir los patrones dominantes al inicio de la convección, consideramos los valores mínimos de Rayleigh para cada L , ver Figuras 4, 5 y 7. Resumimos la sucesión de patrones para valores crecientes de L como sigue:

Para $L = 1$, la primer columna de la Figura 9, describe un rollo finito a lo largo del eje x ; la superficie $w = 0$ contiene el plano de simetría $x = 0$, consistente con las funciones base del componente w del bloque 1, las cuales son impares en x . Dado que las condiciones de frontera requieren que el campo de velocidades se haga cero en las fronteras, el rollo tiene que deformarse dando un flujo complejo cerca de las mismas. Note los pequeños componentes de la superficie $w = 0$ cerca de las esquinas los cuales anticipan puntos de retorno en las líneas de flujo, este hecho es difícil de identificar debido a que la velocidad cerca de las fronteras es pequeña comparada con velocidades del centro.

Para $L = 2$, segunda columna de Figura 9, el número crítico de Rayleigh ahora se alcanza en el bloque 3. La superficie $w = 0$ es un cilindro a lo largo del eje z y el campo de velocidad describe un patrón en forma de toro. En este bloque el flujo cerca de las fronteras tiene ahora una estructura más complicada. Dado que las funciones base para el componente w son pares en x y y , la simetría hace que ninguno de los planos, x ó y , estén contenidos en la superficie $w = 0$, como en el caso previo.

Para valores crecientes de L aparecen cerca de las esquinas, nuevos componentes de la superficie $w = 0$ y éstos se desarrollan hasta que cruzan verticalmente el plano $z = 0$ formando cilindros. Dependiendo de la simetría del bloque en donde el número crítico de Rayleigh se alcanza, los planos x ó y forman parte de la superficie $w = 0$, Por ejemplo, si el número crítico de Rayleigh se alcanza en el bloque 1, el plano $x = 0$ siempre esta presente, y si se alcanza en el bloque 2, ambos planos x y y están presentes, este es el caso mostrado en la segunda columna de la Figura 10 para $L = 3.8$.

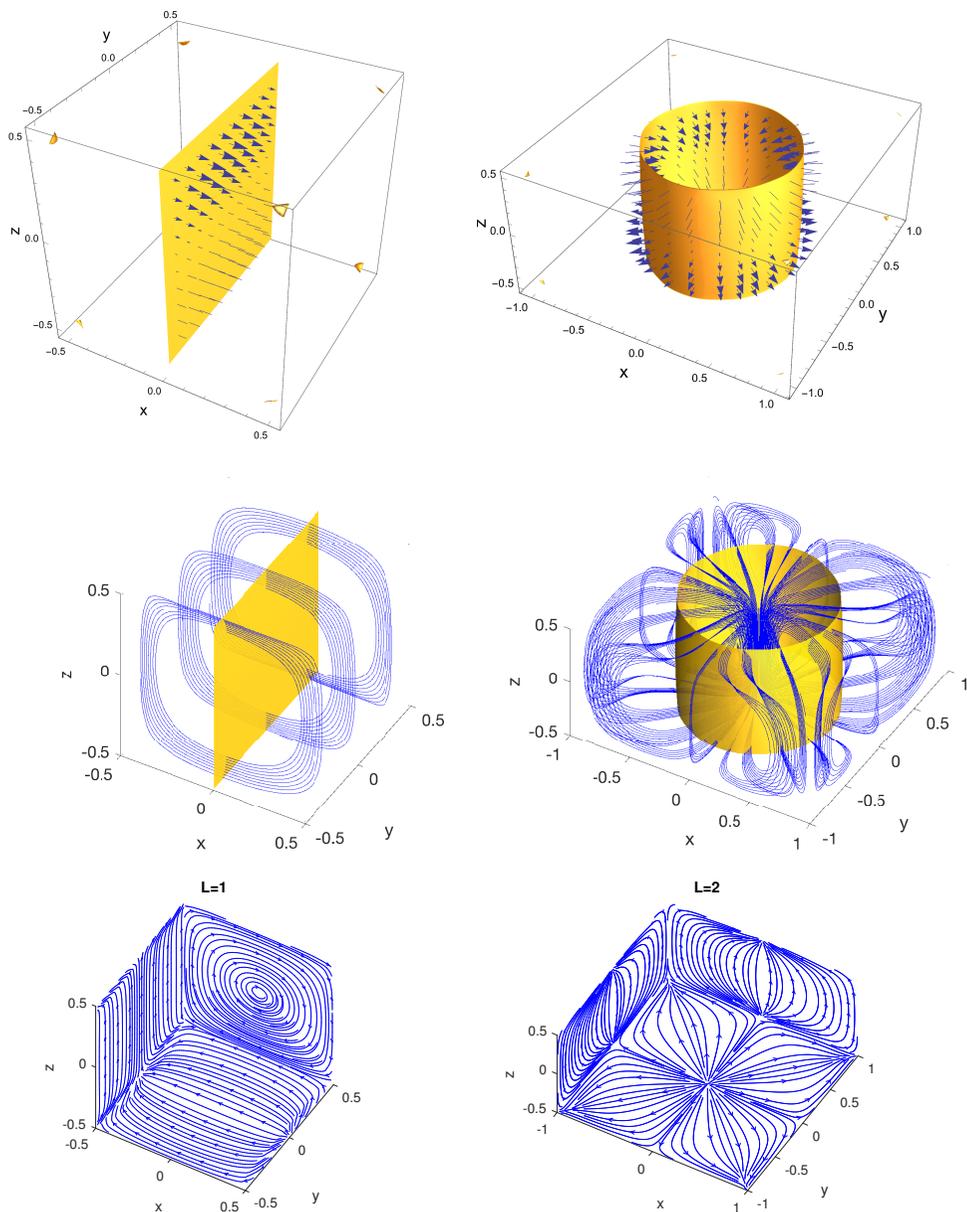


FIGURA 9. Patrones al inicio de convección, primer columna $L = 1$ y bloque 1, segunda columna $L = 2$ y bloque 3. De arriba a abajo: superficies $w = 0$ y campo de velocidad en ellas; superficie $w = 0$ y líneas de flujo en 3D; líneas de flujo sobre planos cercanos a las fronteras.

Esta sucesión de patrones de inicio de convección se repite tal como se muestra desde la Figura 10 a la Figura 12. Los patrones para los valores $L = 2, 3, 5$, mostrados en las Figuras 9, 10 y 11, se comparan bien con los campos vectoriales horizontales en el plano $z = 0.4$ obtenidos por Edwards [6].

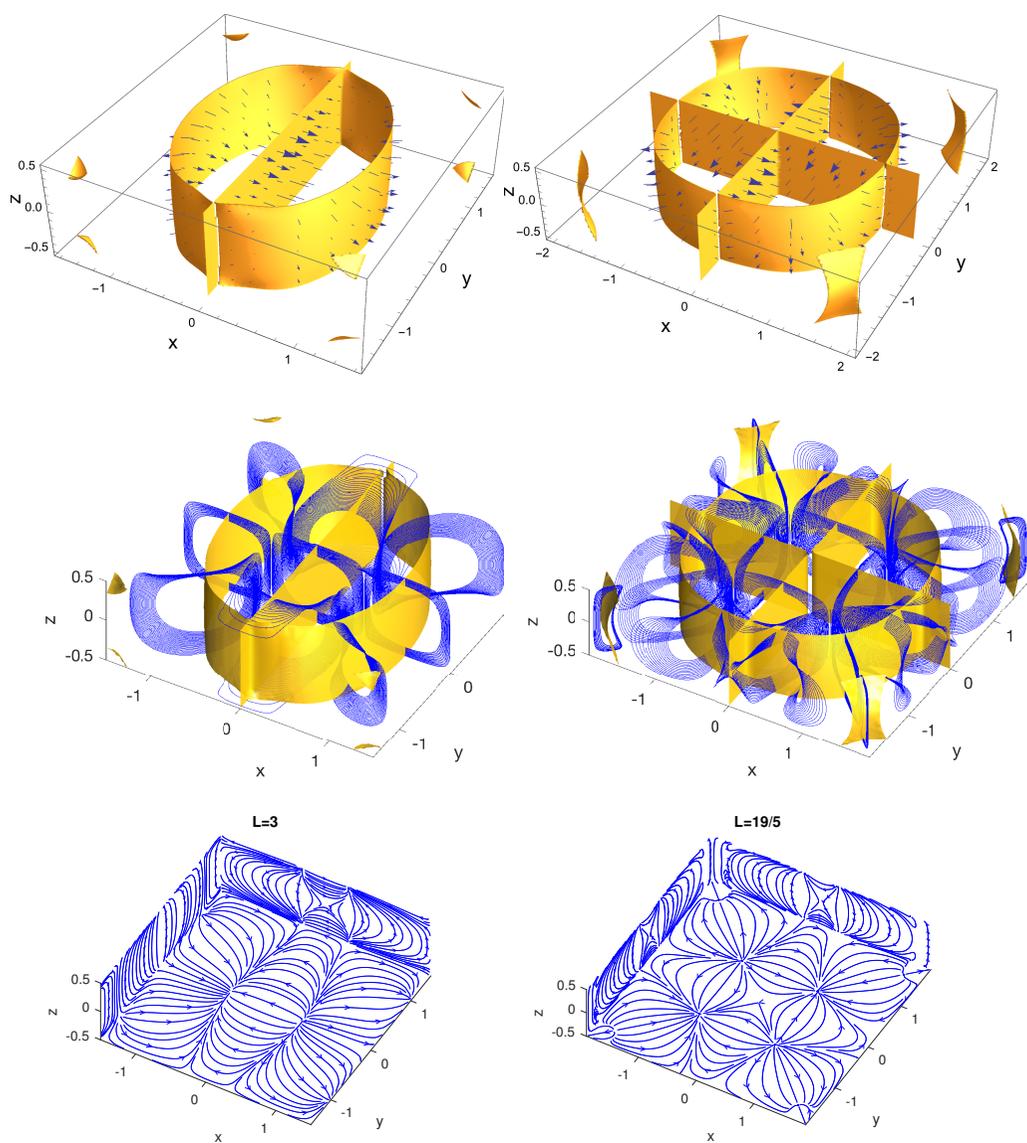


FIGURA 10. Patrones al inicio de convección, primer columna $L = 3$ y bloque 1, segunda columna $L = 3.8$ y bloque 2. Mismo orden enunciado que en la Figura 9.

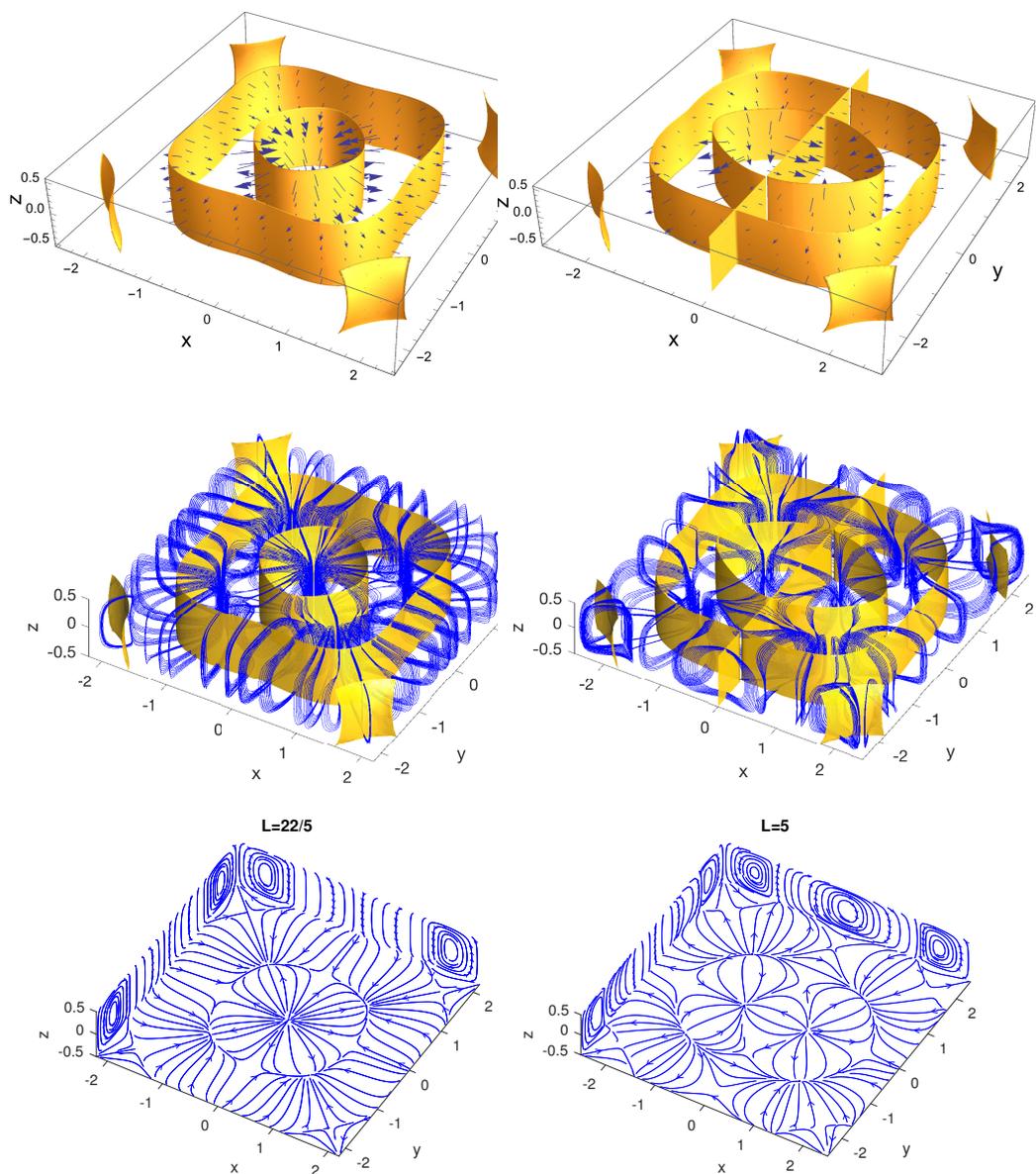


FIGURA 11. Patrones al inicio de convección, primer columna $L = 4.4$ y bloque 3, segunda columna $L = 5$ y bloque 1. Mismo orden que el enunciado en figura 9.

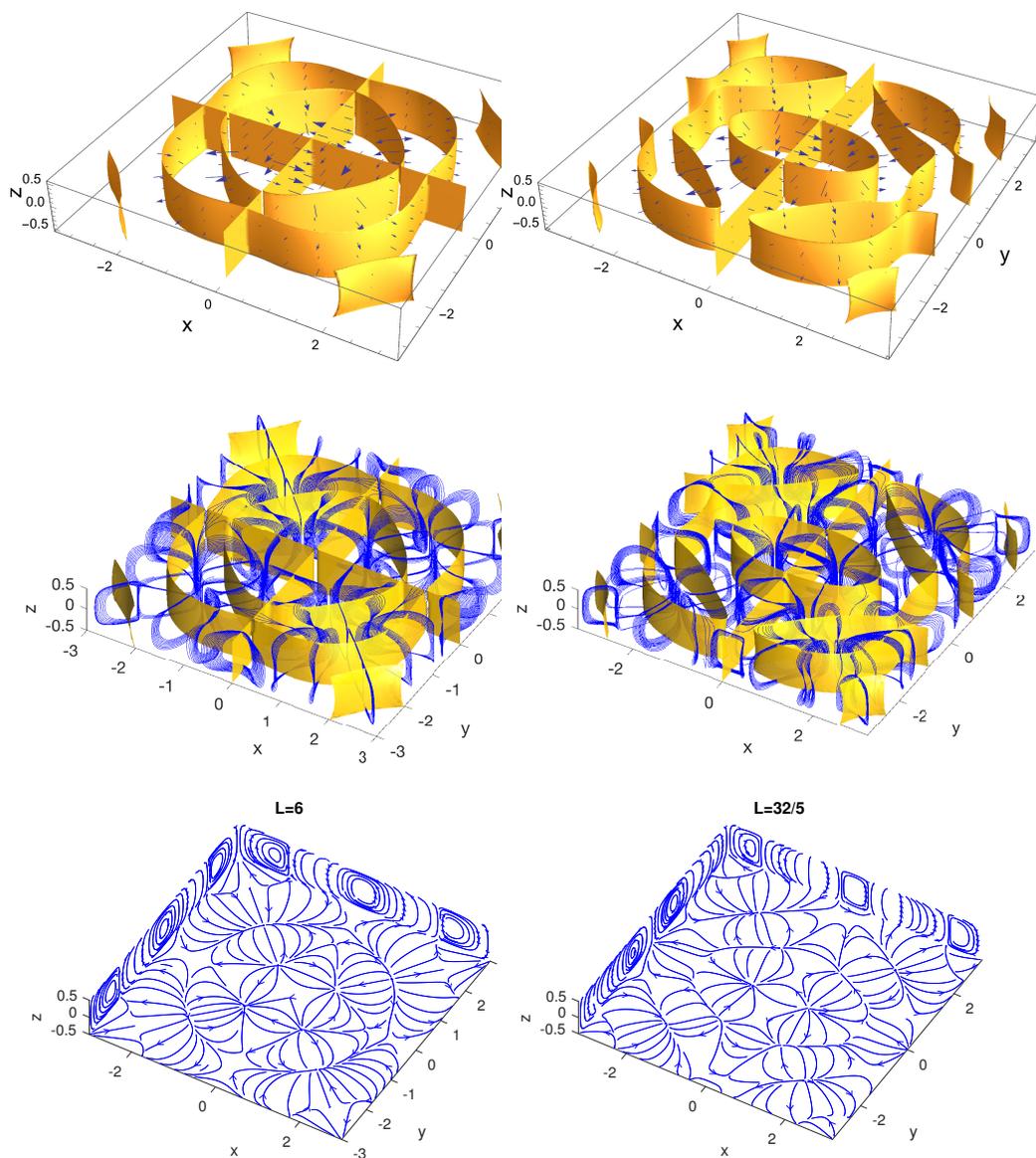


FIGURA 12. Patrones al inicio de convección, primer columna $L = 6$ y bloque 2, segunda columna $L = 6.4$ y bloque 1. Mismo orden que el enunciado en figura 9.

7. PALABRAS FINALES

Proponemos una manera sencilla de seguir la evolución de los patrones de convección para L creciente. Para establecer esta propuesta procedimos en primer lugar a identificar valores de L en donde las simetrías del flujo cambian, para $L \in (0, 6.6]$ identificamos 7 valores, ver Figura 4, en estos valores particulares de L los valores propios tienen la misma multiplicidad algebraica y geométrica, igual a 2 o 3, según el número de curvas $Ra_c(L)$ que se intersectan. Adicionalmente, graficamos de cuatro formas diferentes el patrón de flujo para valores de L con una sola simetría, Figuras 7 y 9 a 12, estas visiones múltiples nos permitieron proponer un diagrama simplificado de la evolución de patrones para los modos dominantes. Un trabajo futuro es el de aclarar el papel, dentro del contexto de la teoría de bifurcaciones, de los valores propios con misma multiplicidad algebraica y geométrica.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue patrocinado por el Proyecto CONACYT de Ciencia Básica A1-S-41007 “Bifurcaciones en el estudio de la existencia y estabilidad de soluciones de EDP”.

REFERENCIAS

- [1] Catton I. *The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below*, Int. J. of Heat Mass Transfer, 15, 665-672, 1972.
- [2] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover, New York, 1981.
- [3] Daniels P. G. & Jhugroo E. *Pattern formation in square planform containers*, IMA Journal of Applied Mathematics, 76, no. 4, 524-553, 2011.
- [4] Davis S. H. *Convection in a box: linear theory*, J. Fluid Mech., 30, no. 3, 465-478, 1967.
- [5] Drazin P. G. *On the effects of side walls on Bénard convection*, ZAMP, 26, 239-243, 1975.
- [6] Edwards B. E. *Crossed rolls at onset of convection in a rigid box*, J. Fluid Mech., 191, 583-597, 1988.
- [7] Fukazawa Y. & Funakoshi M. *Onset of thermal convection and its flow patterns in a rectangular cavity*, Fluid Dyn. Res., 47, no. 6, 065505 (33pp), 2015.
- [8] Gelfgat A. Y. *Different modes of Rayleigh-Bénard instability in two- and three-dimensional rectangular enclosures*, J. Comput. Phys., 156, no. 2, 300-324, 1999.
- [9] Golubitsky M. & Stewart I. & Schaeffer D. G. *Singularities and groups in bifurcation theory, volume II*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] Hirschberg P. & Knobloch R. *Mode interaction in large aspect ratio convection*, J. Nonlinear Sci., 7, 537-556, 1977.
- [11] Mizushima J. & Nakamura T. *Onset of Three-Dimensional Thermal Convection in a Rectangular Parallelepiped Cavity*, J. Phys. Soc. Japan, 72, no. 2, 197-200, 2003.
- [12] Puigjaner D. & Herrero J. & Simó C. & Giralt F. *Bifurcation analysis of steady Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity with conducting sidewalls*, J. Fluid Mech., 598, 393-427, 2008.
- [13] Puigjaner D. & Simó C. & Grau F. X. & Giralt F. *Stability Analysis of the Flow in a Cubical Cavity Heated From Below*, <http://www.maia.ub.es/dsg/1999/9901puigjaner.ps.gz>
- [14] Puigjaner D. & Simó C. & Herrero J. & Giralt F. *Stability analysis of the flow in a cubical cavity heated from below*, Phys. Fluids, 16, no. 10, 3639-3655, 2004.
- [15] Torres J. F. & Henry D. & Komiya A. & Maruyama S. *Bifurcation analysis of steady natural convection in a tilted cubical cavity with adiabatic sidewalls*, J. Fluid Mech., 756, 650-688, 2014.

Javier Pérez

Instituto de Educación Media Superior,
Plantel Iztapalapa,
Academia de Matemáticas.
Calz. Ermita Iztapalapa s/n, Col. Lomas de Zaragoza
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09620, CDMX, México
e-mail: javier.perez@iems.edu.mx

Joaquín Delgado Fernández

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México
e-mail: jdf@xanum.uam.mx



UNA MIRADA A LA GEOMETRÍA EN GALICIA A TRAVÉS DE LA VIDA Y OBRA DE MATEMÁTICOS PIONEROS

DAPENA JANEIRO A., SOUTO-SALORIO M.J., TARRÍO TOBAR, A.D.

RESUMEN. En este trabajo se recuerda a algunos matemáticos relevantes en la Historia de las Matemáticas en Galicia (España) que tuvieron repercusión internacional. Sus aportaciones quedan entrelazadas con el relato de tres hechos históricos relacionados con las Matemáticas: la elaboración de la Carta Geométrica de Galicia, los estudios sobre Geometría del triángulo en A Coruña (La Coruña) y la creación de la Facultad de Matemáticas en la Universidad de Santiago de Compostela.

La belleza de las matemáticas solo se muestra a sus seguidores más pacientes.
Maryam Mirzakhani

1. INTRODUCCIÓN



JOSÉ RODRÍGUEZ GONZÁLEZ



DOMINGO FONTÁN



JUAN JACOB DURÁN LORIGA



ENRIQUE VIDAL ABASCAL



CARTA GEOMÉTRICA DE GALICIA



LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO



LAS MATEMÁTICAS EN LA USC

La Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela (USC), una de las más prestigiosas de España y la única de Galicia, celebra en 2022 su 45 aniversario y los 65 años de la implantación de la Licenciatura.

Este artículo sirve para resaltar este aniversario al mismo tiempo que recuerda a cuatro matemáticos gallegos pioneros que vivieron y desarrollaron su labor en Galicia en períodos comprendidos entre finales del siglo XVIII y finales del XX. Sus vidas transcurren en intervalos de años que se van intersecando en el tiempo, José Rodríguez González (1770-1824), Domingo Fontán Rodríguez (1788-1866), Juan Jacobo Durán Loriga (1854-1911) y Enrique Vidal Abascal (1908-1994). Sus matemáticas recorren, de manera continua dos siglos de la Historia y abarcan mucho más que los hechos en los que nos vamos a centrar.

Nuestros protagonistas tienen muchas cualidades en común, entre otras: su preocupación por la ciencia y por la formación de los estudiantes, fueron progresistas y comprometidos, lucharon por la apertura de España al exterior y por los avances científicos. Eran unos humanistas polifacéticos. Además, pese a las dificultades de la

época que le tocó vivir a cada uno, hicieron el esfuerzo por relacionarse con matemáticos de otros países. Todos dan nombre a calles y a diversas instituciones en distintas ciudades gallegas: Durán Loriga tiene una calle en Coruña y da nombre a una biblioteca, Vidal Abascal tiene calle en Santiago y Lalín, Rodríguez en Coruña y Lalín, Fontán en Pontevedra, Santiago y Coruña y da nombre a un centro de enseñanza. Durán dio nombre a dos instituciones de la Universidad de Compostela, entre 1935-36 al Seminario Matemático y en 1945 a la recién creada Sección de Matemáticas.

El texto está organizado de la siguiente manera. Después de la Introducción, la Sección 2 está dedicada a los matemáticos José Rodríguez González y Domingo Fontán Rodríguez, ambos vivieron entre los siglos XVIII y XIX y fueron catedráticos de matemáticas en la Universidad de Santiago de Compostela. A ellos está asociada la elaboración de la llamada Carta Geométrica de Galicia realizada con una triangulación del territorio gallego y usando para ello, por primera vez, un método científicamente riguroso. Fontán fue pionero en el uso del metro como unidad de medida lineal y Rodríguez formó parte de la comisión encargada de los cálculos que conducirían a la existencia del Sistema Métrico Decimal.

En la Sección 3 se da una semblanza del matemático Juan Jacobo Durán Loriga prestando una especial atención a su estudio de la Geometría del Triángulo realizado a finales del siglo XIX desde su ciudad natal A Coruña. Descendiente de una larga familia de marinos y artilleros, su abuelo Antonio Loriga Reguera era propietario del Pazo de Sobrecarreira, situado en una localidad cercana a la ciudad de A Coruña. En esta casa solariega tuvo lugar un hecho histórico destacado [9] vinculado a la Carta Geométrica.

El geómetra Enrique Vidal Abascal centra la Sección 4, en la que comentaremos algunos de sus logros científicos y de gestión llevados a cabo a mediados del siglo XX en la Universidad de Santiago de Compostela. Gracias a sus gestiones, en el año 1945 se creó la Sección de Astronomía Teórica y Matemática “Durán Loriga” y el Observatorio Astronómico. Ambas instituciones pueden ser consideradas el germen de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, la cual en 1977 se convirtió en la Facultad de Matemáticas de la única universidad gallega en ese momento.

2. JOSÉ RODRÍGUEZ GONZÁLEZ Y DOMINGO FONTÁN. CARTA GEOMÉTRICA DE GALICIA

A mediados del siglo XVIII, varios proyectos de medición fracasaban por la diversidad de unidades de medida existentes, entre otras razones. Con el fin de unificarlas, la Academia de Ciencias de Francia, propuso el 17 de Marzo de 1791 la adopción del Metro cómo la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre, para ello se midió en toesas (1949.0366 mm) el meridiano desde Dunkerque a Barcelona pasando por París. La técnica que usaron fue la triangulación geodésica: a lo largo del meridiano trazaron una cadena de triángulos cuyos vértices solían ser montañas y desde cada cumbre medían el ángulo que había con respecto a otros montes cercanos. El primer prototipo de metro como unidad básica de longitud fue depositado en los archivos de la Asamblea Nacional francesa en 1799. Sin embargo, los científicos que intervinieron en el proceso pidieron una ampliación desde Barcelona hasta las islas de Ibiza y Formentera, pues habían apreciado errores y querían verificarlos con nuevos cálculos. Como consecuencia de ello hubo un pequeño cambio en la longitud oficial del metro. A comienzos del siglo XIX, el matemático José Rodríguez González (Lalín, 1770 - Santiago de Compostela, 1824) formó parte de la Comisión para las mediciones del nuevo tramo español [2], con importantes aportaciones y relevantes consecuencias como veremos a continuación.

La elaboración de mapas cartográficos de España se venía proponiendo desde principios del siglo XVIII con gran transcendencia socio-económica-política. En general, se llevaron a cabo parcialmente y con inexactitudes notables debido, por un lado, a la falta de rigor y método y, por otro, a la carencia de una unidad de medida única.

A principios del siglo XIX, el primer mapa elaborado con rigor científico en España fue realizado por Domingo Fontán Rodríguez (Portas, 1788 - Cuntis, 1866) mediante mediciones geodésicas y con un trabajo de campo sin precedentes. Dicho mapa, conocido con el nombre Carta Geométrica de Galicia fue modelo para otros mapas y se usó en distintos proyectos de ferrocarril y de carreteras. Para llevarlo a cabo, elaboró una triangulación del territorio gallego ampliado con una franja de lugares fronterizos. Tomando como vértices las cimas de los montes fue construyendo una red de triángulos con punto cero de referencia la Torre del Reloj de la Catedral de Santiago de Compostela. La medición de dicho punto la realizó con observaciones astronómicas, de longitud, latitud y acimut¹ de gran exactitud teniendo en cuenta los medios disponibles. Fontán poseía una formación muy amplia. Además de su actividad política y profesional, en la que pasó por diferentes e importantes cargos, también tuvo una intensa vida académica que comenzó en 1811 en la Universidad de Santiago [2].

Volviendo a la Carta Geométrica, que es la que hizo famoso a Fontán, es importante destacar que la idea de la triangulación se debe a su maestro, el ya mencionado matemático Rodríguez con quien cursa estudios de Matemáticas y mantiene un contacto continuo a lo largo de sus vidas. Ambos, Rodríguez y Fontán, fueron catedráticos de Matemáticas Sublimes en la Universidad de Santiago de Compostela.

Rodríguez es considerado el primer matemático gallego con proyección internacional, impulsor de la cristalografía en España y autor de algunos de los trabajos que definieron el sistema métrico decimal.

