MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.14, No.1, 2023, páginas 101-112.
Recibido 10-05-2022. Aceptado 25-06-2023.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v14n1/fblanl

CONVERGENCIA PUNTUAL Y UNIFORME DE LAS SERIES DE FOURIER

FERNANDO BRAMBILA PAZ & LUIS ANDRÉS DÍAZ LEAL MERINO

RESUMEN. En este artículo de divulgación se exponen criterios de convergencia puntual y uniforme para las series de Fourier. Se trata el caso de las funciones que cumplen las condiciones de Dirichlet y el criterio de Dini. Este último se aplica a las funciones Hölder continuas. Finalmente se exponen ejemplos particulares.

1. INTRODUCCIÓN

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es integrable en $X \subset \mathbb{R}$, si sus partes real e imaginaria son Lebesgue-integrables. En tal caso, se define su integral mediante:

$$\int_X f(x)\,dx = \int_X u(x)\,dx + i\int_X v(x)\,dx,$$

donde u y v son las partes real e imaginaria de f, respectivamente. La función f es $L-$periódica si cumple:

$$f(x+L) = f(x),$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Sea $p \in [1,\infty)$. Se denotará por $\mathbb{T}^p(L)$ al conjunto de funciones $L-$periódicas tales que:

$$\int_0^L |f(x)|^p\,dx < \infty.$$

Es importante enunciar el siguiente teorema, el cual es bien conocido y puede encontrarse como ejercicio en [1].

TEOREMA 1. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es integrable en X, si y solo si la función $|f|$ es integrable en X. En tal caso:*

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \le \int_X |f(x)|\,dx.$$

Definición 2. Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Se define el $k-$ésimo coeficiente de Fourier, denotado $c_k(f)$, mediante la ecuación:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx. \tag{1}$$

La $n-$ésima *suma parcial de Fourier*, denotada $S_n(f)$, está definida por la siguiente fórmula:

$$S_n(f,x) = \sum_{j=-k}^{k} c_j(f)e^{ijx}. \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60J99.

Palabras clave. Serie de Fourier, coeficiente de Fourier, convergencia puntual, convergencia uniforme.

Las ecuaciones (1) y (2) contienen números complejos que no tienen sentido si la función es real. Una forma de evitar esto es definir:

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f),$$
$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2) se obtiene:

$$S_n\left(f,x\right) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\operatorname{sen}(kx)\right\}. \tag{3}$$

De la ecuación (1) se obtienen las siguientes identidades:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \tag{4}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx. \tag{5}$$

Por lo tanto la ecuación (3) no contiene números complejos si f es real.

TEOREMA 3. ***(Lema de Riemann-Lebesgue)*** *Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Entonces:*

$$\lim_k c_k(f) = 0.$$

.

De acuerdo al lema de Riemann-Lebesgue, la sucesión $c_k(f)$ converge a cero. La velocidad a la cual dicha cantidad converge está relacionada con la convergencia de las series de Fourier, como se verá en la siguiente sección. El propósito de la siguiente definición es introducir una clase de funciones cuyos coeficientes de Fourier convergen a una velocidad adecuada.

Definición 4. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es de *variación acotada* en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, si $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ es una partición del intervalo, entonces:

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq M.$$

Se denotará por $\mathcal{BV}\,[a,b]$ al conjunto de funciones de variación acotada en $[a,b]$.

Observación 1. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es de variación acotada en un intervalo $I = [a,b]$ si sus partes real e imaginaria lo son. Si $f \in \mathcal{BV}\,[a,b] \cap \mathcal{BV}\,[b,c]$, entonces es fácil verificar que $f \in \mathcal{BV}\,[a,c]$. Toda función de variación acotada en I es integrable y sus límites laterales existen en cada punto de I. Esto último es consecuencia del teorema de Jordan (sección 6.3 de [5]), el cual afirma que una función de variación acotada es la diferencia de dos funciones monótonas.

El siguiente conjunto de definiciones permite dar condiciones sencillas bajo las cuales una función resulta ser de variación acotada. Cabe destacar que la Definición 6 ya incluye una amplia familia de funciones descentes, por ejemplo, la función $x \mapsto \sqrt{x}$ es suave a pedazos en el intervalo $[0,1]$.

