



RECOLLEMENTS DE CATEGORÍAS TRIANGULADAS

VALENTE SANTIAGO VARGAS

RESUMEN. En la literatura se encuentran dos definiciones de recollement de categorías trianguladas y es bien conocido para los expertos que estas dos nociones son equivalentes. En este artículo probaremos la equivalencia de las dos definiciones. También daremos una prueba detallada de que un funtor entre categorías trianguladas que es fiel y pleno y que poseé adjunto izquierdo y derecho puede completarse a un recollement, dicho resultado se encuentra en el artículo [5] de E. Cline, B. Parshall, L. Scott.

1. INTRODUCCIÓN

En esta sección introduciremos la noción de categoría triangulada. Un ejemplo de tal noción, son las categorías derivadas, las cuales fueron inventadas por A. Grothendieck y J. L. Verdier en la década de los años 60. Actualmente, las categorías derivadas se han convertido en una herramienta importante en muchas ramas de la matemática como: geometría algebraica, geometría algebraica no conmutativa, teoría de representaciones, física-matemática, etc. En un intento de axiomatizar las propiedades de la categoría derivada, A. Grothendieck y J.L. Verdier introdujeron la noción de categoría triangulada. Durante largo tiempo, las categorías trianguladas se situaron en un extremo del álgebra homológica. Sin embargo, esta visión cambió debido a los trabajos de D. Happel en los años 80, llegando a ser de gran importancia en la teoría de representaciones y en otras áreas como ya comentamos arriba. Recordemos que una categoría aditiva es una categoría \mathcal{T} tal que $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ es un grupo abeliano para todo $X, Y \in \mathcal{T}$, la composición es bilineal y existen los coproductos finitos en \mathcal{T} . Una categoría triangulada consiste de una categoría aditiva \mathcal{T} , un automorfismo $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ (es decir, existe Σ^{-1} tal que $\Sigma \circ \Sigma^{-1} = 1$ y $\Sigma \circ \Sigma^{-1} = 1$) llamado “funtor de traslación” y una clase $\Delta_{\mathcal{T}}$ de “triángulos distinguidos” los cuales satisfacen ciertos axiomas. Un triángulo distinguido $\eta \in \Delta_{\mathcal{T}}$ es una terna de morfismos $\eta : X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$ en \mathcal{T} ; y los axiomas que se pide satisfagan dichos triángulos distinguidos son con la finalidad de que modelen (permitan hacer álgebra homológica) las propiedades básicas de las sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ en una categoría abeliana \mathcal{A} .

Dada una categoría aditiva \mathcal{T} y un automorfismo $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, formamos una nueva categoría $\text{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ cuyos objetos son diagramas de la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$. Los morfismos en $\text{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ son ternas (α, β, γ) de morfismos en \mathcal{T} tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & \Sigma(A_1) \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma(\alpha) \\
 A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & \Sigma(A_2).
 \end{array}$$

La siguiente definición es estandar y la pueden encontrar por ejemplo en [11, Definition 3.1] en pág. 11.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 18E30, 18E35.

Palabras clave. Categorías trianguladas, Localización, Recollement.

Definición 1. Una **categoría triangulada** \mathcal{T} , es una terna $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ que satisface las siguientes condiciones:

- (a) \mathcal{T} es una categoría aditiva.
- (b) $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ es un automorfismo aditivo.
- (c) Δ es una subcategoría plena de $\text{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ (cuyos objetos llamaremos triángulos distinguidos), la cual es cerrada por isomorfismos y satisface los siguientes axiomas:
 - (T1) Para todo morfismo $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{T} existe un triángulo distinguido de la siguiente forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$. Para todo $A \in \mathcal{T}$, el diagrama $0 \rightarrow A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0$ es un triángulo distinguido.
 - (T2) Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$ es un triángulo distinguido, entonces $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A) \xrightarrow{-\Sigma(f)} \Sigma(B)$ y $\Sigma^{-1}(C) \xrightarrow{-\Sigma^{-1}(h)} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son triángulos distinguidos.
 - (T3) Dados los triángulos distinguidos $A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \xrightarrow{h_i} \Sigma(A_i)$, con $i = 1, 2$; y un par de morfismos $\alpha : A_1 \rightarrow A_2$, $\beta : B_1 \rightarrow B_2$ tales que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2, \end{array}$$

existe $\gamma : C_1 \rightarrow C_2$ tal que la terna (α, β, γ) es un morfismo de triángulos, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & \Sigma(A_1) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma(\alpha) \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & \Sigma(A_2). \end{array}$$

- (T4) El *axioma del octaedro*. Para dos morfismos $f_1 : A \rightarrow B$, $f_2 : B \rightarrow C$ existe un diagrama conmutativo en \mathcal{T}

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{g_1} & X & \xrightarrow{h_1} & \Sigma(A) \\ \parallel & & \downarrow f_2 & & \downarrow \alpha & & \parallel \\ A & \xrightarrow{f_2 f_1} & C & \xrightarrow{g_3} & Y & \xrightarrow{h_3} & \Sigma(A) \\ \downarrow f_1 & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \Sigma(f_1) \\ B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{g_2} & Z & \xrightarrow{h_2} & \Sigma(B) \\ \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow \Sigma(g_1) h_2 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma(X) & \xlongequal{\quad} & \Sigma(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

en el cual todos los renglones y la tercera columna son triángulos distinguidos.

2. RECOLLEMENTS

Los recollements fueron introducidos por A. A. Beilinson, J. Bernstein y P. Deligne en [3], en la construcción de la categoría de gavillas perversas sobre un espacio singular en su axiomatización de los 6 funtores de Grothendieck para la categoría derivada de gavillas. En el contexto de categorías abelianas, los recollements fueron estudiados por V. Franjou y T. Pirashvili en [7], motivado por el trabajo de MacPherson-Vilonen en la categoría derivada de gavillas perversas. Los recollements de categorías abelianas fueron usados por E. Cline, B. Parshall y L. Scott para estudiar la categoría de módulos

sobre álgebras de dimensión finita sobre un campo K (ver [14]). Recientemente la noción de recollement ha cobrado mucho interes recientemente por lo que este artículo pretende ser una introducción a la teoría de recollements.

A continuación damos la primera definición dada por A. A. Beilinson, J. Bernstein y P. Deligne en 1.4.3 en la pág. 44 de [3].

Dado un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre categorías arbitrarias la **imagen esencial** de F denotado por $\text{Im}(F)$ es la subcategoría plena de \mathcal{B} cuyos objetos son definidos como sigue:

$$\text{Im}(F) := \{B \in \mathcal{B} \mid \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } F(A) \simeq B\}.$$

Si \mathcal{B} tiene objeto cero, definimos el **kernel** de F como la subcategoría plena de \mathcal{A} definida como sigue $\text{Ker}(F) := \{A \in \mathcal{A} \mid F(A) \simeq 0\}$.

Definición 2. [3, Definition 1.4.3] Consideremos el siguiente diagrama de funtores triangulados entre categorías trianguladas

$$\begin{array}{ccc} \longleftarrow & i^* & \longleftarrow \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{C} \\ \longleftarrow & i^! & \longleftarrow & j_* & \longleftarrow \end{array}$$

Se dice que tal diagrama forma un **recollement** si:

- $(i^*, i_* = i_!, i^!)$ y $(j_!, j^! = j^*, j_*)$ son triples adjuntos, i.e. (i^*, i_*) , $(i_!, i^!)$ $(j_!, j^!)$ son (j^*, j_*) pares adjuntos;
- $j^* i_* = 0$;
- $i_*, j_!, j_*$ son fieles y plenos;
- Para cada $A \in \mathcal{A}$ existen triángulos distinguidos en \mathcal{A} :

$$j_! j^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow i_* i^*(A) \longrightarrow \Sigma(j_! j^!(A)),$$

$$i_! i^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow j_* j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_! i^!(A)).$$

Observación 1. Hay un error de dedo en la notación de la definición original pues los autores consideran el diagrama: $\mathcal{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathcal{D} \xrightarrow{j_*} \mathcal{D}_U$. El error consiste en que en la sucesión anterior, debe ser j^* en lugar de j_* .

Ahora enunciamos la segunda definición, por ejemplo ver pág. 96 en [17].

Definición 3. Consideremos el siguiente diagrama de funtores triangulados entre categorías trianguladas

$$\begin{array}{ccc} \longleftarrow & i^* & \longleftarrow \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{C} \\ \longleftarrow & i^! & \longleftarrow & j_* & \longleftarrow \end{array}$$

Se dice que tal diagrama forma un recollement si:

- $(i^*, i_* = i_!, i^!)$ y $(j_!, j^! = j^*, j_*)$ son triples adjuntos, i.e. (i^*, i_*) , $(i_!, i^!)$ $(j_!, j^!)$ son (j^*, j_*) pares adjuntos;
- $\text{Im}(i_*) = \text{Ker}(j^*)$;
- $i_*, j_!, j_*$ son funtores fieles y plenos.

Recordemos que en una categoría aditiva el coproducto de una familia vacía de objetos es el objeto cero.

LEMA 4. Consideremos funtores $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ entre categorías aditivas tal que (F, G) es un par adjunto. Si F es el funtor cero, entonces G es el funtor cero.

Demostración. Sabemos que existe isomorfismo funtorial para $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}(A, G(B)).$$

Como $G(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}(A, G(B)) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. En particular, para $B = F(A)$ tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A)) = 0$ y esto implica que $1_{F(A)} = 0$ y por lo tanto concluimos que $F(A) = 0$. Luego, F es el funtor cero. \square

LEMA 5. *Consideremos un recollement como en las Definiciones 2 o 3. Entonces*

- (a) $i^*j_! = 0$,
- (b) $i^!j_* = 0$.