Rodríguez realizó varios viajes científicos, lo que le permitió estar informado de los avances conocidos en Europa [2] y [18]. En 1803 realiza una estancia en París donde estudia con Jean-Baptiste Biot. En 1806, por encargo del gobierno español, fue designado comisario de las ya mencionadas mediciones del arco de meridiano ampliado de Dunkerque-Barcelona a las islas Baleares.

Entre 1809 y 1811 el matemático gallego se trasladó a Londres, donde realiza cálculos relativos al meridiano de Greenwich. En este tiempo escribe para la Royal Society de Londres la memoria “Observations on the measurement of threes degrees of the meridian, conductivity in England by Lieutemant Colonel William Mudge”. El texto fue posteriormente publicado, en 1812, en la revista *Philosophical Transactions* y traducido al francés por Delambre para *Connaissance des Temps*, y al español por Ramón María Aller Ulloa (1878-1966) para el Seminario de Estudios Galegos [1]. En el texto se encuentra el estudio de Rodriguez acerca de los cálculos realizados en las expediciones para confirmar la teoría de Newton sobre la forma de la Tierra [2] y, en particular, los llevados a cabo por John Mudge. A partir de los cálculos obtenidos por el físico británico, la Tierra estaría achatada por el ecuador; el error fue detectado por Rodríguez en concreto en la determinación de la latitud de la estación de Arbury Hill [2].

En 1814, Rodríguez continua su periplo internacional en Alemania, donde estudia cristalografía en la Universidad de Gotinga. Aquí tiene contacto indirecto con Carl Friedrich Gauss. En 1822 ayudó a organizar la recién creada Universidad Central de Madrid, hoy Universidad Complutense y en dicho centro ocupó la cátedra de Astronomía. Sus instrumentos de trabajo se pueden ver en una sala del Museo de Ciencias Naturales de Madrid. Por otra parte, su colección de mineralogía, regalo del considerado fundador de la Cristalografía René Just Haüy, fue donada a la Universidad

¹En Astronomía, acimut es el ángulo o longitud de arco medido sobre el horizonte celeste y que se forma con el punto cardinal Norte y la proyección vertical del astro sobre el horizonte del observador situado en alguna latitud. Se mide en grados desde el punto cardinal Norte en el sentido de las manecillas del reloj.

²En el período 1736-1744, la Academia de Ciencias de París había organizado dos expediciones para confirmar la forma de la Tierra dada en la teoría de Newton. Se realizaron dos viajes, uno al Ecuador y otro al Polo Norte, durante los cuales se midieron dos arcos de meridiano terrestre con la intención de comparar ambas mediciones.

de Santiago de Compostela y actualmente está ubicada en su Museo de Historia Natural.

Participó, junto a Fontán y otros científicos, en iniciativas para modernizar las instituciones educativas superiores. Ambos eran personas de mente abierta y luchaban contra el inmovilismo en España. Entre sus méritos personales destacan por haber sido elegidos por sus conciudadanos diputados a las Cortes: Rodríguez fue diputado a Cortes por Galicia entre 1821-1823 y Fontán fue diputado por Pontevedra entre 1836-43.

Rodríguez colaboró con Fontán y obtuvo instrumentos precisos para las mediciones llevadas a cabo por el segundo, por ejemplo en París adquirió un metro legal y un teodolito.

Fontán fue un precursor en el uso de esa nueva unidad de medida utilizándola ya desde 1817 para su Carta Geométrica. Esta es una de las razones por la que su trabajo es considerado en la vanguardia científica. Como ya hemos mencionado, el primer prototipo de metro como unidad básica de longitud fue depositado en los archivos de la Asamblea Nacional francesa en 1799; sin embargo, en España no fue oficial hasta 1849.

Si bien la elaboración de la Carta Geométrica se había realizado entre 1817 y 1834, su impresión sufrió un retraso por la falta de un experto en grabado. Finalmente, se llevó a cabo en París en el taller de Louis Bouffard en 1845. Por Real Orden de 26 de octubre de 1846 se ordenó llevar a cabo la estampación del mapa. En junio de 1847 llegaron a España 500 ejemplares de los cuales 450 se enviaron al gobierno y los 50 restantes a diversas autoridades en Galicia y a Madrid [3].

Un año antes de comenzar la triangulación, Fontán realizó unas prácticas de medición iniciales en 1816. Para realizarlas, había instalado una improvisada estación geodésica cerca de la ciudad de A Coruña en el Pazo de Sobrecarreira propiedad de su amigo Antonio Loriga Reguera y abuelo de Juan Jacobo Durán Loriga [9], a quien dedicamos la próxima sección.

3. JUAN JACOBO DURÁN LORIGA. LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

El matemático Juan Jacobo Durán Loriga (A Coruña, 1854-1911) fue académico correspondiente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, socio fundador de la Sociedad Matemática Española, miembro de la *Société Mathématique de France*, de la *Association française pour l'Avancement des Sciences*, del *Circolo Matematico di Palermo*, de la Sociedad Científica Antonio Alzate (México), profesor honorario del Real Instituto de Lisboa y de la Universidad de Tempio (Italia).

Desde A Coruña, estableció contacto postal y personal con relevantes matemáticos de la época, tanto españoles como extranjeros, así queda reflejado en [6, 17] donde hay constancia de su correspondencia. Sus trabajos fueron publicados en distintas revistas nacionales y extranjeras, entre las que podemos citar *Gaceta de las Matemáticas Elementales*, *Le Matematiche puré ed. Applicata*, *Journal de Mathématiques Élémentaires*, *Progreso Matemático*, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, *Revista de la Sociedad Matemática Española* [14], [15].

Sus artículos, entre otros los dedicados a la Geometría del Triángulo, le dieron un reconocimiento internacional. En 1906, escribió una nota en memoria de Gohierre de Longchamps [11, 20], en la que hace referencia a este campo de la Geometría: [3]

“[...] Hablaríamos ahora con gusto de la infinidad de investigaciones del Sr. Longchamps que aparecen en varias revistas americanas, pero esto no podemos hacerlo en esta breve necrología, escrita con el único fin de rendir un tributo a la antigua amistad que nos unía al notable geómetra; así nos limitaremos a recordar la importantísima contribución que aportó a la Geometría reciente del triángulo, preciosa rama de la geometría elemental que, formada en un período

³Nota de las autoras: los párrafos de los otros autores han sido reproducidos de forma textual, sin modificar la gramática ni la acentuación.

de treinta años, ha tenido por fundadores a los ilustres géómetras franceses Sres. Lemoine y Brocard y al eminente profesor belga Sr. J. Neuberg.”

Durante el siglo XIX, el estudio de los triángulos y sus propiedades acaparó la atención de una parte de la comunidad matemática. En España, la revista *El Progreso Matemático* publicaba artículos de investigación de diversos campos de las matemáticas y, en particular, las publicaciones de geometría eran en su mayoría relativas al triángulo. Si bien era una revista de categoría intermedia, contaba con la colaboración de varios matemáticos extranjeros: Peano, Césaro, Brocard, Lampe, Lemoine, Loria, Vivanti, entre otros [10]. Durán Loriga publicó varios trabajos en esta revista matemática.

Una de las aportaciones de Durán Loriga fue el concepto de potencia de un triángulo publicado en 1894 en *El Progreso Matemático* [7] y que podemos formular como sigue: si un triángulo tiene lados de longitud a, b, c , se llama potencia parcial en a al número $p_a = (b^2 + c^2 - a^2)/2$ y se llama potencia del triángulo al número $P = p_a + p_b + p_c$ que coincide con la mitad de la suma de los cuadrados de los lados.

Esta idea fue utilizada por varios matemáticos de la época y Durán la utilizó en distintos resultados. Un ejemplo de ello lo encontramos en su artículo “Breve nota matemática sobre el triángulo”. En [5], página 70, podemos leer su estudio de las propiedades de triángulos equipotenciales, en particular da el siguiente resultado: Consideremos un triángulo ABC y construyamos sobre uno de sus lados, por ejemplo, BC todos los triángulos DBC que sean equipotenciales con el propuesto, esto es, que sea constante la suma de los cuadrados de los lados. El lugar geométrico que forman los puntos D es una circunferencia con centro el medio de BC y por radio la potencia p_a . Obtenemos así tres circunferencias. Cada dos de esas circunferencias se cortan en un par de puntos.

Además de los trabajos sobre triángulos, Durán Loriga se interesó por otros temas como teoría de números, ecuaciones algebraicas, etc. En [5] página 221, Durán Loriga aborda las llamadas Identidades de Newton. Desde principios del siglo XVIII hasta la actualidad, éstas han sido tema de estudio de distintos matemáticos que publicaron demostraciones sobre ellas [12].

Al comienzo del artículo de Durán Loriga podemos leer

“Es bien sabido que el procedimiento clásico para la determinación de la suma de potencias semejantes de las raíces de una ecuación es el llamado método de Newton. En la presente nota nos proponemos llegar a las expresiones a las que dicho método conduce, más rápidamente que por el procedimiento usual, y sin necesidad de recurrir a la teoría de derivadas.”

Su razonamiento se basa en que si dos ecuaciones tienen iguales los primeros coeficientes entonces las sumas de sus raíces y las de sus j -productos también tendrán que ser iguales. Para ello usa la fórmula hoy llamada de Leibnitz para el cálculo de las potencias de orden k de una suma conocidos los productos de $j < k + 1$ factores. Llega así a la conclusión de que

“La investigación de las funciones simétricas simples de las raíces de una ecuación, hasta un grado igual al de ésta, queda reducida a estudiar, para una ecuación, la suma de potencias del mismo grado de sus raíces.”

También destacan sus propuestas de problemas abiertos. En [16] podemos leer que, los colaboradores extranjeros propusieron la mayoría de los problemas que aparecen en *El Progreso Matemático* y solo cinco españoles: Durán Loriga, J. Luzón de las Cuevas, C. Jiménez Rueda, E. Torroja y L. de Ala. Sin embargo, únicamente Durán Loriga puede ser reconocido como un colaborador activo pues propuso 20 problemas y el resto solo uno.

Su visión de la educación científica queda reflejada en distintas publicaciones. En un artículo titulado *¡Sursum corda!*⁴ publicado en la Revista de la Sociedad Matemática Española en 1911, [4] dice

“La base de toda educación científica debe ser no la que presenta el trabajo como una imposición, sino la que lo haga ver como una obra agradable, como una necesidad para dignificar al hombre, como una expansión del alma.”

Durán Loriga era una persona con inquietudes sociales, con una ideología abierta que contrastaba con la usual de la época. Sirva como ejemplo, su alegato a favor de las mujeres matemáticas en la conferencia “Una conversación sobre Matemáticas” impartida en 1904 en A Coruña.

Durán Loriga fue elegido académico numerario de la Real Academia Galega (RAG) y ya tenía entregado su discurso cuando falleció sin tomar posesión de su plaza. La institución custodia en su archivo una edición de los manuscritos originales del mismo [8] donde podemos leer

“Yo quisiera pintar aquí las bellezas con que a cada paso se tropieza en el estudio de la ciencia abstracta; esto, me llevaría demasiado lejos y necesitaría además, entrar en el tecnicismo científico, pero, creedme, que se experimenta con frecuencia ese sentimiento emotivo que emana de la poesía y la música.”

4. ENRIQUE VIDAL ABASCAL. LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En 1945, el matemático Vidal Abascal impulsa la creación de la Sección de Astronomía Teórica y Matemática “Durán Loriga” con la que intenta reactivar la investigación matemática en la universidad compostelana. En esa época, la docencia de matemáticas era impartida por Ramón María Aller (catedrático de Astronomía), Enrique Vidal Abascal (profesor adjunto) y Antonia Ferrín Moreiras (ayudante de clases prácticas) a quienes se les reconoce la creación de la Sección de Matemáticas, especialmente, a la labor de gestión llevada a cabo por Enrique Vidal Abascal. La Sección de Matemáticas (1957) es el origen de la actual Facultad de Matemáticas, de la que Vidal fue su primer decano. Terminamos nuestro relato con una breve reseña de su biografía recogida del trabajo [19].

Enrique Vidal Abascal (Oviedo, 1908 - Santiago de Compostela, 1994) fue un importante científico, pintor, inventor y divulgador. Aunque nació en Oviedo siempre se sintió gallego de Lalín (Pontevedra), donde estaba la casa de sus abuelos y a la que regresaba habitualmente. Su faceta matemática se centró principalmente en Astronomía y Geometría Diferencial. Destacan su visión innovadora y sus iniciativas para modernizar y abrir la universidad a la comunidad internacional. Vidal fue impulsor y primer presidente de la Real Academia Galega de Ciencias. Desde Santiago, creó una importante escuela de Geometría Diferencial en España y fue pionero en la organización de varios congresos internacionales, que se iniciaron en 1963.

Licenciado en Ciencias Exactas en 1931, comenzó su tesis doctoral en un tema que usaba métodos geométricos para el cálculo de órbitas. Vidal obtuvo el título de doctor por la Universidad Central de Madrid en 1944 con el trabajo titulado “El problema de la órbita aparente en las estrellas dobles visuales”. Su tesis doctoral fue dirigida por Ramón María Aller, iniciador de la investigación en Estrellas Dobles en España y descubridor de cuatro de ellas.

En 1941, Vidal obtiene un puesto en la Universidad de Santiago de Compostela como Profesor Auxiliar temporal y Encargado de Cátedra de Matemáticas Especiales y Geometría Métrica, que compatibiliza con su puesto de Catedrático numerario de Instituto obtenido en 1933. A mediados de 1944, pasa a ocupar el puesto de astrónomo

⁴¡Arriba los corazones! fue muy utilizado en estos años regeneracionistas. Juan Jacobo Durán Loriga lo utilizó como título de su artículo con el que comenzaba la Revista de la Sociedad Matemática Española, vol. 1, núm. 1 (mayo de 1911), págs. 21-25, y que se reproduce en el vol. 1, núm. 1, págs. 130-134 de La Gaceta de la RSME.

adjunto en el Observatorio de la universidad compostelana y unos meses después es nombrado director de la Sección de Astronomía Teórica y Matemática “Duran Loriga”. En 1955 obtuvo la cátedra de Geometría Diferencial en la Universidad de Santiago de Compostela, puesto que desempeñó hasta su jubilación.

La Geometría Diferencial fue la disciplina por la que se sintió atraído desde sus años de doctorado en la Universidad de Madrid. Allí coincidió con su amigo Luis Santaló con quien mantuvo contacto a lo largo de su vida. Sus primeros trabajos en este campo tratan sobre curvas paralelas en superficies y fueron publicados entre 1943 y 1947. En 1949 obtiene el premio Alfonso X El Sabio del Centro Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) por su obra “Geometría Integral sobre superficies curvas”.

En la siguiente década, Vidal es becado por el CSIC en un par de ocasiones. En 1952, para viajar a Suiza y trabajar con Georges de Rham sobre fundamentos de la Geometría Integral y en 1957, para asistir a la I Reunión de Matemáticos de Expresión Latina en Niza, donde conoce a los matemáticos más relevantes del momento. Sus relaciones internacionales se fueron afianzando en los siguientes años, participando en varios de estos congresos, visitando y recibiendo visitas de investigadores. En la memoria elaborada por él mismo podemos leer los nombres de los geómetras mundiales con los que mantuvo relación

“[...] En breves años pasan por Santiago, para dar conferencias o cursillos en el Departamento que dirijo, los siguientes profesores: Españoles: Abellanas, Ancochea, Viviente, P. García, Sancho San Román, Vaquer, Plans, Etayo, Dou. Franceses: Deheuvels (6 veces), Lichnerowicz (4), Reeb (2), Godbillon (2), Moussu, Lehmann, Thom, Hector, Lutz, Martinet, Roussarie, Goldschmidt, Miteau. Norteamericanos: Spencer, Bott, Sacksteder, Reinhart, Gray, Kohn. Ingleses: Walker, Willmore. Suizos: De Rham, Haefliger, Eckmann. Belgas: Dedecker. Canadienses: Kumpera. Rumanos: Vranceanu. Argentinos: Santaló. Los cursos dados por algunos de estos profesores fueron recogidos por mis colaboradores y figuran entre nuestras publicaciones que son buscadas por los especialistas.”

La investigación matemática de Vidal se centró en los campos de Astronomía, Geometría Diferencial y Geometría Integral. Además introdujo la teoría de foliaciones en España. Los espacios casi-foliados (*almost-foliated manifolds*) son conocidos como espacios de Vidal en su honor. Vidal y su alumno Luis Hervella llamaron G_1 y G_2 (gallega 1 y gallega 2) a las nuevas variedades pseudokhaelerianas que ellos habían encontrado. La producción científica de Vidal Abascal es extensa, publicó 55 artículos de investigación, 8 monografías y 9 libros, así como varios trabajos de divulgación y de docencia. En diferentes documentos dejó reflejadas sus ideas innovadoras, su interés y dedicación docente. Entre 1966 y 1978 dirigió una quincena de tesis doctorales.

La escuela de Geometría Diferencial creada por él en Santiago de Compostela se extendió a lo largo del territorio español con sus 208 descendientes [13]. Vidal se sentía orgulloso de sus alumnos, de sus logros publicados en revistas de prestigio, de sus méritos académicos y el sentimiento era recíproco. Sirvan de muestra las palabras de su alumno, el destacado matemático, Antonio Martínez Naveira (A Coruña, 1940 - Valencia, 2021), quien defendió en 1969 la primera tesis doctoral de un egresado de la Facultad de Matemáticas de Santiago de Compostela, tesis dirigida por Vidal:

“[...] Él nos mostró a mí y a otros jóvenes del Departamento la forma de investigar en Geometría Diferencial, la importancia de las relaciones entre colegas a nivel nacional e internacional y lo imprescindible que era aprender las últimas técnicas sobre el problema en el que se estuviese trabajando. Siempre nos animaba y procuraba ayudarnos a que pudiésemos acudir a los centros especializados más relevantes e idóneos. Vidal era una persona de una cultura muy amplia y que se dedicaba con todas sus fuerzas a la docencia, a la investigación y a promocionar a sus discípulos.”

Con esta emotiva declaración, termina nuestra mirada a la Geometría en Galicia a través de la vida y obra de cuatro matemáticos pioneros.

AGRADECIMIENTOS. Las autoras expresan su gratitud al grupo de investigación de la Universidad de A Coruña Geometría Diferencial y Aplicaciones, a la Xunta de Galicia (ED431C 2020/15 y ED431G 2019/01 por la ayuda al Centro de Investigación de Galicia CITIC).

REFERENCIAS

- [1] Aller Ulloa, R., “Don José Rodríguez González”, o Matemáticos do Bermés, Arquivos do Seminario de Estudos Galegos, III, 27-95, 1929.
- [2] Barral Martínez, M., “José Rodríguez González”, Álbum da Ciencia. Culturagalega.org. Consello da Cultura Galega, 2012. <http://www.culturagalega.org/albumdaciencia/detalle.php?id=313> [lectura: 5/11/2021]
- [3] Barral Martínez, M., “Domingo Fontán Rodríguez”, Álbum da Ciencia. Culturagalega.org. Consello da Cultura Galega, 2012. <http://www.culturagalega.org/albumdaciencia/detalle.php?id=318> [lectura: 5/11/2021]
- [4] Durán Loriga, J.J., ¡Sursum corda!, *Revista de la Sociedad Matemática Española*, I, 21-25, 1911.
- [5] Durán Loriga, J.J., Nota matemática sobre las funciones simétricas simples (suma de potencias) de las raíces de una ecuación, *Progreso Matemático*, vol 2, 221-223, 1892
- [6] Durán Loriga, J.J., *Mathematical Works and correspondence*, Editado por E. L. Ortiz, The Humboldt Library, Londres, 1993.
- [7] Durán Loriga, J.J., Nota sobre el triángulo, *Progreso Matemático*, vol IV, 313-316, 1894
- [8] Fernández Alonso, B., Discurso de contestación al que para su recepción como académico tenía dispuesto el finado don Juan Jacobo Durán Loriga, *Boletín de la Real Academia Galega*, vol. VII, 57: 218-227, 1912. <http://publicacions.academia.gal/index.php/rag/catalog/download/324/325/1044-1?inline=1>
- [9] Fraga, X. A., *Ciencia Próxima*, Ed. EspacioCultura, 2019.
- [10] Hormigon, M., *Progreso Matemático (1891-1900)*, *Llull*, vol. 4, 87-115, 1981.
- [11] Lobart Palet, J., Un estudio sobre la revista *Gaceta de Matemáticas Elementales-Gaceta de Matemáticas (1903-1906)*, *Llull*, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, vol. 12, 7-32, 1989.
- [12] Kalman, D., A matrix proof of Newton Identities, *Mathematics Magazine*, 2000.
- [13] Mathematics Genealogy Project, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=47128> [lectura el 8-10-2021]
- [14] Moreno, R., 13 matemáticos galegos, Madrid, Editorial Anaya, 2004.
- [15] Moreno, R., Juan Jacobo Durán Loriga, *Álbum de Galicia (Consello da Cultura Galega)*, publicado el 21/3/2012 en <http://consellodacultura.gal/album-de-galicia/detalle.php?persoa=1205> [lectura 02/10/2021].
- [16] Oller-Marcén, A.M., The problem section of *El Progreso Matemático*, *Dig where you stand. Proceedings of the fourth international conference on the History of Mathematics Education*, 2017.
- [17] Ortiz, E. L., El rol de las revistas matemáticas intermedias en el establecimiento de contactos entre las comunidades de Francia y España hacia fines del siglo XIX del libro *Contra los titanes de la rutina: encuentro, en Madrid, de investigadores hispano-franceses sobre la historia y la filosofía de la matemática*, Editorial CSIC - CSIC Press, 1994.
- [18] Sampayo Yáñez, M., José Rodríguez González: un erasmus galego nos albores do século do progreso, *Gamma*, 7, 83-88, 2007.
- [19] Souto, M. J., Tarrío, A. D., Enrique Vidal Abascal (1908–1994). Un renacentista en el siglo XX, *La Gaceta de la RSME*, vol. 19, 2, 385–406, 2016.
- [20] Xunta de Galicia, http://www.edu.xunta.gal/centros/iesoteropedrayocoruna/system/files/u28/arquivos/Necrologica_sobre_Longchamps.pdf

Adriana Dapena Janeiro
Facultad de Informática
Universidade da Coruña & CITIC
C.P. 15011 A Coruña, España
e-mail: adriana.dapena@udc.es

María José Souto Salorio
Universidade da Coruña
Grupo de investigación Geometría Diferencial y sus Aplicaciones
C.P. 15001, A Coruña, España
e-mail: maria.souto.salorio@udc.es

Ana Dorotea Tarrío Tobar
Universidade da Coruña
Grupo de investigación Geometría Diferencial y sus Aplicaciones
C.P. 15001, A Coruña, España
e-mail: ana.dorotea.tarrio.tobar@udc.es



SOBRE LAS LÓGICAS ABSTRACTAS

EDGAR A. VALENZUELA NUNCIO

RESUMEN. Presentaremos un panorama de las lógicas abstractas. Mostramos la utilidad e inspiración de estas con varios ejemplos. Además, recorreremos temas que son objeto de estudio de la Lógica Abstracta, presentamos una serie de aplicaciones breves.

1. CARENCIAS DE $\mathcal{L}_{\omega\omega}$

La lógica de primer orden $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ tiene una plétora de resultados y herramientas: compacidad, Löwenheim-Skolem, saturación, interpolación, entre muchas otras. Pero si de expresividad se trata, esta vastedad de teoremas e instrumentos resulta ser una limitación. Hay resultados que utilizan fuertemente compacidad, indicando la expresión restringida que posee $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. Por ejemplo, decir que un conjunto está bien ordenado está fuera del rango de expresión de la lógica de primer orden. Recordamos esta definición.

Decimos que $\langle A, < \rangle$ está bien ordenado cuando cualquier $X \subset A$ tiene un $<$ -mínimo.

Si Φ fuera un conjunto de fórmulas de primer orden que define el buen orden entonces

$$\mathcal{A} \models \Phi \iff \text{está bien ordenado.}$$

Pero consideremos $\Theta = \Phi \cup \{c_{i+1} < c_i : i < \omega\}$. Si Θ tuviera un modelo \mathcal{A} , deduciríamos que $\{c_i^{\mathcal{A}} : i < \omega\}$ no tiene un mínimo. Para obtener un modelo de Θ acudimos a compacidad: sea $\Delta \subset \Theta$ un conjunto finito. En Δ ocurren a lo más n constantes c_i para algún natural $n < \omega$. Si tomamos $\mathcal{A}_\Delta = \langle \omega, <, a_1, \dots, a_n \rangle$, vemos que está bien ordenado y satisface Δ con las interpretaciones $c_i^{\mathcal{A}_\Delta} = a_i$. Entonces Θ tiene como modelo un conjunto que no está bien ordenado. Concluimos que el buen orden no es definible en $\mathcal{L}_{\omega\omega}$.

Esto nos indica que la compacidad nos imposibilita acceder a ciertas características naturales del orden y, en general, de estructuras matemáticas que ocurren en muchos ámbitos.

Otra carencia expresiva con respecto a los órdenes, que la encontramos en una de las estructuras más estudiadas, es la propiedad arquimediana. De nuevo usando compacidad podemos demostrar que la teoría de $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ junto con

$$c \neq 0 \wedge c \neq 1 \\ \{n \cdot 1 \leq c : n \in \mathbb{N}\},$$

tiene un modelo \mathcal{A} . Este modelo a pesar de ser elementalmente equivalente a \mathcal{R} , no posee la propiedad arquimediana porque le agrega el punto $c^{\mathcal{A}}$ a \mathbb{R} y funge como un contraejemplo a dicha propiedad.

2. EXPRESIVIDAD RECLAMADA

Tanto la propiedad arquimediana y el axioma del buen orden pueden ser formuladas en una lógica más expresiva que es la lógica de segundo orden \mathcal{L}^{II} . Esta lógica

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C95.

Palabras clave. Lógica, Teoría de Modelos, Lógicas no Clásicas.

extiende a $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ al permitir una nueva cuantificación sobre un conjunto de variables $\{X, X_0, X_1, \dots\}$ de segundo orden,

$$\varphi(X) \in \mathcal{L}^{II} \implies \exists X \varphi(X), \forall X \varphi(X) \in \mathcal{L}^{II}.$$

Estas fórmulas nuevas cuantifican sobre relaciones y funciones en nuestra estructura, por eso se dicen de segundo orden y el primer orden lo forman los elementos del universo. El buen orden lo podemos expresar como

$$\varphi(<) \wedge \forall X \exists x (X(x) \wedge \forall y (X(y) \rightarrow x \leq y)),$$

donde $\varphi(<) \in \mathcal{L}_{\omega\omega}(\{<\})$ expresa que $<$ es un orden lineal. Y la propiedad arquimediana la podemos formular con

$$\exists N (N(0) \wedge \forall x (N(x) \rightarrow N(x+1)) \wedge \forall x \exists y (x < y \wedge N(y))).$$

Notemos como en ambas expresiones utilizamos $X(x)$ que se interpreta como $x \in X$. Otra cosa que podemos expresar en \mathcal{L}^{II} es que un conjunto tenga tamaño infinito

$$\begin{aligned} |M| \geq \omega \iff & \mathcal{M} \models \exists N, s \exists x (N(x) \wedge \\ & \forall y (y \neq x) \wedge \forall y (y < s(y)) \wedge \\ & \forall y (N(y) \rightarrow N(s(y)))) \wedge \\ & < \text{ es un orden lineal sin punto final.} \end{aligned}$$

En el álgebra también encontramos ejemplos que no pueden ser expresados en primer orden. En la teoría de grupos decimos que un grupo es de torsión si todo elemento tiene orden finito, es decir, existe un natural $n < \omega$ tal que¹ $a^n = e$, donde e es el elemento neutro del grupo. Para ver esto considérese cualquier conjunto de fórmulas Φ en el lenguaje de teoría de grupos (o incluso en cualquier lenguaje más grande), la teoría T de grupos y el conjunto $\{c^n \neq e : 0 < n < \omega\}$ y proceda por compacidad, entonces el grupo resultante no puede ser de torsión. Pero sí podemos expresarlo, por ejemplo, al permitir disyunciones infinitas

$$\forall x \bigvee_{n < \omega} x^n = e.$$

Esta regla genera una nueva lógica $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ que permite conjunciones y disyunciones de longitud infinita ω y por lo recién argumentado, queda claro que es más expresiva que $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. De hecho, también tiene la propiedad de interpolación.

TEOREMA 1. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ con $\models \varphi \rightarrow \psi$. Podemos encontrar $\theta \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ tal que $\models \varphi \rightarrow \theta$ y $\models \theta \rightarrow \psi$, además en θ solo aparecen símbolos que comparten φ y ψ .

Pero esta lógica infinitaria no posee una propiedad de Löwenheim-Skolem en el mismo sentido que $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, para ver esto simplemente notemos que la fórmula

$$\forall x \bigvee_{m < \omega} x = c_m,$$

solo puede tener modelos a lo más numerables. Además de tampoco poseer compacidad por un argumento similar; consideremos

$$\{c \neq c_i : i < \omega\} + \forall x \bigvee_{i < \omega} x = c_i, \quad (\star)$$

cualquier conjunto finito de (\star) tiene un modelo (por ejemplo $\langle \omega, 0, n_i \rangle_{i < k}$), pero la totalidad no puede tener un modelo porque por un lado la interpretación de c no es igual a ninguna de las interpretaciones de las constantes $c_i, i < \omega$, y por otro lado si es igual al menos a una.

Aunque perdemos compacidad y Löwenheim-Skolem en general, logramos conservar algunas herramientas como interpolación, y teoremas de transferencia cardinal. Aún más, hemos ganado suficiente poder expresivo como para caracterizar estructuras numerables.

¹Aquí $a^n = a \cdots a$, n veces.

TEOREMA 2 (Scott). *Para cualquier estructura numerable \mathcal{A} (con lenguaje numerable), existe $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ tal que para cualquier estructura numerable \mathcal{B}*

$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Por supuesto podemos fortalecer $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ al permitir conjunciones más grandes, incluso permitir cuantificaciones infinitarias, de esta forma llegamos a $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$. Esta lógica permite tener $< \kappa$ conjunciones y disyunciones, además permite cuantificación de orden infinito, es decir, si $\bar{x} = x_1, \dots, x_\xi, x_{\xi+1}, \dots$ es de longitud $< \lambda$ entonces $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_{\kappa\lambda}$.