Definición 5. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es *absolutamente continua* en $I = [a,b]$ si tiene las siguientes propiedades:

1. f' existe para casi todo $x \in I$.
2. f' es integrable.
3. Se cumple la siguiente identidad:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Definición 6. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es *suave a pedazos* en $I = [a, b]$ si tiene las siguientes propiedades:

1. Existe una partición $a = t_0 < ... < t_n < b$ tal que f es diferenciable con continuidad en cada intervalo (a_k, a_{k+1}).
2. f posee límites laterales en cada punto de I.
3. La función f' es integrable en I.

Definición 7. Una función f es monótona a pedazos en I, si existe una partición $a = t_0 < ... < t_n = b$ del intervalo I tal que f es monótona en cada intervalo $[a_k, a_{k+1})$.

A continuación se da un conjunto de condiciones que aseguran que f sea de variación acotada.

Teorema 8. *Supóngase que una función cumple alguna de las siguientes condiciones en el intervalo $I = [a, b]$:*

1. *Es absolutamente continua.*
2. *Es suave a pedazos.*
3. *Es monótona.*
4. *Es monótona a pedazos.*

Entonces es de variación acotada en I.

Los incisos 1 y 3 pueden consultarse en [5]. Los otros incisos son consecuencia de los anteriores.

Definición 9. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-periódica, satisface las *condiciones de Dirichlet* en $I = [0, 2\pi]$ si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. f es de variación acotada en I.
2. f tiene una cantidad finita de discontinuidades infinitas[1] en I. Cuando se excluyen vecindades arbitrariamente pequeñas de estas discontinuidades, la función es de variación acotada en cada uno de los intervalos restantes. Además se tiene:
$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Teorema 10. *Supóngase que f satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo $[0, 2\pi]$. Entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:*
$$c_k(f) \leq \frac{C}{|k|},$$
si $k \neq 0$.

Demostración. La demostración para $f \in \mathcal{BV}\,[0, 2\pi]$ puede consultarse en [6]. La otra parte es una consecuencia del caso anterior. □

Definición 11. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *Hölder continua* si existen $\alpha \in (0, 1]$ y $C \in \mathbb{R}$ tales que:
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

Observación 2. Con $\alpha = 1$ se obtienen las funciones Lipschitz-continuas. Obsévese que toda función Hölder continua es uniformemente continua y por lo tanto, es continua.

[1]Una función f tiene una discontinuidad infinita en t_0 si los límites $f(t_0^+)$ y $f(t_0^-)$ son ambos ∞, o bien $-\infty$.

2. Convergencia puntual y uniforme

La convergencia puntual de las series de Fourier es un tema delicado. Se sabe por ejemplo, que si $1 < p < \infty$ y $f \in \mathbb{T}^p(2\pi)$, entonces se puede asegurar la convergencia puntual casi donde quiera. Esta afirmación es conocida como el **teorema de Carleson-Hunt** (Teorema 4.4 de [9]). Para $p = 1$ no puede decirse nada: existen funciones integrables cuya serie de Fourier diverge casi donde quiera. El ejemplo clásico se debe a Kolmogorov [10]. La continuidad tampoco asegura la convergencia: existen funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en una cantidad numerable de puntos (Ejercicio 2 de la sección 2, capítulo 2 de [7]).

En esta sección se demostrará un resultado que asegura la convergencia puntual de las series de Fourier para funciones de variación acotada. También se demuestra el criterio de Dini, y este último se usará para demostrar la convergencia uniforme en el caso de funciones Hölder continuas.

Primero se demostrará el teorema de Féjer, el cual implica que la suma Césaro de $S_n(f,t)$ converge a $f(t)$ bajo condiciones muy débiles. En principio, y debido a que dicha suma es computacionalmente ineficiente, el resultado no parece ser útil en la práctica. Sin embargo, esta suma tiene la ventaja de no presentar el fenómeno de Gibbs. La demostración de este sorprendente resultado está contenida en [8]. Una introducción más intuitiva al fenómeno de Gibbs puede consultarse en internet, ver por ejemplo [4].