Demostración. Solo demostraremos (b) pues (a) es dual. Notemos primero que como $(i_*, i^!)$ y (j^*, j_*) son pares adjuntos, entonces $(j^*i_*, i^!j_*)$ es un par adjunto. En efecto, para $B \in \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{C}$ tenemos los siguientes isomorfismos functoriales

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(j^*i_*(B), C) &\simeq \mathrm{Hom}(i_*(B), j_*C) && \text{[pues } (j^*, j_*) \text{ es un par adjunto]} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(B, i^!j_*(C)) && \text{[pues } (i_*, i^!) \text{ es un par adjunto.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(j^*i_*, i^!j_*)$ es un par adjunto. Por Definiciones 2(b) o 3(b), tenemos que $j^*i_* = 0$. Luego, por Lema 4, concluimos que $i^!j_* = 0$. \square

La siguiente Proposición será muy útil en las pruebas de los resultados de este artículo.

PROPOSICIÓN 6. *Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, un funtor. Las siguientes condiciones se satisfacen*

- (a) *Sea $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ adjunto a izquierda de F . Entonces F es fiel y pleno si y sólo si la counidad (del par adjunto (G, F)) $\varepsilon : G \circ F \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ es un isomorfismo.*
- (b) *Sea $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ adjunto a derecha de F . Entonces F es fiel y pleno si y sólo si la unidad (del par adjunto (F, H)) $\eta : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow H \circ F$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [4, Theorem 3.4.1] en pág. 114 y su dual. \square

PROPOSICIÓN 7. *Consideremos un recollement*

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} \\ \mathcal{B} \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} \mathcal{C} \\ \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} \end{array}$$

como en la Definición 3. Entonces existen triángulos distinguidos

$$j_!j^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow i_*i^*(A) \longrightarrow \Sigma(j_!j^!(A))$$

$$i_!i^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_!i^!(A)).$$

Demostración. Demostremos la existencia del segundo triángulo ya que la existencia del primero es análoga. Consideremos los pares adjuntos $(i_*, i^!)$ y (j^*, j_*) . Entonces, tenemos unidad $\eta : 1_{\mathcal{B}} \rightarrow i^!i_*$ y counidad $\varepsilon : i_*i^! \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ de la adjunción $(i_*, i^!)$; y también la unidad $\eta' : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow j_*j^*$ y counidad $\varepsilon' : j^*j_* \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ de la adjunción (j^*, j_*) . Consideremos la unidad $\eta' : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow j_*j^*$. Luego, para $A \in \mathcal{A}$ tenemos morfismo:

$$\eta'_A : A \rightarrow j_*j^*(A).$$

Por Definición 1(T1) y (T2), podemos completar al siguiente triángulo distinguido en \mathcal{A} :

$$(*) : X \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\eta'_A} j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(X).$$

Lo que haremos en el resto de la prueba es ver que el morfismo α es isomorfo al morfismo $\varepsilon_A : i_*i^!(A) \rightarrow A$.

Primero, dado que (j^*, j_*) es un par adjunto y j_* es fiel y pleno (ver Definición 3(c)), por Proposition 6(a), tenemos que la counidad $\varepsilon' : j^*j_* \rightarrow 1_C$ es un isomorfismo. Para $A \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{C}$ consideremos las identidades triangulares de la adjunción (j^*, j_*) (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99):

$$1_{j^*(A)} = \varepsilon'_{j^*(A)} \circ j^*(\eta'_A)$$

$$1_{j_*(C)} = j_*(\varepsilon'_C) \circ \eta'_{j_*(C)}.$$

Como $\varepsilon' : j^*j_* \rightarrow 1_C$ es un isomorfismo, concluimos de las identidades triangulares que $j^*(\eta'_A)$ es isomorfismo. Aplicando j^* al triángulo $(*)$ tenemos el triángulo distinguido en \mathcal{C} :

$$j^*(X) \xrightarrow{j^*(\alpha)} j^*(A) \xrightarrow{j^*(\eta'_A)} j^*j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(j^*(X)).$$

Como $j^*(\eta'_A)$ es isomorfismo, concluimos que $j^*(X) = 0$ (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Como $\text{Ker}(j^*) = \text{im}(i_*)$ (ver Definición 3(b)), tenemos que existe $Y \in \mathcal{B}$ tal que $i_*(Y) \simeq X$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_*(Y) = X$.

Como $(i_*, i^!)$ es un par adjunto e i_* es fiel y pleno, por Proposition 6(b), tenemos que la unidad $\eta : 1_B \rightarrow i^!i_*$ es un isomorfismo. Luego, $i_*(\eta_Y)$ es un isomorfismo ya que η_Y lo es. Por otro lado, aplicando $i^!$ al triángulo $(*)$, tenemos el siguiente triángulo distinguido en \mathcal{B} :

$$i^!(X) \xrightarrow{i^!(\alpha)} i^!(A) \xrightarrow{i^!(\eta'_A)} i^!j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i^!(X)).$$

Por Lemma 5(b), tenemos que $i^!j_* = 0$, y por lo tanto $i^!j_*j^*(A) = 0$, de donde concluimos que $i^!(\alpha)$ es un isomorfismo (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41).

Ahora, recordemos que para $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$ tenemos isomorfismo funtorial

$$\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(B), A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^!(A)),$$

donde para $f \in \text{Hom}(i_*(B), A)$ se tiene que $\Gamma(f) := i^!(f) \circ \eta_B$ y para $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^!(A))$ tenemos que $\Gamma^{-1}(g) = \varepsilon_A \circ i_*(g)$. Luego, considerando el morfismo $\alpha : i_*(Y) = X \rightarrow A$ del triángulo $(*)$ tenemos que la igualdad $\Gamma^{-1}\Gamma(\alpha) = \alpha$ se traduce en la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} i_*i^!(i_*(Y)) & \xrightarrow{i_*i^!(\alpha)} & i_*i^!(A) \\ \uparrow i_*(\eta_Y) & & \downarrow \varepsilon_A \\ X = i_*(Y) & \xrightarrow{\alpha} & A. \end{array}$$

En el diagrama anterior $i_*(\eta_Y)$ y $i_*i^!(\alpha)$ son isomorfismos. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\eta'_A} & j_*j^*(A) & \longrightarrow & \Sigma(X) \\ \downarrow \lambda & & \downarrow 1 & & & & \\ i_*i^!(A) & \xrightarrow{\varepsilon_A} & A & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(i_*i^!(A)) \end{array}$$

donde $\lambda := i_*i^!(\alpha) \circ i_*(\eta_Y)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, existe isomorfismo $\theta : j_*j^*(A) \rightarrow Z$ tal que el diagrama anterior se completa a un isomorfismo de triángulos (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36). Por lo tanto, el morfismo α lo podemos sustituir por ε_A y así tenemos triángulo distinguido

$$i_*i^!(A) \xrightarrow{\varepsilon_A} A \xrightarrow{\eta'_A} j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_*i^!(A)).$$

Como $i_* = i_!$ tenemos el triángulo deseado. \square

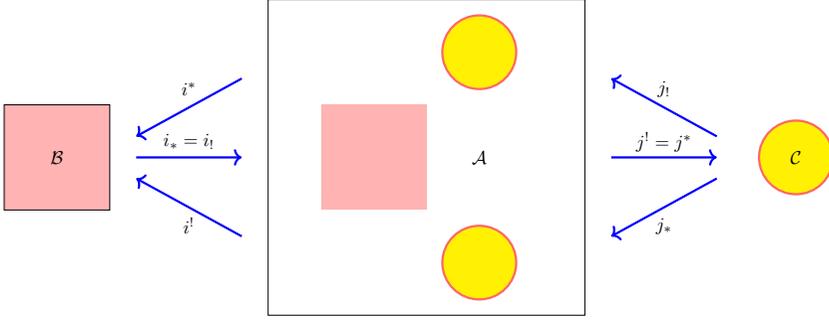


FIGURA 1. Idea general de recollement

PROPOSICIÓN 8. *Consideremos un recollement*

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} & \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{C} \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

como en la Definición 2. Entonces $\text{Im}(i_*) = \text{Ker}(j^*)$.

Demostración. Como $j^*i_* = 0$ tenemos que $\text{Im}(i_*) \subseteq \text{Ker}(j^*)$. Ahora veamos la otra contención. Sea $A \in \text{Ker}(j^*)$. Por Definición 2(d) sabemos que tenemos triángulo distinguido

$$i_!i^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_!i^!(A)).$$

Como $j^*(A) = 0$, tenemos que $j_*j^*(A) = 0$ y por lo tanto el morfismo $i_!i^!(A) \longrightarrow A$ del triángulo de arriba es un isomorfismo (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Es decir, $A \simeq i_!i^!(A) = i_*i^!(A)$. Lo cual prueba que $A \in \text{Im}(i_*)$ y por lo tanto $\text{Im}(i_*) = \text{Ker}(j^*)$. \square

COROLARIO 9. *Las definiciones de recollement de 2 y 3 son equivalentes.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 7 y 8. \square

La Figura 1 ilustra a grandes rasgos el recollement de la Definición 3.

3. COMPLETACIÓN DE RECOLLEMENTS

Recordemos la siguiente definición (ver [11] en pág. 182).

Definición 10. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada con traslación Σ . Sea \mathcal{S} una subcategoría plena de \mathcal{T} . Se dice que \mathcal{S} es una **subcategoría triangulada** de \mathcal{T} si

- (a) $\Sigma^n(X) \in \mathcal{S}$ para todo $X \in \mathcal{S}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$,
- (b) Sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$ un triángulo en \mathcal{T} . Si dos objetos del conjunto $\{X, Y, Z\}$ pertenecen a \mathcal{S} entonces el tercero también está en \mathcal{S} .

Sea \mathcal{S} una subcategoría triangulada de \mathcal{T} , se dice que \mathcal{S} es **gruesa** si cada vez que tenemos morfismos $X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{i} X$ tal que $\pi \circ i = 1_Y$ con $X \in \mathcal{S}$, entonces $Y \in \mathcal{S}$. Es decir, \mathcal{S} es gruesa si es cerrada por sumandos directos.