Otro concepto fuera del alcance de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es la expresión de cardinalidad. $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ no es la herramienta adecuada para expresar que algo es infinito. Aunque sí podemos expresar que algo tenga un tamaño finito determinado, por ejemplo tener cardinalidad ≤ 20 se puede expresar en un lenguaje con 20 constantes y con el enunciado

$$\forall x \bigvee_{i < 20} x = c_i.$$

Pero no podemos distinguir entre cardinalidades infinitas, esto es una consecuencia de los teoremas de Löwenheim-Skolem ascendente y descendente.

Definición 3. (Descendente) si φ tiene un modelo de cardinalidad $> \omega$ entonces tiene uno de cardinalidad ω y (Ascendente) modelos en cardinalidades arbitrariamente grandes; donde φ viene de un lenguaje numerable.

Esto nos hace pensar que debe de haber una herramienta que nos ayude a expresar esto y esta la encontramos por el lado de los *cuantificadores generalizados*. Entre estos cuantificadores generalizados encontramos los cuantificadores de cardinalidad: $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ es la lógica que extiende a primer orden al permitir formulas del tipo

$$Q_\alpha x \varphi(x),$$

cuya interpretación es

$$\mathcal{M} \models Q_\alpha \varphi(x) \iff |\{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi[a]\}| \geq \omega_\alpha,$$

es decir, existen al menos ω_α elementos a que satisface φ . En esta lógica se puede ver que también perdemos Löwenheim-Skolem al considerar la fórmula

$$\varphi \equiv Q_\alpha x (c \neq x),$$

que nos dice que tenemos al menos ω_α elementos en el dominio de nuestra estructura; si $\alpha > 0$, entonces φ no puede tener modelos con cardinalidad ω , de hecho ninguna cardinalidad $< \omega_\alpha$. Pero Keisler [8] logró demostrar que el caso $\alpha = 1$ sí satisface compacidad.

Considerando el caso $\alpha = 0$ tenemos que cualquier fórmula en $\mathcal{L}(Q_0)$ de hecho se puede expresar en \mathcal{L}^{II} con la siguiente equivalencia

$$\mathcal{M} \models Q_0 x \psi(x) \iff \mathcal{M} \models \exists Y (\varphi^Y \wedge \forall v (Y(v) \rightarrow \psi(v))),$$

donde φ es el enunciado que expresa infinitud, pero φ^Y es la relativización a Y , es decir,

$$\begin{aligned} \varphi^Y \equiv & \exists N, s \forall xy ((N(x) \rightarrow Y(x)) \wedge (s(x) = y \rightarrow Y(x) \wedge Y(y)) \wedge \\ & \exists z (N(z) \wedge \forall w (w \not\prec z)) \wedge \forall w (w < s(w)) \wedge \\ & \forall w (N(w) \rightarrow N(s(y)) \wedge \\ & < \text{ es un orden lineal sin punto final en } Y). \end{aligned}$$

Con esto obtenemos que \mathcal{L}^{II} es tan expresiva como $\mathcal{L}(Q_0)$.

Otra variación de segundo orden considera un nuevo cuantificador **aa**, cuyas letras provienen del inglés *almost all*. La sintaxis de la lógica obedece las siguientes reglas

$$\varphi(s) \in \mathcal{L}(\mathbf{aa}) \implies \mathbf{aa} s \varphi(s) \in \mathcal{L}(\mathbf{aa}).$$

Para aclarar la semántica tenemos que pasar por unas definiciones técnicas.

Definición 4. Sea M un conjunto $|M| \geq \omega$,

$$\mathcal{P}_\omega M = \{s \subset M : |s| = \omega\}.$$

Un conjunto $X \subset \mathcal{P}_\omega M$ es *cerrado* si $\{s_n : n < \omega\} \subset X$ implica $\bigcup_{n < \omega} s_n \in X$, *no está acotado* si para cada $s \in \mathcal{P}_\omega M$ existe $s' \in X$ con $s \subset s'$. Decimos que X es un *club*² si es cerrado y no está acotado. El filtro³ club es el conjunto $\mathcal{C}_M = \{X \subset \mathcal{P}_\omega M : X \text{ contiene a un club}\}$. Finalmente decimos que $Y \subset \mathcal{P}_\omega M$ es *estacionario* si intersecciona a cada elemento del filtro club.

Entonces la semántica de $\mathcal{L}(\mathbf{aa})$ se define extendiendo la de primer orden de la siguiente forma

$$\mathcal{M} \models \mathbf{aas}\varphi(s) \iff \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\} \in \mathcal{C}_M.$$

Si definimos $\mathbf{stats}\varphi(s) \equiv \neg \mathbf{aas}\neg\varphi(s)$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \mathbf{stats}\varphi(s) &\iff \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \neg\varphi[s]\} \notin \mathcal{C}_M \\ &\iff \mathcal{P}_\omega M \setminus \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\} \notin \mathcal{C}_M \end{aligned}$$

Es decir que para todo club $X \in \mathcal{C}_M$ tenemos que $X \not\subset \mathcal{P}_\omega M \setminus \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\}$, esto es

para todo club $X \in \mathcal{C}_M$ existe $t \in \{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\}$ con $t \in X$.

Lo que equivale a afirmar que $\{s \in \mathcal{P}_\omega M : \mathcal{M} \models \varphi[s]\}$ es estacionario. Consideremos el siguiente enunciado

$$\mathbf{stats}\exists x(\varphi(x) \wedge \neg s(x)), \quad (\star)$$

que equivale a $\neg \mathbf{aas}\forall x(\varphi(x) \rightarrow s(x))$. Si $\mathcal{M} \models (\star)$ tenemos que $A = \{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi[a]\}$ satisface $|A| \geq \omega_1$ y a la inversa, si $|A| \geq \omega_1$ entonces $\mathcal{M} \models (\star)$. Para ver esta equivalencia notemos que si $|A| \geq \omega_1$ entonces no existe $s \in \mathcal{P}_\omega M$ con $A \subset s$, por tanto $\mathcal{M} \models \neg \mathbf{aas}\forall x(\varphi(x) \rightarrow s(x))$. Luego si $|A| \leq \omega$, tenemos que $\hat{A} = \{s \in \mathcal{P}_\omega M : A \subset s\}$ es estacionario, de hecho es un club y por tanto

$$\mathcal{M} \models \mathbf{aas}\forall x(\varphi(x) \rightarrow s(x)).$$

Es decir, hemos probado que $Q_1 x \varphi(x) \equiv \mathbf{stats}\exists x(\varphi(x) \wedge \neg s(x))$. Por tanto $\mathcal{L}(\mathbf{aa})$ extiende a $\mathcal{L}(Q_1)$. De esto deducimos que perdemos Löwenheim-Skolem descendente, pero Barwise, Makkai y Kaufmann [2] probaron compacidad para esta lógica.

Además notemos que si \mathcal{M} es numerable entonces $\{M\}$ es un club y de hecho está contenido en cualquier club. Por tanto

$$\mathcal{M} \models \mathbf{aas}\varphi(s) \iff \mathcal{M} \models \varphi[M],$$

es decir, el cuantificador se comporta como el cuantificador universal \forall en cualquier modelo numerable.

3. COMPARANDO LÓGICAS

Para estudiar lógicas requerimos una herramienta que nos permita relacionarlas entre ellas, lo más natural es pensar en una relación de orden entre lógicas que nos permita evaluar cuándo una es más expresiva que otra. En seguida la ilustramos aprovechando considerar una forma muy natural de obtener nuevas lógicas a partir de una. Podemos considerar $\mathcal{L}_{\kappa\omega}^{II}$, $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}(Q_0)$ y semejantes. También podemos tomar su unión $\mathcal{L}^{II} \cup \mathcal{L}_{\kappa\omega}$. La diferencia entre $\mathcal{L}_{\kappa\omega}^{II}$ y $\mathcal{L}_{\kappa\omega} \cup \mathcal{L}^{II}$ es que la primera permite tener fórmulas con conjunciones infinitas y cuantificaciones sobre relaciones, mientras que la segunda solo permite que las fórmulas tengan cuantificaciones de segundo orden o conjunciones infinitas, no puede tener ambas, en ese sentido $\mathcal{L}_{\kappa\omega}^{II}$ es más expresiva que $\mathcal{L}_{\kappa\omega} \cup \mathcal{L}^{II}$. En este caso tenemos una forma obvia de comparar las fórmulas ya que de hecho $\mathcal{L}_{\kappa\omega} \cup \mathcal{L}^{II} \subset \mathcal{L}_{\kappa\omega}^{II}$ porque la sintaxis coincide. Pero eso no es necesariamente el caso al tratar con dos lógicas arbitrarias, tomemos como ejemplo $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(Q_\alpha)$ y

²Club por *closed*, cerrado en inglés, y *unbounded*, no acotado.

³es un filtro porque es cerrado bajo supraconjuntos y bajo intersecciones, de hecho es cerrado bajo intersecciones.

$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{\kappa\omega_{\alpha+1}}$. En \mathcal{L}_2 tenemos permitido cuantificar hasta ω_α variables, por lo cual podemos fijar el siguiente enunciado

$$\exists \bar{x} \left(\bigwedge_{\xi \neq \zeta} x_\xi \neq x_\zeta \wedge \bigwedge_{\xi < \omega_\alpha} \varphi(x_\xi) \right), \quad (\heartsuit)$$

donde la longitud de \bar{x} es ω_α . Claramente estamos afirmando la existencia de al menos ω_α elementos que satisfacen φ . Esto nos dice que existe una traducción natural de \mathcal{L}_1 en \mathcal{L}_2 :

$$Q_\alpha x \varphi(x) \mapsto (\heartsuit).$$

Notemos que en este caso \mathcal{L}_2 resulta ser estrictamente más expresiva porque podemos definir el buen orden en \mathcal{L}_2 pero en \mathcal{L}_1 no necesariamente se puede hacer porque aunque podamos cuantificar la existencia de un conjunto infinito (incluso más fuerte que eso cuando $\alpha \neq 0$) no podemos definir que de hecho este conjunto infinito genere una cadena decreciente. Esta discusión nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5. Decimos que \mathcal{L}_1 es más expresiva que \mathcal{L}_0 , o \mathcal{L}_1 es tan expresiva como \mathcal{L}_0 , en símbolos $\mathcal{L}_0 \leq \mathcal{L}_1$, siempre que para cada enunciado $\varphi \in \mathcal{L}_0$ exista un enunciado $\psi \in \mathcal{L}_1$ tal que

$$\{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi\} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \psi\}.$$

Ejemplo 1. Ya probamos las siguientes relaciones.

- $\mathcal{L}(Q_0) \leq \mathcal{L}^{II}$,
- $\mathcal{L}(Q_1) \leq \mathcal{L}(\mathbf{aa})$,
- $\mathcal{L}(Q_\alpha) \leq \mathcal{L}_{\kappa\omega_{\alpha+1}}$,
- $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leq \mathcal{L}_{\kappa\mu}, \mathcal{L}(Q_\alpha), \mathcal{L}(\mathbf{aa})$.

En la definición de la relación \leq se hace más explícito el uso de las clases de estructuras. Esto extiende la equivalencia de fórmulas de primer orden de forma natural, en primer orden decimos que dos fórmulas φ, ψ son equivalentes cuando

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \psi,$$

dado cualquier modelo \mathcal{M} . Formulado en otro sentido y teniendo en mente que las fórmulas pueden ser sintácticamente diferentes, podemos decir que para comparar dos lógicas necesitamos una traducción que asegure la misma expresividad y esto lo comprobamos al ver las clases de modelos de ambos enunciados, si las clases son iguales entonces los enunciados expresan lo mismo pero en diferentes lógicas. En este punto ya se puede hasta comparar lógicas abstractas pero seguimos sin poseer una definición formal. Acudimos a dos definiciones para abrir un panorama formal en esta discusión, pero queremos señalar que no son las únicas y que quizá usar una u otra en diferentes momentos sea más conveniente.

4. DIFERENTES LÓGICAS

Definición 6. Decimos que una lógica \mathcal{L} es

- *atómica* si para cada vocabulario v y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}(v)$ atómica, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(v)$ con

$$\text{Mod}_{\mathcal{L}_{\omega\omega}}(\varphi) = \text{Mod}_{\mathcal{L}}(\vartheta);$$

- *cerrada bajo conjunciones* si para cada vocabulario v y cualesquier $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(v)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(v)$ con

$$\text{Mod}_{\mathcal{L}}(\vartheta) \cap \text{Mod}_{\mathcal{L}}(\psi) = \text{Mod}_{\mathcal{L}}(\vartheta);$$

- *cerrada bajo disyunciones* si para cada vocabulario v y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}(v)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(v)$ con

$$\text{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi) \cup \text{Mod}_{\mathcal{L}}(\psi) = \text{Mod}_{\mathcal{L}}(\vartheta);$$

- *cerrada bajo negaciones* si para cada vocabulario v y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}(v)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(v)$ con

$$\text{Mod}_{\mathcal{L}}(\varphi) = \text{Est}(v) \setminus \text{Mod}_{\mathcal{L}}(\vartheta),$$

donde $\text{Est}(v)$ es la clase de todas las v -estructuras;

- *cerrada bajo particularización* si para cada vocabulario v con una constante c y cualquier $\varphi \in \mathcal{L}(v)$, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(v \setminus \{c\})$ con

$$\text{Mod}_{\mathcal{L}}(\vartheta) = \{(\mathcal{M}, a) : (\mathcal{M}, a) \models \varphi(a) \text{ para alguna } a \in M\};$$

- *cerrada bajo relativización* si dados dos vocabularios v_0, v_1 , $c \notin v_0 \cup v_1$ y $\varphi \in \mathcal{L}(v_0), \psi \in \mathcal{L}(v_1 \cup \{c\})$ arbitrarias, existe $\vartheta \in \mathcal{L}(v_0 \cup v_1)$ con

$$\text{Mod}_{\mathcal{L}}(\vartheta) = \{\mathcal{M} : U_{\psi}^{\mathcal{M}} \text{ es } v_0\text{-cerrado, } \langle U_{\psi}^{\mathcal{M}}, \mathcal{S}^{\mathcal{M}} \rangle_{c \in v_0} \models \varphi\},$$

aquí $U_{\psi}^{\mathcal{M}} = \{a \in M : \langle \mathcal{M}, a \rangle \models \psi\}$.

Una lógica \mathcal{L} se dice *regular* si satisface cada una de las propiedades anteriores. Estas lógicas satisfacen $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leq \mathcal{L}$, aunque no necesariamente $\mathcal{L}_{\omega\omega} \leq \mathcal{L}$ implica que la lógica es regular.

Estas definiciones resaltan que no toda lógica satisface propiedades de cerradura que consideramos básicas. Incluso con los ejemplos que hemos dado de lógicas que extienden a primer orden podemos ver que todas satisfacen al menos la cerradura bajo negación, conjunción y particularización. A continuación vemos ejemplos de lógicas que no satisfacen algunas de estas propiedades.

1. La lógica $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ se formula al considerar fórmulas atómicas y sus negaciones y las cerramos bajo $\wedge, \vee, \exists, \forall, Q_{\alpha}, \mathfrak{D}_{\beta}$ y $\alpha < \beta$. Donde

$$\mathcal{M} \models Q_{\alpha}x\varphi(x) \iff |\{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi[a]\}| \geq \omega_{\alpha},$$

$$\mathcal{M} \models \mathfrak{D}_{\beta}x\varphi(x) \iff \text{para todos } a \in M, \text{ salvo } < \omega_{\beta}, \mathcal{M} \models \varphi[a].$$

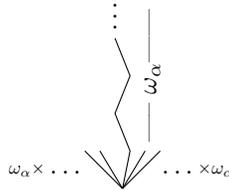
En principio por supuesto que no es cerrada bajo la negación porque solo las fórmulas atómicas tienen negación. Uno se vería tentado a extender esta negación de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sim \phi &\equiv \neg\phi, & \phi &\text{ atómica,} \\ \sim \phi &\equiv \phi, & \phi &\text{ atómica negada,} \\ \sim (\phi \wedge \psi) &\equiv \sim \phi \vee \sim \psi, \\ \sim (\phi \vee \psi) &\equiv \sim \phi \wedge \sim \psi, \\ \sim \exists x\phi(x) &\equiv \forall x \sim \phi(x), \\ \sim \forall x\phi(x) &\equiv \exists x \sim \phi(x), \\ \sim Q_{\alpha}x\phi(x) &\equiv \mathfrak{D}_{\beta}x \sim \phi(x), \\ \sim \mathfrak{D}_{\beta}x\phi(x) &\equiv Q_{\alpha}x \sim \phi(x). \end{aligned}$$

Consideramos un vocabulario $v \supset \{<\}$ entonces

$$Q_{\alpha}x(x < c) \wedge \sim Q_{\alpha}x(x < c)$$

significa que c tiene al menos ω_{α} predecesores pero que hay $< \omega_{\beta}$ elementos que no preceden a c , lo cual no tiene absolutamente nada de contradictorio. Por ejemplo en un árbol con una rama de longitud $\omega_{\alpha} + 1$ y el origen con ω_{α} sucesores



En este caso

$$\text{Mod}(Q_{\alpha}x(x < c)) \neq \text{Est}(v) \setminus \text{Mod}(\sim Q_{\alpha}x(x < c)).$$

2. Consideramos $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ cuyas fórmulas $\varphi \in \mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ son de la forma $\forall \bar{x}\psi(x)$, donde $\psi(x) \in \mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ y no aparecen cuantificadores en ψ . Claramente esta lógica no puede ser cerrada bajo particularización y de hecho tampoco bajo negación porque $\neg\forall \bar{x}\psi(\bar{x}) \equiv \exists \bar{x}\neg\psi(\bar{x})$.
3. En general, la unión $\mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$ de dos lógicas no tiene la propiedad de conjunción ni disyunción, esto es fácil de argumentar porque si $\psi_0 \in \mathcal{L}_0, \psi_1 \in \mathcal{L}_1$ son tales que no existe $\varphi_0 \in \mathcal{L}_1$ con

$$\mathcal{M} \models \psi_0 \iff \mathcal{M} \models \varphi_0$$

ni $\varphi_1 \in \mathcal{L}_0$ tal que

$$\mathcal{M} \models \psi_1 \iff \mathcal{M} \models \varphi_1,$$

es decir que $\mathcal{L}_0 \not\leq \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_1 \not\leq \mathcal{L}_0$. Entonces $\psi_0 \wedge \psi_1, \psi_0 \vee \psi_1 \notin \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$. Pero si ambas satisfacen conjunción y disyunción, podemos encontrar $\mathcal{L} \geq \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$ que sí se cierra bajo conjunción y disyunción simplemente al cerrarla “manualmente”. Además, la unión tiene la propiedad de negación cuando y solo cuando ambas la tienen.

5. TEOREMA DE LINDSTRÖM: LS Y COMPACIDAD COMO BARRERAS EXPRESIVAS

Hemos visto como dos propiedades de $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ nos han imposibilitado expresar escenarios muy naturales con los cuales se encuentran los matemáticos. Estas son compacidad y Löwenheim-Skolem. También observamos como al extender $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ perdíamos alguna de estas propiedades. Esto no es ninguna coincidencia ya que Lindström logró caracterizar a primer orden como la mayor lógica que satisface estas dos propiedades.

TEOREMA 7 (Lindström). *Si \mathcal{L} es una lógica regular que satisface compacidad y Löwenheim-Skolem descendente, entonces $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es tan expresiva como \mathcal{L} .*

Este resultado fue un parteaguas en la historia de la lógica ya que se considera el nacimiento del estudio de las lógicas abstractas. Aunque las lógicas infinitarias han sido incitadas desde el inicio de la lógica formal al interpretar las cuantificaciones como conjunciones o disyunciones infinitarias, o aunque la lógica de segundo orden está formulada desde Leibniz y ha estado en el corazón de la fundamentación de las matemáticas desde finales del siglo XIX, no existía un estudio que diera una caracterización de una lógica. Tampoco existía la noción de comparación entre lógicas (no fuera de los conocimientos básicos como que $\mathcal{L}_{\kappa\lambda}$ extendía a primer orden, que era tan obvio que no requería un estudio profundo). Y menos una caracterización que comprendía conceptos modelo-teóricos.

Este teorema no es el único en esta dirección. Antes de enunciar algunas de ellas, establecemos las propiedades. Decimos que \mathcal{L} satisface:

- la *propiedad de Robinson*, si para cualesquier vocabularios v, v_0, v_1 con $v = v_0 \cap v_1$, cualesquier conjuntos de enunciados $\Phi \subset \mathcal{L}(v)$ y $\Phi_i \subset \mathcal{L}(v_i)$, $i < 2$. Si Φ es completa y $\Phi \cup \Phi_i$ tiene modelo, $i < 2$, también lo tiene $\Phi \cup \Phi_0 \cup \Phi_1$.
- la *propiedad de Tarski* cuando al tener una sucesión $\langle \mathcal{A}_n : n < \omega \rangle$ con $\mathcal{A}_n <_{\mathcal{L}} \mathcal{A}_{n+1}$, entonces

$$\mathcal{A}_n <_{\mathcal{L}} \bigcup_{n < \omega} \mathcal{A}_n.$$

TEOREMA 8. *$\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es tan expresiva como \mathcal{L} si*

- \mathcal{L} tiene la *propiedad de Löwenheim-Skolem* y la *propiedad de Robinson*.
- \mathcal{L} es *compacta* y tiene la *propiedad de Tarski*.

REFERENCIAS

- [1] Barwise K.J., Axioms for Abstract Model Theory, Annals of Mathematical Logic 7, North-Holland, 221–265, 1974.
- [2] Barwise, K.J., Kaufmann, M. & Makkai, M., *Stationary Logic*, Annals of Mathematical Logic 13, North-Holland, 171–224, 1978.
- [3] Dickmann, C., Large Infinitary Languages, Model Theory, North-Holland, 1975.

- [4] Flum, J. *Characterizing Logics*, Model-Theoretic Logics, editores K. J. Barwise y S. Feferman, Springer-Verlag, 77–120, 1985.
- [5] García-Matos, M. & Väänänen, J. *Abstract Model Theory as a Framework for Universal Logic*, Logica Universalis, Birkäuser, 19–33, 2005.
- [6] Karp, C. *Infinite-quantifier Languages and ω -chains of Models*, Proceedings of the Tarski Symposium, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXV, American Mathematical Society, 225–232, 1971.
- [7] Keisler, H.J. *Model Theory for Infinitary Logic, Logic with Countable Conjunctions and Finite Quantifiers*, North-Holland, 1971.
- [8] Keisler, H.J. *Logic with the Quantifier "There Exist Uncountably Many"*, Annals of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 1970
- [9] Lindström, P. *On Extensions of Elementary Logic*, University of Gothenburg, Theoria, 1969.

Edgar A. Valenzuela Nuncio

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Leyes de Reforma 1ra sección.

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México

e-mail: gar_ed_93@hotmail.com



DESOLVIDANDO A NINA BARI

CARMEN MARTÍNEZ-ADAME

RESUMEN. Se conoce poco sobre las matemáticas más antiguas, en parte porque porciones sustanciales de sus escritos se han perdido. Sin embargo, este no es el caso de las matemáticas de los siglos XIX y XX, se conoce poco sobre ellas por otras razones. El objetivo de este texto es *desolvidar* a una de las primeras matemáticas soviéticas, heredera de una importante tradición científica de mujeres rusas a finales del siglo XIX. Nina Bari fue la primera mujer matemática en graduarse de la Universidad Estatal de Moscú tras la revolución rusa. Dedicó su vida al estudio de la teoría de funciones y en este texto intentamos dar un breve panorama sobre su vida.

1. INTRODUCCIÓN

No fueron pocas las mujeres rusas que durante la segunda mitad del siglo XIX optaron por una carrera científica, por otro lado, no son muchas las que son recordadas. El objetivo de este texto es traer a la luz a una de las primeras matemáticas soviéticas: Nina Karlovna Bari.

Hay un aspecto importante y descuidado de la historia de la ciencia. Es la historia de mujeres que han continuado la tradición del avance científico y tecnológico desde la prehistoria hasta nuestros días.^{1,2} [2, p. 11]

1.1. Breve contexto de la situación matemática general en Moscú a inicios del siglo XX. En la segunda mitad del siglo XIX y principios del siglo XX San Petersburgo era la capital del Imperio Ruso y su escuela de matemáticas era una de las líderes en Europa. Fue de manera muy paulatina con la vuelta del siglo que la Universidad de Moscú empezó a cobrar importancia en el desarrollo de las matemáticas.

Un momento clave para la escuela matemática moscovita fue la llegada de matemáticos como Boleslav K. Mlodzeevskii (1858-1923) y Dmitri Fyodorovich Egorov (1869-1931). En particular, el curso de teoría de funciones de una variable real dado por Mlodzeevskii en la Universidad de Moscú por primera vez durante el otoño de 1900 se volvió muy popular y atrajo a un amplio público, posteriormente el curso fue repetido en 1902, 1904 y en 1907. En estos cursos se abordaban temas de la aún naciente teoría de conjuntos³ y estos temas empezaron a cobrar gran importancia. En 1904 P. Florenski, un estudiante graduado de la Universidad de Moscú, publicó el artículo *Símbolos de un infinito* que contenía el primer esbozo en ruso de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos de Cantor. En 1907 se publicó el libro *Números Transfinitos* de Zhegalkin y con esto se marcó el verdadero inicio de las matemáticas en Moscú.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 01A60, 26-03.

Palabras clave. Mujeres matemáticas, historia de la teoría de funciones.

¹El presente texto tiene un fuerte componente histórico por lo que consideramos importante preservar las citas en su idioma original. Sin embargo, para facilitar la lectura, éstas aparecen como notas al pie de página y en el cuerpo del texto aparecerán traducciones al castellano.

²There is an important and neglected aspect of the history of science. It is the story of women who have carried on the tradition of scientific and technological advance from prehistoric times up to the present day.

³De hecho fue Mlodzeevskii quien estableció la terminología rusa en estos temas.

Egorov había comprendido con profundidad la importancia de las nuevas ideas de Cantor, Borel y Lebesgue y para 1912 sus seminarios eran el escenario para la discusión de nuevos descubrimientos matemáticos a los cuales asistían todas las personas que se dedicaban a las matemáticas en Moscú. Entre sus estudiantes se encontraban futuras grandes personalidades de las matemáticas como Vladimir Golubev, Vyacheslav Stepanov y Nikolai Luzin; este último sería además, maestro y mentor de Nina Bari.

2. LA VIDA TEMPRANA DE NINA KARLOVNA BARI

Nina Karlovna Bari nació en Moscú el 19 de noviembre de 1901, hija de Karl Adolfovich Bari y Olga Eduardovna Seligson. Él era médico y no hay mucha información sobre su madre.

Nina Karlovna asistió a la escuela secundaria privada para mujeres de L. O. Vyazemska y en 1918 presentó y aprobó el examen para obtener el certificado equivalente al de una escuela secundaria para hombres. Con este certificado pudo entrar a la Facultad de Física y Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú en 1918 cuando reabrió tras la revolución rusa. La Universidad había existido como una institución de educación superior para hombres pero fue hasta después de la revolución que se permitió la entrada a mujeres.

Lazar Aronovich Lyusternik (1899-1981) fue un matemático soviético, también estudiante de Luzin, que en 1967 publicó un artículo en cuatro partes, que se tradujo al inglés como *The early years of the Moscow mathematical school*. Lyusternik comienza este artículo diciendo que en 1961 sus actividades habituales se vieron interrumpidas durante algún tiempo por mala salud y durante ese tiempo escribió sus memorias. En ellas menciona en muchas ocasiones a Nina Bari y le dedica una pequeña sección que comienza de la siguiente manera:

Hasta antes de la revolución, a las mujeres no se les había permitido ingresar a la universidad. En 1918 tuvo lugar la primera admisión de mujeres a la MGU.⁴ Entre los estudiantes de esta matrícula estaba Nina Karlovna Bari [...] Quienes conocieron a Nina Karlovna en sus años posteriores podrían imaginarla sin dificultad en su juventud. Era una mujer esbelta de tez morena, cabello negro rizado, ojos vivos y brillantes, con un andar enérgico y voz clara [...] Ya como estudiante, Nina Karlovna se destacó por su sobresaliente habilidad matemática. Se graduó antes de tiempo y fue, con toda probabilidad, la primera mujer graduada de la universidad y la primera en inscribirse como estudiante de posgrado.⁵ [26, p. 79]

Cuando Nina Bari ingresó a la universidad en 1918, se convirtió en una de las primeras mujeres en ser aceptadas en el Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú. Se graduó en 1921, solo tres años después de ingresar y de hecho fue la primera mujer en egresar. Después de graduarse, Bari comenzó su carrera docente; dio clases en el Instituto Comunista de Sverdlov de 1921 a 1922, en el Instituto Politécnico de Moscú de 1921 a 1923 y en el Instituto Forestal de Moscú de 1921 a 1925.

Para poder comprender cabalmente el trabajo de Bari consideramos importante conocer el contexto en el cual se desarrolló y este es el objetivo de la siguiente sección.

⁴Al hacer la transliteración del nombre de la universidad se obtiene Moskóvskiy gosudárstvenniy universitét imeni M. V. Lomonósova y de ahí las siglas, MGU.

⁵Until the revolution women had not been allowed into the university. In 1918 the first admission of women to MGU took place. Among the students of this enrolment was Nina Karlovna Bari [...] Those who knew Nina Karlovna in her later years could easily picture her in her youth. She was a slim woman with a dark complexion, black curly hair, lively brilliant eyes, energetic walk and clear voice [...] Already as a student Nina Karlovna was noted for her outstanding mathematical ability. She graduated ahead of time and was, in all probability, the first woman graduate of the university and the first to enrol as a research student.

3. ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LA TEORÍA DE FUNCIONES

3.1. Teoría de funciones. La intención de esta sección no es hacer una historia global de la teoría de funciones ni mucho menos del análisis funcional, el objetivo es presentar el estado del arte de la teoría de funciones al interior de la escuela soviética como contexto para el trabajo realizado por Nina Bari.

