MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.14, No.1, 2023, páginas 27-36.
Recibido 4-08-2022. Aceptado 22-02-2023.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v14n1/rmom

# MUCHOS JUEGAN...¡YO TAMBIÉN QUIERO JUGAR!

RAÚL MONTES-DE-OCA

Resumen. Se presentará un ejemplo de un juego bipersonal, estático, no cooperativo, con información completa y de suma cero conocido como *el juego de los volados*. Este ejemplo servirá para motivar los conceptos e ideas principales que aparecen en juegos finitos, incluyendo la noción de equilibrio de Nash dada a través de la idea de mejor respuesta de cada jugador, presentando como meta final el enunciado del teorema de Nash acerca de la existencia de puntos de equilibrio en juegos finitos. Con todo esto, se espera que estudiantes de la licenciatura en matemáticas y áreas afines se introduzcan y se interesen en el fascinante mundo de la teoría de juegos.

## 1. Introducción

De manera general, un *juego* es cualquier situación estratégica gobernada por reglas con un resultado bien definido, caracterizado por la interdependencia estratégica entre los jugadores ([6], [8], [9], [14], [15]).

La teoría de juegos está relacionada con diversos problemas de *toma de decisiones* que aparecen en áreas como:

- Organización industrial/empresarial.
- Medicina.
- Administración de recursos.
- Finanzas/Portafolios.
- Subastas.

Véase, por ejemplo, [4].

El principal *objetivo* de este trabajo consiste en introducir y motivar a estudiantes de matemáticas y áreas afines en la teoría de juegos. Para alcanzar este objetivo, usaremos como hilo conductor un ejemplo de un juego bipersonal, estático, con información completa, no cooperativo y de suma cero ampliamente utilizado en la literatura de juegos y que es conocido como el *juego de los volados* ([6], [15]). Con este ejemplo motivaremos las ideas básicas de: *estrategias puras* y *estrategias mixtas*, de *mejores respuestas*, así como la noción de *punto de equilibrio* o *equilibrio de Nash*. Posteriormente, se presentará el enunciado del teorema de Nash ([11]) acerca de la existencia de puntos de equilibrio en juegos finitos. También se comentará acerca de la demostración de este teorema, ligando a ésta con la noción de punto fijo de la correspondencia de mejores respuesta de ambos jugadores y con el teorema de punto fijo de Kakutani ([7]).

Elegimos el juego de los volados para desarrollarlo debido a que éste motiva, de manera bastante clara, la noción de estrategia mixta a diferencia de otros ejemplos

2010 *Mathematics Subject Classification.* 91A10.
*Palabras clave.* Juegos finitos, juegos no cooperativos, equilibrio de Nash, juego de los volados.

clásicos como el dilema del prisionero ([6], [14]) que no trataremos aquí.

Como una referencia complementaria se propone el libro de Siegfried ([13]) el cual toca aspectos históricos y conceptuales de los juegos incluyendo, en particular, ideas acerca de la contribución de Von Neumann a la teoría de juegos las cuales no comentaremos en este trabajo.

Es importante mencionar que el trabajo está escrito manteniendo en un mínimo la notación para que las ideas queden de la forma más intuitiva posible, pero, de manera estratégica, se dan referencias adecuadas para cubrir completamente la parte formal del tema.

El trabajo está organizado como sigue. En la Sección 2 se describe con detalle el juego de los volados dejando abierta la solución del juego para una sección posterior. En la Sección 3 se desarrolla la teoría básica de juegos bipersonales siguiendo el artículo [12], estableciendo la solución de un juego como un punto de equilibrio. Posteriormente, en la Sección 4 se expone la solución del juego de los volados y en la Sección 5 se presenta el enunciado del teorema de Nash comentando su relación con el teorema de Kakutani. En la Sección 6 se dan algunos comentarios generales y la conclusión del trabajo constituye la Sección 7.