Definición 12. Se define el *kérnel de Fejér*, denotado κ_n, mediante la ecuación:

$$\kappa_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}. \tag{6}$$

Para $n \geq 2$ el kérnel de Fejér puede expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$\kappa_{n-1}(t) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 \tag{7}$$

Con esta expresión a la mano, el siguiente teorema es muy fácil de demostrar.

Teorema 13. *El kérnel de Fejér tiene las siguientes propiedades:*

1. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, κ_n es no negativa e integrable:*
$$\int_0^{2\pi} \kappa_n(t)\ dt = 1.$$
2. *Para toda $0 < \delta < \pi$:*
$$\lim_n \int_\delta^{2\pi-\delta} \kappa_n(t)\ dt = 0.$$
3. *Para toda $0 < \delta < \pi$:*
$$\lim_n \sup_{\delta < t < 2\pi-\delta} \kappa_n(t) = 0.$$
4. *Para toda $t \in \mathbb{R}$:*
$$\kappa_n(t) = \kappa_n(-t).$$

Demostración. Para el inciso 1 basta integrar la ecuación (6), notando que κ_n es no negativa por la ecuación (7). Los demás incisos se siguen de (7). □

Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Se define $\sigma_n(f)$ mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_n(f,t) = \int_0^{2\pi} f(t-x)\kappa_n(x)\ dx. \tag{8}$$

Como f es 2π-periódica, es claro que $\sigma_n(f)$ también es 2π-periódica para toda $n \in \mathbb{N}$. El siguiente teorema es conocido como el **teorema de Fejér**[2].

TEOREMA 14. *([7], [8]) Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Supóngase que $t \in \mathbb{R}$ es tal que:*

$$\ell(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}$$

exite y es finito. Entonces:

$$\lim_n \sigma_n(f,t) = \ell(t).$$

El resultado también es válido si $\ell(t) = \infty$ o $\ell(t) = -\infty$. En particular, si f es continua en t, entonces $\sigma_n(f,t) \to f(t)$ si $n \to \infty$. Más aún, si f es continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, entonces $\sigma_n(f)$ converge uniformemente a f en dicho intervalo.

Demostración. Primero se supondrá que $\ell(t) \in \mathbb{R}$, el caso en que $\ell(t) \in \{-\infty, \infty\}$ es muy similar como se verá despuás. Del inciso 1, Teorema 13 se tiene:

$$\ell(t) = \int_0^{2\pi} \kappa_n(u)\ell(t)\, du.$$

Por lo tanto:

$$\sigma_n(f,t) - \ell(t) = \int_0^{2\pi} \kappa_n(u)[f(t-u) - \ell(t)]\, du.$$

El integrando es una fución 2π-periódica, lo cual permite cambiar el intervalo de integración por $(-\delta, 2\pi - \delta)$:

$$\sigma_n(f,t) - \ell(t) = \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} \kappa_n(u)[f(t-u) - \ell(t)]\, du. \tag{9}$$

Si $0 < \delta < \pi$, entonces la integral en la ecuación anterior es igual a la suma de las integrales sobre los intervalos $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$, (δ, π) y $(\pi, 2\pi - \delta)$. Usando el inciso 4 del Teorema 13 y realizando el cambio de variable $u \mapsto -u$ se verifica que:

$$\int_{-\delta}^{0} \kappa_n(u)[f(t-u) - \ell(t)]\, du = \int_0^{\delta} \kappa_n(u)[f(t+u) - \ell(t)]\, du. \tag{10}$$

Mediante un argumento similar se obtiene:

$$\int_{\pi}^{2\pi-\delta} \kappa_n(u)[f(t-u) - \ell(t)]\, du = \int_{\delta}^{\pi} \kappa_n(u)[f(t+u) - \ell(t)]\, du. \tag{11}$$