Uno de los problemas centrales de la teoría de funciones durante el siglo XIX fue la posibilidad de representar a una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica. Esta idea se planteó por primera vez por Leonhard Euler en relación con el trabajo de Daniel Bernoulli sobre la cuerda vibrante y fue uno de los problemas centrales del trabajo de Fourier desde 1811.

Esta teoría tiene como punto de partida a la serie (hoy conocida como serie de Fourier) para funciones $f(t)$ que sean continuas y 2π -periódicas

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

en donde $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$ y $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$ para $n = 0, 1, \dots$

El problema de si una función arbitraria tiene una expansión en una serie de Fourier evolucionó durante el siglo XIX para convertirse de un problema de existencia a un problema de unicidad en la segunda mitad del siglo; y es este problema de unicidad el que más nos interesa aquí. Este problema se puede expresar de la siguiente manera: ¿Existen dos series trigonométricas distintas que converjan a la misma función en cada punto del intervalo $[0, 2\pi]$? Sobre este tema Heinrich Eduard Heine, en 1870, publicó el siguiente resultado:

TEOREMA 1. *Una función $f(x)$, continua en general pero no necesariamente finita, puede representarse de solo una manera mediante una serie trigonométrica de la forma $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$ si la serie converge uniformemente en general.*⁶ [22, p. 355]

La pregunta sobre la unicidad es claramente equivalente a: ¿Existe una serie trigonométrica que converja a cero en todos sus puntos sin que todos sus coeficientes sean cero? Cantor, también en 1870, dio una respuesta negativa a esta pregunta, probó que si para todo valor real de una variable x entre límites dados ($a < x < b$), $\lim(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$, entonces $\lim a_n = 0$ y $\lim b_n = 0$.⁷ [17, p. 135]

A partir de esto Cantor pudo concluir en [18, p. 142] que si una función $f(x)$ de una variable real x está dada por una serie trigonométrica convergente para todo valor de x , entonces no existe otra serie de la misma forma que también converja para todo valor de x y represente a la misma función $f(x)$.⁸ Posteriormente Cantor generalizó este resultado para que la convergencia no se tuviera que pedir en todos los puntos o dicho de otra manera, si la serie expresada en (1) converge a cero para toda $t \in [0, 2\pi] \setminus E$ en donde E es un conjunto finito o infinito que cumple ciertas

⁶El teorema está enunciado por Heine de la siguiente manera: Satz. Eine im allgemeinen stetige, nicht nothwendig endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf einer Art in eine trigonometrische Reihe von der Form $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$ entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im allgemeinen in gleichem Grade convergiren. Hemos modificado la traducción ligeramente para utilizar la nomenclatura actual de algunos conceptos en aras de una mejor comprensión. La expresión en general usada por Heine se refiere a la posible excepción de un número finito de puntos.

⁷Lehrsatz. Wenn für jeden reellen Werth von x zwischen gegebenen Grenzen ($a < x < b$): $\lim(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$, so ist sowohl: $\lim a_n = 0$, wie $\lim b_n = 0$.

⁸Satz: Wenn eine Function $f(x)$ einer reellen Veranderlichen x durch eine für jeden Werth von x convergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so giebt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Werth von x convergirt und die nämliche Function $f(x)$ darstellt.

propiedades específicas, entonces todos los coeficientes de la serie son iguales a cero.⁹ Esta idea de que la condición deseada se cumpliera fuera de un conjunto excepcional E marcaría de ahí en adelante no solo el trabajo matemático de Cantor sino a la teoría de funciones en general.

Para lograr esto, Cantor introdujo la noción de conjunto derivado que es el conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto dado y enunció y demostró el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Si una ecuación que tiene la forma*

$$0 = C_0 + C_1 + \dots + C_n + \dots$$

en donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$, $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ es satisfecha para todos los valores de x , con la posible excepción de aquellos que corresponden a los puntos de un conjunto de puntos P de ν -ésima especie¹⁰ dado en el intervalo $(0 \dots (2\pi))$, en donde ν designa a un número entero tan grande como se quiera, entonces $d_0 = 0$ y $c_n = d_n = 0$.¹¹ [19, p. 130]

Posteriormente, en 1882 [21], Harnack generalizó el resultado de Cantor probando que cuando el conjunto de puntos en los que la oscilación de la función es mayor que un número dado es denso en ninguna parte, entonces los límites de las sucesiones de coeficientes serán cero.

El trabajo sobre la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica estaba lejos de estar terminado cuando en 1902 Egorov realizó una estancia en Berlín, París y Gottingen. A partir de ésta y el tiempo compartido con Schwarz, Lebesgue y Hilbert (entre otros) su interés por la teoría de funciones aumentó notablemente.

También durante la primera década del siglo XX, Hobson publicó su famoso tratado *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, y W. H. Young, en 1909, publicó su nota sobre series trigonométricas que comienza de la siguiente manera:

El teorema fundamental de la teoría de las series trigonométricas es el que establece que no pueden existir dos series trigonométricas distintas que converjan al mismo valor para todos los puntos del intervalo $(-\pi, \pi)$ con excepción de un conjunto reducible¹² de puntos en los que no se sabe que la serie converja al mismo valor, o que converja en absoluto.¹³ [33, p. 44]

Lo que Young hace notar en su breve artículo es que este teorema se puede modificar de la misma manera que Harnack modificó el de Cantor para probar que

⁹Este estudio y la posibilidad de presentar una demostración rigurosa fueron el origen de la teoría de conjuntos cantoriana que parte de una teoría rigurosa de los números reales y la posibilidad de relacionar al continuo geométrico con el continuo aritmético.

¹⁰Un conjunto P es de la ν -ésima especie si su ν -ésimo conjunto derivado es finito.

¹¹Wenn eine Gleichung besteht von der Form:

$$0 = C_0 + C_1 + \dots + C_n + \dots$$

wo $C_0 = \frac{1}{2}d_0$, $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, für alle Werthe von x mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervalle gegebenen Punktmenge P der ν -ten Art entsprechen, wobei ν eine beliebig grosse ganze Zahl bedeutet, si ist:

$$d_0 = 0; c_n = d_n = 0.$$

¹²Un conjunto es llamado reducible si su conjunto derivado es numerable.

¹³The fundamental theorem in the theory of trigonometrial series is that which states that two distinct trigonometrial series cannot existe which converge to the same value for all points of the interval $(-\pi, \pi)$ with the exception of a reducible set of points at which the series are not known to converge to the same value, or to converge at all.

TEOREMA 3. *Si los valores de una función se asignan a todos menos a un conjunto numerable de puntos, [la función] se puede expresar como una serie trigonométrica de a lo más una manera.*¹⁴ *Ibid.*

Para 1910 Egorov, ya de regreso en Moscú, organizó su famoso seminario de teoría de funciones y en 1916 Dmitrii Men'shov presentó su tesis sobre la teoría riemanniana de series trigonométricas. Poco tiempo después él obtuvo uno de los resultados fundamentales sobre el problema de la unicidad que marcó el inicio de una nueva dirección en la investigación de la matemática rusa (y también la polaca). En *Sur l'unicité du développement trigonometrique* Men'shov demostró algo totalmente inesperado: la existencia de una serie trigonométrica, con una infinidad de coeficientes distintos de cero, que converge uniformemente a cero excepto en los puntos de un conjunto perfecto de medida cero. Según A. Zygmund, este descubrimiento puede ser considerado un punto de partida para la teoría moderna sobre las series trigonométricas [36, p. 591-2].

Lo que Men'shov probó fue el siguiente resultado:

TEOREMA 4. *Existe una serie trigonométrica uniformemente convergente a cero en $(0, 2\pi)$, excepto en un conjunto perfecto de medida cero, y que posee una infinidad de coeficientes distintos de cero.*¹⁵ [28, p. 435]

Y a partir de este teorema se sigue el siguiente corolario:

COROLARIO 5. *Si una función $f(x)$ admite un desarrollo trigonométrico que converge a ella en casi todas partes, admite una infinidad de desarrollos trigonométricos de esta naturaleza.*¹⁶ [28, p. 436]

Estos resultados promovieron ampliamente una discusión sobre los conjuntos que comenzaron a llamarse los conjuntos de unicidad y son éstos los que Nina Bari comenzaría a estudiar. Este tema de investigación resultó ser particularmente rico e incluso para 1935 cuando Zygmund publicó la primera edición de su tratado *Trigonometric Series* él escribió en el prefacio que:

Dos [...] grandes problemas de la teoría esperan también su solución. Estos son la estructura de los conjuntos de unicidad y la estructura de las funciones con series de Fourier absolutamente convergentes.¹⁷ [35, p. xi]

3.2. Luzitania. Como mencionamos anteriormente la situación de las matemáticas en Moscú cambió a inicios del siglo XX, en particular debido al trabajo de Mlodzeevskii y Egorov. Entre los estudiantes de Egorov se encontraba Nikolai Nikolayevich Luzin quien tuvo un importante papel en la vida de Nina Bari.

Luzin estudió matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú, ingresó en 1901 y se graduó en 1905. Posteriormente, de 1910 a 1914 estudió en Gottingen y París, y de regreso en Moscú obtuvo su doctorado en 1916 con una tesis llamada *La Integral y Series Trigonométricas*. En 1911 obtuvo su primer resultado importante que fue la construcción de una serie de potencias de variable compleja con coeficientes que tienden a cero pero que diverge en todas partes en el círculo unitario, [23]. A partir de esto, construyó una serie trigonométrica real divergente en casi todas partes con coeficientes que convergen a cero. Este ejemplo era inesperado y de hecho refutó una conjetura de Pierre Fatou.

¹⁴If the values of a function be assigned at all but a countable set of point, it can be expressed as a trigonometrical series in at most one way.

¹⁵Il existe une série trigonometrique uniformément convergente vers zéro dans $(0, 2\pi)$, sauf un ensemble parfait de mesure nulle, et possédant une infinité de coefficients non nuls.

¹⁶Si une fonction $f(x)$ admet un développement trigonométrique convergent vers elle presque partout, elle admet une infinité de développements trigonométrique de cette nature.

¹⁷Two [...] major problems of the theory also await their solution. These are the structure of the sets of uniqueness and the structure of the functions with absolutely convergent Fourier series.

En 1912 demostró lo que ahora se llama el teorema de Luzin en análisis real que establece que una función finita en casi todas partes es medible si y solo si es una función continua en casi todo su dominio. En los años de 1915 a 1918 comenzó un seminario sobre la teoría descriptiva de funciones que jugó un papel importante en el desarrollo de las matemáticas en Moscú. Como miembro de este seminario, P. S. Aleksandrov, siendo aún estudiante, resolvió un problema planteado por el mismo Luzin al demostrar que todo B -conjunto (o boreliano) no numerable tiene la potencia del continuo, y otro estudiante, Mikhail Suslin, probó que esta construcción de hecho daba una clase de conjuntos mucho más amplia que los B -conjuntos a los que llamó A -conjuntos (siguiendo la nomenclatura para los borelianos en honor a Aleksandrov). Suslin posteriormente demostró una gran cantidad de propiedades fundamentales de estos conjuntos.

En 1917, poco antes de la revolución, Luzin fue nombrado profesor de matemáticas puras en la Universidad de Moscú. Sin embargo, durante la guerra civil rusa que se extendió de 1918 a 1920, Luzin dejó Moscú para ir al Instituto Politécnico Ivanovo-Voznesensk¹⁸ y regresó a Moscú en 1920. A partir de esa fecha organizó nuevamente un seminario de matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú. En esta ocasión entre sus estudiantes se encontraban algunas y algunos de los matemáticos soviéticos más famosos, y entre ellos, Nina Bari.

Este fue un periodo importante para la matemática soviética y en particular para la matemática moscovita que vivió un rápido desarrollo en torno del trabajo de Luzin. El grupo de estudiantes que trabajan con él se empezó a conocer como *Luzitania* a partir del otoño de 1920 y entre las y los *luzitanos* originales se encontraban V. V. Stepanov, P. S. Alexandrov, P. S. Urysohn y evidentemente Nina Bari. Lyusternik se unió un poco más tarde. El interés central de este grupo era la teoría de funciones.

Formaban un grupo cercano y organizaban reuniones, muchas veces en el departamento de Luzin y muchas veces organizadas por Bari. Previamente a la existencia de *Luzitania* en la Universidad de Moscú existía el Círculo de Estudiantes de Matemáticas pero éste fue absorbido por *Luzitania* rápidamente. Luzin fue nombrado presidente honorario y Bari fue electa como vicepresidenta.

4. LA VIDA MATEMÁTICA DE NINA KARLOVNA BARI

El grupo *Luzitania* estaba dedicado a estudiar la teoría de funciones y Bari se dedicó a esto el resto de su vida. Fue como estudiante de Luzin cuando primero se enteró del problema de unicidad y este problema la apasionó para siempre.

Poco después de que Bari empezara su carrera como docente, el Instituto de Investigación de Matemáticas y Mecánica reabrió sus puertas y ella decidió continuar enseñando pero también comenzar su carrera como investigadora. Fue de las primeras estudiantes en el Instituto y Luzin era su director de tesis. Solamente había una plaza para estudiantes de posgrado oficialmente, pero había 10 estudiantes en el Instituto. El nombramiento oficial fue dado a Bari por ser la primera en la lista alfabética.¹⁹

En 1922 Bari presentó su investigación ante la Sociedad Matemática de Moscú; fue la primera mujer en dar una conferencia en ese foro y en 1923 publicó estos resultados en el artículo *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, [3]. En 1925 Bari completó sus estudios de doctorado y en enero de 1926 defendió su tesis, *Sobre la unicidad de los desarrollos trigonométricos*, para obtener el grado. La tesis contenía soluciones a diversos problemas de la teoría de series trigonométricas centrándose en el problema de unicidad que hemos mencionado. Algunos de los resultados de su tesis habían sido publicados en [3] y en 1927 publicó un artículo detallado con estos resultados, [4]. Por su trabajo recibió el premio Glavnauk.²⁰

¹⁸El Instituto ahora es llamado Universidad Estatal de Química y Tecnología de Ivanovo.

¹⁹Al ser oficialmente estudiante de posgrado Bari recibía una beca, misma que compartía con los demás estudiantes.

²⁰Glavnauka es el acrónimo (transliterado) de la Administración Central de Instituciones Científicas, Académicas, Artísticas y Museográficas.

En el artículo de 1923 Bari comienza diciendo que

El problema de unicidad de la expansión trigonométrica llama la atención sobre “conjuntos (U)” que tienen la siguiente propiedad: Si una serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

converge a cero en todas partes, excepto quizás en los puntos de tal conjunto, todos los coeficientes a_n y b_n de esta serie son cero. Llamaremos “conjuntos (M)” a aquellos que no tienen esta propiedad.²¹ [3, p. 1195]

En otras palabras los conjuntos de unicidad, conjuntos (U), y los conjuntos de multiplicidad, conjuntos (M), se definen de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 6. *Decimos que un conjunto E es un conjunto (U) si la convergencia a cero de una serie trigonométrica fuera del conjunto E solo es posible en el caso en el cual todos los coeficientes de la serie son cero.*

DEFINICIÓN 7. *Decimos que un conjunto E es un conjunto (M) si existe una serie trigonométrica con coeficientes distintos de cero que converja a cero en todas partes fuera del conjunto E .*

Es inmediato a partir de estas definiciones que cada conjunto de puntos es o bien un conjunto (M) o bien un conjunto (U) y con esta terminología el resultado de Cantor que mencionamos en la sección anterior se podría enunciar de la siguiente manera: todo conjunto finito, o numerable reducible, es un conjunto (U). Y en virtud de los resultados de Young y Men'shov se tiene que todo conjunto numerable es un conjunto (U) y que existen conjuntos perfectos (M) de medida cero.

Dado el ejemplo construido por Men'shov era natural esperar que todo conjunto perfecto de medida cero fuera un conjunto (M), sin embargo, Bari refutó esto mediante la construcción de una clase de conjuntos perfectos (U). En 1921, Bari se planteó la pregunta “¿Existen conjuntos (U) que tengan la potencia del continuo?”²² [3, p. 1195] y respondió de manera afirmativa a ella. Sobre este mismo tema, y de manera independiente Rajchman publicó en [31, 32] la construcción de una clase particular de conjuntos perfectos (U), que llamó conjuntos de tipo (H) entre los que se encontraba, por ejemplo, el conjunto de Cantor,²³ y así surgieron de manera natural las preguntas sobre la existencia de conjuntos perfectos (U) que no sean de tipo (H) y conjuntos (U) no perfectos.

Este primer resultado le sirvió a Bari como punto de partida para demostrar que la unión numerable de conjuntos cerrados (U) es un conjunto (U).²⁴

En 1927 Bari seguía trabajando este problema y lo plantea de la siguiente manera:

²¹Le problème de l'unicité du développement trigonométrique appelle l'attention sur les “ensembles (U)” jouissant de la propriété suivante: Si une série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

converge vers zéro partout, sauf peut-être aux points d'un tel ensemble tous les coefficients a_n et b_n de cette série sont nuls. Nous appellerons “ensembles (M)” ceux qui ne jouissent pas de cette propriété.

²²Existe-t-il des ensembles (U) ayant la puissance du continu?

²³La construcción de los conjuntos (H) es muy interesante y muy bonita, sin embargo por cuestiones de espacio no la incluimos aquí. Las personas interesadas la pueden consultar en [31] disponible en <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm3/fm3127.pdf>

²⁴Este resultado no ha sido mejorado aún, es un problema abierto si la unión de dos conjuntos (U) medibles arbitrarios (no necesariamente cerrados) es necesariamente un conjunto (U).

Dado un conjunto de puntos E , determinar si existe una serie trigonométrica, con coeficientes distintos de cero, que converja a cero en todas partes fuera del conjunto E .²⁵ [4, p. 62]

El interés de Bari ahora era encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto perfecto fuera un conjunto (U). Descubrió algunas propiedades extremadamente finas tanto de los conjuntos de unicidad como de los de multiplicidad y demostró que la solución del problema de la unicidad que tanto le intersaba no se podía obtener únicamente estudiando la estructura geométrica de los conjuntos, sino que la estructura aritmética de los conjuntos debía ser tomada en cuenta. Este trabajo le llevó varios años.

Bari probó en [5] y [6] que si $P \subset [0, 2\pi]$ es un conjunto simétrico²⁶ con razón constante $\lambda = \frac{p}{q} > 0$ en donde $(p, q) = 1$, entonces P es un conjunto (M) si $p \neq q - 1$ y $p \neq q - 2$. Y por otro lado, que si $p = q - 1$ ó $p = q - 2$, entonces P es un conjunto (U).

Para cuando Bari demostró estos resultados ella era ya considerada experta mundial en el tema y en los años en los que había llevado a cabo esta investigación también había logrado tener una carrera académica sobresaliente.

Después de obtener el grado, Nina Bari trabajó como calculadora y luego como investigadora asociada en el Instituto de Matemáticas y Mecánica. En 1927 pasó seis meses estudiando en la Sorbona y en el Collège de France en París en donde asistió al seminario de Hadamard y tuvo una participación activa en éste. Poco después viajó a Lvov en Polonia en donde asistió al Congreso Matemático Polaco en 1927 y en 1928 viajó a Bologna en donde dió una conferencia llamada *Sobre la estructura analítica de una función continua arbitraria*²⁷ en el Congreso Internacional de Matemáticos. En 1929 recibió una beca Rockefeller lo que le permitió continuar estudiando en París hasta finales de ese año y en 1932 se convirtió en profesora titular de la Universidad Estatal de Moscú.

Para 1935 Bari contaba con 16 publicaciones y era conocida por su trabajo en la teoría de funciones reales, en ese año le fue conferido el grado de Doctora en las Ciencias Físico-matemáticas.²⁸ Para la década de los años 40, Bari era ya una profesora respetada en la URSS quien, junto con Men'shov, estaba a cargo del trabajo de investigación y docencia en teoría de funciones que se hacía en la universidad.

Consideramos que vale la pena señalar que aun cuando gran parte de la vida de Bari giraba en torno de las matemáticas, éstas no eran su único interés. Le gustaban la poesía, la literatura, la música y las artes en general. Lysuternik recuerda que

Era ingeniosa y le encantaba escribir poemas para una ocasión especial. Así, escribió sobre uno de sus compañeros de clase y Uryson, de quienes se sospechaba tenían un romance [...] Nina Karlovna tenía buena memoria para la poesía. Ella no sólo participaba en la creación del folclore de Luzitania, lo memorizaba.²⁹ [26, p. 79]

y también que

Nina Karlovna era muy animada; le encantaban todo tipo de excursiones y paseos. En 1924, ella y un grupo de amigos y los jóvenes Mlodzeevskiis

²⁵Un ensemble E de points étant donné, reconnaître s'il existe une série trigonometrique, à coefficients non nuls, qui converge vers zéro partout en dehors de l'ensemble E .

²⁶Un conjunto simétrico con razón constante es un conjunto que se obtiene de la misma manera que se obtiene el conjunto de Cantor pero en lugar de quitar intervalos de longitud $\frac{1}{3}$ se quitan intervalos de longitud $\lambda = \frac{p}{q} > 0$.

²⁷Sur la structure analytique d'une fonction continue arbitraire.

²⁸Este grado no tiene un equivalente directo en las universidades occidentales, es más elevado que el de un doctorado.

²⁹She was witty, and loved to write poems for a special occasion. Thus, she wrote about one of her classmates and Uryson, who were suspected of having a romance [...] Nina Karlovna had a good memory for poetry. She not only took part in the creation of Luzitanian folklore, but she committed it to memory.

participaron en una excursión al Cáucaso. Pero el apogeo de su carrera turística pertenece a un período muy posterior, cuando estaba casada con V. V. Nemytskii, y no solo formaban una pareja matemática, sino también viajera.³⁰ [26, p. 79]

No es clara la fecha en la que contrajo matrimonio con Viktor Vladimirovich Nemytskii, él era un año mayor que ella e ingresó a la Universidad en 1921 cuando Bari se graduó, posteriormente fue estudiante de posgrado bajo la dirección de Aleksandrov y Stepanov y también obtuvo el grado Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, falleció repentinamente el 7 de agosto de 1967.³¹

Fue Nemytskii quien introdujo a Bari en el montañismo y fue un deporte que practicaron juntos durante muchos años, hicieron excursiones al Cáucaso, a las montañas de Altai, Pamir y Tyanshan e incluso Kamchatka que era la región más al este de la Unión Soviética. Lyusternik comenta que sus compañeros en estas expediciones la recordaban como la que los animaba en momentos difíciles:

Sus compañeros decían que encontraban dificultades en sus expediciones turísticas, y en tales ocasiones Nina Karlovna siempre mantenía el ánimo, animando a los demás.³² [26, p. 80]

De regreso a la vida matemática de Bari, otro tema, dentro de la teoría de funciones, que atrajo su atención durante la década de 1940 fue el de bases y sistemas ortogonales o biortogonales. En el estudio de los sistemas ortogonales una de las preguntas de mayor interés es la estabilidad de distintas propiedades y este fue el tema estudiado por Bari en una serie de artículos, [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].³³ También introdujo una serie de conceptos nuevos en torno de la proximidad de sistemas de funciones con base en los cuales se estableció posteriormente el término *bases de Bari*.

En [10, p. 56] Bari presentó la siguiente definición³⁴:

DEFINICIÓN 8. *Decimos que dos sistemas $(\varphi_n(x))$ y $(\psi_n(x))$ están en proximidad cuadrática si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ converge, donde*

$$\rho_n = \rho(\varphi_n, \psi_n) = \sqrt{\int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]^2 dx}.$$

Bari presentó esta definición en el contexto de espacios de Hilbert por lo que la condición de convergencia de la serie se puede escribir también como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|^2 < \infty.$$

Con base en esta noción es que se introdujo el término de base de Bari:

DEFINICIÓN 9. *Una base de Bari para X es una base para X que se encuentra en proximidad cuadrática de una base ortonormal de X .*

Bari también presentó la siguiente definición, [10, p. 63], que resulta fundamental para un teorema que demuestra en su artículo. Vale la pena notar que el concepto que

³⁰Nina Karlovna was very lively; she loved all kinds of excursions and walks. In 1924 she and a group of friends and the younger Mlodzeevskii took part in an excursion to the Caucasus. But the heyday of her tourist career belongs to a much later period, when she was married to V. V. Nemytskii, and they made not only a mathematical, but also a touring couple.

³¹Después de morir, el cuerpo de Nemytskii fue llevado a Moscú, donde fue enterrado junto a Nina Bari quien había fallecido 6 años antes.

³²Her companions said that they met with difficulties on their tourist expeditions, and on such occasions Nina Karlovna invariably kept up her spirits, encouraging the others.

³³Una lista completa de las publicaciones de Nina Bari se puede consultar en [29, p. 128-131].

³⁴Nous dirons que deux systèmes $(\varphi_n(x))$ et $(\psi_n(x))$ sont en proximité quadratique si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ converge, où

$$\rho_n = \rho(\varphi_n, \psi_n) = \sqrt{\int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]^2 dx}.$$

ella define es al que hoy nos referiríamos como una independencia lineal débil o una w -independencia lineal.

DEFINICIÓN 10. Diremos que las funciones normadas $(\varphi_n(x))$ son linealmente independientes en el espacio de Hilbert si no existe ninguna sucesión de números $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, no todos cero, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[\sum_{m=1}^n c_m \varphi_m(x) \right]^2 dx = 0.^{35}$$

En 1944, [10], Bari demostró el siguiente resultado ya clásico:

TEOREMA 11. Sean $(\varphi_n(x))$ y $(\psi_n(x))$ dos sistemas ortonormales que están en proximidad cuadrática. Entonces $(\varphi_n(x))$ es completo si y solo si $(\psi_n(x))$ es completo.

Y si usamos el nombre de bases de Bari podemos reformular otro de los resultados obtenidos por Bari en el mismo artículo:

TEOREMA 12. Sean X un espacio de Hilbert, $(\varphi_n(x))$ una base ortonormal para X y $(\psi_n(x))$ una sucesión linealmente independiente en X que está en proximidad cuadrática de $(\varphi_n(x))$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|^2 < 1$. Entonces $(\psi_n(x))$ es una base de Bari para X .

Este trabajo llevado a cabo por Bari dio lugar a un amplio trabajo por parte de la comunidad matemática y fue un tema central de un gran número de artículos. Además, en la teoría de funciones la cuestión de trasladar propiedades básicas de sistemas ortogonales a sistemas biortogonales arbitrarios o bases juega un papel importante. Para estos fines, Nina Bari introdujo una vez más conceptos nuevos como el de sistema de Bessel, sistema de Hilbert, sistema de Riesz-Fischer, base de Bessel y base de Riesz. Esta innovación creó un campo completo de investigación sobre bases y sistemas biortogonales sobre los que se trabajó arduamente.

Durante la década de los cincuenta la carrera académica de Bari siguió floreciendo, continuó como profesora en la Universidad Estatal de Moscú y participó en múltiples congresos internacionales como el Congreso Internacional de Matemáticas en Edimburgo en 1958, y el Tercer Congreso Soviético de Matemáticas en Moscú en 1956 en el que presentó un artículo sobre el estado de la teoría de las series trigonométricas.

Durante esta época también publicó un importante artículo, [14], sobre funciones primitivas y series trigonométricas en el que prueba el siguiente resultado que combina teoremas clásicos de Luzin y Men'shov:

TEOREMA 13. Para cualquier función $f(x)$, medible y finita casi todas partes en $[-\pi, +\pi]$, existe una función continua $F(x)$ en ese intervalo tal que $F'(x) = f(x)$ casi en todas partes en $[-\pi, +\pi]$, y el resultado de la diferenciación término a término de la serie de Fourier de $F(x)$ es una serie trigonométrica que converge a $f(x)$ casi en todas partes. [14, p. 687]

Bari era una profesora muy popular entre los estudiantes de la Universidad de Moscú y en su obituario Men'shov, Stechkin y Ul'yanov recuerdan que

Teniendo un carácter enérgico y un temperamento vivo, Nina Karlovna se dedicó activamente a atraer a los jóvenes a la investigación. Varios de sus alumnos han defendido tesis (Ph.D. o D.Sc), entre ellos V.Ya. Kozlov, P. L. Ul'yanov, Yu. A. Kaz'min, Z. N. Kazhdan, R. S. Guter y M. P. Shcheglov. Muchos jóvenes investigadores matemáticos se han

³⁵Nous dirons que les fonctions normées $(\varphi_n(x))$ sont linéairement indépendantes dans l'espace de Hilbert s'il n'existe aucune suite de nombres $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ non tous nuls et tels que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[\sum_{m=1}^n c_m \varphi_m(x) \right]^2 dx = 0.$$

desarrollado bajo su dirección y han obtenido resultados originales de primer nivel.³⁶ [29, p. 126]

Durante su carrera, Bari escribió también varios libros de texto: *Algebra superior* en 1932 y *Teoría de series* en 1936 que tuvo una segunda edición en 1938. Además tradujo al ruso el libro de Lebesgue, *Lecons sur l'integration et la recherche de fonctions primitives* y editó la publicación de las obras completas de Luzin así como de su libro *La integral y series trigonométricas*. Para la publicación de este último se agreron un buen número de apéndices y notas que ella consideraba muy importantes dada la cantidad de tiempo que había pasado desde que Luzin había escrito su tesis doctoral en 1915. Durante varios años, Nina Bari también fue editora en jefe de la serie matemática de la revista *Uchenye Zapiski Moskovskogo Universiteta* y una de las editoras de la revista *Vestnik Moskovskogo Universiteta*.

La carrera académica de Bari culminó con 55 publicaciones de las cuales, la última es un texto de más de 900 páginas sobre series trigonométricas. Este texto, *Series Trigonométricas*,³⁷ merece mención especial. El texto está escrito con el estilo usual de Bari y abarca un gama excepcionalmente amplia de temas; se presenta material sobre los fundamentos de la teoría de series trigonométricas hasta el estado del arte de la misma. En el prefacio Bari nota que

... el interés de los matemáticos por las series trigonométricas no ha disminuido y el progreso alcanzado ha sido tan notable que parece necesario informar sobre el estado actual de nuestros conocimientos en este campo.