## 2. Un ejemplo

Los juegos a los que nos referiremos aquí ([6], [8], [9], [14], [15]) cuentan con las siguientes características: (i) tienen un *número finito* de jugadores e igualmente hay un *número finito* de posibles decisiones para cada jugador; (ii) son *estáticos*, es decir, cada jugador toma una sola decisión y cada jugador no tiene conocimiento de la decisión tomada por los otros jugadores antes tomar su propia decisión; (iii) se trata con *juegos no cooperativos*, es decir, la unidad de análisis es el participante individual en el juego que se preocupa por hacer lo mejor posible por sí mismo, sujeto a reglas y posibilidades claramente definidas; y también (iv) se supondrá que cada jugador es *racional*, es decir, supondremos que cada jugador siempre dará su mejor respuesta y que cada jugador cuenta con *información completa*, es decir, se supone que cada jugador conoce las decisiones que tomará, así como las decisiones de los demás jugadores y espera que cualquiera de sus oponentes tome su mejor decisión.

**2.1. El juego de los volados (**[15] **p. 71).** Se tienen dos jugadores, cada uno de ellos posee una moneda de un peso donde, como es común, la moneda tiene en una cara un águila ($A$) y un sol ($S$) en la otra. Los jugadores eligen una cara de su moneda, es decir, escogen $A$ o $S$ y colocan la moneda del lado de la cara elegida sobre una mesa, de forma simultánea. Si las caras elegidas fueron dos águilas o dos soles, el Jugador 1 gana un peso (y el Jugador 2 pierde un peso), mientras que si las caras elegidas fueron un águila y un sol, el Jugador 2 se lleva un peso (y el Jugador 1 pierde un peso). Obsérvese que en este juego lo que gana un jugador es lo que pierde el otro; a los juegos con esta característica se les conoce como *juegos de suma cero* ([9]).

En el Cuadro 1, se da una representación de este juego conocida como la *forma normal* del juego y en ésta se especifican: los jugadores, las decisiones (o estrategias puras) de que dispone cada jugador y los pagos de cada jugador. Nótese que en los dos números que aparecen en los cuadros, el primero de ellos representa el pago que recibe el Jugador 1 y el segundo número es el pago del Jugador 2.

Una vez establecido el juego se tiene la siguiente pregunta obvia: ¿qué decisión deberá adoptar cada jugador para obtener su máximo beneficio?

| | | Jugador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $A$ | $S$ |
| Jugador 1 | $A$ | 1,-1 | -1,1 |
| | $S$ | -1,1 | 1,-1 |

Cuadro 1. Forma normal del juego de los volados

Primero, considérese las parejas $(A, A)$, $(S, S)$, $(A, S)$ y $(S, A)$, donde la primera coordenada corresponde a la decisión tomada por el Jugador 1 y la segunda coordenada indica la decisión tomada por el Jugador 2. Nótese que ninguna de ellas es solución, debido a que:

- en $(A, A)$ al Jugador 2 le convendría más tomar la decisión $S$;
- en $(A, S)$ al Jugador 1 le convendría más tomar la decisión $S$;
- en $(S, A)$ al Jugador 1 le convendría más tomar la decisión $A$;
- en $(S, S)$ al Jugador 2 le convendría más tomar la decisión $A$.

Entonces, ¿cuál es la solución? Para presentar ésta necesitamos extender la clase de las posibles decisiones o estrategias puras que puede tomar cada jugador, de hecho, como veremos después la solución de este juego se alcanza en la clase de las estrategias mixtas las cuales combinan adecuadamente las posibles estrategias puras de cada jugador. Entonces a continuación estableceremos un poco de teoría y posteriormente, en la Sección 4, ofreceremos la solución del juego de los volados.