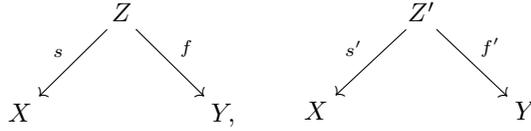
Observación 2. Recordemos la siguiente construcción. Dada \mathcal{T} categoría triangulada y \mathcal{X} subcategoría triangulada de \mathcal{T} definimos los morfismos $S(\mathcal{X})$ como los morfismos $f : A \longrightarrow B$ tal que cuando completamos f a un triángulo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Sigma(A)$$

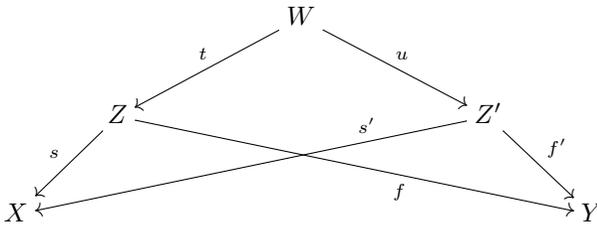
tenemos que $C \in \mathcal{X}$.

En este caso tenemos la **localización de Verdier** de \mathcal{T} respecto a la subcategoría triangulada \mathcal{X} , la cual es por definición $\mathcal{T}/\mathcal{X} := \mathcal{T}[S(\mathcal{X})^{-1}]$ y se tiene el funtor canónico $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$. Recordemos que $\mathcal{T}[S(\mathcal{X})^{-1}]$ es notación para denotar a la categoría que se construye a partir de \mathcal{T} en la cual los morfismos que pertenecen a $S(\mathcal{X})$ se vuelven invertibles (ver sección 2.2 en pág. 164 de [11]).

A continuación, veamos a grandes rasgos como se construye el cociente de Verdier \mathcal{T}/\mathcal{X} . Para esto, hacemos la siguiente construcción. Consideremos dos diagramas

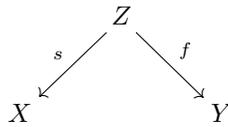


con $s, s' \in S(\mathcal{X})$. Decimos que dichos diagramas están relacionados si existen morfismos $t : W \rightarrow Z$ y $u : W \rightarrow Z'$ en \mathcal{T} tal que el siguiente diagrama conmuta



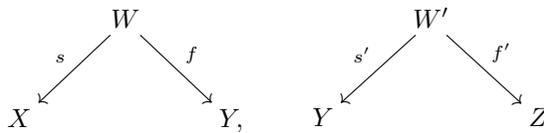
y además $st = s'u \in S(\mathcal{X})$. Se demuestra que la relación anterior es de equivalencia y por lo tanto podemos hablar de clases de equivalencia de diagramas de la forma anterior (ver [13, Lemma 2.1.14] en pág. 76). El cociente de Verdier \mathcal{T}/\mathcal{X} se define como sigue.

- (a) Los objetos de \mathcal{T}/\mathcal{X} son los mismos objetos que los de \mathcal{T} .
- (b) Sean X y Y dos objetos de \mathcal{T}/\mathcal{X} , un morfismo de X a Y en \mathcal{T}/\mathcal{X} consiste de la clase de equivalencia de diagramas de la forma

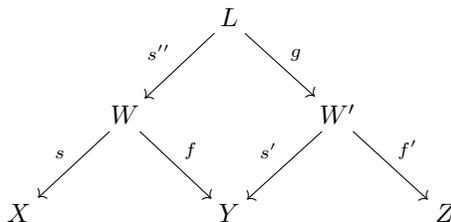


con $s \in S(\mathcal{X})$.

La composición en \mathcal{T}/\mathcal{X} se define como sigue. Consideremos un morfismo de X a Y y otro morfismo de Y a Z representados por los siguientes diagramas respectivamente:



con $s, s' \in S(\mathcal{X})$. Para hacer la composición, se construye un diagrama conmutativo de la siguiente forma



donde $s'' \in S(\mathcal{X})$. Luego, la composición se define como la clase de equivalencia del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ ss'' \swarrow & & \searrow f'g \\ X & & Z. \end{array}$$

Se demuestra que la composición definida arriba está bien definida (ver [13, Lemma 2.1.18] en pág. 80) y que \mathcal{T}/\mathcal{X} es una categoría (ver [13, Definition 2.1.20] en pág. 81). Por otro lado, el functor $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$ satisface que si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathcal{T} entonces $Q(f)$ queda representado por la clase de equivalencia del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ 1_X \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y. \end{array}$$

Para el siguiente resultado, se necesita la siguiente noción. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' categorías trianguladas. Un functor $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ es **triangulado** si manda triángulos distinguidos de \mathcal{T} en triángulos distinguidos de \mathcal{T}' . Se tiene el siguiente Teorema (ver [13, Theorem 2.1.8] en pág. 74).

TEOREMA 11. *Sea \mathcal{T} una categoría triangulada y \mathcal{X} una subcategoría triangulada de \mathcal{T} . Entonces \mathcal{T}/\mathcal{X} es una categoría triangulada y $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$ es un functor triangulado. Además el functor $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$ satisface la siguiente propiedad universal: si $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ es un functor triangulado tal que $\mathcal{X} \subseteq \text{Ker}(F)$, entonces existe un único functor triangulado $G : \mathcal{T}/\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{T}/\mathcal{X} \\ F \downarrow & \swarrow G & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

Observación 3. Recordemos para conveniencia del lector, cómo actúa el functor $G : \mathcal{T}/\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ en morfismos. Sea $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{X}}(X, Y)$. Entonces α está representado por un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{X})$. Como \mathcal{T}/\mathcal{X} es la categoría donde $Q(s')$ es invertible para todo $s' \in S(\mathcal{X})$ (ver [13, Lemma 2.1.21]) se tiene que $\alpha = Q(g)Q(s)^{-1}$. Por otro lado, como $\mathcal{X} \subseteq \text{Ker}(F)$, se puede ver que $F(s')$ es invertible para todo $s' \in S(\mathcal{X})$. Por lo tanto, tenemos que $G(\alpha)$ se define como sigue:

$$G(\alpha) := F(g) \circ F(s)^{-1}.$$

Ahora bien, si \mathcal{E} es una subcategoría triangulada de una categoría triangulada \mathcal{D} , se define $\mathcal{E}^\perp := \{Y \in \mathcal{D} \mid \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0 \ \forall X \in \mathcal{E}\}$. De manera dual, se define ${}^\perp\mathcal{E}$.

El siguiente teorema se puede encontrar en [5, Theorem 2.1] en la pág. 506. En el artículo [5] sólo se da un esbozo de la prueba. Uno de los objetivos principales de este artículo es dar la demostración con todo detalle de tal resultado.

TEOREMA 12. [5, Theorem 2.1] *Sea $i_* : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ un functor entre categorías trianguladas que es fiel y pleno. Supongamos que i_* tiene un adjunto izquierdo i^* y un adjunto derecho $i^!$ que son funtores de categorías trianguladas. Sea \mathcal{E} la imagen*

esencial de \mathcal{D}' bajo i_* (i.e, los objetos de \mathcal{D} que son isomorfos a $i_*(X)$ para algún $X \in \mathcal{D}'$). Entonces

- (a) $\text{Ker}(i^!) = \mathcal{E}^\perp$.
- (b) $\mathcal{E} = {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$, en particular \mathcal{E} es una subcategoría gruesa de \mathcal{D} .
- (c) Consideremos la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow i_*i^*$ del par adjunto (i^*, i_*) . Para cada $X \in \mathcal{D}$ existe un triángulo distinguido

$$X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0)$$

que cumple las siguientes condiciones:

- (c1) $i^*(\eta_X)$ es un isomorfismo,
- (c2) $X_0 \in {}^\perp\mathcal{E}$,
- (c3) $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, B)$ es un isomorfismo para todo $s : A \rightarrow B$ en $S(\mathcal{E})$.
- (d) El morfismo cociente $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$ tiene adjunto izquierdo $j_!$ y adjunto derecho j_* y tales adjuntos son fieles y plenos y además $\mathcal{E} = \text{Ker}(j^*)$. Es decir, tenemos el siguiente recollement

$$\begin{array}{ccccc} & & i^* & & j_! \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{D} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{D}/\mathcal{E} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & i^! & & j_* \end{array}$$

Demostración. (a) Consideremos $\mathcal{E}^\perp := \{Y \in \mathcal{D} \mid \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0 \ \forall X \in \mathcal{E}\}$. Sea $Y \in \mathcal{E}^\perp$, para $X \simeq i_*(X') \in \mathcal{E}$ con $X' \in \mathcal{D}'$ tenemos que $0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(i_*(X'), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(X', i^!(Y))$ ya que $(i_*, i^!)$ es par adjunto. En particular, tomando $X' := i^!(Y) \in \mathcal{D}'$ tenemos que

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(i_*(i^!(Y)), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^!(Y), i^!(Y)).$$

Por lo tanto, $i^!(Y) = 0$. Esto prueba que $\mathcal{E}^\perp \subseteq \text{Ker}(i^!)$.

Ahora, sea $Y \in \text{Ker}(i^!)$. Para $X \simeq i_*(X') \in \mathcal{E}$ con $X' \in \mathcal{D}'$ tenemos que $0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(X', 0) = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(X', i^!(Y)) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(i_*(X'), Y)$. Por lo tanto, $Y \in \mathcal{E}^\perp$ y así tenemos que $\text{Ker}(i^!) \subseteq \mathcal{E}^\perp$. Probándose que $\text{Ker}(i^!) = \mathcal{E}^\perp$.