La gama de cuestiones que deben ser consideradas es tan amplia que es inmediatamente necesario limitarla. Por lo tanto, excluyo completamente las integrales de Fourier, series trigonométricas de varias variables y solo toco muy brevemente la investigación de las mejores aproximaciones de funciones por polinomios trigonométricos.

Además, me refiero a sistemas ortogonales sólo en aquellos casos en los que parece más sencillo derivar un teorema en la teoría de series trigonométricas a partir de teoremas más generales relativos a sistemas ortogonales; si el pasar teoremas a sistemas ortogonales generales requiere una investigación especializada, me limito a formularlos para series trigonométricas.

A pesar de las limitaciones impuestas al material aquí publicado, aún queda mucho por incluir.³⁸ [16, p. xix]

³⁶Possessing an energetic character and a lively temperament, Nina Karlovna was active in drawing young people into research. A number of her pupils have defended Ph.D. or D.Sc. theses, among them V.Ya. Kozlov, P.L. Ul'yanov, Yu.A. Kaz'min, Z.N. Kazhdan, R.S. Guter and M.P. Shcheglov. Many young research mathematicians have developed under her guidance and obtained first-rate original results.

³⁷El texto se tradujo al inglés y apareció publicado en 1964 en dos volúmenes bajo el título *A Treatise on Trigonometric Series*, [16].

³⁸... the interest of mathematicians in trigonometric series has not diminished and the progress achieved has been so considerable that it seems necessary to report the present state of our knowledge in this field.

The range of questions which should be considered is so large that it is immediately necessary to limit this. Therefore, I completely exclude Fourier integrals, trigonometrical series of several variables and I only touch very briefly on the investigation of best approximations of functions by trigonometric polynomials.

Furthermore I refer to orthogonal systems only in those cases where it seems simpler to derive a theorem in the theory of trigonometric series from more general theorems concerning orthogonal systems; if the transfer of theorems into general orthogonal systems requires specialized investigation, I confine myself to formulating them for trigonometric series.

In spite of the limitations imposed on the material published here, there still remains very much to include.

El texto fue (y sigue siendo) sin duda un referente estándar para todos los matemáticos que se especializan en la teoría de funciones y la teoría de series trigonométricas y está dedicado con cariño a “la memoria de mi maestro, Nikolai Nikolayevich Luzin.”

En 1961, el 15 de julio, Nina Bari murió en un trágico accidente en el que cayó frente a un tren en el Metro de Moscú. En su obituario Men’shov, Stechkin y Ul’yanov escribieron:

La muerte prematura de Nina Bari es una gran pérdida para las matemáticas soviéticas y una gran pena para todos los que la conocieron. El recuerdo de su personalidad -vivaz, directa y con una inagotable reserva de jovialidad- permanecerá siempre en el corazón de quienes trabajaron con ella o la conocieron.³⁹ [29, p. 127]

5. UN COMENTARIO FINAL

Si bien la presentación que hemos hecho aquí no pretende ser exhaustiva, esperamos haber logrado dos cosas: traer a la luz a una matemática excepcional como Nina Bari, y hacer nacer el deseo de conocer a otras matemáticas, que como ella, jugaron un papel clave en el desarrollo de la ciencia.

AGRADECIMIENTOS. La autora agradece los comentarios hechos por una(un) árbitra(o) anónima(o) que ayudaron a mejorar sustancialmente el texto y también al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN-405620: *Matematización y Cambio Conceptual* en cuyo marco se llevó a cabo esta investigación.

REFERENCIAS

- [1] Aleksandrov, P., *Mathematics at Moscow University in the First Half of the XXth Century*, Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya, 8, 9-55, 1955.
- [2] Alic, M., *Hypatia's Heritage*, Beacon Press, Boston, 1986.
- [3] Bari, N. K., Sur l’unicité du développement trigonométrique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des Sciences*, 177, 1195-1197, 1923.
- [4] Bari, N. K., Sur l’unicité du développement trigonométrique, *Fundamenta Mathematicae* 9, 62-118, 1927.
- [5] Bari, N. K., Sur la nature diophantique du problème d’unicité du développement trigonométrique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des Sciences*, 202, 1901-1903, 1936.
- [6] Bari, N. K., Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème d’unicité du développement trigonométrique, *Mat. Sb.*, 2, 44, 699-724, 1937.
- [7] Bari, N. K., On the stability of certain properties of orthogonal systems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 33, 342-345, 1941.
- [8] Bari, N. K., On the stability of the property of completeness of a system of functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 37, 99-103, 1942.
- [9] Bari, N. K., Sur la stabilité de certaines propriétés des systèmes orthogonaux, *Mat. Sb.*, 12, 54, 3-27, 1943.
- [10] Bari, N. K., Sur les systèmes complets de fonctions orthogonales, *Mat. Sb.* 14, 56, 51-108, 1944.
- [11] Bari, N. K., On bases in Hilbert space, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 54, 383-386, 1946.
- [12] Bari, N. K., On bases in Hilbert space, *Uspekhi Mat. Nauk* I, 5-6, 15-16, 242, 1946.
- [13] Bari, N. K., Biorthogonal systems and bases in Hilbert space, *Moskov. Gos. Univ. Uch. Zap.* 148, Mat. 4, 69-107, 1951.
- [14] Bari, N. K., On primitive functions and trigonometric series converging almost everywhere, *Mat. Sb.*, 31, 73, 687-702, 1952.
- [15] Bari, N. K., *Trigonometric series*, Moscú, Fizmatgiz, 1961.
- [16] Bari, N. K., *A Treatise on Trigonometric Series*, 2 vols, Macmillan, 1964.
- [17] Cantor, G., Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72, 130-138, 1870.
- [18] Cantor, G., Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihen gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72, 139-142, 1870.

³⁹The untimely death of Nina Bari is a great loss for Soviet mathematics and a great sorrow for all who knew her. The memory of her personality -lively, straightforward and with an inexhaustible reserve of cheerfulness- will always be preserved in the hearts of those who worked or were acquainted with her.

- [19] Cantor, G., Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *JMathematische Annalen*, 5, 123-132, 1872.
- [20] Grinstein, L. S., Campbell, P. J., *Women of Mathematics: A Biobibliographic Sourcebook*, Greenwood Press, USA, 1987.
- [21] Harnack, A., Théorie de la série de Fourier, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, 6, 242-260, 1882.
- [22] Heine, E., Ueber trigonometrische Reihen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 71, 353-365, 1870.
- [23] Luzin, N., Ueber eine Potenzreihe, *R. C. Circ. Mat. Palermo*, 32, 386-390, 1911.
- [24] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, *Russ. Math. Surv.*, 22, 133-157, 1967.
- [25] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, *Russ. Math. Surv.*, 22, 171-211, 1967.
- [26] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, *Russ. Math. Surv.*, 22, 55-91, 1967.
- [27] Lyusternik, L. A., The early years of the Moscow mathematics school, *Russ. Math. Surv.*, 22, 167-174, 1970.
- [28] Men'shov, D. E., Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Comptes Rendus Acad. Sci*, 163, 433-436, 1916.
- [29] Men'shov, D. E., Stechkin, S. B., Ul'yanov P. L., Nina Karlovna Bari - Obituary, *Russ. Math. Surv.* 17, 119-127, 1962.
- [30] Phillips, E. R., Nicolai Nicolaevich Luzin and the Moscow School of the Theory of Functions, *Historia Mathematica*, 5, 275-305, 1978.
- [31] Rajchman, A., Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 287-302, 1922.
- [32] Rajchman, A., Rectification et addition à ma note "Sur l'unicité du développement trigonométrique", *Fundamenta Mathematicae*, 4, 366-367-302, 1923.
- [33] Young, W. H., A note on trigonometrical series, *Messenger of Mathematics*, 38, 44-48, 1909.
- [34] Zdravkovska, S., Duren, P. L. (eds), *Golden Years of Moscow Mathematics*, American Mathematical Society, 2007.
- [35] Zygmund, A., y Fefferman, R. *Trigonometric Series*, Tercera edición, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [36] Zygmund, A. The role of fourier series in the development of analysis, *Historia Mathematica*, 2, 4, 591-594, 1975.

Carmen Martínez-Adame

Universidad Nacional Autónoma de México,
 Facultad de Ciencias,
 Departamento de Matemáticas,
 Ciudad Universitaria, 04510, CDMX, México.
 e-mail: cmai@ciencias.unam.mx



UNA GENERALIZACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

KARLA ADRIANA ORTEGA GALLEGOS

RESUMEN. Siguiendo la referencia [2], presentamos una generalización de la transformada de Fourier discreta al caso de dos subespacios de Hilbert de dimensiones diferentes. Identificamos y demostramos sus correspondientes propiedades de convolución, traslación, dilatación e identidad de Parseval.

1. INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier discreta (DFT, por su siglas del inglés) es una aplicación lineal del espacio de Hilbert complejo \mathbb{C}^N en sí mismo. Se puede considerar como una aplicación del espacio de funciones complejas cuadrado sumables definidas sobre un grupo cíclico (o solo conmutativo) discreto. Es esta forma junto con sus generalizaciones al caso no conmutativo, la base del análisis de Fourier discreto.

Como su análoga de dimensión infinita o variable continua, la DFT tiene una gran cantidad de aplicaciones en ingeniería, física y matemáticas. Por ejemplo, la GFT es una herramienta fundamental en el procesamiento digital de señales, donde se aplica para calcular el espectro de frecuencias de la señal y en el análisis de sistemas en el dominio de frecuencias, veáanse las referencias [6, 1].

Recientemente en [2] se utilizó una generalización de la DFT al caso de dos subespacios de dimensiones diferentes para estudiar un modelo cuántico de transporte de energía relacionado con el fenómeno de la fotosíntesis. El propósito principal de este trabajo es identificar las correspondientes fórmulas de convolución, traslación y dilatación de esta generalización de la transformada de Fourier discreta e ilustrarlas con algunos ejemplos, véase la sección 3.3. Así mismo, identificamos la correspondiente propiedad de Parseval, teorema 16, y para completar el trabajo estudiamos una eigenfunción de la DFT.

Asumiendo que el lector está familiarizado con conceptos básicos de Álgebra Lineal, en la sección 2 presentamos una breve introducción a la transformada de Fourier discreta, mostrando sus propiedades básicas de convolución, traslación, dilatación y la identidad de Parseval. También estudiamos una eigenfunción de la DFT definida en términos del símbolo de Legendre, cuyo eigenvalor está dado por una suma de Gauss. En la sección 3 introducimos la transformada de Fourier discreta generalizada (GDFT), demostramos sus correspondientes propiedades básicas y las ilustramos con algunos ejemplos.

2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

Sea $N \geq 1$ un número natural y \mathbb{C}^N el espacio de Hilbert complejo de dimensión N . Sea $\{e_n : 0 \leq n \leq N - 1\}$ la base ortonormal canónica de \mathbb{C}^N .

La **Transformada de Fourier Discreta** (DFT) es una transformación lineal de \mathbb{C}^N en sí mismo que se define mediante

$$(1) \quad F := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_{n'}\rangle \langle e_n|,$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 42A38.

Palabras clave. Transformada de Fourier discreta generalizada, Espacio de Hilbert complejo, Identidad de Parseval.

donde ζ_N es cualquier raíz N -ésima primitiva de la unidad, por simplicidad tomaremos $\zeta_N = e^{2\pi i \frac{1}{N}}$, y $|e_{n'}\rangle\langle e_n|$ denota al operador de rango uno de \mathbb{C}^N en sí mismo definido mediante $|e_{n'}\rangle\langle e_n|u = \langle e_n, u\rangle e_{n'}$.

Sea $x \in \mathbb{C}^N$, podemos suponer que $x = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e_n$. Nótese que

$$\langle e_n, x \rangle = \langle e_n, \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} e_{n'} \rangle = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \langle e_n, e_{n'} \rangle = x_n.$$

Entonces la acción de F sobre un vector $x \in \mathbb{C}^N$ está dada explícitamente por la fórmula

$$\begin{aligned} Fx &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_{n'}\rangle\langle e_n|x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} x_n e_{n'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} x_n \right) e_{n'}, \end{aligned}$$

lo cual implica que la coordenada n -ésima de Fx es

$$(Fx)_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^{kn} x_k.$$

Por esta razón también se puede definir la transformada de Fourier discreta mediante su acción sobre vectores de \mathbb{C}^N de la siguiente manera:

$$(Fx)_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Los vectores $x \in \mathbb{C}^N$ también se pueden considerar como funciones de los enteros módulo N , \mathbb{Z}_N , en \mathbb{C} , i.e., $x : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$. En este caso la n -ésima coordenada de x corresponde con el valor de la función x en n , i.e., $x_n = x(n)$. Así, la transformada de Fourier discreta transforma cada función $x : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$ en la función $F(x) : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$, definida mediante la relación

$$F(x)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

2.1. Propiedades básicas. El siguiente lema se refiere a la relación de ortogonalidad de las raíces n -ésimas de la unidad.

LEMA 1. *Los coeficientes $\zeta_N^{nn'} = e^{2\pi i \frac{nn'}{N}}$ satisfacen la relación*

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{(j-k)n} = N\delta_{jk}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

donde δ_{ij} denota la función delta de Kronecker.

Demostración. Claramente, si $j = k$ se tiene $\sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{(j-k)n} = N$. Ahora si $j \neq k$, entonces, como (2) es una suma geométrica,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{(j-k)n} = \frac{\zeta_N^{N(j-k)} - 1}{\zeta_N^{(j-k)} - 1} = 0$$

como se quería. □

2.2. La identidad de Parseval. El operador conjugado de F se define mediante la relación

$$(3) \quad \bar{F} := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-nn'} |e_{n'}\rangle \langle e_n|.$$

TEOREMA 2. (*Identidad de Parseval*)
La DFT es un operador unitario es decir,

$$FF^* = F^*F = I$$

donde F^* es el operador adjunto de F , definido como el transpuesto del conjugado, i.e.,

$$F^* = \bar{F}^\Gamma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}|.$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{C}^N$. Por definición de producto escalar y el lema [1](#) tenemos que

$$\begin{aligned} FF^* &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_{n'}\rangle \langle e_n| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m,m'=0}^{N-1} \zeta_N^{-mm'} |e_{m'}\rangle \langle e_m| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n,m,n',m'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'-mm'} \delta_{nm'} |e_{n'}\rangle \langle e_m| = \frac{1}{N} \sum_{n,m,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{n(n'-m)} |e_{n'}\rangle \langle e_m| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m,n'=0}^{N-1} N \delta_{n'm} |e_{n'}\rangle \langle e_m| = \sum_{m=0}^{N-1} |e_m\rangle \langle e_m| = I. \end{aligned}$$

Y de manera análoga, $F^*F = I$. □

COROLARIO 3. F es una transformación invertible con inversa F^* .

2.3. Fórmulas de convolución, traslación y dilatación. Sean x y y funciones, $x, y : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$, entonces se define:

- i) La convolución $x * y$ de x con y como la función cuyo valor en $k \in \mathbb{Z}_N$ está dado por

$$(x * y)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l).$$

Consecuentemente, $x * y = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) e_k$.

- ii) El producto xy de x con y como la función cuyo valor en $k \in \mathbb{Z}_N$ es

$$(xy)(k) = x(k)y(k).$$

TEOREMA 4. La transformada de Fourier discreta satisface la propiedad de convolución

$$F(x * y) = F(x)F(y),$$

donde el producto en el lado derecho es el producto de funciones.

Demostración.

$$\begin{aligned}
F(x * y) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}| (x * y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}| \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) e_k \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) |e_n\rangle \langle e_{n'}, e_k \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(n'-l) \right) e_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{n(m+l)} x(l)y(m) e_n \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{nl} x(l) \sum_{m=0}^{N-1} \zeta_N^{nm} y(m) e_n = \sum_{n=0}^{N-1} F(x)(n) F(y)(n) e_n.
\end{aligned}$$

Entonces, $F(x * y)(n) = (F(x) F(y))(n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}_N$. Esto termina la demostración. \square

2.4. Una función propia de la DFT. Es bien conocido que la función gaussiana $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ es una función propia de la transformada de Fourier usual. En esta sección discutiremos su análoga discreta $h_N(k)$.

DEFINICIÓN 5. Para cualquier entero a , no divisible por un primo impar N , el símbolo de Legendre $\left(\frac{a}{N}\right)$ se define como

$$\left(\frac{a}{N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } b^2 = a \text{ modulo } N, \text{ para algún } b \in \mathbb{Z}_N \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 6. (Criterio de Euler, ver [3]) Sean $a \in \mathbb{N}$ y N un primo impar que no es divisor de a , entonces

$$\left(\frac{a}{N}\right) = a^{\frac{N-1}{2}}.$$

Mostraremos ahora algunos resultados concernientes a la transformada de Fourier discreta del símbolo de Legendre como función de su numerador, al que llamaremos función gaussiana discreta; cuya representación gráfica para $N = 11$ se encuentra en la figura 1. Iniciamos con una definición.

DEFINICIÓN 7. Sea N un primo impar, defínase para cada k entero,

$$h_N(k) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right) & \text{si } N \text{ no divide a } k \\ 0 & \text{si } N \text{ divide a } k. \end{cases}$$

y el correspondiente vector h_N con coordenadas $h_N(k)$, mediante $h_N = \sum_{k=0}^{N-1} h_N(k) e_k$, con $\{e_k : 1 \leq k \leq N\}$ la base canónica de \mathbb{C}^N .

LEMA 8. Para cualquier $a, b \in \mathbb{Z}$, si N no es divisor de a ni de b , entonces se cumple que

$$\left(\frac{ab}{N}\right) = \left(\frac{a}{N}\right) \left(\frac{b}{N}\right).$$

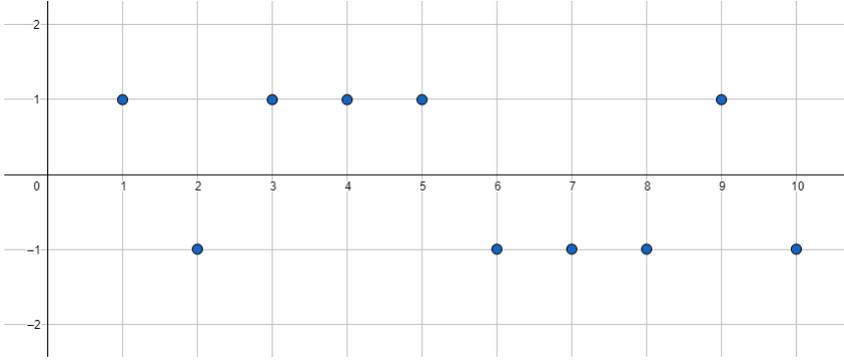


FIGURA 1. Símbolo de Legendre N=11

Demostración. Por el criterio de Euler tenemos que

$$\left(\frac{ab}{N}\right) = (ab)^{\frac{N-1}{2}} = (a)^{\frac{N-1}{2}} (b)^{\frac{N-1}{2}} = \left(\frac{a}{N}\right)\left(\frac{b}{N}\right).$$

□

LEMA 9. Para N primo impar y N, k primos relativos en modulo N se cumple que

$$\left(\frac{k}{N}\right) = \left(\frac{k^{-1}}{N}\right),$$

Demostración. Como k no es divisible por N , entonces k tiene inverso en \mathbb{Z}_N , i.e., existe $k^{-1} \in \mathbb{Z}_N$ y $kk^{-1} = 1$. Ahora si $b^2 = k \pmod N$ tenemos que

$$1 = \left(\frac{kk^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k}{N}\right)\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = 1\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k^{-1}}{N}\right).$$

Si k no es residuo cuadrático y no es divisible por N , tenemos que $\left(\frac{k}{N}\right) = -1$ y consecuentemente

$$1 = \left(\frac{kk^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k}{N}\right)\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = -1\left(\frac{k^{-1}}{N}\right).$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{k^{-1}}{N}\right) = -1.$$

Esto demuestra el lema.

□

LEMA 10.

$$(4) \quad F(h_N)(-k) = h_N(k)F(h_N)(-1).$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} F(h_N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} |e_n\rangle \langle e_{n'}| \sum_{l=0}^{N-1} h_N(l)e_l \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n',l=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} h_N(l) \langle e_{n'}, e_l \rangle e_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} h_N(n') e_n, \end{aligned}$$

lo cual implica que $F(h_N)(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{nn'} h_N(n')$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces si N no divide a k , por el lema [9](#)

$$\begin{aligned} F(h_N)(-k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-kn'} h_N(n') = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-kn'} \left(\frac{n'}{N}\right), \text{ con } b = kn', \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=0}^{N-1} \zeta_N^{-b} \left(\frac{bk^{-1}}{N}\right) = \left(\frac{k^{-1}}{N}\right) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=0}^{N-1} \zeta_N^{-b} \left(\frac{b}{N}\right) \\ &= h_N(k)F(h_N)(-1), \end{aligned}$$

pues N no divide a n' ni a kn' si $0 \leq n' \leq N-1$. Ahora, si N divide a k

$$\begin{aligned} F(h_N)(-k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-kn'} h_N(n') \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=0}^{N-1} \zeta_N^{-b} h_N(k^{-1}b) = 0, \end{aligned}$$

pues N divide a cada $b = kn'$. Esto completa la demostración. \square

TEOREMA 11. *La función h_N es una función propia de la transformada de Fourier discreta, de hecho,*

$$(5) \quad F(h_N) = g^{-1}h_N,$$

donde g es la suma de Gauss $g = F(h_N)(-1) = \sum_{a=1}^{N-1} \left(\frac{a}{N}\right)\zeta_N^a$, que satisface $g^2 = (-1)^{\frac{N-1}{2}}$, i.e.,

$$g = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \frac{N-1}{2} \text{ es par} \\ \pm i & \text{si } \frac{N-1}{2} \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Tomando transformada de Fourier discreta en [\(4\)](#) y usando la fórmula de inversión se obtiene que

$$(6) \quad h_N(k) = F(F(h_N))(-k) = F(h_N)(-1)F(h_N)(k) = gF(h_N)(k), \quad \forall k.$$

Ahora, evaluando [\(6\)](#) en $k = -1$ se obtiene que $h_N(-1) = g^2$. Recordando que

$$h_N(-1) = \left(\frac{-1}{N}\right) = (-1)^{\frac{N-1}{2}},$$

la última identidad es por el Criterio de Euler, se concluye que $g^2 = (-1)^{\frac{N-1}{2}}$ y termina la demostración. \square

Con un poco de más trabajo usando estas y otras propiedades de la gaussiana discreta h_N , se puede demostrar la bien conocida ley de reciprocidad cuadrática. Pero esto queda fuera de los objetivos de este trabajo. El lector interesado puede consultar la referencia [7](#).

3. UNA GENERALIZACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA.

Sean E_N, E_M subespacios mutuamente ortogonales del espacio de Hilbert \mathbb{C}^{N+M} , con dimensiones $\dim E_M = M \leq N = \dim E_N$. Sean $\{e_n : 0 \leq n \leq N-1\}$ y $\{f_m : 0 \leq m \leq M-1\}$ bases ortonormales de E_N y E_M , respectivamente.

Una proyección ortogonal es una transformación lineal P que es autoadjunta, i.e., $\langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle$ que satisface la identidad $P^2 = P$.

Sea P una proyección ortogonal y sea $E = \text{Ran}P = \{Px : x \in \mathbb{C}^{N+M}\}$ su rango. E es un subespacio de \mathbb{C}^{N+M} , pues $0 = P0 \in E$ y $Px + \alpha Py = P(x + \alpha y) \in E$. El complemento ortogonal de un subespacio E es el subespacio E^\perp definido mediante

$$E^\perp := \{x \in \mathbb{C}^{N+M} : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in E\}.$$

Si P es una proyección ortogonal y $E = \text{Ran}P$, para cada $x \in \mathbb{C}^{N+M}$, se tiene $Px \in E$ y $x - Px \in E^\perp$, pues para cada $y \in E$ tenemos que

$$(7) \quad \langle x - Px, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, Py \rangle = 0$$

En particular los vectores Px y $x - Px$ son mutuamente ortogonales y se tiene la descomposición ortogonal $x = Px + (x - Px)$, i.e., podemos escribir $I = P + (I - P)$. De ahora en adelante, si P es una proyección ortogonal y $E = \text{Ran}P$ es su rango, la denotaremos mediante el símbolo P_E . Así por ejemplo, P_N y P_M , denotarán las proyecciones ortogonales de \mathbb{C}^{N+M} sobre los subespacios E_N y E_M , respectivamente, como $\mathbb{C}^{N+M} = E_N + E_M$ y $E_N \perp E_M$, tenemos que $E_M = I - E_N = E_{N^\perp}$.

3.1. Definición y propiedades básicas. La transformada de Fourier discreta generalizada (GDFT) se define como la transformación lineal $Z_{N,M} : E_N \rightarrow E_M$ dada por

$$(8) \quad Z_{N,M} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n|$$

donde, como en la sección anterior, $\zeta_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$.

Consecuentemente, si $x \in E_N$, $x = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e_n$, entonces

$$(9) \quad \begin{aligned} Z_{N,M}x &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n| \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} e_{n'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_{n'} \delta_{nn'} f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n f_m. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$(Z_{N,M}x)(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n$$

La GDFT $Z_{N,M}$ se puede extender a una transformación lineal de \mathbb{C}^{N+M} en sí mismo definiéndola como cero en $E_N^\perp = E_M$. Abusando de la notación pero sin causar confusión, denotaremos con el mismo símbolo a esta extensión de $Z_{N,M}$.

Recordemos que la adjunta T^* de una transformación lineal T de \mathbb{C}^{N+M} en sí mismo, está caracterizada por la relación

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^{N+M}$$

PROPOSICIÓN 12. La GDFT $Z_{N,M}$ es lineal y cumple con las siguientes condiciones

- (i) $Z_{N,N} = I_N$
- (ii) $Z_{N,M}^2 = 0$ y $Z_{N,M}^* = 0$, donde $Z_{N,M}^*x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn'} x_m e_{n'}$
- (iii) $P_M Z_{N,M} = Z_{N,M}$ y $Z_{N,M} P_N = Z_{N,M}$.

Demostración. Inmediatamente de la definición de $Z_{N,M}$ se obtiene (i) tomando $N = M$.

Nótese que

$$\begin{aligned}
\langle x, Z_{N,M} y \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} x_n e_n + \sum_{m'=0}^{M-1} x_{m'} f_{m'}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} y_{n'} f_m \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_n y_{n'} \langle e_n, f_m \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_{m'} y_{n'} \langle f_{m'}, f_m \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_m y_{n'} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} \bar{x}_m \langle e_{n'}, y \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \left\langle \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn'} x_m e_{n'}, y \right\rangle = \langle Z_{N,M}^* x, y \rangle.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que $Z_{N,M}^* x = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn} x_m e_n$. Ahora, tenemos para cada $x \in \mathbb{C}^{N+M}$

$$Z_{N,M}^{*2} x = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{-mn} x_m Z_{N,M}^* e_n = 0,$$

pues $\ker Z_{N,M}^* = E_N$

De manera similar se demuestra que $Z_{N,M}^2 = 0$. Eso demuestra (ii).

Finalmente,

$$\begin{aligned}
P_M Z_{N,M} x &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n P_M f_m \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} x_n f_m = Z_{N,M} x.
\end{aligned}$$

De manera similar se demuestra la segunda identidad en (iii). Esto concluye la demostración. \square

3.2. El Teorema de Parseval. Denotaremos mediante $|Z_{N,M}|$ al operador

$$Z_{N,M}^* Z_{N,M}.$$

PROPOSICIÓN 13. (i) $Z_{N,M} Z_{N,M}^* = P_M$ la proyección ortogonal de \mathbb{C}^{N+M} sobre E_M .

(ii) $|Z_{N,M}|$ es una proyección ortogonal y $|Z_{N,M}| \leq P_N$ con igualdad si y sólo si $N = M$, i.e., $|Z_{N,M}|$ es una subproyección de P_N .

Demostración.

$$\begin{aligned}
Z_{N,M} Z_{N,M}^* &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n| \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \zeta_N^{-m'n'} |e_{n'}\rangle \langle f_{m'}| \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \sum_{m,m'=0}^{M-1} \zeta_N^{mn-m'n'} \delta_{nn'} |f_m\rangle \langle f_{m'}| \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m,m'=0}^{M-1} \zeta_N^{(m-m')n} |f_m\rangle \langle f_{m'}| = \frac{1}{N} \sum_{m,m'=0}^{M-1} N \delta_{m,m'} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} |f_m\rangle \langle f_m| = P_M.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el inciso (i).

Ahora, $|Z_{N,M}|^* = (Z_{N,M}^* Z_{N,M})^* = Z_{N,M}^* Z_{N,M} = |Z_{N,M}|$, entonces $|Z_{N,M}|$ es autoadjunto. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |Z_{N,M}|^2 &= (Z_{N,M}^* Z_{N,M})^2 = Z_{N,M}^* Z_{N,M} Z_{N,M}^* Z_{N,M} \\ &= Z_{N,M}^* P_M Z_{N,M} = Z_{N,M}^* Z_{N,M} = |Z_{N,M}|. \end{aligned}$$

Entonces $|Z_{N,M}|$ es una proyección ortogonal. Pero $P_N - |Z_{N,M}|$ es autoadjunto y del punto (iii) de la proposición [12](#),

$$\begin{aligned} (P_N - |Z_{N,M}|)^2 &= (P_N - Z_{N,M}^* Z_{N,M})^2 \\ &= P_N^2 + (Z_{N,M}^* Z_{N,M})^2 - P_N Z_{N,M}^* Z_{N,M} - Z_{N,M}^* Z_{N,M} P_N \\ &= P_N + Z_{N,M}^* Z_{N,M} - (Z_{N,M} P_N)^* Z_{N,M} - Z_{N,M}^* Z_{N,M} \\ &= P_N - Z_{N,M}^* Z_{N,M} = P_N - |Z_{N,M}| \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces $|Z_{N,M}|$ es una subproyección de P_N . Esto concluye la demostración. \square

Demostraremos un resultado que generaliza al teorema de Parseval, teorema [2](#). Para esto necesitamos definir una base ortonormal distinguida, llamada base ortonormal de vectores de máximo entrelazamiento y demostrar un lema.