## 3. Un poco de teoria de juegos bipersonales

**3.1. Modelo básico.** En esta sección daremos la teoría básica de juegos finitos bipersonales, tomada esencialmente del artículo [12], aunque también puede encontrarse en textos como el [14]. De forma breve, tenemos:

- 2 *jugadores*;
- cada Jugador $i$ tiene asociado un conjunto finito $\Pi_i$ de *estrategias puras*. Por simplicidad y para cubrir el caso del ejemplo de los volados supongamos que cada uno de los conjuntos $\Pi_1$ y $\Pi_2$ tienen dos estrategias puras, es decir:

$$\Pi_1 = \{a, b\} \;\; y \;\; \Pi_2 = \{\alpha, \beta\};$$

- cada Jugador $i$, tiene asociada una *función de pago* $u_i$, donde $u_i : \Pi_1 \times \Pi_2 \to \mathbb{R}$.

**3.2. Estrategias mixtas para el Jugador $i, i = 1, 2$.** Esta clase de estrategias son vectores de forma:

$$(\eta, 1 - \eta),$$

con $0 \leq \eta \leq 1$ y se tiene la interpretación de que el Jugador $i$ toma una de sus estrategias puras con probabilidad $\eta$ y la otra con probabilidad $1 - \eta$. Nótese que los casos especiales cuando $\eta = 0$ y $\eta = 1$ dan como resultado las estrategias puras correspondientes al jugador en cuestión.

**3.3. Función de pago sobre las estrategias mixtas.** Se extiende la función de pago $u_i$ a la clase de las estrategias mixtas de la siguiente manera: tómese $0 \leq \theta \leq 1$ y $0 \leq \gamma \leq 1$. Entonces, en términos de la teoría de la probabilidad ([1]) podemos pensar que tenemos dos elementos aleatorios:

$$X = \begin{cases} a & \text{con probabilidad } \theta \\ b & \text{con probabilidad } 1-\theta \end{cases}$$

y

$$Y = \begin{cases} \alpha & \text{con probabilidad } \gamma \\ \beta & \text{con probabilidad } 1-\gamma \end{cases}$$

donde se supone que $X$ y $Y$ son independientes, con vector conjunto dado por:

$$(X,Y) = \begin{cases} (a,\alpha) & \text{con probabilidad } \theta \cdot \gamma \\ (a,\beta) & \text{con probabilidad } \theta \cdot (1-\gamma) \\ (b,\alpha) & \text{con probabilidad } (1-\theta) \cdot \gamma \\ (b,\beta) & \text{con probabilidad } (1-\gamma) \cdot (1-\theta) \end{cases}$$

y usando la función de pago $u_i$ sobre las estrategias puras, tenemos la función de pago conjunta aleatoria dada por:

$$u_i(X,Y) = \begin{cases} u_i(a,\alpha) & \text{con probabilidad } \theta \cdot \gamma \\ u_i(a,\beta) & \text{con probabilidad } \theta \cdot (1-\gamma) \\ u_i(b,\alpha) & \text{con probabilidad } (1-\theta) \cdot \gamma \\ u_i(b,\beta) & \text{con probabilidad } (1-\gamma) \cdot (1-\theta). \end{cases}$$

De aqui se obtiene que la esperanza de $u_i(X,Y)$ está dada por:

$$E[u_i(X,Y)] = u_i(a,\alpha)\theta \cdot \gamma + u_i(a,\beta)\theta \cdot (1-\gamma) + u_i(b,\alpha)(1-\theta) \cdot \gamma + u_i(b,\beta)(1-\theta) \cdot (1-\gamma).$$

En este sentido la fórmula anterior se puede pensar como el *pago esperado* del Jugador $i$ y de hecho, esta fórmula se usará como la extensión de la *función de pago* para el Jugador $i$ sobre la clase de las estrategias mixtas, con la notación:

$$U_i((\theta, 1-\theta), (\gamma, 1-\gamma)) := E[u_i(X,Y)].$$

Por otro lado, es fácil verificar la siguiente igualdad realizando los productos involucrados en el lado derecho de ésta:

$$U_i((\theta, 1-\theta), (\gamma, 1-\gamma)) = \begin{pmatrix} \theta, 1-\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i(a,\alpha) & u_i(a,\beta) \\ u_i(b,\alpha) & u_i(b,\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix}. \tag{1}$$

También, a la matriz

$$\begin{pmatrix} u_i(a,\alpha) & u_i(a,\beta) \\ u_i(b,\alpha) & u_i(b,\beta) \end{pmatrix}$$

la llamaremos la *matriz de pagos* del Jugador $i$.