Insertando (10) y (11) en (9):

$$\sigma_n(f,t) - \ell(t) = \int_0^{\delta} g_n(t,u)\, du + \int_{\delta}^{\pi} g_n(t,u)\, du, \tag{12}$$

donde:

$$g_n(t,u) = \kappa_n(u)\left[f(t+u) + f(t-u) - 2\ell(t)\right].$$

Ahora bien, dado $\epsilon > 0$, por hipótesis existe $\pi > \delta > 0$ tal que:

$$|u| < \delta \Rightarrow |f(t+u) + f(t-u) - 2\ell(t)| < \epsilon. \tag{13}$$

Multiplicando ambos lados por κ_n e integrando desde 0 hasta δ se obtiene:

$$\int_0^{\delta} |g_n(t,u)|\, du < \epsilon. \tag{14}$$

Como $\delta < \pi$, usando el inciso 3 del Teorema 13 se deduce que para n suficientemente grande:

$$\sup_{\delta < u < 2\pi - \delta} \kappa_n(u) < \epsilon.$$

[2]El teorema sigue siendo válido si κ_n se sustituye por cualquier sucesión $\gamma_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cumpla el Teorema 13.

De lo anterior se deduce que:

$$\int_{\delta}^{\pi} |g_n(t,u)|\,du < \epsilon R_t, \tag{15}$$

donde:

$$R_t = \int_0^{2\pi} |f(u) - 2\ell(t)|\,du.$$

Insertando (14) y (15) en (12) se obtiene:

$$|\sigma_n(f,t) - \ell(t)| < \epsilon + \epsilon R_t,$$

lo cual completa la prueba.

Si f es continua en un intervalo cerrado I, entonces es uniformemente continua en dicho intervalo. Por lo tanto, puede elegirse $0 < \delta < \pi$ tal que (13) es válida para toda $t \in I$. También nótese que R_t es acotada en I ya que, en este caso, f es continua en I. El resto de la prueba es idéntica.

Finalmente, si $\ell(t) = \infty$, en la demostración se sustituye $\ell(t)$ por $\frac{5}{2}M > 0$, excepto que (13) se expresa de la siguiente forma:

$$|u| < \delta \Rightarrow f(t+u) + f(t-u) - 2M \geq \frac{1}{2}M.$$

Se multiplica ambos lados por $\kappa_n(u)$ y se integra:

$$\int_0^{\delta} g_n(t,u)\ du \geq \frac{1}{2}M \int_0^{\delta} \kappa_n(u)\ du.$$

De acuerdo a los incisos 1 y 2 del Teorema 13, el lado derecho de esta desigualdad converge a M. La otra integral en (12) converge a cero por el mismo argumento de antes. □

Observación 3. Puede demostrarse usando las ecuaciones (6) y (8) la siguiente identidad:

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n\left(f\right). \tag{16}$$

En otras palabras, la sucesión $\sigma_n(f)$ es la suma Césaro de las sumas parciales $S_n\left(f\right)$, o bien, el promedio de $S_n\left(f\right)$.

El siguiente teorema da condiciones que garantizan la convergencia de una serie de Fourier.

Teorema 15. *([7]) Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$ y supóngase que para $|k|$ suficientemente grande, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$c_k(f) \leq \frac{C}{|k|}.$$

Entonces $S_n\left(f,t\right)$ converge al mismo límite que $\sigma_n(f,t)$, siempre que esta última sucesión tenga un límite. En particular, si f es continua en t, entonces $S_n\left(f,t\right)$ converge a $f(t)$. Más aun, si $\sigma_n(f)$ converge uniformemente en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, entonces $S_n\left(f\right)$ converge uniformemente a f en dicho intervalo.

Demostración. Usando la hipótesis se tiene la siguiente serie de desigualdades:

$$\begin{aligned}\sum_{n<|k|\leq\lfloor\lambda n\rfloor} |c_k(f)| &\leq 2C \sum_{n<k\leq\lfloor\lambda n\rfloor} \frac{1}{k}\\ &\leq 2C \int_n^{\lambda n} \frac{1}{x}\ dx\\ &= 2C\log\lambda\end{aligned}$$

para alguna $C > 0$ y n suficientemente grande. Haciendo $\lambda \to 1$, se concluye que para toda $\epsilon > 0$, existen $\lambda > 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\sum_{n<k\leq\lfloor\lambda n\rfloor} |c_k(f)| < \epsilon, \tag{17}$$

para toda $n \geq N$.