DEFINICIÓN 14. Los vectores de máximo entrelazamiento $\varphi_n \in E_N$ se obtienen como la transformada inversa de Fourier de los vectores básicos, i.e.,

$$\varphi_n = F_N^* e_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{-nn'} e_{n'}.$$

LEMA 15. (i) El conjunto de vectores de máximo entrelazamiento es una base ortonormal de E_N .

(ii) $\ker |Z_{N,M}| = \ker Z_{N,M} = \text{Span}\{\varphi_n : M \leq n \leq N-1\}$

Demostración. Como la transformada de Fourier es un operador unitario, el inciso (i) se sigue inmediatamente de esta propiedad.

Ahora, mediante cálculos directos se obtiene que

$$\begin{aligned} Z_{N,M} F_N^* &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n',n''=0}^{N-1} \zeta_N^{-n'n''} |e_{n''}\rangle \langle e_{n'}| \\ (10) \quad &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n,n',n''=0}^{N-1} \zeta_N^{mn-n'n''} \delta_{nn''} |f_m\rangle \langle e_{n'}| = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \zeta_N^{n(m-n')} |f_m\rangle \langle e_{n'}| \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \delta_{m,n'} |f_m\rangle \langle e_{n'}| = \sum_{m=0}^{M-1} |f_m\rangle \langle e_m|. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} Z_{N,M} \varphi_n &= Z_{N,M} F_N^* e_n \\ (11) \quad &= \sum_{m=0}^{M-1} |f_m\rangle \langle e_m| e_n = \begin{cases} f_n & \text{si } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{si } M \leq n \leq N-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esto demuestra la segunda identidad del inciso (ii). Por otra parte, la desigualdad $\ker Z_{N,M} \subset \ker |Z_{N,M}|$ es inmediata y por el inciso (ii) de la proposición [13](#) junto con el inciso (iii) de la proposición [12](#), si $u \in \ker |Z_{N,M}|$ entonces

$$0 = Z_{N,M} Z_{N,M}^* Z_{N,M} u = P_M Z_{N,M} u = Z_{N,M} u.$$

Esto completa la demostración del lema. \square

TEOREMA 16. (*Parseval generalizado*)

Los operadores $Z_{N,M}$ y $Z_{N,M}^*$ son isomorfismos isométricos que preservan el producto interno entre los subespacios $\text{Ran}|Z_{N,M}| \subset E_N$ y E_M .

Demostración. De la ecuación (11) se obtiene que $Z_{N,M}\varphi_n = f_n$ si $0 \leq n \leq M-1$. Multiplicando en ambos lados por $Z_{N,M}^*$ se obtiene que

$$Z_{N,M}^*f_n = Z_{N,M}^*Z_{N,M}\varphi_n = |Z_{N,M}|\varphi_n = \varphi_n,$$

pues $|Z_{N,M}|$ es una proyección. Esto demuestra que la base ortonormal de E_M es enviada por $Z_{N,M}^*$ en una base ortonormal de

$$\text{Ran}|Z_{N,M}| = \text{Span}\{\varphi_n : 0 \leq n \leq M-1\},$$

i.e., $Z_{N,M}^*$ es una isometría que preserva el producto interno entre estos subespacios. \square

Salvo isomorfismo, el teorema anterior se reduce al teorema de Parseval cuando $N = M$.

Denotemos por $|Z_{N,M}|^\perp$ al operador $P_N - |Z_{N,M}|$.

PROPOSICIÓN 17. *La transformada de Fourier generalizada cumple con*

$$\begin{aligned} |Z_{N,M}| &= \sum_{b=0}^{M-1} |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b| \\ |Z_{N,M}|^\perp &= \sum_{n=M}^{N-1} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|. \end{aligned}$$

Demostración. De la identidad (10) se obtiene $Z_{N,M}\varphi_n = f_n$ y aplicando el adjunto en ambos lados se ve que $Z_{N,M}^*f_n = \varphi_n$, consecuentemente $|Z_{N,M}|\varphi_n = \varphi_n$ para $n = 1, \dots, M-1$. Por el lema 15 tenemos que

$$|Z_{N,M}|^\perp = \sum_{b=k}^{M-1} |\varphi_{bN}\rangle\langle\varphi_{bN}|$$

y

$$|Z_{N,M}| = P_N - |Z_{N,M}|^\perp = \sum_{b=0}^{k-1} |\varphi_{bN}\rangle\langle\varphi_{bN}|.$$

\square

3.3. Fórmulas de convolución, traslación y dilatación.

TEOREMA 18. *La GDFT satisface la propiedad de convolución*

$$Z_{N,M}(x * y) = Z_{N,M}(x) Z_{N,M}(y).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}(x * y) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} |f_m\rangle \langle e_n | \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) e_k \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(k-l) \right) \delta_{nk} f_m \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_N^{mn} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(n-l) \right) f_m \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{m(n'+l)} x(l)y(n') f_m \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_N^{ml} x(l) \sum_{n'=0}^{N-1} \zeta_N^{mn'} y(n') f_m \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} Z_{N,M}(x)(m) Z_{N,M}(y)(m) f_m.
\end{aligned}$$

Entonces, $Z_{N,M}(x * y)(m) = (Z_{N,M}(x) Z_{N,M}(y))(m)$ para cada $0 \leq m \leq M-1$. Esto termina la demostración. \square

DEFINICIÓN 19. Para cada $x \in \mathbb{C}^N$ definimos su trasladado por $a \in \mathbb{Z}_N$ mediante

$$T_a(x)(k) = x(k-a), \quad k \in \mathbb{Z}_N$$

y su dilatación por $a \in \mathbb{Z}_N$ mediante

$$D_a(x)(k) = x(ak), \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

PROPOSICIÓN 20. Para cada $a \in \mathbb{Z}_N$, la GDFT satisface las siguientes fórmulas:

(i) (**Traslación**)

$$Z_{N,M}(T_a(x)(m)) = e^{\frac{2i\pi a m}{N}} Z_{N,M}(x)(m).$$

(ii) (**Dilatación**)

$$Z_{N,M}(D_a(x))(m) = D_{a^{-1}}(Z_{N,M}x)(m).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}T_a(x)(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m n}{N}} T_a(x)_n = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m n}{N}} x_{n-a} \\
&= \sum_{n'=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m(n'+a)}{N}} x_{n'} = e^{\frac{2i\pi a m}{N}} Z_{N,M}(x)(m).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{N,M}(D_a(x))(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m n}{N}} x_{an} = \sum_{n'=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi a^{-1} m n'}{N}} x_{n'} \\
&= D_{a^{-1}}(Z_{N,M}x)(m).
\end{aligned}$$

\square

3.4. Ejemplos.

EJEMPLO 21. Si para cada $a \in \mathbb{Z}_N$ se define $\mathbf{a} : E_N \mapsto \mathbb{C}$ tal que

$$\mathbf{a}_k = e^{\frac{2i\pi a k}{N}} = \zeta_N^{ak}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1),$$

entonces se cumple que $Z_{N,M}(\mathbf{a}) = \sqrt{N} f_a$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 Z_{N,M}a &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} |f_m\rangle \langle e_n | a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} |f_m\rangle \langle e_n, a \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} \zeta_N^{an} f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{(m+a)n} f_m \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} N \delta_{m,-a} f_m = \sqrt{N} f_{N-a}.
 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 22. Para $a \in \mathbb{Z}_N$, se cumple que $Z_{N,M}(e_a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{ma} f_m$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (12) \quad Z_{N,M}(e_a) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} |f_m\rangle \langle e_n | e_a \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{nm} \delta_{a,n} f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \zeta_N^{ma} f_m.
 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 23. Si $x = \frac{1}{2}(e_1 + e_{-1}) : E_N \mapsto \mathbb{C}$, se cumple que

$$Z_{N,M}(x)(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos \frac{2\pi l}{N}, \quad 0 \leq l \leq M-1.$$

Demostración. Para cada $0 \leq l \leq M-1$ tenemos por (12) que,

$$\begin{aligned}
 Z_{N,M}(x)(l) &= \frac{1}{2\sqrt{N}} (\zeta_N^l + \zeta_N^{-l}) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi i l}{N}} + e^{-\frac{2\pi i l}{N}}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi l}{N}\right).
 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 24. Si $x = \frac{1}{3}(e_1 + e_{-1} + e_0) : E_N \mapsto \mathbb{C}$, se cumple que

$$Z_{N,M}(x)(l) = \frac{1}{3\sqrt{N}} (1 + 2 \cos \frac{2\pi l}{N}), \quad 0 \leq l \leq M-1.$$

Demostración. Si $0 \leq l \leq M-1$, entonces (12) implica que,

$$\begin{aligned}
 Z_{N,M}(x)(l) &= \frac{1}{3\sqrt{N}} (\zeta_N^l + \zeta_N^{-l} + \zeta_N^{(0)l}) \\
 &= \frac{1}{3\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi i l}{N}} + e^{-\frac{2\pi i l}{N}} + 1) = \frac{1}{3\sqrt{N}} (1 + 2 \cos(\frac{2\pi l}{N})).
 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 25. Si $x = \frac{1}{2}(e_1 + e_0) : E_N \mapsto \mathbb{C}$, se cumple que

$$Z_{N,M}(x)(l) = \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi i l}{N}} + 1), \quad 0 \leq l \leq M-1.$$

Demostración. Usando (12) para cada $0 \leq l \leq M-1$ obtenemos que,

$$\begin{aligned}
 Z_{N,M}(x)(l) &= \frac{1}{2\sqrt{N}} (\zeta_N^l + \zeta_N^{(0)l}) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi i l}{N}} + e^{\frac{2\pi i (0)l}{N}}) = \frac{1}{2\sqrt{N}} (e^{\frac{2\pi i l}{N}} + 1).
 \end{aligned}$$

□

AGRADECIMIENTOS. La autora agradece profundamente a los dos árbitros, por su cuidadosa revisión y sugerencias que mejoraron la presentación de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Arar S., An Introduction to the Discrete Fourier Transform, *ALL ABOUT CIRCUITS*, Technical article, July, 2017. <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/an-introduction-to-the-discrete-fourier-transform/>
- [2] Bolaños-Servín J.R., Ríos-Cangas J.I. and Quezada R., *Transition Maps between Hilbert Subspaces and Quantum Energy Transport*, Open Systems & Information Dynamics Vol. 27, No. 3 (2020) 1950001 (22 pages) DOI:S1230161220500134
- [3] Dence Joseph B., Dence Thomas P., *Elements of the Theory of Numbers*. Harcourt Academic Press. p. 197, 1999, ISBN 9780122091308.
- [4] Euler Leonhard, *Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1741, pp. 141-146, Reprinted in *Opera Omnia: Series 1, Volume 2*, pp. 33 - 37.
- [5] Márquez-Martínez A.C. y Quezada R., *El espectro de Gelfand del álgebra circulante*, MIXBA'AL Rev. Met. de Mat., Vol. IX, 2018, 7-12.
- [6] Smith S.W., *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists*, Newness an imprint of Elsevier Science, 2003. doi:10.1016/b978-0-7506-7444-7/50046-7
- [7] Terras Audrey, *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, Cambridge University Press, 1999.

Karla Adriana Ortega Gallegos
Departamento de Matemáticas,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186,
Col. Leyes de Reforma 1ra sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: adri.mate3017@gmail.com



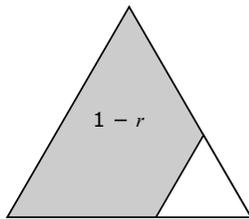
SUMA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA MEDIANTE SUMAS TELESCÓPICAS

ÁNGEL PLAZA DE LA HOZ

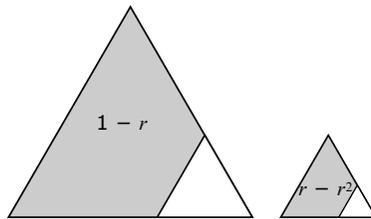
RESUMEN. Visualmente se muestra la suma de una serie geométrica mediante el uso de sumas telescópicas.

PROPOSICIÓN. Si $r \in (0, 1)$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$.

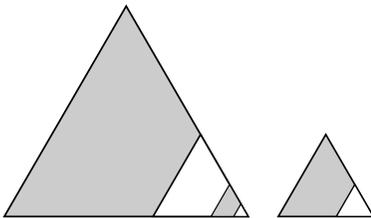
Demostración. Las siguientes figuras muestran que $(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1$.



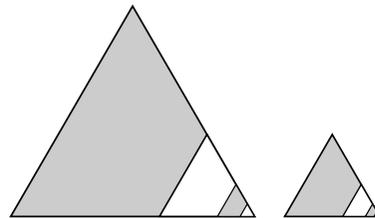
(a) $1 - r$



(b) $(1-r) + (r-r^2) = 1-r^2 = (1-r)(1+r)$



(c) $(1-r) + (r-r^2) + (r^2-r^3) = 1-r^3 = (1-r)(1+r+r^2)$



(d) $(1-r)(1+r+r^2+r^3)$

Mediante paso al límite, la zona gris en ambas figuras suma 1.

$$(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1, \text{ de donde } \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

□

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo que propuso mejoras en el artículo.

Ángel Plaza de la Hoz

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria,

Departamento de Matemáticas.

Edificio de Informática y Matemáticas,

Campus de Tafira, 35017-Las Palmas de Gran Canaria, España.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5077-6531>

e-mail: angel.plaza@ulpgc.es



DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CIRCULANTES POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER SOBRE CAMPOS FINITOS

HORACIO TAPIA-RECILLAS Y ARMANDO VELAZCO-VELAZCO

RESUMEN. Por medio de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) se diagonalizan matrices circulantes sobre campos finitos.

1. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Fourier, (TF) (y sus variantes), es una de las transformadas más usadas la cual tiene aplicaciones en varias áreas del conocimiento incluyendo comunicaciones, astronomía, geología, óptica, ingeniería médica; en diversos aspectos como son el procesamiento de señales e imágenes, diseño de antenas, teléfonos celulares, localización de reservas de hidrocarburos, procesamiento de datos, entre otras aplicaciones. Desde el punto de vista matemático también es una herramienta muy importante. Clásicamente la TF se ha tratado sobre el campo de los números complejos, pero desde hace algún tiempo ha surgido la Transformada Discreta de Fourier (TDF), particularmente por el uso de estructuras finitas como son los campos finitos. Las matrices circulantes ([2]) también tienen varias aplicaciones incluyendo teoría de gráficas (Paley), procesamiento digital de imágenes, y teoría de códigos particularmente con códigos cíclicos ([4]).

Es conocido que en el caso clásico, i.e., sobre el campo de los números complejos, las matrices circulantes se pueden diagonalizar por medio de la TDF ([1], [5]). El propósito principal de esta nota es ver que por medio de la TDF también se pueden diagonalizar las matrices circulantes sobre campos finitos. La nota se divide en 4 secciones: en la segunda sección se recordarán conceptos básicos sobre la TDF. La TDF definida sobre campos finitos se aborda en la sección 3, y en la sección 4 se da el resultado principal de esta nota (Teorema 1).

2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER (TF)

En esta sección se recordarán resultados que aparecen en la literatura los cuales serán necesarios más adelante. Para detalles el lector puede consultar, por ejemplo, [1], [7].

Sea \mathbb{F} un campo, que puede ser finito con $q = p^r$ elementos, p primo, o los números complejos \mathbb{C} . Sea σ la permutación actuando sobre un vector renglón moviendo las coordenadas un lugar a la derecha, i.e., $\sigma(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_n, c_1, \dots, c_{n-1})$. La permutación σ^k indica aplicar σ k veces con $0 \leq k \leq n - 1$. Obsérvese que $\sigma^0 = Id = \sigma^n$.

Una matriz $n \times n$ sobre \mathbb{F} es circulante ([2]) si sus renglones se obtienen del primer renglón aplicando consecutivamente la permutación σ al renglón obtenido previamente. Así una matriz circulante es:

$$M = (m, \sigma(m), \sigma^2(m), \dots, \sigma^{n-1}(m))^t$$

donde m es el primer renglón de la matriz M y X^t es la matriz transpuesta.

Sea C el conjunto de las matrices circulantes $n \times n$ sobre \mathbb{F} . Es fácil ver que con la suma y producto usual de matrices y multiplicación por escalares, este conjunto es una \mathbb{F} -álgebra de dimensión n . Si M es una $n \times n$ matriz circulante y $(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n})$ es el primer renglón de M se usará la notación $M = \text{circ}(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n})$.

Sea $J = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0) \in C$ y sea $H = \langle J \rangle$ el grupo cíclico generado por J , el cual claramente es de orden n . Sea $\mathbb{F}(H)$ el álgebra de grupo generada por H sobre el campo \mathbb{F} , i.e.,

$$\mathbb{F}(H) = \{a_0 + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}, a_i \in \mathbb{F}\}.$$

Se puede ver que el álgebra de las matrices circulantes y esta álgebra de grupo son el mismo objeto: $C = \mathbb{F}(H)$. Obsérvese que $\mathbb{F}(H)$ se puede ver como las funciones de H en \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}(H) = \{f : H \rightarrow \mathbb{F}, f \text{ función}\}.$$

Sea G un grupo finito abeliano y $\hat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{S}^1)$, i.e., el conjunto de homomorfismos del grupo G en el círculo unitario complejo \mathbb{S}^1 . Se puede ver que este conjunto es un grupo llamado el grupo de caracteres de G . Este grupo tiene varias propiedades entre las que se encuentran que \hat{G} y G son isomorfos ([7]).

Estamos ahora en la situación de recordar la definición de la Transformada de Fourier sobre el campo de los números complejos [7]:

$$F : \mathbb{C}(G) \rightarrow \mathbb{C}(\hat{G}), F_f(\chi) = \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(g)},$$

donde la barra indica conjugación compleja.

3. LA TDF SOBRE CAMPOS FINITOS

Antes de recordar la TDF sobre campos finitos, introduzcamos otra estructura algebraica. Sea \mathbb{F}_q un campo finito con q elementos y sea

$$R_n = \mathbb{F}_q[x]/\langle x^n - 1 \rangle = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}, a_i \in \mathbb{F}_q\}.$$

Es decir, R_n es el conjunto de polinomios con coeficientes en \mathbb{F}_q de grado a lo más n . Este conjunto con la suma usual de polinomios, el producto de polinomios usual reducido módulo $x^n - 1$ y la multiplicación natural por escalares, es también una \mathbb{F}_q -álgebra. Por medio de la representación polinomial se puede ver que los \mathbb{F}_q -espacios vectoriales \mathbb{F}_q^n y R_n son isomorfos:

$$P : \mathbb{F}_q^n \rightarrow R_n,$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

No es difícil ver que R_n es isomorfo al álgebra de matrices circulantes C .

Para definir la Transformada Discreta de Fourier sobre un campo finito, sea $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ un elemento fijo de orden n primo relativo con q y sea $\langle \alpha \rangle$ el grupo cíclico generado por α .

La Transformada Discreta de Fourier $F : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$, se define como:

$$F(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \text{ev}_{\langle \alpha \rangle}(a(x)) = (a(1), a(\alpha), \dots, a(\alpha^{(n-1)})),$$

donde $a(x)$ es el elemento de R_n correspondiente a $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ y $a(\alpha^j) = a_0 + a_1 \alpha^j + \dots + a_{n-1} \alpha^{j(n-1)}$. Esta transformada tiene varias propiedades incluyendo

el hecho que es una transformación \mathbb{F}_q -lineal. La matriz asociada a F con respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-1} & \cdots & \alpha^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es de tipo Vandermonde, la cual en particular es invertible. Para determinar la matriz inversa se supondrá que los enteros n y q son primos relativos. La matriz inversa es:

$$\frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \cdots & \alpha^{-(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(n-1)} & \cdots & \alpha^{-(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

La transformación lineal asociada a esta última matriz es la inversa de la TDF:

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{F}_q^n &\longrightarrow \mathbb{F}_q^n, F^{-1}(A) = ev_{\langle \alpha^{-1} \rangle}(A(x)) = a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n}(A(1), A(\alpha^{-1}), \dots, A(\alpha^{-(n-1)})), \end{aligned}$$

donde $A(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}$ y $a_j = A(\alpha^{-j}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{-ij} A_i$.

En teoría de códigos lineales a la TDF se le conoce como polinomio de Mattson-Solomon y es usada para estudiar el peso de Hamming de los códigos ([4]).

La discusión anterior se ilustrará con un ejemplo. Sea $q = 5$, $\alpha = 2 \in \mathbb{F}_5$. Se puede ver fácilmente que $n = 4$, i.e. $\alpha^4 = 1$, el grupo $\langle \alpha \rangle = \{1, 2, 4, 8 = 3\}$ y $\langle \alpha^{-1} \rangle = \{1, 3, 4, 2\}$.

La matriz asociada a la TDF es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

y su inversa:

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 1 & \alpha^{-2} & \alpha^{-4} & \alpha^{-6} \\ 1 & \alpha^{-3} & \alpha^{-6} & \alpha^{-9} \end{pmatrix}.$$

4. LA TDF Y MATRICES CIRCULANTES

En esta sección se demuestra que las matrices circulantes sobre un campo finito se pueden diagonalizar por medio de la TDF.

Recordemos que una matriz circulante $A = circ(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ está asociada con el elemento $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{F}_q^n$ el cual a su vez esta asociado al polinomio $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in R_n$. De esta manera se puede hablar indistintamente de la matriz circulante, el vector o el polinomio asociado. Con la notación anterior se tiene el siguiente,

TEOREMA 1. *Sea A una matriz circulante, M la matriz asociada a la TDF y M^{-1} su inversa. Entonces,*

$$M^{-1}AM = D$$

donde D es una matriz diagonal.

Demostración. Dado que una matriz circulante A es un elemento del álgebra de grupo $\mathbb{F}_q(J)$, i.e., $A = b_0I + b_1J + \dots + b_{n-1}J^{n-1}$ con $b_j \in \mathbb{F}_q$ y $J = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$, por linealidad es suficiente probar el resultado para $A = J$. En este caso se afirma que $M^{-1}JM = \text{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$. Probar esta relación es equivalente a ver que,

$$JM = M\text{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}).$$

Primero obsérvese que la operación JM hace un corrimiento hacia arriba a los renglones de la matriz M y la operación $M\text{diag}((1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}))$ también hace un corrimiento hacia arriba a los renglones de la matriz M . El último renglón $(\alpha^n, \alpha^{2n}, \dots, \alpha^{(n-1)n}) = (1, 1, \dots, 1)$ dado que $\alpha^n = 1$, con lo cual queda probada la afirmación. \square

A continuación se ilustra este resultado con un ejemplo, para lo cual tomaremos el caso introducido anteriormente donde $\alpha = 2$. En este caso $J = \text{circ}(0, 1, 0, 0)$ y se tiene:

$$JM = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$M\text{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta que $\alpha^4 = 1$, ambas matrices son iguales.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a CONACyT (#764803) y a la Universidad Autónoma Metropolitana-I el apoyo brindado. Agradecemos al árbitro sus sugerencias y comentarios.

REFERENCIAS

- [1] Arveson W., *A Short Course on Spectral Theory*, Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics 209), (2002)
- [2] Davis P.J. *Circulant Matrices*. Wiley-Interscience, N.Y., (1979).
- [3] Discrete Fourier Transform, Wikipedia.
- [4] MacWilliams, F.J. and Sloane, N.J.A. *The Theory of Error-Correcting Codes*. New York: Elsevier/North Holland, 1977.
- [5] Márquez-Martínez A.C. y Quezada R. El espectro de Gelfand del álgebra circulante, *MIXBA'AL Rev. Met. de Mat.*, Vol. IX, 2018, 7-12.
- [6] Tapia-Recillas, H. *Análisis de Fourier Discreto y Teoría de códigos*. 6^o Coloquio del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, (2014).
- [7] Terras, A. *Fourier analysis on Finite groups and Applications*. London Math. Soc., Student Text 43, (1999).

Horacio Tapia Recillas,

Armando Velazco Velazco.

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Avenida Ferrocarril San Rafael Atlixco, número186

Colonia Leyes de Reforma 1^A Sección, Alcaldía Iztapalapa,

C.P.09340, CDMX, México.

e-mail: htr@xanum.uam.mx, oczalevaj@gmail.com



SECCIONES CÓNICAS, UNA APROXIMACIÓN ANALÍTICA

GABRIEL LÓPEZ GARZA

RESUMEN. En varios libros de texto la demostración basada en las ideas de Dandelin del teorema atribuido a Apolonio que establece que una cónica resulta de la intersección de un plano con un cono circular recto utiliza geometría sintética y la definición mediante la excentricidad de una cónica. Aquí presentamos una demostración que usa solo la definición elemental de cónica mediante distancias entre puntos con cálculos e imágenes realizadas dentro del contexto de la Geometría Analítica.

1. INTRODUCCIÓN

El teorema más destacado de la geometría de las cónicas dice que se obtiene una parábola o una elipse o una hipérbola al intersectar un plano con un cono circular (de ahí el nombre “cónica” para estas curvas). Este hecho conocido desde Apolonio de Perga tiene una fina demostración debida a Dandelin [2] quien publicó sus resultados en 1822. La demostración que conocimos quienes fuimos estudiantes antes de que existiera la internet no utiliza la definición analítica de un cono ni sus propiedades desde un punto de vista de la geometría analítica, por ejemplo la que aparece en el celebrado libro de Courant y Robbins [1] página 200. Además, la demostración típica de geometría analítica no utiliza la ecuación de un cono ni las propiedades analíticas, sino un enfoque sintético (véase, por ejemplo, [3]). Por si fuera poco, la demostración de [3] y otros libros de texto requiere definir la excentricidad de una cónica. Como se sabe, la más básica definición de cónica en geometría analítica requiere la fórmula de distancia entre puntos. Sin embargo, Dandelin no requirió del concepto de excentricidad como se puede ver en el original en la página 172, pero no utilizó geometría analítica en sus demostraciones. Quien desee una aproximación histórica del desarrollo e ideas de Dandelin puede consultar [5].

En este artículo se presenta una demostración del Teorema de Apolonio que utiliza las técnicas y métodos de la geometría analítica en \mathbb{R}^3 , la cual está basada en la construcción de esferas inscritas en un cono, llamadas esferas de Dandelin.

Cabe señalar que todas las gráficas del presente artículo se realizaron con GeoGebra utilizando las ecuaciones presentadas en este trabajo. Ojalá que este artículo pudiera servir como motivación para que algún lector realice los cálculos por sí mismo y sus propias gráficas ya que es un buen ejercicio para un estudiante maduro en geometría analítica.

2. TEOREMA PRINCIPAL

Las definiciones básicas de cono, sección cónica, elipse, hipérbola y parábola se encuentran en la sección 3. Con las definiciones básicas de la referida sección, el famoso Teorema de Apolonio de Perga puede expresarse, omitiendo los casos triviales, de la siguiente manera.

TEOREMA 1. *Una sección cónica es una elipse o una hipérbola o una parábola.*

En este artículo, la demostración del Teorema de Apolonio se basa en la construcción de las esferas de Dandelin. Considere un cono circular \mathcal{P} y un plano \mathcal{C} de modo que el vértice del cono no esté en el plano. La esfera de Dandelin es una esfera inscrita en

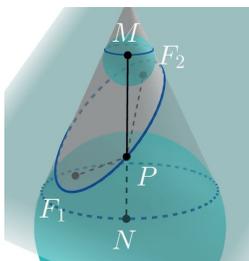


FIGURA 1. Elipse: por Lema 2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y P a M son las mismas. Según el Lema 3, la distancia de M a N es constante para P en la curva. Por lo tanto, la curva es una elipse.

el cono \mathcal{C} , tangente al plano \mathcal{P} . La existencia de las esferas de Dandelin se demuestra fácilmente en la sección 3 dentro del contexto de la geometría analítica. Demostraremos que se obtiene una parábola con un plano paralelo a una línea generadora que no está en el plano y que se obtienen elipses e hipérbolas con planos no paralelos a ninguna línea generadora. Veremos en la sección 3 que dentro del contexto de la Geometría Analítica, no hay pérdida de generalidad al considerar el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y los planos de la forma $ax - z + d = 0$, $a, d \neq 0$. Con esta configuración tenemos los siguientes casos: i) $|a| < 1$, elipse; ii) $|a| > 1$, hipérbola; iii) $a = \pm 1$, parábola.

Aquí presentamos dentro del marco analítico una demostración simple del Teorema de Apolonio basada en dos lemas siguientes, los cuales se demuestran dentro del contexto de la geometría analítica en la sección final de este artículo.

LEMA 2. *Las distancias desde un punto fuera de una esfera hasta los puntos de tangencia en la esfera son iguales.*

LEMA 3. *La distancia entre los puntos de intersección de una generatriz de un cono circular con dos círculos situados en planos paralelos ortogonales al eje del cono es constante.*

Generalmente, los estudiantes comprenden ambos lemas de forma intuitiva, excepto el caso cuando los círculos están en distintas ramas de un cono del Lema 3, el cual es un caso relevante para la hipérbola. En este artículo se demuestran ambos lemas en la sección final utilizando las técnicas básicas de la geometría analítica.