**Nota**
Como es común, se supone que los pagos esperados $U_i$ definidos en (1), son una representación de las preferencias de individuos racionales, por tanto el *objetivo* de un individuo consiste en *maximizar* su función de pago esperada (véase la Sección 1.3 y la Nota 4.9 del libro [15]).

Esto será utilizado en en la siguiente subsección.

**3.4. Mejores respuestas.** Sean $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ los conjuntos de estrategias mixtas para los jugadores 1 y 2, respectivamente y $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$. Entonces, tenemos:

- $r_1 \in \Sigma_1$ es una *mejor respuesta mixta* del Jugador 1a la estrategia mixta $s_2 \in \Sigma_2$ de su oponente si
$$U_1(r_1, s_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} U_1(q_1, s_2);$$
- $r_2 \in \Sigma_2$ es una *mejor respuesta mixta* del Jugador 2 a la estrategia mixta $s_1 \in \Sigma_1$ de su oponente si
$$U_2(s_1, r_2) = \max_{q_2 \in \Sigma_2} U_2(s_1, q_2);$$
- Para las estrategias mixtas $s_1 \in \Sigma_1$ y $s_2 \in \Sigma_2$, considere:
$$\Gamma(s_1, s_2) = \left\{ (r_1, r_2) \in \Sigma : U_1(r_1, s_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} U_1(q_1, s_2) \;\; y \;\; U_2(s_1, r_2) = \max_{q_2 \in \Sigma_2} U_2(s_1, q_2) \right\}.$$
Entonces la *correspondencia de mejores respuestas* de ambos Jugadores está dada por la función:
$$(s_1, s_2) \to \Gamma(s_1, s_2).$$

**3.5. Puntos de equilibrio.** Un perfil de estrategias mixtas $(s_1^*, s_2^*) \in \Sigma$ es un *punto de equilibrio* o un *equilibrio de Nash* si: para el Jugador 1, $s_1^*$ es una mejor respuesta para $s_2^*$, y para el Jugador 2, $s_2^*$ es una mejor respuesta para $s_1^*$.

**Nota**
Es importante notar que para $s_1^* \in \Sigma_1$ y $s_2^* \in \Sigma_2$, tenemos que $(s_1^*, s_2^*)$ es un *punto de equilibrio* $\Longleftrightarrow$ $(s_1^*, s_2^*)$ es un *punto fijo* de la correspondencia de mejores respuestas, donde punto fijo en este caso significa que:
$$(s_1^*, s_2^*) \in \Gamma(s_1^*, s_2^*).$$

## 4. Solución del juego de las monedas

En esta sección, presentaremos la solución del juego de los volados dado en la Sección 2, y para dar ésta seguiremos las definiciones de mejores respuestas, mejor respuesta conjunta y punto de equilibrio dadas en la sección anterior. Primero comenzaremos por dar las matrices de pago que corresponden a cada jugador:

$$Jugador1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad Jugador2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como ya comentamos, el punto de equilibrio *no* se alcanza en las estrategias puras, entonces lo buscaremos en la clase de las estrategias mixtas, para esto tómese: $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$. Entonces, de (1) tenemos para el Jugador 1:

$$\begin{aligned} U_1((\theta, 1-\theta), (\gamma, 1-\gamma)) &= \begin{pmatrix} \theta, 1-\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} \\ &= (2\gamma - 1)(2\theta - 1). \end{aligned}$$