- (b) Consideremos el par adjunto $(i_!, i^!)$ y su counidad $\varepsilon' : i_!i^! \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$. Entonces para cada $X \in \mathcal{D}$ tenemos el siguiente triángulo distinguido en \mathcal{D}

$$(*) : i_!i^!(X) \xrightarrow{\varepsilon'_X} X \longrightarrow Y \longrightarrow \Sigma(i_!i^!(X))$$

Aplicando el funtor $i^!$ a este triángulo, tenemos el siguiente triángulo en \mathcal{D}'

$$(**) : i^!i_!i^!(X) \xrightarrow{i^!(\varepsilon'_X)} i^!(X) \longrightarrow i^!(Y) \longrightarrow \Sigma(i^!i_!i^!(X))$$

Como $i_* = i_!$ es fiel y pleno, por Proposición 6(b), tenemos que la unidad (del par adjunto $(i_!, i^!)$) $\eta' : 1_{\mathcal{D}'} \rightarrow i^!i_!$ es un isomorfismo. Consideremos las identidades triangulares del par adjunto $(i_!, i^!)$ para cada $Z \in \mathcal{D}'$ y $W \in \mathcal{D}$ (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99):

$$1_{i_!(Z)} = \varepsilon'_{i_!(Z)} \circ i_!(\eta'_Z)$$

$$1_{i^!(W)} = i^!(\varepsilon'_W) \circ \eta'_{i^!(W)}.$$

Luego, como $\eta'_{i^!(X)}$ es un isomorfismo, concluimos que $i^!(\varepsilon'_X)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, del triángulo (**) concluimos que $i^!(Y) = 0$ (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Luego, del inciso (a) de este teorema, tenemos que $Y \in \mathcal{E}^\perp$. Ahora veamos que $\mathcal{E} = {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. En efecto, es claro que $\mathcal{E} \subseteq {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$.

Por otro lado, supongamos que $X \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Como $i_!i^!(X) = i_*i^!(X) \in \mathcal{E}$ y

$\mathcal{E} \subseteq {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$, concluimos que $i_!i^!(X) = i_*i^!(X) \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Dado que $i_!i^!$ es un funtor triangulado, tenemos que $\Sigma(i_!i^!(X)) = i_!i^!(\Sigma(X)) = i_*i^!(\Sigma(X)) \in \mathcal{E}$ y por lo tanto $\Sigma(i_!i^!(X)) \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$.

Luego, en el triángulo $(*)$, tenemos que $\Sigma(i_!i^!(X)), X \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Sea $L \in \mathcal{E}^\perp$, aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, L)$ al triángulo $(*)$ tenemos la sucesión larga

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma(i_!i^!(X)), L) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, L) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L) = 0.$$

Por lo tanto, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, L) = 0$ y así obtenemos que $Y \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Ya vimos arriba que $Y \in \mathcal{E}^\perp$ y por lo tanto, $Y \in ({}^\perp(\mathcal{E}^\perp)) \cap \mathcal{E}^\perp$. Así, tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y) = 0$ y en consecuencia $Y = 0$.

Luego, del triángulo $(*)$ concluimos que $\varepsilon'_X : i_!i^!(X) \longrightarrow X$ es un isomorfismo (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Es decir, tenemos que $X \simeq i_*i^!(X) \in \mathcal{E}$. Por lo tanto ${}^\perp(\mathcal{E}^\perp) \subseteq \mathcal{E}$ y así $\mathcal{E} = {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. De esta igualdad, es fácil ver que \mathcal{E} es cerrada por sumandos directos, es decir, que \mathcal{E} es una subcategoría gruesa.

- (c1) Consideremos la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}} \longrightarrow i_*i^*$ del par adjunto (i^*, i_*) . Entonces, para $X \in \mathcal{D}$ podemos formar el siguiente triángulo en \mathcal{D} (ver Definición 1(T1)):

$$(\clubsuit) : X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0).$$

Notemos que como $i_*i^*(X) \in \mathcal{E}$, entonces el morfismo u_X del triángulo (\clubsuit) está en $S(\mathcal{E})$ (ver observación 2, para definición de $S(\mathcal{E})$). Como i_* es fiel y pleno, por Proposición 6(a) tenemos que la counidad $\varepsilon : i^*i_* \longrightarrow 1_{\mathcal{D}'}$ es un isomorfismo. Aplicando i^* al triángulo (\clubsuit) tenemos el siguiente triángulo en \mathcal{D}' :

$$(\triangle) : i^*(X_0) \xrightarrow{i^*(u_X)} i^*(X) \xrightarrow{i^*(\eta_X)} i^*i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(i^*(X_0)).$$

Consideremos las identidades triangulares para $X \in \mathcal{D}$ y $Y \in \mathcal{D}'$ (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99):

$$1_{i^*(X)} = \varepsilon_{i^*(X)} \circ i^*(\eta_X)$$

$$1_{i_*(Y)} = i_*(\varepsilon_Y) \circ \eta_{i_*(Y)}.$$

Como $\varepsilon_{i^*(X)}$ es un isomorfismo, concluimos que $i^*(\eta_X)$ es un isomorfismo.

- (c2) Por (c1) sabemos que $i^*(\eta_X)$ es un isomorfismo. Luego, del triángulo (\triangle) de arriba, concluimos que $i^*(X_0) = 0$ (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Por otro lado, para $Y \in \mathcal{D}'$, tenemos que $i_*(Y) \in \mathcal{E}$ y como (i^*, i_*) es un par adjunto, tenemos que

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^*(X_0), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, i_*(Y)).$$

Por lo tanto, $X_0 \in {}^\perp\mathcal{E}$.

- (c3) Veamos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, B)$ es un isomorfismo para todo $s : A \longrightarrow B$ en $S(\mathcal{E})$.

En efecto, como $s \in S(\mathcal{E})$ tenemos que cuando completamos s a un triángulo distinguido

$$A \xrightarrow{s} B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma(A),$$

se tiene que $C \in \mathcal{E}$. Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, -)$ al triángulo anterior, tenemos la sucesión exacta larga

$$\mathcal{D}(X_0, \Sigma^{-1}(C)) \longrightarrow \mathcal{D}(X_0, A) \xrightarrow{s^*} \mathcal{D}(X_0, B) \longrightarrow \mathcal{D}(X_0, C)$$

donde $s^* := \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s)$. Como $C, \Sigma^{-1}(C) \in \mathcal{E}$ y $X_0 \in {}^\perp\mathcal{E}$, tenemos la siguiente igualdad $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, \Sigma^{-1}(C)) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, C)$ y por lo tanto $s^* := \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s)$ es un isomorfismo.

- (d) Primero, notemos que como \mathcal{E} es una subcategoría triangulada de \mathcal{D} , existe el cociente de Verdier \mathcal{D}/\mathcal{E} y funtor triangulado $j^* := Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$.

Ahora veamos que $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$ tiene adjunto izquierdo $j_!$. Como la prueba es larga, dividiremos la prueba en varios pasos.

(1). Existe funtor $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$.

Sea $f : X \rightarrow X'$ un morfismo en \mathcal{D} ; luego por la naturalidad de la unidad η del par adjunto (i^*, i_*) tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & i_* i^*(X) \\ \downarrow f & & \downarrow i_* i^*(f) \\ X' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & i_* i^*(X'). \end{array}$$

Luego, por Definición 1 (T3), tenemos que existe $\bar{f} : X_0 \rightarrow X'_0$ tal que se tiene el siguiente morfismo de triángulos

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{u_X} & X & \xrightarrow{\eta_X} & i_* i^*(X) & \longrightarrow & \Sigma(X_0) \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow f & & \downarrow i_* i^*(f) & & \downarrow \Sigma(\bar{f}) \\ X'_0 & \xrightarrow{u_{X'}} & X' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & i_* i^*(X') & \longrightarrow & \Sigma(X'_0). \end{array}$$

Como $u_{X'} \in S(\mathcal{E})$ (pues $i_* i^*(X) \in \mathcal{E}$) y por el inciso (c3), se tiene el siguiente isomorfismo de grupos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X'_0) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, u_{X'})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X').$$

Por lo tanto, es único el morfismo $\bar{f} : X_0 \rightarrow X'_0$ que hace conmutar el diagrama anterior. Así, podemos definir el funtor

$$\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D},$$

como sigue: $\Phi(X) = X_0$ para $X \in \mathcal{D}$ y $\Phi(f) = \bar{f}$ para $f : X \rightarrow X'$ un morfismo en \mathcal{D} . Utilizando el hecho que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s)$ es un isomorfismo para todo $s : A \rightarrow B$ en $S(\mathcal{E})$, se puede ver que en efecto Φ es un funtor.

(2). El funtor Φ del paso (1) es un funtor triangulado.