Demostración del Teorema 1. La siguiente demostración está esbozada en la Memoria de Dandelin [2] en las páginas 172 y 173. Vamos a denotar por P a cualquier punto en la curva de intersección del cono \mathcal{C} y el plano \mathcal{P} . Se denotará la distancia entre dos puntos P y Q cualesquiera por $|PQ|$.

i) *Demostración de la elipse.* Para la elipse, se muestra fácilmente en la sección 3 que hay dos esferas de Dandelin. Denotemos por F_1 y F_2 los puntos de tangencia entre las esferas y el plano \mathcal{P} (vea las Figuras 2 (B), (C)). Ahora considere la línea recta (generatriz) que pasa por P y el vértice del cono. Deje M y N los puntos de intersección de la generatriz con las esferas de Dandelin (Figura 2 (D)). Por Lema 2, $|PF_2| = |PM|$ y $|PF_1| = |PN|$. Por otro lado, según el Lema 3, para cualquier punto P en la curva de intersección, la distancia $|MN|$ es constante. Pero $|PF_1| + |PF_2| = |MN|$, por lo tanto, por definición (ver sección 3) la curva es una elipse.

ii) *Demostración de la hipérbola.* Esta demostración es similar a la demostración de elipse. Sea P , F_1 , F_2 , M y N como en las Figuras 3 y 4. Nuevamente por el Lema 2, $|PF_2| = |PM|$ y $|PF_1| = |PN|$. Por el Lema 3, $|MN|$ es constante y $|PF_1| - |PF_2| = |MN|$. Por lo tanto, la curva es una hipérbola.

iii) *Demostración de la parábola.* Para la parábola (ver Figuras 5 y 6), solo hay una esfera de Dandelin y, por lo tanto, solo un foco F . En este caso especial, \mathcal{P} es paralelo

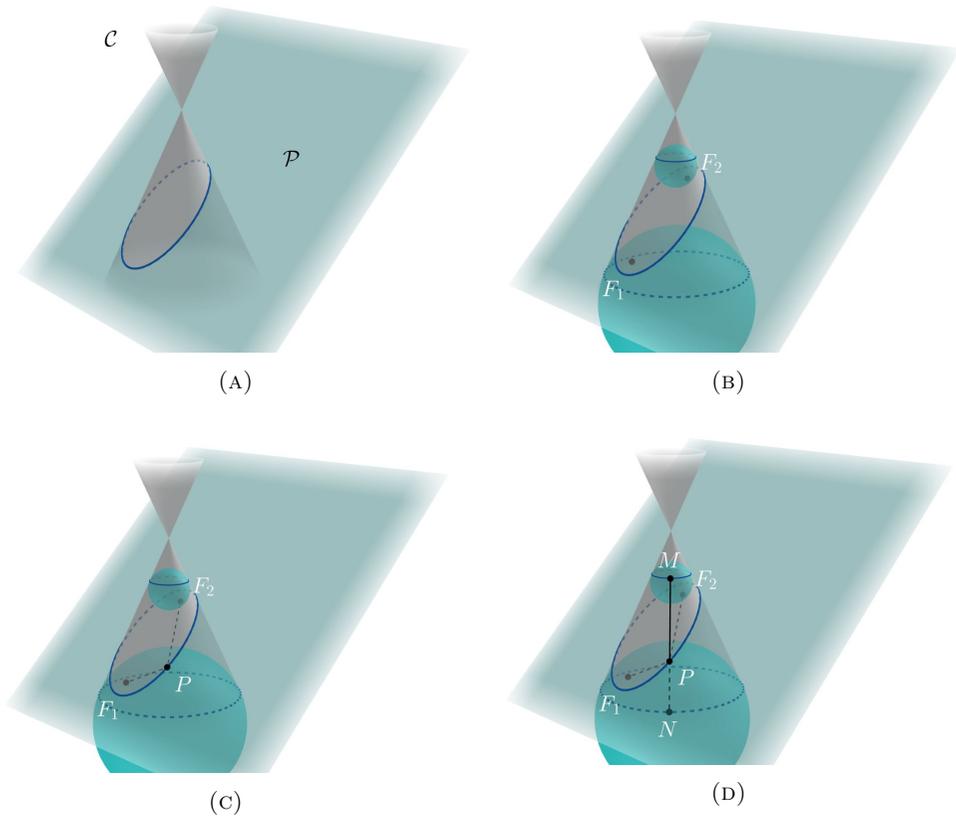


FIGURA 2. (A) El cono \mathcal{C} se cruza con el plano \mathcal{P} . (B) Las esferas cono inscrito son tangentes al plano \mathcal{P} . (C) Los puntos de tangencia de las esferas con el plano \mathcal{P} son los focos de la elipse. P es cualquier punto de la elipse. (D) Por el Lema 2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y P a M son las mismas. Según el Lema 3, la distancia de M a N es constante para P en la curva. Por lo tanto, la curva es una elipse.

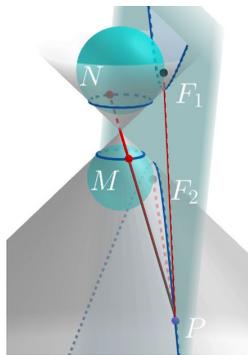


FIGURA 3. Hipérbola: según el Lema 2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. Dado el Lema 3, la distancia de M a N es constante para cada punto P en la curva. Esta distancia es la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2 . Por lo tanto, la curva es una hipérbola.

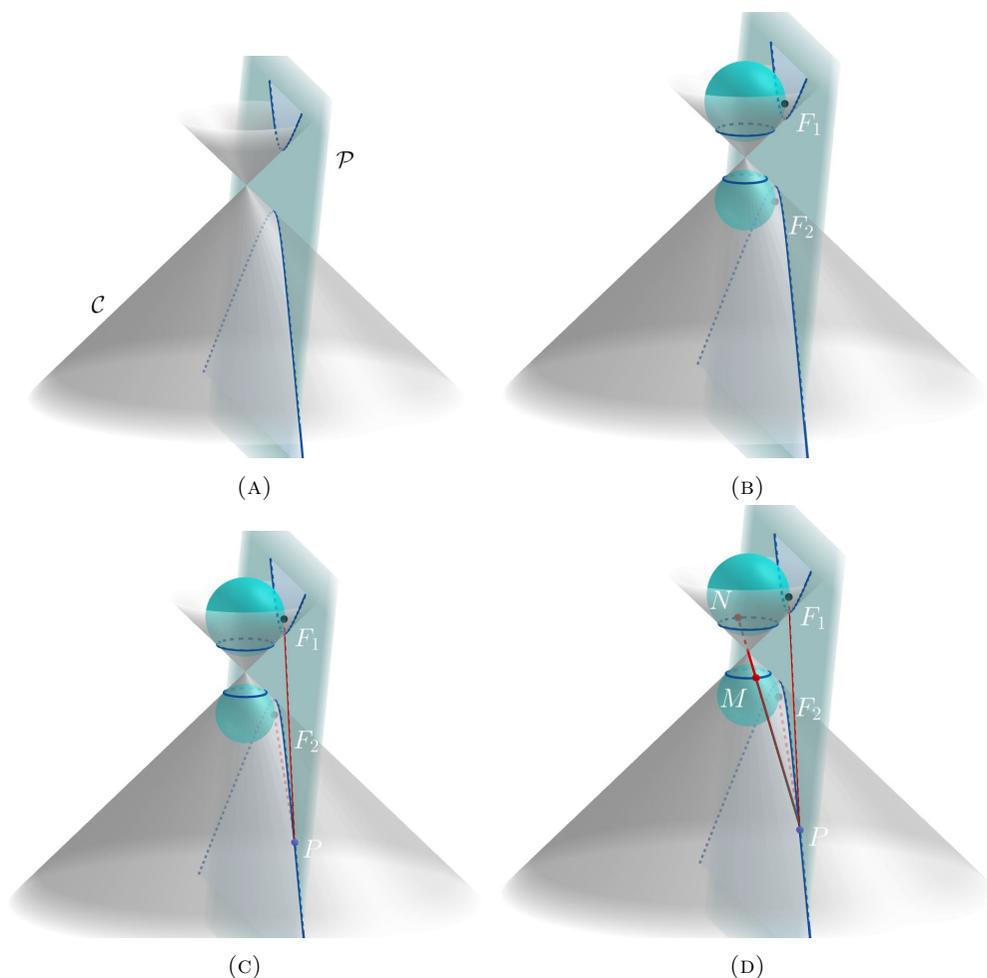


FIGURA 4. (A) El cono \mathcal{C} se cruza con el plano \mathcal{P} para formar una hipérbola. (B) Esferas inscritas en cono tangentes al plano \mathcal{P} . (C) Los puntos de tangencia de las esferas con el plano \mathcal{P} son los focos F_1, F_2 de la hipérbola. P es cualquier punto de la curva. (D) Por el Lema 2 las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. Dado el Lema 3, la distancia de M a N es constante para cada punto P en la curva. Esta distancia es la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2 . Por lo tanto, la curva es una hipérbola.

a una generatriz del cono. Aquí, por el Lema 2, $|PF| = |PM|$. Por otro lado, sea \mathcal{P}_o el plano que contiene el círculo de tangencia de la esfera de Dandelin y el cono, y sea \mathcal{L} la intersección de los planos \mathcal{P} y \mathcal{P}_o . Desde P , trace un segmento ortogonal hasta \mathcal{L} y deje que N sea el punto de intersección del segmento con \mathcal{L} . Ahora, el segmento PM está en el cono y PN está en \mathcal{P} . Por tanto, el ángulo entre PM y el plano \mathcal{P} es el mismo que el ángulo entre PN y \mathcal{P} . Los ángulos son iguales porque \mathcal{P} es por construcción paralelo a una generatriz del cono, y PM está en el cono. Por lo tanto, el triángulo MPN es isósceles y, en consecuencia, $|PM| = |PN|$ para cualquier punto de la curva. De esta manera, la curva es una parábola por definición (ver sección 3). \square

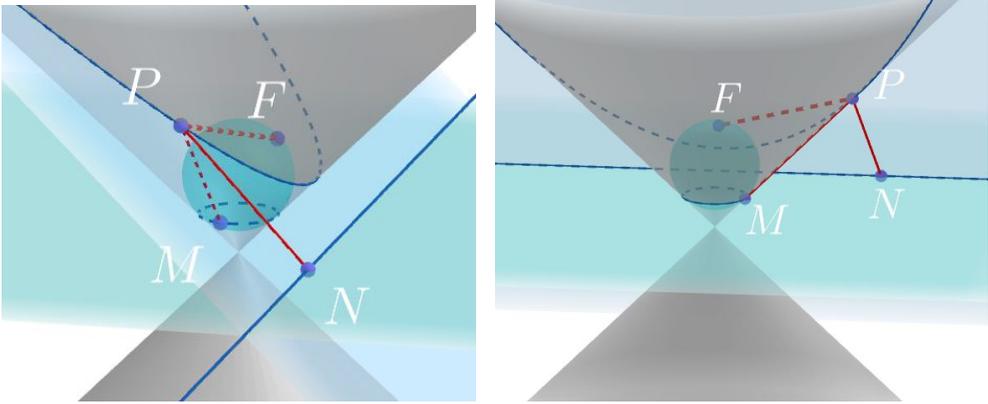


FIGURA 5. Dos vistas diferentes del caso de la parábola. Según el Lema 2, las distancias de P a F y de P a M son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. El triángulo MPN es isósceles. Por lo tanto, la distancia de P a F es la misma que la distancia de P a N . Por lo tanto, la curva es una parábola.

3. CONSTRUCCIONES Y DEFINICIONES BÁSICAS

Antes de demostrar los lemas 2, 3 y que así quede completamente demostrado el Teorema de Apolonio, comenzamos con algunas definiciones elementales y la construcción de las esferas de Dandelin.

Para los efectos de este artículo emplearemos un cono con eje paralelo al eje z , el cual es el conjunto de todos los puntos en \mathbb{R}^3 que satisfacen la ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - (z - z_0)^2 = 0.$$

El cono se llama *circular* si y solo si $a = b$. Si $a \neq b$, el cono se llama *elíptico*. El punto (x_0, y_0, z_0) se llama *vértice* del cono. Las líneas rectas en el cono que pasan a través del vértice se llaman *rectas generadoras* o *generatrices* del cono.

De ahora en adelante, consideramos sin pérdida de generalidad un cono circular con $a = b = 1$ que tiene vértice en $(0, 0, 0)$. Entonces, el cono en consideración tiene la ecuación,

$$(1) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Para simplificar, supusimos que el eje del cono es el eje z ya que se pueden dar pruebas idénticas con los conos. $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ y $y^2 + z^2 - x^2 = 0$.

Definición 4 (Sección cónica). Una sección cónica es el conjunto de todos los puntos en la intersección de un cono con un plano que no contiene el vértice del cono.

Ahora establecemos las definiciones de elipse, hipérbola y parábola a partir de la distancia entre puntos.

Definición 5 (Elipse, hipérbola y parábola). Dado un plano \mathcal{P} , una *elipse* es el conjunto de todos los puntos $P \in \mathcal{P}$ de manera que la suma de distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 llamados focos de la elipse es una constante mayor que la distancia entre los focos. *Hipérbola* es el conjunto de todos los puntos $P \in \mathcal{P}$, de modo que el valor absoluto de la diferencia de las distancias desde dos puntos fijos F_1, F_2 (llamados focos de la hipérbola) es una constante positiva menor que la distancia entre los focos. *Parábola* es el conjunto de todos los puntos $P \in \mathcal{P}$ de tal manera que la distancia de P a un punto F (llamado foco de parábola) y la distancia de P a una recta la línea $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ son iguales.

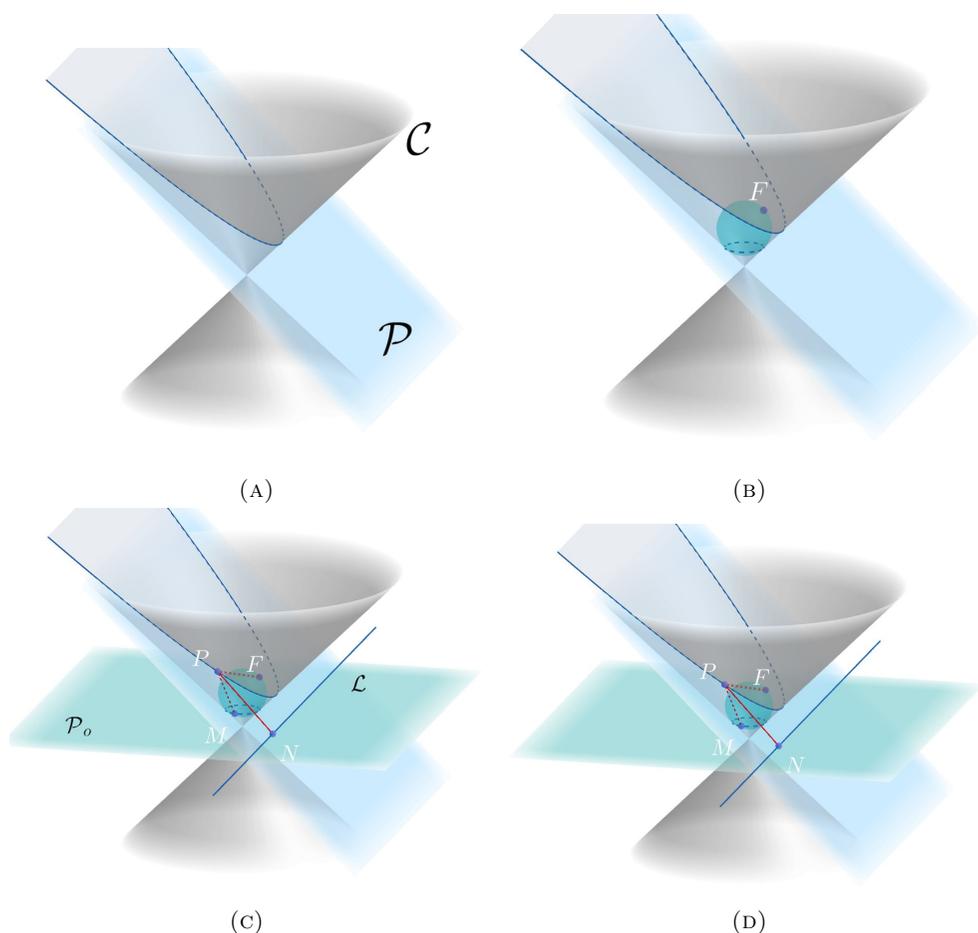


FIGURA 6. (A) El cono \mathcal{C} se cruza con el plano \mathcal{P} paralelo a una de las generatrices de cono. (B) Esfera inscrita en el cono, tangente al plano \mathcal{P} . El punto de tangencia de la esfera con el plano \mathcal{P} es el foco de la parábola F . (C) \mathcal{P}_o es el plano donde se encuentra el círculo de tangencia de la esfera con el cono. La intersección de \mathcal{P} y \mathcal{P}_o es la línea \mathcal{L} , la directriz de la parábola. (D) Según el Lema 2, las distancias desde P a F y P a M son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. El triángulo MPN es isósceles. Por lo tanto, la distancia de P a F es la misma que la distancia de P a N . Por lo tanto, la curva es una parábola.

3.1. Construcción de las esferas de Dandelin. La existencia de esferas inscritas en un cono y tangentes a un plano de corte es una consecuencia de la existencia de soluciones de un polinomio de segundo grado. Sea \mathcal{C} el cono dado por la ecuación (1) y \mathcal{P} un plano de intersección a considerar. Denote con P cualquier intersección de puntos entre \mathcal{C} y \mathcal{P} . Sin pérdida de generalidad consideramos planos con ecuación de la forma

$$(2) \quad ax - z + d = 0, \quad a, d \neq 0.$$

Hay una o dos esferas inscritas en \mathcal{C} tangentes a \mathcal{P} , dependiendo de a . Efectivamente, las esferas tienen ecuaciones de la forma

$$(3) \quad x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2 = \rho^2,$$

donde ζ y ρ son parámetros a determinar, ya que, por simetría, las esferas deben tener su centro en el eje del cono. Sea $C = (0, 0, \zeta)$ el centro de dicha esfera, entonces la

distancia de C a \mathcal{P} viene dada por

$$(4) \quad \text{dist}(C, \mathcal{P}) = \frac{|\zeta - d|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \rho.$$

Por otro lado, considere el plano \mathcal{P}_t tangente al cono que tiene la ecuación $x - z = 0$, luego

$$(5) \quad \text{dist}(C, \mathcal{P}_t) = \frac{|\zeta|}{\sqrt{2}} = \rho.$$

Al igualar (4) y (5) obtenemos

$$(6) \quad \begin{aligned} (1 - a^2)\zeta^2 - 4\zeta d + 2d^2 &= 0 \\ \zeta &= \begin{cases} \frac{d(2 \pm \sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)} & \text{si } a \neq \pm 1 \\ \zeta = d/2 & \text{si } a = \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, ζ y ρ están completamente determinados. En el caso de la parábola, $a = \pm 1$, solo hay una esfera. En el caso de la elipse, $|a| < 1$, las dos esferas están en la misma rama del cono, y en el caso de hipérbola, $|a| > 1$, hay una esfera en cada rama del cono.

3.2. Círculos de tangencia. Podemos encontrar los círculos de tangencia de las esferas con el cono. Igualando (1) y (3), tenemos

$$\begin{aligned} z^2 + (z - \zeta)^2 &= \rho^2, \\ 2z^2 - 2z\zeta + \zeta^2 - \rho^2 &= 0 \\ z &= \frac{\zeta \pm \sqrt{2\rho^2 - \zeta^2}}{2} \\ z &= \frac{\zeta}{2} \end{aligned}$$

ya que por (5), $2\rho^2 - \zeta^2 = 0$. Ahora de (6), ζ depende de los valores a y d para que podamos parametrizar dichos círculos. En consecuencia:

i) Parábola, $\zeta = \frac{d}{2}$, entonces el círculo de tangencia de la esfera de Dandelin con el cono está dado por

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{d}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{d}{2} \sin \theta, \\ z = \frac{d}{2}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

ii) Elipse e hipérbola, $\zeta = \zeta_o = \frac{d(2 \pm \sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)}$, para que tengamos dos círculos.

Para la elipse dos en una rama del cono y la hipérbola en cada rama,

$$(8) \quad \begin{cases} x = \zeta_o \cos \theta, \\ y = \zeta_o \sin \theta, \\ z = \zeta_o, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Construyendo la línea generadora a través de P .

4. DEMOSTRACIONES ANALÍTICAS DE LOS LEMAS 2 Y 3

Demostración del Lema 2. No se pierde generalidad si suponemos que la esfera tiene centro en el punto $(0, 0, 0)$. Sea $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ cualquier punto fuera de la esfera. Sean $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ puntos de tangencia en la esfera. Se puede demostrar que la ecuación de cualquier plano tangente a la esfera en el punto $P_T = (x_T, y_T, z_T)$ tiene la forma $xx_T + yy_T + zz_T = r^2$ (vea por ejemplo [4]). Como P_o está en los planos tangentes que contienen P_1 y P_2 , se cumplen las siguientes ecuaciones

$$(9) \quad x_1x_o + y_1y_o + z_1z_o = r^2$$

$$(10) \quad x_2x_o + y_2y_o + z_2z_o = r^2.$$

Por otro lado, con la fórmula de la distancia $d(P_o, P_1)$ obtenemos

$$\begin{aligned} d(P_o, P_1)^2 &= (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 + (z_o - z_1)^2 \\ &= x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ &\quad - 2(x_o x_1 + y_o y_1 + z_o z_1) \\ &= x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2, \end{aligned}$$

dada la ecuación (9) y dado que $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$, ya que P_1 está en la esfera. Observe que $x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 > r^2$ ya que P_o está fuera de la esfera. Del mismo modo, dada la ecuación (10), tenemos para

$$d(P_o, P_2)^2 = (x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2 + (z_o - z_2)^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2.$$

Por lo tanto, es cierto que $d(P_o, P_1) = d(P_o, P_2)$. \square

Demostración del Lema 3. Sea N un punto en el círculo de la ecuación (8) con θ fijo y

$$\zeta_o = \zeta_N = \frac{d(2 - \sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)}, \quad a \neq 1.$$

Una generatriz L que pasa por N tiene una ecuación

$$(11) \quad L(t) = t(\zeta_N \cos \theta, \zeta_N \sen \theta, \zeta_N), \quad t \in [-\infty, \infty].$$

Ahora, dejemos que M sea el punto de intersección de $L(t)$ con el círculo

$$(12) \quad \begin{cases} x = \zeta_M \cos \theta, \\ y = \zeta_M \sen \theta, \\ z = \zeta_M, \quad \theta \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

donde $\zeta_M = \frac{d(2 + \sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)}$. Por tanto, la distancia entre M y N es

$$\text{dist}(M, N) = \sqrt{2}|\zeta_M - \zeta_N| = 4\sqrt{2} \frac{d\sqrt{1+a^2}}{|1-a^2|},$$

que es una constante dependiendo de a y d como se quiere demostrar. \square

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud a los árbitros por sus comentarios y observaciones.

REFERENCIAS

- [1] Courant R., Robbins H., Steward I., *What is Mathematics?* Oxford University Press 1996.
- [2] Dandelin, G. *Quelques Propriétés remarquables de la focale parabolique.* Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, v.2, 171-202, 1822.
- [3] Lehmann Ch., *Analytic Geometry.* John Wiley, NY; Sixth printing. (1947)
- [4] López G., *Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de tic.* Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. ISBN: 978-607-28-2108. <https://libroschi.izt.uam.mx/index.php/lcbi/catalog/view/15/10/186-2>
- [5] Machado de Carvalho, T. M., *The Dandelin Spheres and the Method of the Conic Sections of the Greeks.* Nexus Mathematicae v. 1, 2018.

Gabriel López Garza

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa.
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco no. 186,
Col. Leyes de Reforma, Sección 1a,
C.P. 09340, Alcaldía Iztapalapa, CDMX, México.
e-mail: gabl@xanum.uam.mx



INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS EN VARIETADES DIFERENCIABLES

CARLA VICTORIA VALENCIA NEGRETE

RESUMEN. Las definiciones formales de sistema dinámico y campo vectorial describen cualidades distintas de un mismo fenómeno: la evolución de un espacio en el tiempo; y es en el desarrollo de uno a otro donde se explica la relación que hay entre ellos. Desde un punto de vista histórico, ambas nociones tienen origen en la búsqueda de una explicación del Sistema Solar. Si bien las piezas que conforman una introducción a los sistemas dinámicos en variedades diferenciables pueden encontrarse por separado y en contextos distintos, presentamos aquí su construcción completa desde un punto de vista histórico y formal.

1. LEVANIA Y OTROS ANTECEDENTES

Johannes Kepler (1571 – 1628) partió de la descripción de Copérnico, en la que los planetas giran alrededor del Sol [4]; pero sigue la pista de la causa y con base en los datos recopilados por Tycho Brahe descubre la forma elíptica de sus órbitas. Con un conocimiento preciso de sus trayectorias diseña un viaje a la Luna, o *Levania* como la llamaría en su relato *El Sueño* [10]. Así, utiliza un primer sistema dinámico en una ilusión, pues, como diría Karel Kosík, *todo concepto tiene un elemento de fantasía* [7]

Habiendo llegado a la ecuación preferí la elipse, pensando que correspondía a una hipótesis distinta... pero ambas resultaron ser una y la misma [11].

Newton (1642 – 1727) parte del trabajo de Kepler y enuncia las leyes del movimiento en forma de las primeras ecuaciones diferenciales [3], donde aparecen ya las fuerzas como un impulso preciso. Sin embargo, es bien sabido lo difícil que es resolverlas. Es hasta 1881 que Poincaré (1854 – 1912), en *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* [13], propone una manera nueva de abordar este problema: Estudiar las propiedades geométricas de las soluciones. Este es el surgimiento de la Teoría Cualitativa de Sistemas Dinámicos:

El estudio completo de una función comprende dos partes:

1° *la parte cualitativa (por así llamarla), o el estudio geométrico de la curva definida por la función; y*

2° *la parte cuantitativa, o el cálculo numérico de los valores que toma la función* [13].

2. SISTEMAS DINÁMICOS Y CAMPOS VECTORIALES.

Una familia de curvas solución de una ecuación diferencial es un *sistema dinámico*. De acuerdo a Hirsch y Smale en [6], es una forma de describir el cambio en el tiempo de todos los puntos de cierto espacio, el conjunto de todas las trayectorias que recorren sus elementos.

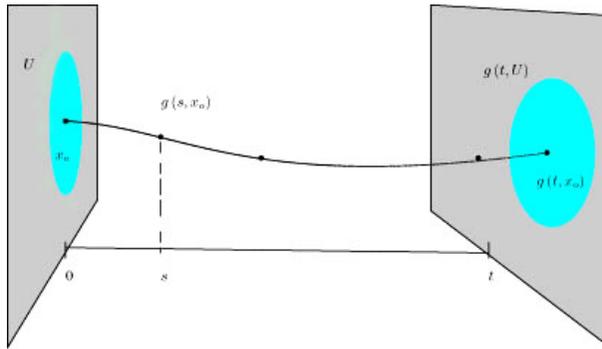
Definición 1. Sea U un dominio en \mathbb{R}^n . Un *difeomorfismo* $f: U \rightarrow U$ es una función biyectiva y diferenciable cuya función inversa f^{-1} también lo es. Un *sistema dinámico* es un *grupo de difeomorfismos a un parámetro*, una familia de difeomorfismos $\{g^t: U \rightarrow U\}_{t \in \mathbb{R}}$ que se operan mediante la composición: $g^t \circ g^s = g^{t+s}$, $g^0 = Id_U$; y a partir de la cual se define una acción del grupo \mathbb{R} en U que se considera equivalente:

$$g: \mathbb{R} \times U \rightarrow U, \\ (t, x) \mapsto g^t(x).$$

Cada g^t indica la transformación de U al tiempo t . Si consideramos $x_o \in U$ fijo y dejamos a t variar en \mathbb{R} , la curva descrita por los puntos $g(t, x_o)$ es la trayectoria que recorre x_o en el tiempo. Es decir,

$$\sigma_{x_o}: \mathbb{R} \rightarrow U, \\ t \mapsto g(t, x_o),$$

es una curva diferenciable respecto a t que traza en U el movimiento de x_o respecto a este grupo de difeomorfismos a un parámetro.



Sin embargo, la información obtenida usualmente al observar un proceso se interpreta en términos del impulso

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{x_o}(\tau)$$

y motiva el siguiente concepto:

Definición 2. Un *campo vectorial* definido en U es una aplicación continua

$$\nu: U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que asocia a cada $x \in U$, un vector $\nu(x)$, basado en x .

La ecuación

$$\dot{x} = \nu(x)$$

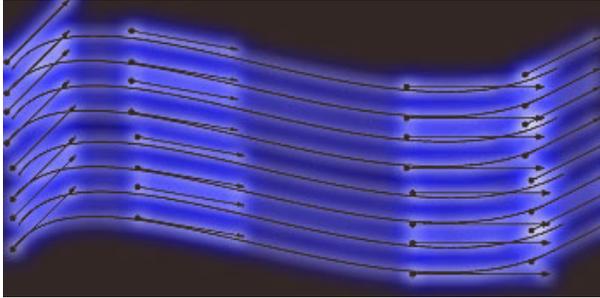
se conoce como la *ecuación diferencial autónoma* correspondiente al campo vectorial ν . El dominio U es llamado el *espacio fase* de la ecuación diferencial autónoma y el producto $\mathbb{R} \times U$, el *espacio fase extendido*.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una curva diferenciable $\sigma: I \rightarrow U$ tal que, para todo $\tau \in I$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(\tau) = (\nu \circ \sigma)(\tau) = \nu(\sigma(\tau)),$$

es una *solución* de la ecuación $\dot{x} = \nu(x)$ y su gráfica en el espacio fase extendido es una *curva integral*.

Por cada punto del espacio $\Omega = I \times U$ y cada campo vectorial $\nu: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ en él, pasa una sola curva integral. La solución está determinada en forma única por el *Teorema de Existencia y Unicidad* bajo ciertas condiciones sobre el espacio fase extendido Ω .



El Teorema de Existencia y Unicidad

La primera demostración del Teorema de Existencia y Unicidad fue realizada por Cauchy (1789 – 1857). Lipschitz (1834 – 1903) hizo después una simplificación de los requisitos enunciados por Cauchy para garantizar la existencia de las soluciones [12]. Su planteamiento es más general y se conoce como la *condición de Lipschitz*.

Definición 3. Sea $B_\lambda(x) \subset U$ la vecindad $B_\lambda(x_o) = \{\tilde{x} \in U \mid \|\tilde{x} - x_o\| < \lambda\}$; $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto; y $\Omega = I \times B_\lambda(x_o)$. Un campo vectorial $\nu: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Lipschitz* en Ω si dados $(t, x), (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \Omega$,

$$\|\nu(t, x) - \nu(\tilde{t}, \tilde{x})\| \leq k \|x - \tilde{x}\|$$

para alguna constante k que puede depender de x_o .