Ahora bien, sea $\epsilon > 0$ y sean $\lambda > 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que se cumple (17). La siguiente identidad puede deducirse directamente de la Definición 12 si $n \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande (de forma que $\lfloor\lambda n\rfloor > n$):

$$S_n(f,t) = \frac{\lfloor\lambda n\rfloor + 1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\left(\sigma_{\lfloor\lambda n\rfloor}(f,t) - \gamma_n(t)\right) - \frac{n+1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\sigma_n(f,t), \tag{18}$$

donde

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n<|j|\leq\lfloor\lambda n\rfloor}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor + 1}\right)c_j(f)e^{ijt}.$$

Supóngase que $\sigma_n(f,t)$ converge a $\ell(t)$. Nótese que si $n \to \infty$, entonces:

$$\frac{\lfloor\lambda n\rfloor + 1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\sigma_{\lfloor\lambda n\rfloor}(f,t) - \frac{n+1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\sigma_n(f,t) \to \frac{\lambda}{\lambda - 1}\ell(t) - \frac{1}{\lambda - 1}\ell(t) = \ell(t).$$

Por lo tanto, basta verificar que para valores grandes de n:

$$\frac{\lfloor\lambda n\rfloor + 1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}|\gamma_n(t)| < \epsilon. \tag{19}$$

Esto implicará que $S_n(f,t) \to \ell(t)$ debido a la ecuación (18). Para probar (19) nótese que:

$$\begin{aligned}
\frac{\lfloor\lambda n\rfloor + 1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}|\gamma_n(t)| &= \frac{1}{2\pi}\frac{\lfloor\lambda n\rfloor + 1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\left|\sum_{n<|j|\leq\lfloor\lambda n\rfloor}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor + 1}\right)c_j(f)e^{ijt}\right| \\
&\leq \sum_{n<|j|\leq\lfloor\lambda n\rfloor}\left|\frac{\lfloor\lambda n\rfloor + 1 - |j|}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\right||c_j(f)| \\
&\leq \sum_{n<|j|\leq\lfloor\lambda n\rfloor}|c_j(f)| < \epsilon,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a (17).

Finalmente, si $\sigma_n(f)$ converge uniformemente en un intervalo cerrado I, entonces $S_n(f)$ también converge uniformemente en dicho intervalo, pues la desigualdad (19) no depende de t.

□

Si $f \in \mathcal{BV}[0,2\pi]$ es 2π-periódica, entonces de la Observación 1 se extrae que $f \in \mathbb{T}(2\pi)$, y además:

$$\ell(t) = \lim_{h\to0^+}\frac{f(t-h)+f(t+h)}{2},$$

existe y es finito para toda $t \in [0,2\pi]$. Estas son precisamente las hipótesis del Teorema de Féjer. Juntando lo anterior con el Teorema 10 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 16. *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función 2π-periódica que satisface las condiciones de Dirichlet en $[0,2\pi]$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathbb{T}(2\pi)$ y se tiene:*

$$\lim_n S_n(f,t) = \lim_{h\to0^+}\frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}.$$

En particular, si f es continua en t, entonces la serie de Fourier de f converge a $f(t)$. Si además f es continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, entonces su serie de Fourier converge uniformemente en dicho intervalo.

El siguiente teorema es conocido como el **criterio de Dini**.

Teorema 17. *([7], [8]) Sean $f \in \mathbb{T}(2\pi)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \right| dt < \infty.$$

Entonces:

$$\lim_n S_n(f, t_0) = f(t_0).$$

Demostración. Se supondrá que que $t_0 = f(t_0) = 0$, el caso general se sigue de esto. Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} &= e^{-int} \sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)t} \\ &= e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} \\ &= e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)t}{\operatorname{sen} t/2}, \end{aligned}$$

de donde:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)t}{\operatorname{sen} t/2}. \tag{20}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}\, dt. \end{aligned}$$

Insertando (20) en la ecuación anterior:

$$S_n(f, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)\cos(t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}(nt)\, dt. \tag{21}$$

La hipótesis implica que la función:

$$t \mapsto \frac{f(t)\cos(t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)},$$

es integrable en $(0, 2\pi)$. Por lo tanto, el teorema de Riemann-Lebesgue (Teorema 3) implica que las integrales del lado derecho en la ecuación (21) tienden a cero si $n \to \infty$. □

El criterio de Dini puede aplicarse a las funciones Hölder continuas para demostrar la convergencia puntual. Con un poco de esfuerzo adicional se obtiene un resultado más fuerte.