Consideremos el siguiente triángulo en \mathcal{D} :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X).$$

Al igual como hicimos arriba, podemos construir el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{u_X} & X \\ \downarrow \bar{f} & (I) & \downarrow f \\ Y_0 & \xrightarrow{u_Y} & Y. \end{array}$$

Por [12, Lemma 2.6] (Lema del 9) aplicado al cuadrado anterior tenemos el siguiente diagrama donde todos los renglones y columnas son triángulos distinguidos y todos los cuadrados conmutan a excepción del marcado con (X) :

$$\begin{array}{ccccccc}
(\star) : \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\psi)} & \Sigma(W) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma)} & \Sigma^2(X_0) \\
\uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{d} & L & \xrightarrow{k} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\uparrow \eta_X & & \uparrow \eta_Y & & \uparrow e & & \uparrow \Sigma(\eta_X) \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\
\uparrow u_X & & \uparrow u_Y & & \uparrow \mu & & \uparrow \Sigma(u_X) \\
X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\psi} & W & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(X_0).
\end{array}$$

Notemos que como $i_* i^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es triangulado, tenemos el siguiente triángulo en \mathcal{D} :

$$i_* i^*(X) \xrightarrow{i_* i^*(f)} i_* i^*(Y) \xrightarrow{i_* i^*(g)} i_* i^*(Z) \xrightarrow{i_* i^*(h)} \Sigma(i_* i^*(X)).$$

Luego, existe isomorfismo $\xi : i_* i^*(Z) \rightarrow L$ tal que el siguiente diagrama conmuta (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36):

$$\begin{array}{ccccccc}
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow \xi & & \downarrow \Sigma(1) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{d} & L & \xrightarrow{k} & \Sigma(i_* i^*(X))
\end{array}$$

Entonces podemos suponer que el diagrama (\star) tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccccc}
(\star\star) : \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\psi)} & \Sigma(W) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma)} & \Sigma^2(X_0) \\
\uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c' & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\uparrow \eta_X & & \uparrow \eta_Y & & \uparrow e' & & \uparrow \Sigma(\eta_X) \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\
\uparrow u_X & & \uparrow u_Y & & \uparrow \mu & & \uparrow \Sigma(u_X) \\
X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\psi} & W & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(X_0).
\end{array}$$

Aplicando $i_* i^*$ al morfismo de triángulos del segundo y tercer renglón del diagrama anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
i_* i^*(X) & \longrightarrow & i_* i^*(Y) & \longrightarrow & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\uparrow i_* i^*(\eta_X) & & \uparrow i_* i^*(\eta_Y) & & \uparrow i_* i^*(e') & & \uparrow \Sigma(i_* i^*(\eta_X)) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & Y & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X))
\end{array}$$

Por inciso (c1), tenemos que $i_* i^*(\eta_X)$ y $i_* i^*(\eta_Y)$ son isomorfismos, por lo tanto concluimos que $i_* i^*(e') : i_* i^*(Z) \rightarrow i_* i^*(Z)$ es un isomorfismo (ver [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36).

Consideremos la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow i_* i^*$ y counidad $\varepsilon : i^* i_* \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ del par adjunto (i^*, i_*) . Como i_* es fiel y pleno, por Proposición 6(a), tenemos que la

cunidad $\varepsilon : i_* i^* \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo. Recordemos que el isomorfismo funtorial dado por adjunción:

$$\Theta : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, i_* i^*(Z)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^*(Z), i^*(Z))$$

está definido como sigue: para $\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, i_* i^*(Z))$ se tiene que $\Theta(\lambda) = \varepsilon_{i^*(Z)} \circ i^*(\lambda)$ y para $\zeta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^*(Z), i^*(Z))$ se tiene que $\Theta^{-1}(\zeta) = i_*(\zeta) \circ \eta_Z$. Luego, para el morfismo $e' \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, i_* i^*(Z))$ del diagrama (***) se tiene que $\Theta^{-1}\Theta(e') = e'$. El cual se traduce en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(e')} & i_* i^* i_*(i^*(Z)) \\ \eta_Z \uparrow & & \downarrow j := i_*(\varepsilon_{i^*(Z)}) \\ Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z). \end{array}$$

Notemos que $j := i_*(\varepsilon_{i^*(Z)})$ es un isomorfismo pues la cunidad $\varepsilon : i_* i^* \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo; y además vimos arriba que $i_* i^*(e')$ es un isomorfismo. De esta manera, tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde los morfismos verticales son isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\eta_Z} & i_* i^*(Z) \\ \downarrow 1_Z & & \downarrow j \circ i_* i^*(e') \\ Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z). \end{array}$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Z_0 & \xrightarrow{u_Z} & Z & \xrightarrow{\eta_Z} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & \Sigma(Z_0) \\ & & \downarrow 1_Z & & \downarrow j \circ i_* i^*(e') & & \\ W & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & \Sigma(W) \end{array}$$

Por lo tanto existe un isomorfismo $\alpha : Z_0 \rightarrow W$ tal que el siguiente diagrama conmuta (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36):

$$\begin{array}{ccccccc} Z_0 & \xrightarrow{u_Z} & Z & \xrightarrow{\eta_Z} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & Z_0[1] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow 1_Z & & \downarrow j \circ i_* i^*(e') & & \downarrow \alpha[1] \\ W & \xrightarrow{\mu} & Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & W[1] \end{array}$$

Por lo tanto el triángulo en la tercera columna del diagrama (***) lo podemos sustituir por el triángulo superior del diagrama de arriba. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} (\star \star \star) : & \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\psi')} & \Sigma(Z_0) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma')} & \Sigma^2(X_0) \\ & \uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c' & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\ & i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\ & \eta_X \uparrow & & \eta_Y \uparrow & & \eta_Z \uparrow & & \uparrow \Sigma(\eta_X) \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\ & \uparrow u_X & (I) & \uparrow u_Y & & \uparrow u_Z & & \uparrow \Sigma(u_X) \\ & X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\psi'} & Z_0 & \xrightarrow{\gamma'} & \Sigma(X_0). \end{array}$$

Ahora, como sólo hay un único morfismo de Y_0 a Z_0 que hace conmutar el diagrama anterior (pues Φ es functor), concluimos que $\psi' = \bar{g} = \Phi(g)$.

Veamos que $\Sigma(X_0) \simeq \Sigma(X)_0$.

Como i_*i^* es un functor triangulado, existe un isomorfismo functorial $\beta : (i_*i^*) \circ \Sigma \rightarrow \Sigma \circ (i_*i^*)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $X \in \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} i_*i^*(\Sigma(X)) & \xrightarrow{\beta_X} & \Sigma(i_*i^*(X)) \\ \eta_{\Sigma(X)} \uparrow & & \Sigma(\eta_X) \uparrow \\ \Sigma(X) & \xrightarrow{1} & \Sigma(X). \end{array}$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama de triángulos

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma(X)_0 & \xrightarrow{u_{\Sigma(X)}} & \Sigma(X) & \xrightarrow{\eta_{\Sigma(X)}} & i_*i^*(\Sigma(X)) & \longrightarrow & \Sigma(\Sigma(X)_0) \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \beta_X & & \\ \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(u_X)} & \Sigma(X) & \xrightarrow{\Sigma(\eta_X)} & \Sigma(i_*i^*(X)) & \xrightarrow{-\Sigma(a)} & \Sigma^2(X_0) \end{array}$$

Por lo tanto, existe un isomorfismo $\varphi : (\Sigma(X))_0 \rightarrow \Sigma(X_0)$ tal que el diagrama de arriba se convierte en un morfismo de triángulos (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36). Por lo tanto el diagrama $(\star\star\star)$ se convierte en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{g})} & \Sigma(Z_0) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma'')} & \Sigma^2(X_0) \\ \uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c' & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\ i_*i^*(X) & \xrightarrow{i_*i^*(f)} & i_*i^*(Y) & \xrightarrow{i_*i^*(g)} & i_*i^*(Z) & \xrightarrow{i_*i^*(h)} & i_*i^*(\Sigma(X)) \\ \eta_X \uparrow & & \eta_Y \uparrow & & \eta_Z \uparrow & & \eta_{\Sigma(X)} \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\ \uparrow u_X & & \uparrow u_Y & & \uparrow u_Z & & \uparrow u_{\Sigma(X)} \\ X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\bar{g}} & Z_0 & \xrightarrow{\gamma''} & \Sigma(X)_0. \end{array}$$

Ahora, sabemos otra vez que sólo hay un morfismo de Z_0 a $\Sigma(X)_0$ que hace conmutar el diagrama de arriba (pues $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor). Por lo tanto, tenemos que $\gamma'' = \bar{h} = \Phi(h)$. Y así tenemos que

$$X_0 \xrightarrow{\bar{f}} Y_0 \xrightarrow{\bar{g}} Z_0 \xrightarrow{\bar{h}} \Sigma(X_0) \simeq \Sigma(X)_0$$

es un triángulo distinguido. Esto prueba que $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor triangulado.

(3). El functor Φ induce un functor triangulado $\bar{\Phi} : \mathcal{D}/\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$.

Para esto, verifiquemos que $\bar{\Phi}(X) = 0$ para toda $X \in \mathcal{E}$. Por (c) tenemos triángulo.

$$X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0).$$

Como $X \in \mathcal{E}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X = i_*(Y)$ para algún $Y \in \mathcal{D}'$. Entonces tenemos que $\eta_X := \eta_{i_*(Y)} : i_*(Y) \rightarrow i_*i^*(i_*(Y))$. Ahora por las identidades triangulares, tenemos que $1_{i_*(Y)} = i_*(\varepsilon_Y) \circ \eta_{i_*(Y)}$. Como la counidad ε es un isomorfismo, tenemos que $i_*(\varepsilon_Y)$ es un isomorfismo. Luego por la identidad de arriba, tenemos que $\eta_{i_*(Y)} = \eta_X$ es un isomorfismo y así del triángulo de arriba tenemos que $X_0 = 0$ (ver [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36). Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{E} \subseteq \text{Ker}(\bar{\Phi})$. Luego por la

propiedad universal del cociente de Verdier (ver Teorema 11), tenemos un funtor triangulado $\bar{\Phi} : \mathcal{D}/\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{D} \\ j^* \downarrow & \nearrow \bar{\Phi} & \\ \mathcal{D}/\mathcal{E} & & \end{array}$$

Por observación 3, tenemos que $\bar{\Phi}$ está definido en morfismos como sigue. Sea $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y)$ que está representado por el diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{E})$. Entonces, tenemos que $\alpha = j^*(g)j^*(s)^{-1}$. Por lo tanto, tenemos que $\bar{\Phi}(\alpha)$ se define como:

$$\bar{\Phi}(\alpha) := \Phi(g) \circ \Phi(s)^{-1}.$$

(4). Veamos que $\bar{\Phi}$ es adjunto a izquierda de $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$. Para esto, veamos que existe isomorfismo funtorial

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\bar{\Phi}(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, j^*(Y)),$$

para $X \in \mathcal{D}/\mathcal{E}$ y $Y \in \mathcal{D}$. Por construcción, tenemos que $\bar{\Phi}(X) = X_0$ y $j^*(Y) = Y$. Es decir, probaremos que existe isomorfismo funtorial $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y)$.