TEOREMA 4. *Bajo estas condiciones, aplicando el método de aproximaciones sucesivas de Picard, puede obtenerse una solución única de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = \nu(t, x),$$

para la *condición inicial* $(t_o, x_o) \in \Omega$.

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $B_\lambda(x_o)$ tal que $x_n \rightarrow x_o$ cuando n tiende a infinito; y

$$u_n(t) = x_o + \int_{t_o}^t \nu(t, x_n(t)) dt$$

una sucesión de funciones.

La sucesión $(u_n)_n$ converge uniformemente a la solución $x(t)$ y cumple la condición inicial $x(t_o) = x_o$ porque toda $u_n(t_o) = x_o$ y la sucesión u_n es de Cauchy ¹:

$$\|u_n(t) - u_{n+1}(t)\| \leq k \int_{t_o}^t \|x_{n-1}(t) - x_n(t)\| dt$$

para toda $t \in I$.

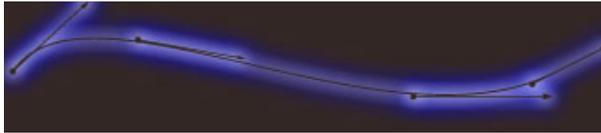
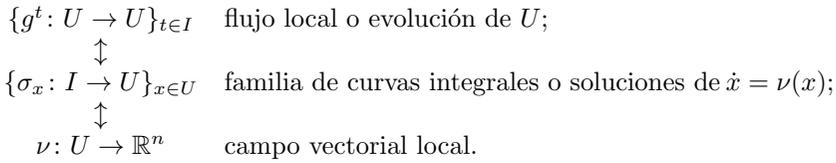
¹Es en este acotamiento de la integral donde se utiliza fuertemente la condición de Lipschitz, pues garantiza el no haber *hoyos negros* u otros comportamientos irregulares que serían una complicación.

Utilizando el hecho de que la convergencia es uniforme, el límite es único y

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_o}^t \nu(t, x_n(t)) dt \\ &= x_o + \int_{t_o}^t \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(t, x_n(t)) dt \\ &= x_o + \int_{t_o}^t \nu(t, x(t)) dt \end{aligned}$$

es la solución de la ecuación $\dot{x} = \nu(t, x)$ con la condición inicial (t_o, x_o) a lo largo del intervalo I donde la función ν cumple la condición de Lipschitz. □

Gracias a este último resultado, el desarrollo entre ambos conceptos es:



3. EJEMPLO. SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES

Remolinos, cónicas y otras curvas cerradas modeladas por un *sistema dinámico lineal* son dibujos recurrentes en la naturaleza y soluciones de la ecuación diferencial matricial $\dot{X} = AX$, con $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definición 5. Sea $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, t un número real y

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (t, x) &\mapsto e^{tA}(x). \end{aligned}$$

La función e^{tA} es la serie

$$Id_{\mathbb{R}^n} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

y es un operador lineal.

Observación 1. La prueba de este último hecho es la conclusión de la siguientes secciones, donde se presentan el espacio $L(\mathbb{R}^n)$ y sus condiciones de convergencia.

3.1. El álgebra $L(\mathbb{R}^n)$. La estructura algebraica en $L(\mathbb{R}^n)$ nos permite trabajar con las transformaciones lineales a partir de las matrices en $M_n(\mathbb{R})$.

3.1.1. *Expresión matricial del operador T.* La expresión matricial A de cada transformación lineal T se construye de acuerdo al siguiente proceso:

Sea $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de \mathbb{R}^n y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, hay una colección única de coeficientes reales $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j.$$

T es lineal, de modo que

$$T(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T(e_j).$$

A su vez, cada $T(e_j)$ tiene una expresión única en términos de la base β ,

$$T(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k.$$

El operador $T \in L(\mathbb{R}^n)$ se relaciona de manera única, respecto a la base β , con la matriz cuyo vector columna es precisamente (a_{kj}) :

$$T(x) \longleftrightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j T(e_j) \longleftrightarrow [T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Observación 2. Si en cambio nos interesa ver a T en términos de sus funciones coordenadas, cada una de ellas corresponde al producto de renglones:

$$[a_{11}, \dots, a_{1n}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = T_1(x).$$

3.1.2. *Estructura algebraica en $L(\mathbb{R}^n)$.*

Definición 6. Un álgebra \mathcal{F} sobre un campo F es un espacio vectorial sobre F que es además un anillo con distributividad en el producto:

Para cualquier par de vectores $A, B \in \mathcal{F}$ y todo escalar $\alpha \in F$,

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

TEOREMA 7. *El espacio de operadores $L(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra.*

Demostración. La representación matricial

$$\begin{aligned} \varphi: L(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \\ T &\longmapsto A = [T(e_1), \dots, T(e_n)] \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras ya que

- 1) φ relaciona adecuadamente a las operaciones:

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(x) &\longleftrightarrow (A_1 + A_2)(x), \\ (T_1 \circ T_2)(x) &\longleftrightarrow (A_1 A_2)(x), \\ (\alpha T)(x) &\longleftrightarrow (\alpha A)(x); \end{aligned}$$

2) y φ es biyectiva: Dada una base η de \mathbb{R}^n , el vector $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$ corresponde a la única matriz (a_{kj}) que representa a la transformación T .

Además, la dimensión es un invariante de espacios vectoriales (no cambia por el efecto de un isomorfismo lineal) [5]. Por lo tanto, $L(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de dimensión n^2 . \square

3.2. Convergencia en $L(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 8. *La norma del supremo hace que la convergencia uniforme de una sucesión de operadores en \mathbb{R}^n sea una condición equivalente para la convergencia de la misma sucesión en $L(\mathbb{R}^n)$ al asignar a cada operador la magnitud de la variación que provoca en la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.*

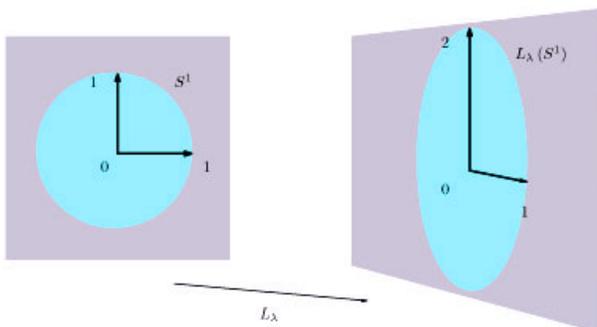
Demostración. La norma de un operador A en $L(\mathbb{R}^n)$ es

$$\|A\|_L = \sup_{x \in S^{n-1}} \{\|A(x)\|\},$$

a partir de la cual se define la distancia

$$\begin{aligned} d_L: L(\mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow R^+, \\ (A, B) &\longmapsto \|A - B\|_L. \end{aligned}$$

Observación 3. Toda rotación R_θ tiene norma 1 y toda λ -expansión diagonal L_λ tiene norma λ .



Sea $(A_m)_m$ una sucesión de operadores en $L(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$d_L(A_m, A) = \sup_{x \in S^{n-1}} \{\|(A_m - A)(x)\|\}.$$

Si $(A_m)_m$ converge uniformemente al operador A en \mathbb{R}^n cuando $m \rightarrow \infty$, la sucesión de números reales

$$q_m(x) = \|(A_m - A)(x)\| \rightarrow 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $(A_m)_m$ converge a A en $L(\mathbb{R}^n)$.

Por otra parte, consideremos la sucesión $r_m = \|A_m - A\|_L$. Entonces,

$$r_m \geq \frac{q_m(x)}{\|x\|}$$

para todo $x \neq 0$. Si $(A_m)_m$ converge a A en $L(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0$;

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{q_m(x)}{\|x\|} = 0; \quad \text{y} \quad \frac{1}{\|x\|} \lim_{m \rightarrow \infty} q_m(x) = 0.$$

Los números reales son un dominio entero y $1/\|x\| \neq 0$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q_m(x) = 0$$

para todo $x \neq 0$. Es decir, $\|(A_m - A)(x)\| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ y la sucesión $(A_m)_m$ converge uniformemente a A en \mathbb{R}^n . \square

3.3. El álgebra de Banach $L(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 9. *El álgebra $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio completo. Así, si una función A es el límite de una sucesión de operadores en $L(\mathbb{R}^n)$, A es un operador lineal.*

Demostración. Sea $(A_m)_m$ una sucesión de Cauchy en $L(\mathbb{R}^n)$ y sea $\{B_j\}_{j=0}^{n^2}$ una base del espacio de operadores. Para cada índice m , existe una colección única de números reales $\{\alpha_j^{(m)}\}_{j=0}^{n^2}$ tal que $A_m = \alpha_1^{(m)}B_1 + \alpha_2^{(m)}B_2 + \dots + \alpha_{n^2}^{(m)}B_{n^2}$.

Si $\{B_j\}_{j=1}^s$ es un conjunto de operadores linealmente independiente, no hay una combinación lineal de sus elementos cuyos coeficientes sean grandes pero el vector mismo sea pequeño [8]. En otras palabras, dada una colección de escalares $\{\alpha_j\}_{j=1}^s$, no todos cero, existe un número $c \neq 0$ tal que

$$\|\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_s B_s\|_L \geq c (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_s|).$$

Como $(A_m)_m$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_o(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m, k > n_o(\epsilon)$,

$$\epsilon > \|A_m - A_k\|_L = \left\| \sum_{j=1}^{n^2} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}) B_j \right\|_L \geq c \sum_{j=1}^{n^2} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}|.$$

De manera que para cada índice j de la base,

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}| \leq \sum_{j=1}^{n^2} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(k)}| < \frac{\epsilon}{c}$$

y la sucesión $(\alpha_j^{(m)})_m$ converge en R . Sean $\alpha_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_j^{(m)}$ y

$$A = \sum_{j=1}^{n^2} \alpha_j B_j.$$

Entonces, el operador $A \in L(\mathbb{R}^n)$ es el límite de la sucesión (A_m) , el espacio $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio completo. Por lo tanto, $L(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach real. \square

3.4. La serie e^{tA} .

TEOREMA 10. La serie e^{tA} converge absolutamente en el espacio $L(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. La sucesión $(S_n(t))_n = \left(\sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} A^j \right)_n$ es de Cauchy en $L(\mathbb{R}^n)$. Sea $\eta(t) = \|tA\|_L \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|S_j(t) - S_i(t)\|_L &= \left\| \sum_{k=i+1}^j \frac{t^k}{k!} A^k \right\|_L, \\ &\leq \sum_{k=i+1}^j \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\|_L, \\ &= \sum_{k=i+1}^j \frac{\eta(t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Al aplicar el *criterio del radio* para confirmar la convergencia de la última serie y el *criterio de comparación de Weierstrass* para acotar la primera, se prueba que la sucesión $(S_n(t))_n$ converge absolutamente en $L(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, la serie e^{tA} es un operador lineal. \square

Observación 4. Una reescritura de la serie e^{tA} permite notar que es una función analítica de t . La curva en el espacio $L(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow L(\mathbb{R}^n), \\ t &\longmapsto \sum c_j t^j, \end{aligned}$$

donde cada coeficiente es el operador $c_j = (1/j!) A^j$ y es una curva diferenciable cuya derivada $\frac{\partial}{\partial t} e^{\tau A}$ (como probaremos más adelante) es el operador $A e^{\tau A}$.

4. PROPIEDADES DEL OPERADOR e^{tA}

Cada uno de los sistemas dinámicos lineales $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}}$ se caracteriza de acuerdo a tres aspectos fundamentales: su relación con el campo vectorial matricial $v(x) = Ax$; la forma descrita por sus soluciones; y las propiedades algebraicas que tiene como grupo.

4.1. Propiedades dinámicas. La familia de operadores exponenciales $G_A = \{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\}$, definida a partir de una transformación lineal $A \in L(\mathbb{R}^n)$, es un grupo bajo la composición y es el sistema dinámico correspondiente al campo vectorial $v(x) = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 11. La función $h: \mathbb{R} \longrightarrow G_A$, tal que $t \mapsto e^{tA}$, es un homomorfismo de grupos y lleva la estructura de la suma en \mathbb{R} al producto en G_A

Demostración.

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \left(Id_{\mathbb{R}^n} + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots \right) \left(Id_{\mathbb{R}^n} + sA + \frac{s^2}{2}A^2 + \dots \right) \\ &= Id_{\mathbb{R}^n} + (t+s)A + \left(\frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2} \right) A^2 + \dots \\ &= e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

Entonces, $h(-t) = e^{-tA}$ es el inverso multiplicativo de cada e^{tA} y $h(0) = e^0$ es el elemento neutro $Id_{\mathbb{R}^n}$ de G . □

TEOREMA 12. *La sucesión $\frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau))$ converge al operador Ae^{tA} en $L(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{\tau A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau)) = Ae^{\tau A}.$$

Demostración. El límite de una sucesión en $L(\mathbb{R}^n)$ es único y está determinado por la convergencia uniforme de la sucesión. Una vez que existe el límite de la sucesión de derivadas, este coincide con la derivada del límite [2].

Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau))(x) &= \sum_{j=0}^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tau^j}{j!} A^j \right) (x) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!} \right) A^j (x) \\ &= A S_{n-1}(\tau)(x). \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t}(S_n(\tau)) = Ae^{\tau A} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t}e^{\tau A} = Ae^{\tau A}.$$

De manera que el campo vectorial

$$\begin{aligned} \nu: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

corresponde a la ecuación diferencial matricial $\dot{X} = AX$; y las curvas diferenciables

$$\begin{aligned} \sigma_x: R &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \tau &\longmapsto e^{\tau A}(x). \end{aligned}$$

son las soluciones de la ecuación diferencial para cada condición inicial (τ, x) . □

TEOREMA 13. *El campo vectorial ν es autónomo (no depende del tiempo) y cumple la condición de Lipschitz en el espacio fase extendido $\Omega = R \times \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $(t, x), (s, y) \in \Omega$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\nu(x) - \nu(y)\| &= \|A(x) - A(y)\| \\ &= \|A(x - y)\| \\ &\leq \|A\|_L \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Observación 5. Esto implica que el Teorema de Existencia y Unicidad se cumple en Ω ; y aún si sólo supieramos que $\frac{\partial}{\partial t} e^{\tau A}(x_o) = A e^{\tau A}(x_o)$ para algún $x_o \in \mathbb{R}^n$, esto sería suficiente para concluir que la solución $\sigma_{x_o}: R \rightarrow \mathbb{R}^n$ es única.

4.2. Propiedades algebraicas. Los objetos no persisten si se encuentran aislados; lo hacen si interactúan, en principio, con sus semejantes. Es el álgebra quien estudia las leyes y consecuencias de esta interacción al formularla como una operación. El operador exponencial es especial en este contexto porque relaciona las estructuras de los espacios $M_n(\mathbb{R})$ y $GL_n(\mathbb{R})$.

Representaciones

Para llevar conceptos y resultados de un sistema a otro (en su significado general como un conjunto de reglas o principios sobre una materia, enlazados entre sí por una cualidad); se construyen analogías entre objetos con características similares, al considerarlos elementos de una *categoría* \mathcal{F} : una colección de objetos y *morfismos* que respecto a la composición tienen el siguiente comportamiento:

- i: Para cada objeto $A \in \mathcal{F}$ hay una identidad $Id_A: A \rightarrow A \in \mathcal{F}$ tal que
 si $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A \in \mathcal{F}$,
 $f \circ Id_A = f$ y $Id_A \circ g = g$.
- ii: Si $A, B, C, D, f, g, h: C \rightarrow D \in \mathcal{F}$,
 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

El conjunto de morfismos es un *monoide*, la estructura más simple reconocida por el álgebra. Dentro de éste pueden escogerse aquellos morfismos que sean invertibles, *isomorfismos*, en búsqueda de un primer *grupo* de transformaciones de los espacios pertenecientes a la categoría. Si el morfismo va un objeto a sí mismo, es llamado *endomorfismo*; y si es invertible, *automorfismo*.

Para la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita, cuyos morfismos son precisamente los operadores lineales, el grupo de endomorfismos $End(\mathbb{R}^n)$ es también el grupo de automorfismos $Aut(\mathbb{R}^n)$, el *Grupo Lineal General real* de matrices $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, pues la dimensión es un invariante de espacios vectoriales.

Sea G un grupo y $\rho: G \rightarrow End(X)$ un homomorfismo, con $X \in \mathcal{F}$. Entonces, para cada elemento $g \in G$ hay un endomorfismo $\rho(g) \in End(X)$ y la operación en G es reinterpretada como la composición de transformaciones en X :

$$g_1 g_2 \mapsto \rho(g_1) \circ \rho(g_2).$$

Al homomorfismo ρ se le llama *representación* de G en X porque G actúa en X mediante ρ y la evaluación

$$\begin{aligned} ev: \quad End(X) \times X &\longrightarrow X, \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho(G) \times X &\longrightarrow X, \\ (\rho(g), x) &\longmapsto \rho(g)(x). \end{aligned}$$

En nuestro caso, $\rho(A) = e^{tA}$ es una representación del grupo G de operadores lineales invertibles en el grupo de endomorfismos $GL_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \rho: G &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \\ A &\longmapsto e^{tA}. \end{aligned}$$

5. SISTEMAS DINÁMICOS EN VARIEDADES DIFERENCIABLES

Las variedades diferenciables son el modelo natural de los lugares en los que se observa el movimiento (el universo es una variedad) y nos es indispensable para un estudio más general entender las nociones de sistemas dinámicos y campos vectoriales en estos espacios. Para hacerlo recurriremos al Teorema de Existencia y Unicidad en variedades diferenciables.

6. VARIEDADES DIFERENCIABLES

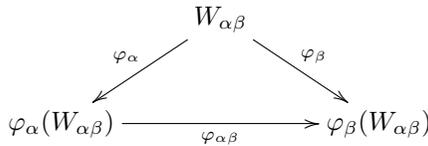
Definición 14. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ es una *variedad diferenciable* de dimensión n si cada $x \in M$ tiene una vecindad $W \cap M$ difeomorfa a un conjunto abierto U del espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

De manera más general, un conjunto M se dice *variedad diferenciable de dimensión n* si

- (a) existe una cubierta abierta de M , $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$
- (b) para cada conjunto W_α , existe una familia correspondiente de biyecciones $\varphi_\alpha: W_\alpha \longrightarrow U_\alpha$, con U_α abierto en \mathbb{R}^n ,
- (c) se satisface la *condición de consistencia* siguiente:
 dadas $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (W_β, φ_β) cuya intersección $W_\alpha \cap W_\beta = W_{\alpha\beta}$ no es vacía, entonces

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta|_{W_{\alpha\beta}} \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})},$$

es un difeomorfismo entre los abiertos de \mathbb{R}^n $\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})$ y $\varphi_\beta(W_{\alpha\beta})$



Llamamos *sistema de coordenadas* a las funciones φ_α y *cartas* a las parejas $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$.

La colección de cartas $\{(W_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ es un *subatlas* de la variedad M . Dos atlases de la variedad M son equivalentes si sus cartas son consistentes entre sí. Su unión es entonces otro atlas.

Una estructura diferenciable en M es un atlas maximal para la condición [15]; o bien, una clase de equivalencia de atlases de M [1]. A partir de estos últimos conceptos podemos considerar otra definición [1].

Definición 15. Una *variedad diferenciable* M es un conjunto con una estructura diferenciable.

Ejemplos.

Ejemplo 1. El espacio de matrices $M_n(\mathbb{R})$

Sea X un álgebra normada isomorfa a \mathbb{R}^n y $T: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ un isomorfismo entre ellos. Entonces T es continua; de hecho, una identificación, por ser suprayectiva. Es decir, X tiene la topología de identificación inducida por T , esto es:

- $U \subset X$ es abierto si y sólo si su imagen inversa bajo T es abierta en \mathbb{R}^n [14].

Además, T es diferenciable en \mathbb{R}^n porque X es un espacio métrico y la función lineal más parecida a T es ella misma. La función inversa T^{-1} es similar y también lo es su restricción a conjuntos abiertos. En efecto, T es un difeomorfismo que genera una estructura diferenciable en X ,

$$[\{ (U_\alpha, T^{-1}|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n) \}_{\alpha \in \mathcal{F}}].$$

El mismo argumento para \mathbb{R}^{n^2} muestra que tanto $M_n(\mathbb{R})$ como $L(\mathbb{R}^n)$ son variedades diferenciables de dimensión n^2 .

Ejemplo 2. El Grupo Lineal General real de matrices $GL_n(\mathbb{R})$

La función $det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y el conjunto

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0 \}$$

es abierto en $M_n(\mathbb{R})$ y adquiere la estructura diferenciable relativa a la restricción del isomorfismo T del ejemplo anterior. Por lo tanto, el Grupo Lineal General real de matrices $GL_n(\mathbb{R})$ es una subvariedad diferenciable de $M_n(\mathbb{R})$ con forma de cono:

Demostración. La matriz $Id \in GL_n(\mathbb{R})$, $\| Id \|_L = 1$; y si A es invertible, para todo $r > 0$ ó $r < 0$, los operadores rA dibujan segmentos de recta contenidos en $GL_n(\mathbb{R})$. Entonces, la subvariedad $GL_n(\mathbb{R})$ de $M_n(\mathbb{R})$ es un cono sólido con eje de rotación en la recta que pasa por la identidad y el origen que no incluye el vórtice $0 \in L(\mathbb{R}^n)$. □

Observación 6. El espacio $GL_n(\mathbb{R})$ es un *grupo topológico*, un espacio topológico con dos funciones continuas con las que tiene una estructura algebraica de grupo: el producto

$$\begin{aligned} \cdot: GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \\ (A, B) &\longmapsto AB, \end{aligned}$$

y la inversión

$$\begin{aligned} inv: GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^{-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. El toro T^n

Una familia importante de variedades diferenciables consiste en los *espacios de órbitas* [9] de subgrupos G de $Diff(\mathbb{R}^n)$ que actúan en \mathbb{R}^n mediante su evaluación

$$\begin{aligned} ev: G \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (g, x) &\longmapsto g(x). \end{aligned}$$

En particular, el toro T^n es el cociente \mathbb{R}^n/G , donde G es el grupo de translaciones enteras en \mathbb{R}^n ,

$$G = \{ g_m \mid g_m(x) = (x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n), m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \}.$$

Las *órbitas* son los conjuntos $orb G(x) = \{g_m(x) \mid g_m \in G\} \subset \mathbb{R}^n$ que se identifican en un punto al hacer el cociente

$$\mathbb{R}^n / G = \{[x] \subset \mathbb{R}^n \mid [x] = orb G(x)\};$$

y son las mismas que las generadas por la acción del grupo Z^n

$$\begin{aligned} Z^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (m, x) &\longmapsto (x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n). \end{aligned}$$

El *espacio cociente* o espacio de órbitas relativo a cada uno de los grupos es igual, pues la relación de equivalencia que determinan lo es:

$$T^n = \mathbb{R}^n / Z^n = \mathbb{R}^n / G = \mathbb{R}^n / \sim,$$

donde $x \sim y$ si y sólo si hay un $m \in Z^n$ tal que $x - y = m$.

Observación 7. De hecho, $End(Z^n) = G$ y el desarrollo anterior nos conduce a la representación

$$\begin{aligned} \rho: Z^n &\longrightarrow G \\ m &\longmapsto g_m. \end{aligned}$$

La evaluación es una acción que *actúa propia y discontinuamente* sobre \mathbb{R}^n : Todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ tiene una vecindad U , tal que $U \cap g_m U = \emptyset$ para todo $g_m U = \{g_m(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in U\}$ con $m \neq 0$. Entonces $g_{m_1} U \cap g_{m_2} U = \emptyset$, si $m_1 \neq m_2$. En particular, la acción es *libre*: $x \neq g_m(x)$, si $m \neq 0$.

Esto hace que la *aplicación cociente*

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R}^n &\longrightarrow T^n \\ x &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$

sea una *aplicación* [14]; es decir, cada punto $[x] \in T^n$ tiene una vecindad $W \subset T^n$ que satisface:

- a) La imagen inversa de W , $q^{-1}(W)$, es la unión ajena de abiertos U_m .

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un representante de la clase de equivalencia $[x] \in T^n$; sea U una vecindad abierta de x tal que $g_m U \cap U = \emptyset$ para toda $m \neq 0$; y denotemos como U_m a cada imagen $g_m U$. El espacio de órbitas tiene la topología del cociente, entonces $q(U_m) = W$ es una vecindad abierta de $[x]$; y $q^{-1}(W) = \sqcup_{m \in Z^n} U_m$. \square

- b) La vecindad W de $[x]$ construida así es abierta.

Demostración. El espacio $q(\mathbb{R}^n)$ adquiere la topología del cociente, donde cada subconjunto W es abierto en T^n si su preimagen $q^{-1}W$ es abierta en \mathbb{R}^n . \square

- c) Para cada $m \in Z^n$, la restricción de $q \mid_{U_m}$ es un homeomorfismo.

Demostración. El que la acción sea libre es suficiente para garantizar que $q \mid_{U_m}$ es inyectiva y $q \mid_{U_m}^{-1}$ está bien definida: Si $y = x + \tilde{m} \in \mathbb{R}^n$ pertenece a la órbita de x pero $m \neq \tilde{m}$, entonces $y \notin U_m$ y $q \mid_{U_m}^{-1}([x]) = x + m$. Por lo tanto $q \mid_{U_m}$ es un homeomorfismo. \square

Así, el toro T^n es una variedad diferenciable de dimensión n cuya estructura diferenciable está generada por los atlas

$$\{(W_\alpha, q^{-1} \mid_{W_\alpha})_{\alpha \in \mathcal{F}}\}_{m \in Z^n} = \{(W_\alpha, g_m W_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{F}}\}_{m \in Z^n}$$

tal que $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ es una base de T^n donde el grupo G actúa propia y discontinuamente.

Una ventaja de ver el toro T^n como acabamos de describirlo, sobre la definición del toro como es producto $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, es que de la primera se infiere una operación mediante el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 +: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & (q, q) \downarrow & & \downarrow q \\
 \oplus: & T^n \times T^n & \longrightarrow & T^n \\
 & ([x], [y]) & \longmapsto & [x + y],
 \end{array}$$

con la cual T^n es un grupo topológico.

Ejemplo 4. La esfera S^{n-1}

La esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión $n - 1$.

Demostración. La topología en S^{n-1} está determinada por la identificación

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^{n-1} \\
 x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|}.
 \end{array}$$

Es decir, U es abierto en la esfera cuando $\varphi^{-1}U$ es abierto en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Las cartas son las parejas (U, pU) , donde cada U es proyectado a la vecindad

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x\| < 1\},$$

abierta en \mathbb{R}^{n-1} : $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. La función inversa de la proyección se define como $p^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, (1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2)^{1/2})$.

Por lo tanto, la estructura diferenciable es la clase de equivalencia $[(U_\alpha, pU_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{F}}]$ de atlas correspondientes a la base $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ de S^{n-1} . □

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud a la Universidad Iberoamericana Ciudad de México.

REFERENCIAS

- [1] Arnol'd, V. I., *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, (1992).
- [2] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, (1974).
- [3] Da Andrade, E. N. *Isaac Newton*, Sigma Vol. I, Ed. Grijalbo, Barcelona, (1997).
- [4] de Gortari, E., *En torno a la astronomía*, Ed. Grijalbo, (1979).
- [5] Friedberg, S.H., Insel, A.J., Spence, L.E. *Linear Algebra*, Prentice Hall, (1997).
- [6] Hirsch, M.W. , Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, (1974).
- [7] Kosík, K. *Dialéctica de lo Concreto (Estudio sobre los problemas del hombre y el mundo)*, Ed. Grijalbo, México, 1976.
- [8] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, (1978).
- [9] F. Laudenbach, *Topologie Différentielle*, L'École Polytechnique Edition, (1994).
- [10] Lear, J. *El sueño de Kepler*, Dirección General de Divulgación de la Ciencia, UNAM, (2005).
- [11] Martínez, R. *El arquitecto del cosmos, Johannes Kepler*, Pangea Editores, México, (1994).
- [12] Picard, E. *Traité D'Analyse*, Gauthier-Villars, Paris, (1905).
- [13] Poincaré, H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1ère partie)*, Jour. Math. Pures et Appl.,7, 375-422, (1881).
- [14] Prieto, C. , *Topologi'a Básica*, FCE, (2003).
- [15] Warner, F. W. , *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, (1983).

Carla Victoria Valencia Negrete

Universidad Iberoamericana,

Departamento de Física y Matemáticas.

Prolongación Paseo de la Reforma 880,

Lomas de Santa Fe. C.P. 01219 CDMX, México.

e-mail: `carla.valencia@ibero.mx`

mixba'al

CONTENIDO

- 7 *Semblanza de José Antonio García Rodríguez*
Martha Álvarez Ramírez y Patricia Saavedra Barrera
- 11 *Introducción a las ecuaciones diferenciales tropicales*
Cristhian Garay López
- 29 *Patrones de flujo en cajas de base cuadrada al inicio de la convección de Rayleigh-Bénard*
Javier Pérez y Joaquín Delgado Fernández
- 47 *Una mirada a la geometría en Galicia a través de la vida y obra de matemáticos pioneros*
Adriana Dapena Janeiro, María José Souto-Salorio, Ana D. Tarrío Tobar
- 57 *Sobre las lógicas abstractas*
Edgar A. Valenzuela Nuncio
- 65 *Desolvidando a Nina Bari*
Carmen Martínez Adame
- 79 *Una generalización de la transformada de Fourier discreta*
Karla Adriana Ortega Gallegos
- 93 *Suma de una serie geométrica mediante sumas telescópicas*
Ángel Plaza de la Hoz
- 95 *Diagonalización de matrices circulantes por medio de la transformada discreta de Fourier sobre campos finitos*
Horacio Tapia-Recillas, Armando Valenzuela-Valenzuela
- 99 *Secciones cónicas, una aproximación analítica*
Gabriel López Garza
- 109 *Introducción a los sistemas dinámicos en variedades diferenciables*
Carla V. Valencia Negrete