Teorema 18. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica y Hölder continua en el intervalo $[0, 2\pi]$. Entonces $S_n(f)$ converge uniformemente a f.*

Demostración. La prueba requiere una definición. Sea $I = [a, b]$. Una sucesión de funciones $g_n : I \to \mathbb{R}$ es uniformemente equicontinua, si para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in I$:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| < \epsilon,$$

para toda n. Un corolario del Teorema de Arzelà-Ascoli afirma que, si una sucesión $g_n : I \to \mathbb{R}$ de funciones continuas converge puntualmente a una función f, y dicha sucesión es uniformemente equicontinua[3], entonces f es continua y g_n converge uniformemente a f (ver el Ejercicio 7.35 de [11]).

Ahora bien, se define la siguiente sucesión:

$$g_n(x) = f(x) - S_n\left(f, x\right).$$

El criterio de Dini (Teorema 17) implica que g_n converge puntualmente a cero. Se probará que la sucesión g_n es uniformemente equicontinua, y esto completará la prueba de acuerdo al párrafo anterior. Para la prueba se define:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Se reescribe la $n-$ésima suma parcial de Fourier de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_n\left(f, x\right) &= \sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku}\, du\, e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)} \right) du, \end{aligned}$$

de donde:

$$S_n\left(f, x\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) D_n(x-u)\, du.$$

Al realizar el cambio de variable $u = -z$ en la ecuación anterior y notando que el integrando es una función 2π-periódica, se obtiene:

$$S_n\left(f, x\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u)\, du.$$

Aplicando la ecuación anterior, se deduce que:

$$|g_n(x) - g_n(y)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)[f(x+u) - f(x) + f(y+u) - f(y)]\, du. \tag{22}$$

Además nótese que, como f es Hölder continua, existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$|\{f(x+u) - f(x)\} + \{f(y+u) - f(y)\}| \leq C_1 |u|^\alpha, \tag{23}$$

$$|\{f(x+u) - f(y+u)\} + \{f(x) - f(y)\}| \leq C_2 |x-y|^\alpha, \tag{24}$$

para cualesquiera $x, y, u \in \mathbb{R}$. Finalmente, puede elegirse $C_3 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|\operatorname{sen}(u/2)| \geq C_3 |u|,$$

para toda $u \in [-\pi, \pi]$. Juntando con la ecuación (20) se obtiene la siguiente cota superior:

$$|D_n(u)| \leq \frac{C_3}{|u|}. \tag{25}$$

Aplicando las desigualdades (23), (24) y (25) en la ecuación (22):

$$2\pi |g_n(x) - g_n(y)| \leq C_1' \int_{|u|<|x-y|} |u|^{\alpha-1}\, du + C_2' |x-y|^\alpha \int_{|x-y|<u<\pi} \frac{C_4}{u}\, du. \tag{26}$$

[3]De hecho, basta pedir que la sucesión sea equicontinua, lo cual es una condición más débil.

Como $u \mapsto u^{\alpha-1}$ es integrable en cualquier intervalo $(-r, r)$, la primera integral del lado derecho en la ecuación (26) converge a cero si $|x-y| \to 0$. Para la segunda integral se tiene:

$$|x-y|^\alpha \int_{|x-y|<u<\pi} \frac{1}{u}\, du = |x-y|^\alpha \left(\log \pi - \log|x-y|\right).$$

Dado que el lado derecho converge a cero si $|x-y| \to 0$, la cantidad en el lado izquierdo de (26) converge a cero si $|x-y| \to 0$, independientemente de n. Esto concluye la demostración. $\square$

3. Ejemplos y aplicaciones.

La convergencia de las series de Fourier juega un papel importante en muchas áreas de la ciencia. Un ejemplo sencillo consiste en buscar una solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x),$$

cuando $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. La técnica consiste en utilizar la ecuación para encontrar los coeficientes de Fourier de y. Esta idea puede explorarse con más profundidad en [3]. El autor utiliza las series de Foruier para resolver la ecuación de calor. En el mismo texto se expone otra aplicación interesante, el cálculo de sumas infinitas como la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Algunas áreas aplicadas utilizan las ideas expuestas anteriormente. En el análisis de circuitos eléctricos se utilizan series de Fourier cuando el voltaje de un circuito eléctrico no es sinoidal. En [2] se da una excelente exposición del tema.