Ahora construiremos la *función de las mejores respuestas* ($BR_1$) que el Jugador 1 puede darle al Jugador 2. Para ilustrar cómo se obtiene esta función considere, por ejemplo, que el Jugador 2 decide tomar una estrategia mixta con $\gamma > 1/2$, entonces $2\gamma - 1 > 0$ y la recta dada por $(2\gamma - 1)(2\theta - 1)$, como función de $\theta \in [0, 1]$ tiene pendiente positiva, por lo que el máximo de $U_1((\theta, 1-\theta), (\gamma, 1-\gamma))$ se alcanza en $\theta = 1$. Por tanto, para $\gamma > 1/2$ se tiene que $BR_1(\gamma) = 1$. Los demás casos para describir la función $BR_1$ se obtienen de manera similar.

Por tanto, la función $BR_1$ queda dada por:

$$BR_1(\gamma) = \begin{cases} \theta = 0 & si \quad \gamma < 1/2 \\ \theta = 1 & si \quad \gamma > 1/2 \\ 0 \leq \theta \leq 1 & si \quad \gamma = 1/2 \end{cases}$$

Siguiendo lo anterior, de manera análoga obtenemos para el Jugador 2:

$$\begin{aligned} U_2((\theta, 1-\theta), (\gamma, 1-\gamma)) &= \begin{pmatrix} \theta, 1-\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} \\ &= -(2\gamma - 1)(2\theta - 1). \end{aligned}$$

y la correspondiente funcion $BR_2$ queda dada por:

$$BR_2(\theta) = \begin{cases} \gamma = 1 & si \quad \theta < 1/2 \\ \gamma = 0 & si \quad \theta > 1/2 \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & si \quad \theta = 1/2 \end{cases}$$

Trazando las gráficas de $BR_1$ y $BR_2$, tenemos:

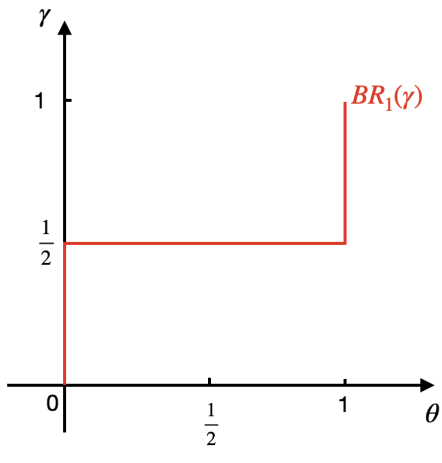


FIGURA 1. Mejor respuesta del Jugador 1

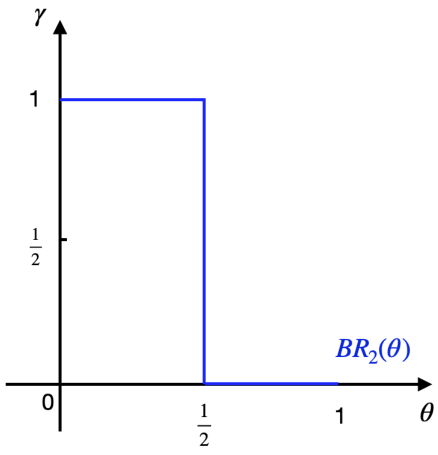


FIGURA 2. Mejor respuesta del Jugador 2

Entonces, la mejor respuesta conjunta queda dada por la intersección de las dos gráficas anteriores, es decir:

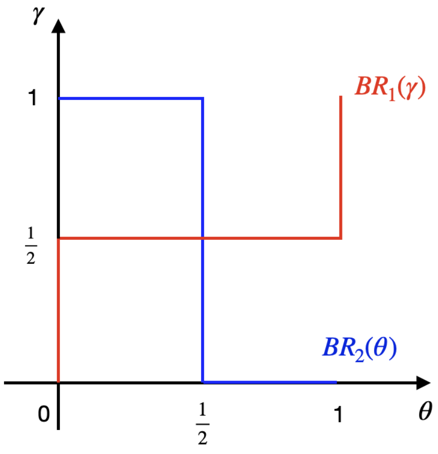


FIGURA 3. Mejor respuesta conjunta.