Para esto, definiremos isomorfismo de grupos

$$\Gamma_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y).$$

En efecto, por construcción (inciso (c)), tenemos un triángulo distinguido en \mathcal{D} :

$$X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_* j^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0)$$

donde $u_X \in S(\mathcal{E})$. Luego, para $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y)$ podemos formar el siguiente morfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} de X a Y (que llamaremos α) dado por el diagrama:

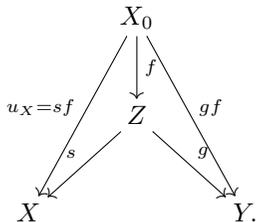
$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ u_X \swarrow & & \searrow \theta \\ X & & Y \end{array}$$

Es decir, $\alpha = j^*(\theta)j^*(u_X)^{-1} : X \rightarrow Y$. Por lo tanto, definimos $\Gamma_{X,Y}(\theta) := j^*(\theta)j^*(u_X)^{-1}$.

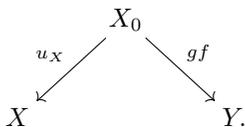
(4i). Veamos que $\Gamma_{X,Y}$ es suprayectiva. En efecto, sea $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y)$ que está representado por el diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{E})$. Como $s \in S(\mathcal{E})$, por (c3), tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X)$ es un isomorfismo. Luego, como $u_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X)$, existe un único morfismo $f : X_0 \rightarrow Z$ tal que $sf = u_X$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo



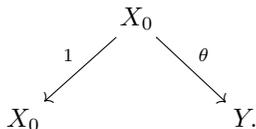
Es fácil ver que el morfismo ρ está representado también por la clase de equivalencia del siguiente diagrama



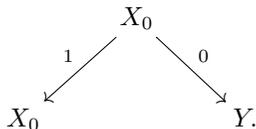
Luego, por construcción, tenemos que $\Gamma_{X,Y}(gf) = j^*(gf) \circ j^*(u_X)^{-1} = \rho$. Por lo tanto $\Gamma_{X,Y}$ es suprayectiva.

Ahora notemos que $\Gamma_{X,Y}$ es morfismo de grupos (pues j^* es functor aditivo).

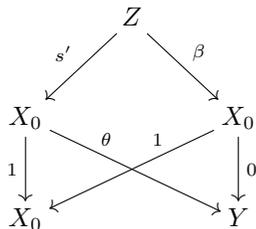
(4ii). Veamos que $\Gamma_{X,Y}$ es inyectiva. En efecto, sea $\theta : X_0 \rightarrow Y$ tal que $\Gamma_{X,Y}(\theta) = j^*(\theta) \circ j^*(u_X)^{-1} = 0$. De donde concluimos que $j^*(\theta) = 0$. Recordemos que $j^*(\theta)$ está representado por el siguiente diagrama



Además, el morfismo $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X_0, Y)$ está representado por el diagrama



Como $j^*(\theta) = 0$, existen morfismos $s' : Z \rightarrow X_0$ y $\beta : Z \rightarrow X_0$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo (ver la relación de equivalencia de diagramas definida antes de este teorema):



y el morfismo $s' = 1 \circ s' \in S(\mathcal{E})$. En particular, tenemos que $\theta s' = 0$ con $s' \in S(\mathcal{E})$. Por [11, Lemma 4.6.1] en pág. 4.6.1, tenemos que $S(\mathcal{E})$ es un sistema multiplicativo compatible con la triangulación de \mathcal{D} (ver pag. 173 de [11], para la noción de sistema multiplicativo). En particular, $S(\mathcal{E})$ admite un cálculo de fracciones a derecha. Así, por el dual de LF3 en pág. 172 de [11], tenemos que existe $s'' : Y \rightarrow Y'$ tal que $s'' \in S(\mathcal{E})$ y $s''\theta = 0$.

Por (c3), sabemos que tenemos el siguiente isomorfismo de grupos

$$\text{Hom}(X_0, s'') : \text{Hom}(X_0, Y) \rightarrow \text{Hom}(X_0, Y').$$

Luego, como $\text{Hom}(X_0, s'')(\theta) = s''\theta = 0$, concluimos que $\theta = 0$ y así concluimos que $\Gamma_{X,Y}$ es biyectiva.

(4iii). **Veamos que $\Gamma_{X,Y}$ es funtorial.** Para esto, veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$(\diamond) : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y) & \xrightarrow{\Gamma_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(\alpha, j^*(\beta)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X'_0, Y') & \xrightarrow{\Gamma_{X',Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X', Y') \end{array}$$

para $\alpha : X' \rightarrow X$ un morfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} y $\beta : Y \rightarrow Y'$ morfismo en \mathcal{D} . Supongamos que α está representado por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow \gamma \\ X' & & X \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{E})$, es decir, $\alpha := j^*(\gamma) \circ j^*(s)^{-1}$.

Por un lado, tenemos que $(\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(\alpha, j^*(\beta))) (\Gamma_{X,Y}(\theta)) = j^*(\beta) \circ (\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha)$. Para $\theta : X_0 \rightarrow Y$, se tiene que $\Gamma_{X,Y}(\theta) = j^*(\theta) \circ j^*(u_X)^{-1}$ está dado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ u_X \swarrow & & \searrow \theta \\ X & & Y \end{array}$$

Y los morfismos α y $j^*(\beta)$ están representados por los siguientes diagramas respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow \gamma \\ X' & & X, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ 1 \swarrow & & \searrow \beta \\ Y & & Y'. \end{array}$$

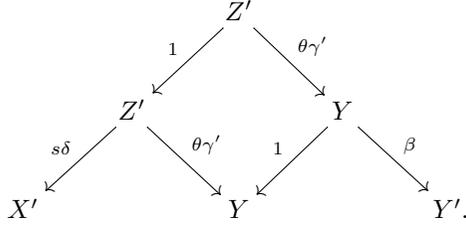
Luego, para calcular la composición $\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha$ construimos el siguiente diagrama

$$(\blacksquare) : \begin{array}{ccccc} & & Z' & & \\ & & \delta \swarrow & & \searrow \gamma' \\ & Z & & & X_0 \\ s \swarrow & & \gamma \searrow & & u_X \swarrow & & \searrow \theta \\ X' & & X & & X & & Y \end{array}$$

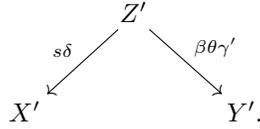
donde $\delta \in S(\mathcal{E})$. Por lo tanto, la composición $\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha$ está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ s\delta \swarrow & & \searrow \theta\gamma' \\ X' & & Y \end{array}$$

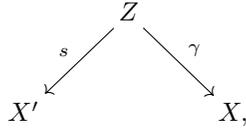
Ahora, para calcular la composición $j^*(\beta) \circ (\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha)$, construimos el siguiente diagrama



Luego, tenemos que la composición $j^*(\beta) \circ (\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha)$ está representada por el diagrama



Ahora calculemos $\Gamma_{X',Y'}\left(\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta)\right)(\theta)\right)$. Como $\alpha = j^*(\gamma)j^*(s)^{-1}$ está representado por el diagrama



tenemos que $\overline{\Phi}(\alpha) = \Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1}$.

Recordemos que por construcción, $\Phi(\gamma)$ y $\Phi(s)$ son los únicos morfismos tal que los siguientes cuadrados conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 Z_0 & \xrightarrow{uz} & Z \\
 \downarrow \Phi(s) & & \downarrow s \\
 X'_0 & \xrightarrow{u_{X'}} & X'
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{ccc}
 Z_0 & \xrightarrow{uz} & Z \\
 \downarrow \Phi(\gamma) & & \downarrow \gamma \\
 X_0 & \xrightarrow{u_X} & X
 \end{array}$$

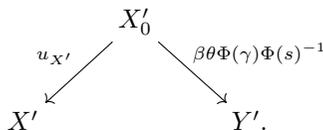
Por lo tanto, $\overline{\Phi}(\alpha) = \Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1}$ está dado por la composición:

$$X'_0 \xrightarrow{\Phi(s)^{-1}} Z_0 \xrightarrow{\Phi(\gamma)} X_0.$$

Luego, tenemos que $\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta)\right)(\theta) = \beta \circ (\theta \circ (\Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1}))$ está dado por la siguiente composición:

$$X'_0 \xrightarrow{\Phi(s)^{-1}} Z_0 \xrightarrow{\Phi(\gamma)} X_0 \xrightarrow{\theta} Y \xrightarrow{\beta} Y'.$$

Por definición de $\Gamma_{X',Y'}$ tenemos que $\Gamma_{X',Y'}\left(\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta)\right)(\theta)\right)$ está representado por el siguiente diagrama



Para finalizar, veamos que los siguientes dos diagramas representan el mismo morfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ s\delta \swarrow & & \searrow \beta\theta\gamma' \\ X' & & Y', \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X'_0 & \\ u_{X'} \swarrow & & \searrow \beta\theta\Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1} \\ X' & & Y'. \end{array}$$

Del diagrama conmutativo (■) de arriba podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Z'_0 & \xrightarrow{u_{Z'}} & Z' & & \\ \downarrow \Phi(\delta) & & \downarrow \delta & \searrow \gamma' & \\ Z_0 & \xrightarrow{u_Z} & Z & & X_0 \\ \downarrow \Phi(\gamma) & & \downarrow \gamma & \swarrow u_X & \\ X_0 & \xrightarrow{u_X} & X & & \end{array}$$

Del diagrama anterior, tenemos que $\gamma' \circ u_{Z'} : Z'_0 \rightarrow X_0$ es tal que $u_X \circ (\gamma' \circ u_{Z'}) = (\gamma\delta) \circ u_{Z'}$, pero sabemos que $\Phi(\gamma\delta) : Z'_0 \rightarrow X_0$ es el único morfismo tal que $u_X \circ \Phi(\gamma\delta) = (\gamma\delta) \circ u_{Z'}$ (pues Φ es funtor bien definido). Por lo tanto, concluimos que $\gamma' \circ u_{Z'} = \Phi(\gamma\delta) = \Phi(\gamma)\Phi(\delta)$. También, por construcción de $\Phi(s\delta)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z'_0 & \xrightarrow{u_{Z'}} & Z' \\ \downarrow \Phi(s\delta) & & \downarrow s\delta \\ X'_0 & \xrightarrow{u_{X'}} & X'. \end{array}$$

Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & Z'_0 & & \\ & \swarrow \Phi(s\delta) & & \searrow u_{Z'} & \\ & X'_0 & & Z' & \\ u_{X'} \swarrow & & s\delta & & \searrow \beta\theta\gamma' \\ X' & & & & Y' \\ & \swarrow \beta\theta\Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1} & & & \end{array}$$

Ya que $\beta \circ \theta \circ \Phi(\gamma) \circ \Phi(s)^{-1} \circ \Phi(s\delta) = \beta \circ \theta \circ \Phi(\gamma) \circ \Phi(\delta) = \beta \circ \theta \circ \gamma' \circ u_{Z'}$ y también $u_{X'} \circ \Phi(s\delta) = s \circ \delta \circ u_{Z'}$. Como $s, \delta \in S(\mathcal{E})$, tenemos que $s\delta \in S(\mathcal{E})$. Luego, tenemos que $\Phi(s\delta)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} y así tenemos el siguiente triángulo

$$Z'_0 \xrightarrow{\Phi(s\delta)} X'_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma(Z'_0).$$

donde $0 \in \mathcal{E}$. Es decir, tenemos que $\Phi(s\delta) \in S(\mathcal{E})$. Por lo tanto, los dos diagramas requeridos son equivalentes. Por lo tanto,

$$\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(\alpha, j^*(\beta)) \right) (\Gamma_{X,Y}(\theta)) = \Gamma_{X',Y'} \left(\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta) \right) (\theta) \right).$$

Es decir, el diagrama (◇) conmuta. Concluimos que, $\Gamma_{X,Y}$ es una biyección natural y así $\overline{\Phi}$ es adjunto a izquierda de j^* . Definamos $j_! := \overline{\Phi}$ el adjunto a izquierda de j^* .

(5). Ahora veamos que $j_! : \mathcal{D}/\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ es fiel y pleno. Para esto, por Proposición 6(b), basta ver que la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}/\mathcal{E}} \rightarrow j^*j_!$ del par adjunto

$(j_!, j^*)$ es un isomorfismo.

Consideremos el isomorfismo funtorial

$$\Gamma_{X, j_!(X)} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(j_!(X), j_!(X)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, j^* j_!(X))$$

La unidad de la adjunción se puede definir como $\eta_X := \Gamma_{X, j_!(X)}(1_{j_!(X)})$ (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99). Recordemos que $j_!(X) = \overline{\Phi}(X) = X_0$ y $j^* j_!(X) = X_0$. Entonces, por construcción, tenemos que $\Gamma_{X, j_!(X)}(1_{j_!(X)})$ está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ u_X \swarrow & & \searrow 1 \\ X & & X_0. \end{array}$$

Como $u_X \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$, sabemos entonces que $\Gamma_{X, j_!(X)}(1_{j_!(X)}) := j^*(1_{X_0})j^*(u_X)^{-1} = j^*(u_X)^{-1}$ el cual claramente es un isomorfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} . Por lo tanto η es un isomorfismo y así, tenemos que $j_* := \overline{\Phi}$ es fiel y pleno.

(6). Construcción del adjunto a derecha de j^* . De la misma manera considerando la counidad $\varepsilon' : i_* i^! \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ del par adjunto $(i_*, i^!)$ para cada $X \in \mathcal{D}$ consideramos el siguiente triángulo distinguido en \mathcal{D}

$$i_* i^!(X) \xrightarrow{\varepsilon'_X} X \longrightarrow X_0 \longrightarrow \Sigma(i_* i^!(X)).$$

De la misma manera como se hizo antes, se puede definir functor triangulado $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ como $\Psi(X) := X_0$. Este functor triangulado induce un functor $\overline{\Psi} : \mathcal{D}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$ y se demuestra que $j_* := \overline{\Psi}$ es un adjunto derecho de j^* que es fiel y pleno.

(7). Prueba de que $\text{Ker}(j^*) = \mathcal{E} = \text{Im}(i_*)$. Finalmente, notemos que por la construcción del cociente de Verdier, se tiene que $\text{Ker}(j^*)$ es la menor subcategoría triangulada y gruesa que contiene a \mathcal{E} (ver Proposition 4.6.2 (3) en [11], en pág. 183). Por el inciso (b), sabemos que \mathcal{E} ya es gruesa y por lo tanto, tenemos que $\text{Ker}(j^*) = \mathcal{E} = \text{Im}(i_*)$. Por lo tanto, hemos completado i_* a un recollement. □

Observación 4. Notemos que el triángulo $X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_* i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0)$ de 12(c) es básicamente el primer triángulo del inciso (d) de la definición 2 de recollement.

El triángulo $i_* i^!(X) \xrightarrow{\varepsilon'_X} X \longrightarrow X_0 \longrightarrow \Sigma(i_* i^!(X))$ que se construye al final de la prueba del Teorema 12 es básicamente el segundo triángulo del inciso (d) de la definición 2 de recollement.

Observación 5. En el Teorema 12, dada la mitad izquierda de un recollement, completamos a un recollement. También, si se tiene el lado derecho de un recollement, este se puede completar a un recollement, este resultado se puede ver en [6, Theorem 1.1] en pág. 86. En [14, Theorem 2.4] en pág. 26 se enuncian las dos completaciones, pero sin demostraciones.

El siguiente resultado es importante y nos dá una relación de cierto tipo de adjunciones y la categoría de fracciones de una categoría. Recordemos a grandes rasgos que es la categoría de fracciones (para más detalles ver [11, Section 2.2] en pág. 164). Dada una categoría \mathcal{C} y un conjunto de morfismos S de \mathcal{C} , la **categoría de fracciones** de \mathcal{C} con respecto a S es una categoría $\mathcal{C}(S^{-1})$ junto con un functor canónico $Q_S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ que tiene las siguientes propiedades:

- (a) $Q_S(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}(S^{-1})$ para todo $s \in S$,
- (b) Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un functor tal que $F(s)$ es un isomorfismo para todo $s \in S$, entonces existe un único functor $\overline{F} : \mathcal{C}(S^{-1}) \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = \overline{F} \circ Q_S$.

Notemos que la categoría de fracciones es una generalización del concepto de localización en álgebra conmutativa.

PROPOSICIÓN 13. *Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un par de funtores y supongamos que F es adjunto a izquierda de G . Sea $\Sigma = \Sigma(F)$ el conjunto de morfismos σ de \mathcal{C} tal que $F(\sigma)$ es un isomorfismo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) G es fiel y pleno.
- (b) La counidad $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ del par adjunto (F, G) es un isomorfismo.
- (c) El funtor $\overline{F} : \mathcal{C}(\Sigma^{-1}) \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = \overline{F} \circ Q_{\Sigma}$ es una equivalencia.

Demostración. Ver [8, Proposition 1.3] en pág. 7, o también [11, Proposition 2.3.1] en pág. 165. \square

Observación 6. Tenemos el dual de la Proposición 13 (ver nota final de la pág. 8 en [8]). Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un par de funtores y supongamos que F es adjunto a izquierda de G . Sea $\Sigma = \Sigma(G)$ el conjunto de morfismos σ de \mathcal{D} tal que $G(\sigma)$ es un isomorfismo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) F es fiel y pleno.
- (b) La unidad $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ del par adjunto (F, G) es un isomorfismo.
- (c) El funtor $\overline{G} : \mathcal{D}(\Sigma^{-1}) \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $G = \overline{G} \circ Q_{\Sigma}$ es una equivalencia.

Para finalizar el artículo, daremos el siguiente teorema, el cual nos ayuda a visualizar ciertas subcategorías de un recollement (ver figura 2, el cual ilustra el Teorema 14).

TEOREMA 14. *Consideremos un recollement de categorías trianguladas*

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} \\ \mathcal{B} \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} \mathcal{C} \\ \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} \end{array}$$

Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) $\text{Im}(i_*)^{\perp} = \text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$
- (b) ${}^{\perp}\text{Im}(i_*) = \text{Im}(j_!) = \text{Ker}(i^*)$
- (c) $\mathcal{C} \simeq \text{Im}(i_*)^{\perp}$
- (d) $\mathcal{C} \simeq {}^{\perp}\text{Im}(i_*)$
- (e) $\mathcal{A} / {}^{\perp}\text{Im}(i_*) \simeq \mathcal{B}$
- (f) $\mathcal{A} / \text{Im}(i_*)^{\perp} \simeq \mathcal{B}$

Demostración. (a) Veamos primero que $\text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$. Por Lema 5(b), sabemos que $\text{Im}(j_*) \subseteq \text{Ker}(i^!)$. Ahora veamos que $\text{Ker}(i^!) \subseteq \text{Im}(j_*)$. Sea $A \in \mathcal{A}$ con $A \in \text{Ker}(i^!)$, por Definición 2(d) tenemos triángulo distinguido en \mathcal{A} :

$$i_! i^!(A) \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} j_* j^*(A) \longrightarrow i_! i^!(A)[1].$$

Como $A \in \text{Ker}(i^!)$, tenemos que $i_! i^!(A) = 0$ y por lo tanto, tenemos que α es un isomorfismo. De esta manera, $A \simeq j_* j^*(A) \in \text{Im}(j_*)$. Esto prueba que $\text{Ker}(i^!) \subseteq \text{Im}(j_*)$ y por lo tanto $\text{Ker}(i^!) = \text{Im}(j_*)$.