Esta sección se concluye con algunos ejemplos sencillos que exponen la utilidad de los teoremas. Se invita al lector a graficar las sumas parciales junto a la función original, y prestar atención al fenómeno de Gibbs. Considérese tmabién graficar las sumas de Césaro.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función 2π-periódica definida en el intervalo $I = (0, 2\pi)$ mediante la siguiente fórmula:

$$f(x) = \log\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right),$$

y cero en cualquier otro caso. La función f es diferenciable con continuidad en cada intervalo compacto contenido en I. Tiene discontinuidades infinitas en $x = 0, 2\pi$. Además es integrable en I, y se tiene:

$$a_0(f) = 0.$$

Por lo tanto f satisface las condiciones de Dirichlet en $[0, 2\pi]$. También, dado que f es una función par:

$$b_k(f) = 0.$$

Para calcular $a_k(f)$, $k \geq 1$, defínase:

$$I_k = \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \operatorname{sen}(kt)\; dt.$$

Usando integración por partes y aprovechando la paridad de f, se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\; dt = -\frac{1}{k} I_k. \tag{27}$$

Ahora bien, tomando la parte real de la ecuación (20):

$$1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jt) = \operatorname{sen}(kt)\cot\frac{t}{2} + \cos(kt).$$

Integrando ambos lados desde 0 hasta π se obtiene:

$$I_k = \pi + \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^{\pi} \cos(jt)\ dt - \int_0^{\pi} \cos(kt)\ dt = \pi.$$

Insertando en (27):

$$a_k(f) = -\frac{1}{k}.$$

Por lo tanto, el Teorema **??** implica que:

$$-\log\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k},$$

para toda $x \in [0, 2\pi]$. Algunos valores interesantes se obtienen sustituyendo $x = \pi, 1$ en la igualdad anterior:

$$\log(2) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

$$\log\left(2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k}.$$

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función 2π-periódica dada por:

$$f(x) = \frac{x - \pi}{2},$$

para $x \in [0, 2\pi)$. Entonces f es de variación acotada en $[0, 2\pi]$. Al encontrar los coeficientes de Fourier de f, se obtiene:

$$\frac{x - \pi}{2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k},$$

para toda $x \in (0, 2\pi)$.

Agradecimientos. Los autores expresan su gratitud al árbitro anónimo y al comité editorial de la revista.

Referencias

[1] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
[2] Bolyestad, R. L., *Introductory circuit analysis*. Pearson Education, treceava edición.
[3] Dym, H., McKean, H. L., *Fourier series and integrals*. Academic Press, 1972.
[4] Weisstein, E. W., *Gibbs phenomenon*. From Mathworld–A Wolfram Web Resource. http//mathworld.wolfram.com/GibbsPhenomenon.html
[5] Royden, H. L., Fitzpatrick, P., M. *Real analysis*. China Machine Press, cuarta edición.
[6] Tabileson, M. *Fourier coefficients of functions of bounded variation*. Proc. American Mathematical Society, no. 18, 766, 1967.
[7] Katznelson, Y. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 2004.
[8] Carslaw, H. S. *Introduction to the theory of Fourier series and integrals*. Dover Publications, Inc., tercera edición.
[9] Jϕrsboe, O. G., Mejlbro, L. *The Carleson-Hunt theorem on Fourier series*. Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 1982.
[10] Kolmogorov A. *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*. Fundamenta Mathematicae, no. 4, 324–328, 1922.
[11] Clapp M. *Análisis matemático*. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2015.

Fernando Brambila Paz
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, Coyoacán,
C.P. 04510, Ciudad de México, México.
e-mail: `fernandobrambila@gmail.com`

Luis Andrés Díaz Leal Merino
Sección Ríos, Col. Jardines de Morelos
Ecatepec, C.P. 55070, Estado de México
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0405-6998
e-mail: doomsday.dlm@gmail.com