Por tanto, por lo presentado en la Sección 3, el *punto de equilibrio* $s^*$ del juego se alcanza para $\theta^* = \gamma^* = 1/2$ y está dado por:

$$s^* = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)) \qquad y \qquad U_1(s^*) = U_2(s^*) = 0.$$

## 5. Existencia de puntos de equilibrio

Comenzaremos por dar un resultado que se puede establecer a partir del material que se estudia en los cursos de cálculo.

**Una aplicación del teorema del valor intermedio** ([10] ejercicio 3, p. 91). Sea $\rho : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Entonces $\rho$ tiene un punto fijo, es decir, existe $x^* \in [0,1]$ tal que $\rho(x^*) = x^*$. Para demostrar esto, sea $g(x) = \rho(x) - x$, $x \in [0,1]$. Entonces, $g$ es continua y

- $g(0) = \rho(0) \geq 0$;

- $g(1) = \rho(1) - 1 \leq 0$.

Si $g(0) = 0$ (resp. $g(1) = 0$), entonces el punto fijo es $x^* = 0$ (resp. $x^* = 1$). Por otro lado, si $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$, entonces, por el teorema del valor intermedio ([10], p. 90) existe $x^* \in [0, 1]$ tal que $g(x^*) = 0$, i.e. $\rho(x^*) = x^*$. La gráfica que a continuación se presenta en la Figura 4 ilustra esta situación.

El resultado anterior forma parte de una serie de teoremas de punto fijo como son los teoremas de Brouwer ([5]) y de Kakutani ([7]). De hecho, el teorema de Brouwer extiende el resultado relacionado con el teorema del valor intermedio antes dado y a su vez el teorema de Kakutani extiende el de Brouwer. Para revisar el teorema de Kakutani y la teoría relacionada con éste se sugiere consultar el libro de Berge [3].

Por otro lado, cabe señalar que las ideas que hemos dado en la Seccion 3 de juegos bipersonales se pueden extender al caso de $n$ jugadores, con $n$ un entero positivo fijo mayor o igual a 2 y con un número finito de estrategias puras. En este contexto, J. Nash estableció en 1950 ([11]) el siguiente teorema:

**Teorema de Nash:** Cada juego finito tiene un punto de equilibrio.

**Notas**
Esencialmente, la demostración dada en [11] está basada en el teorema de Kakutani y exhibe que la correspondencia de mejores respuestas de los jugadores, en el caso de juegos no cooperativos, finitos y $n$-personales tiene un punto fijo. Otra demostración del teorema Nash, basada directamente en el teorema de Brouwer, es presentada en [12]. Como un comentario adicional, cabe mencionar que una aplicación reciente del teorema de Kakutani en el estudio de la existencia de puntos de equilibrio para cierta clase de juegos dinámicos es presentada en [2].

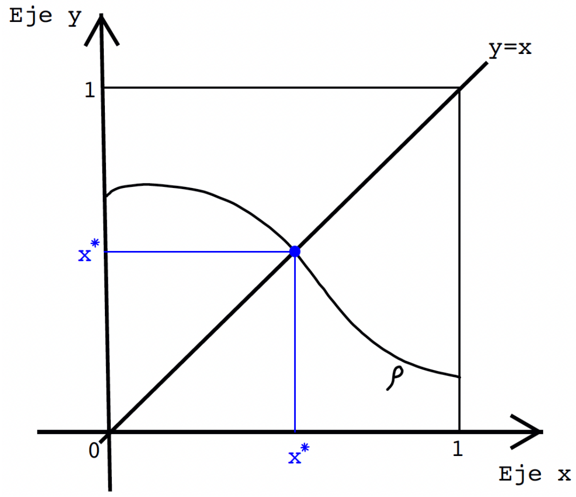


FIGURA 4. Punto fijo: $\rho(x^*) = x^*$

## 6. COMENTARIOS FINALES

**6.1. Algunas extensiones de juegos finitos.** En la literatura de juegos ([6], [8], [9], [14], [15]) es posible encontrar algunas generalizaciones de los modelos considerados en este trabajo. Algunas de estas generalizaciones se pueden contrastar con lo hecho aquí, por ejemplo:

- **Tipo de información**: información completa e información incompleta.
- **Número de participantes**: juegos bipersonales y juegos $n$-personales, $n \geq 3$.
- **Número de estrategias**: juegos finitos (cada jugador tiene un número finito de estrategias puras posibles) y juegos infinitos (cada jugador tiene un número infinito de estrategias posibles).
- **Tipos de relación entre los jugadores**: juegos no cooperativos y juegos cooperativos.
- **Tipos de pagos**: juegos de suma cero y juegos de suma no nula.
- **Por el número de movimientos**: juegos estáticos y juegos multipasos.

## 7. Conclusión.

Finalmente, como se puede observar la teoría de juegos representa un tema de las matemáticas que modela la toma de decisiones. El estudio de esta teoría se puede iniciar con los conocimientos de los cursos de nivel medio y avanzado de una licenciatura en matemáticas o áreas afines. En un nivel más profundo, las perspectivas de esta teoría, incluyendo sus muy diversas aplicaciones, son muy amplias. Por esto, se invita muy enfáticamente al lector a adentrarse en el atractivo mundo de la teoría de juegos.

***Agradecimientos.*** El autor agradece las sugerencias y los comentarios hechos por un árbitro anónimo que contribuyeron a mejorar la presentación del artículo.

## Referencias

[1] Ash, R. B., *Real Analysis and Probability*, Academic Press, 1972.
[2] Becerril-Borja, R. and Montes-de-Oca, R., *Incomplete information and risk sensitive analysis of sequential games without a predetermined order of turns*, Kybernetika (Prague), 57, 2, 312-331, 2021.
[3] Berge, C., *Topological Spaces*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London 1963 (reprinted by Dover Publications, Inc., Mineola, New York 1997).
[4] Bhuiyan, B. A., *An overview of game theory and some applications*, Philosophy and Progress, LIX-LX, 111-128, 2016.
[5] Brouwer, L. E. J., *Über abbildung von mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71, 1, 97-115, 1911.
[6] Fudenberg, D. and Tirole, J., *Game Theory*, The MIT Press, 1991.
[7] Kakutani, S., *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Mathematical Journal, 8, 457-459, 1941.
[8] Kolokoltsov, V. N. and Malafeyev, O. A., *Understanding Game Theory: Introduction to the Analysis of Many Agent Systems with Competition and Cooperation*, World Scientific, 2010.
[9] Leyton-Brown, K. and Shoham, Y., *Essentials of Game Theory: A Concise Multidisciplinary Introduction*, Synthesis lectures on artificial intelligence and machine learning, Morgan and Claypool Series, 2, 1, 1-88, 2008.
[10] Marsden, J. E., *Elementary Classical Analysis*, Freeman and Company, 1974.
[11] Nash, J., *Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 36, 1, 48-49, 1950.
[12] Nash, J., *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics, 54, 2, 286-295, 1951.
[13] Siegfried, T., *A Beautiful Math: John Nash, Game Theory, and the Modern Quest for a Code of Nature*, Joseph Henry Press, 2006.
[14] Tadelis, S., *Game Theory: an Introduction*, Princeton University Press, 2013.
[15] Webb, J. N., *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*, Springer, 2007.

*Raúl Montes-de-Oca,*
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1$^a$ Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310, CDMX, México.
e-mail: `momr@xanum.uam.mx`