Ahora, probemos que $\text{Im}(i_*)^{\perp} = \text{Im}(j_*)$. Para esto, veamos que $\text{Im}(j_*) \subseteq \text{Im}(i_*)^{\perp}$. Sea $A' = j_*(C) \in \text{Im}(j_*)$ y $A = i_*(B) \in \text{Im}(i_*)$. Luego, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(B), j_*(C)) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^! j_*(C)) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, 0) = 0$. Por lo tanto, $A' \in \text{Im}(i_*)^{\perp}$.

Veamos que $\text{Im}(i_*)^{\perp} \subseteq \text{Im}(j_*)$. Sea $A \in \text{Im}(i_*)^{\perp}$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(B), A) = 0$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Por adjunción tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^!(A)) = 0$ para $B \in \mathcal{B}$. En particular, para $B = i^!(A)$ tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(i^!(A), i^!(A)) = 0$ y entonces $i^!(A) = 0$. Pero, ya vimos que $\text{Ker}(i^!) = \text{Im}(j_*)$, por lo tanto, tenemos que $A \in \text{Im}(j_*)$. Esto prueba que $\text{Im}(i_*)^{\perp} \subseteq \text{Im}(j_*)$ y así $\text{Im}(i_*)^{\perp} = \text{Im}(j_*)$.

- (b) Similar a (a).

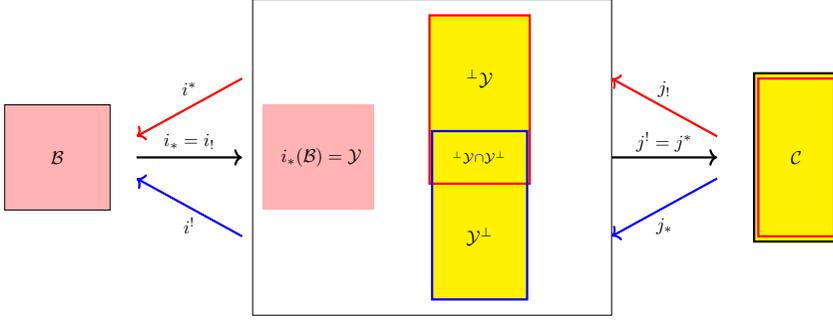


FIGURA 2. Descripción de ${}^\perp\text{Im}(i_*) = \text{Im}(j_!) = \text{Ker}(i^*)$ y $\text{Im}(i_*)^\perp = \text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$ (ver Teorema 14).

- (c) Como j_* es fiel y pleno, sabemos que j_* produce una equivalencia $j_* : \mathcal{C} \rightarrow \text{Im}(j_*)$. Pero por (a) tenemos que $\text{Im}(i_*)^\perp = \text{Im}(j_*)$. Esto prueba la equivalencia requerida.
- (d) Similar a (c).
- (e) Consideremos el funtor triangulado $i^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $S := S(\text{Ker}(i^*))$ (ver observación 2). Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{A} . Tenemos que $i^*(f)$ es isomorfismo si y sólo si $f \in S$. En efecto, completamos f a un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X)$$

Luego, tenemos un triángulo distinguido en \mathcal{B} :

$$i^*(X) \xrightarrow{i^*(f)} i^*(Y) \xrightarrow{i^*(g)} i^*(Z) \xrightarrow{i^*(h)} \Sigma(X)$$

Luego, tenemos que $i^*(f)$ es isomorfismo si y sólo si $i^*(Z) = 0$ y esto pasa si y sólo si $f \in S$. Por lo tanto, por Proposición 13, tenemos equivalencia de categorías

$$\mathcal{A}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}.$$

Pero por definición del cociente de Verdier, tenemos que $\mathcal{A}/S := \mathcal{A}[S^{-1}]$ (ver pág. 182 de [11]). Por lo tanto, tenemos equivalencia de categorías $\mathcal{A}/\text{Ker}(i^*) \simeq \mathcal{B}$.

- (f) Similar a (e), utilizando el resultado dual de la Proposición 13, (ver Observación 6).

□

Observación 7. En general, no es cierto que $\text{Im}(i_*)^\perp \cap {}^\perp\text{Im}(i_*) = \{0\}$. En efecto, se sabe que se tiene el siguiente recollement (ver [11] sección 4.14 en pág. 190)

$$\begin{array}{ccc}
 & i^* & j_! \\
 \swarrow & & \swarrow \\
 \text{K}_a(\text{Mod}(A)) & \xrightarrow{i_* = i_!} & \text{K}(\text{Mod}(A)) & \xrightarrow{j^! = j^*} & \text{D}(\text{Mod}(A)) \\
 \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow \\
 & i^! & j_* & &
 \end{array}$$

donde $\text{K}_a(\text{Mod}(A))$ es la subcategoría de $\text{K}(\text{Mod}(A))$ que consta de los complejos acíclicos. En este caso se tiene que $\text{Im}(i_*) = \text{K}_a(\text{Mod}(A))$ y se tiene lo siguiente (ver sección 4 de [1] en pág. 235):

- (a) Los objetos de $\text{K}_a(\text{Mod}(A))^\perp = \text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$ se llaman complejos K -inyectivos y

(b) Los objetos de ${}^{\perp}K_a(\text{Mod}(A)) = \text{Im}(j_i) = \text{Ker}(i^*)$ se llaman complejos K -proyectivos.

Recordemos que para dos complejos X^\bullet, Y^\bullet en $K(\text{Mod}(A))$ se tiene un complejo $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ y se tiene la fórmula (para detalles ver sección 14 en pág. 195 de [9])

$$H^i\left(\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)\right) = \text{Hom}_{K(\text{Mod}(A))}(X^\bullet, Y^\bullet[i]).$$

Notemos que un complejo Z^\bullet es acíclico si y sólo si $Z^\bullet[i]$ es acíclico. Luego, usando la fórmula de arriba, tenemos que

$$Y^\bullet \in K_a(\text{Mod}(A))^\perp \iff \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \text{ es acíclico para todo } X^\bullet \in K_a(\text{Mod}(A))$$

$$X^\bullet \in {}^{\perp}K_a(\text{Mod}(A)) \iff \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \text{ es acíclico para todo } Y^\bullet \in K_a(\text{Mod}(A)).$$

Por lo que la definición de complejo K -proyectivo y complejo K -inyectivo dada arriba, es equivalente a la definición original dada por N. Spaltenstein en [18] en pág. 127. Ahora bien, por [18, Proposition 1.2] en pág. 128, tenemos que si P es un A -módulo proyectivo, entonces $P[0]$ es un complejo K -proyectivo y también que si I es un A -módulo inyectivo, entonces $I[0]$ es un complejo K -inyectivo. Más generalmente, complejos de proyectivos acotados por arriba son complejos K -proyectivos y complejos de inyectivos acotado por abajo son complejos K -inyectivos (ver ejemplo 3.2 de [18] en pág. 132). Entonces, si M es un A -módulo que es proyectivo e inyectivo, tenemos que $M[0] \in K_a(\text{Mod}(A))^\perp \cap {}^{\perp}K_a(\text{Mod}(A))$ y $M[0] \neq 0 \in K(\text{Mod}(A))$. Al parecer, en general no hay una descripción de $\text{Im}(i_*)^\perp \cap {}^{\perp}\text{Im}(i_*)$ como en el caso abeliano; y tampoco hay un criterio para saber cuando $\text{Im}(i_*)^\perp \cap {}^{\perp}\text{Im}(i_*) = \{0\}$.

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo por las sugerencias dadas para mejorar este artículo.

REFERENCIAS

[1] L. Alonso Tarrío, A. Jeremías López and M. J. Souto Salorio. *Localization in categories of complexes and unbounded resolutions*, Canad. J. Math. 52 (2000), no. 2, 225-247

[2] M. Auslander. *Representation Theory of Artin Algebras I*. Comm. in Algebra 1(3), 177-268 (1974).

[3] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. *Faisceaux pervers (French)*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5-171.

[4] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. Vol. 1. Basic Category Theory*. Cambridge University Press, pp 345, (1994).

[5] E. Cline, B. Parshall, L. Scott. *Algebraic stratification in representation categories*. Journal of Algebra. Volume 117, Issue 2, pp. 504-521 (1988).

[6] E. Cline, B. Parshall, L. Scott. *Finite dimensional algebras and highest weight categories*. J. reine angew. Math. 391, 85-99, (1988).

[7] V. Franjou, T. Pirashvili. *Comparison of abelian categories recollements*. Documenta Math. 9, 41-56 (2004).

[8] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Springer- Verlag Berlin Heidelberg (1967).

[9] S. I. Gelfand, Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. Second Edition. Springer Monographs in Mathematics (2002).

[10] R. Gentle. *T.T.F. theories in Abelian categories*. Commun. Algebra 16, 877-908 (1996).

[11] T. Holm, P. Jorgensen, R. Rouquier. *Triangulated Categories*. USA Cambridge University Press (2010).

[12] J. P. May. *The Additivity of Traces in Triangulated Categories*. Advances in Mathematics 163, 34-73 (2001).

[13] A. Neeman. *Triangulated Categories*. Annals of Mathematics Studies, 148. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).

[14] B. Parshall, L.L. Scott. *Derived categories, quasi-hereditary algebras and algebraic groups*. Proc. of the Ottawa-Moosone Workshop in algebra (1987), Math. Lect. Note Series, Carleton University and Universite de Ottawa (1988).

[15] C. Psaroudakis. *Homological Theory of Recollements of Abelian Categories*. J. Algebra. Vol. 398, 63-110 (2014).

- [16] C. Psaroudakis, J. Vitoria. *Recollements of module categories*. J. Appl. Categor. Struct. 22, 579-593 (2014).
- [17] C. Psaroudakis. *A representation-theoretic approach to recollements of abelian categories*. Contemp. Math. of Amer. Math. Soc. Vol. 716, 67-154 (2018).
- [18] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*. Compositio Math. 65, no. 2, 121-154 (1988).
- [19] B. Stenstrom. *Rings of quotients*. Springer (1975).

Valente Santiago Vargas,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas.
Av. Universidad 3000
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México
e-mail: valente.santiago@ciencias.unam.mx