MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.14, No.1, páginas 113-131.
Recibido 02-11-2022. Aceptado 20-06-2023.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v14n1/verhlp

CEROS DE POLINOMIOS ALEATORIOS TRIGONOMÉTRICOS

VERANIA HERNÁNDEZ ORGAZ & LILIANA PERALTA

RESUMEN. En este trabajo damos una deducción detallada de la fórmula de Kac-Rice y la utilizamos para calcular el valor esperado del número de raíces, N, en un intervalo finito de cierta clase de polinomios aleatorios trigonométricos. Además, probamos la regularidad en L^p para $p \geq 1$ de la variable aleatoria N.

1. Introducción

El comportamiento de las raíces de polinomios aleatorios es un área de investigación que ha sido desarrollada desde mediados del siglo pasado (vea por ejemplo [12], [13]). Este tema es relevante para la teoría de Probabilidad y otras áreas de la ciencia por encontrarse en la intersección de varias ramas de la Matemática y la Física. Dentro de las clases de los polinomios aleatorios, es de particular interés la de los trigonométricos debido a sus aplicaciones en Física Nuclear [17]. En 1966 Duannage [7] probó que el número medio de los ceros reales de polinomios trigonométricos con coeficientes gaussianos es asintóticamente proporcional al grado del polinomio. A partir de este trabajo muchos resultados han sido desarrollados hasta nuestros días (el lector interesado puede consultar por ejemplo [8], [9], [1]).

El objetivo principal de este trabajo es probar la regularidad en L^p, para $p \geq 1$, de los ceros de polinomios aleatorios trigonométricos sobre el intervalo $[0,1]$. Además, deduciremos la fórmula de Kac-Rice y la aplicaremos al caso de polinomios aleatorios trigonométricos.

Para lograr nuestro objetivo, en la Sección 2.1 introduciremos la fórmula de Kac, la cual cuenta el número de raíces de determinadas funciones deterministas de variable real. Posteriormente, en la Sección 2.2, extenderemos la fórmula de Kac al caso estocástico y la aplicaremos en la Sección 3.1 para encontrar el valor esperado del número de ceros, en el intervalo $[0,1]$, de los polinomios aleatorios de la forma

$$F_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \operatorname{sen}\left(\frac{jt}{n}\right) + b_j \cos\left(\frac{jt}{n}\right) \right), \tag{1}$$

donde $\{a_j\}_{1\leq j\leq n}$ y $\{b_j\}_{1\leq j\leq n}$ son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Finalmente, en la Sección 3.2 probaremos la regularidad en L^p de la raíces de los polinomios definidos en (1).

2. Fórmula de Kac-Rice

2.1. Fórmula de conteo de Kac. Mark Kac (1914-1984), fue un matemático polaco que tuvo varias contribuciones en matemáticas, entre ellas, su fórmula de conteo para el número de raíces reales de funciones que cumplen determinadas características, las cuales llamaremos *funciones convenientes.*

Definición 1. Una función $f : A \subset \mathbb{R}$ de clase $C^1(A,\mathbb{R})$, es decir, continuamente diferenciable sobre A, se dice que es conveniente si satisface las siguientes condiciones:

1. Todas sus raíces son no degeneradas, es decir, $\{t \in A : f(t) = 0 \text{ y } f'(t) = 0\} = \emptyset$.
2. Si $A = [a,b]$, $f(a)f(b) \neq 0$.
3. Si $A = \mathbb{R}$, f es una función propia, es decir, la imagen inversa de compactos es compacta.

De aquí en adelante, cuando hacemos referencia a una función conveniente, su dominio determina, por supuesto, las hipótesis que esta cumpla, es decir, si consideramos una función conveniente en un intervalo compacto entenderemos que en los extremos de dicho intervalo no deberá anularse y sus ceros serán no degenerados, por otra parte, si la consideramos en el conjunto de todos los reales, esta función deberá cumplir la característica de ser propia además de no tener ceros degenerados.

Ejemplos 1. Se muestran algunas funciones que ejemplifican la Definición 1.

1. Las rectas $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$, son funciones convenientes tanto en un intervalo cerrado como en los reales, pues f no tiene puntos donde su derivada se anule y tiene por raíz $x_0 = \frac{-b}{m}$. Si $m = 0$ debemos hacer $b \neq 0$ para que f conserve la característica de ser conveniente.
2. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ definida sobre el conjunto de los números reales no es una función conveniente, pues el conjunto $\{0\}$ es compacto con la topología usual y $f^{-1}(\{0\}) = \{x = n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ no lo es. Sin embargo, podemos restringir a f en un intervalo cerrado que contenga un número finito de raíces y estas no están en los extremos del intervalo, en tal caso, f sí sería una función conveniente en dicho intervalo.
3. La función f definida para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ como $f(x) = x^n$ no es una función conveniente si consideramos el conjunto de los números reales o un intervalo cerrado que contenga al cero en el dominio de la función, puesto que $x = 0$ será un cero degenerado, ya que $f'(x) = nx^{n-1}$.

En la Figura 1 se muestran las gráficas de dos funciones convenientes.

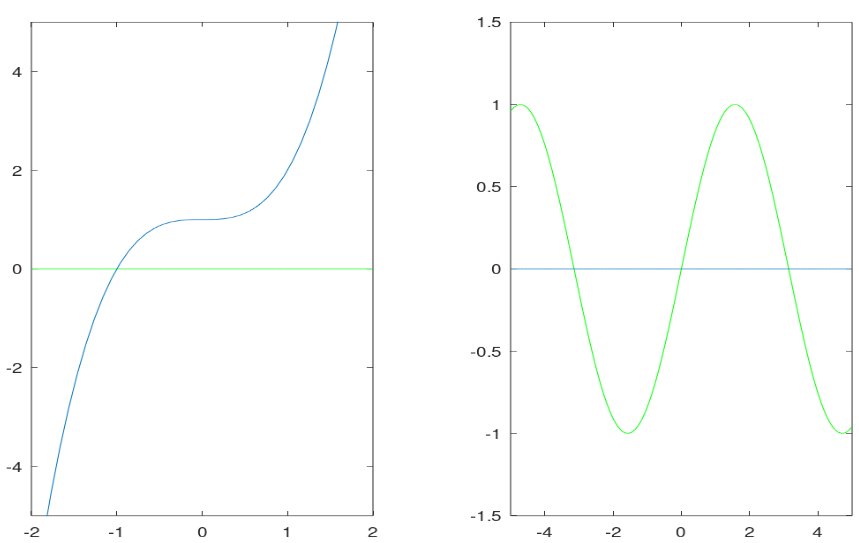

Figura 1. El gráfico de la izquierda representa un polinomio de la forma $p(x) = x^3 + 1$ y el de la derecha es la función $f(x) = \sin(x)$, ambas son funciones convenientes en el dominio que se presenta.

Consideremos la siguiente definición.

Definición 2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Definimos

$$N(f, A) = |\{t \in A : f(t) = 0\}|, \tag{2}$$

donde $|B|$ se refiere a la cardinalidad del conjunto B. De esta manera $N(f, A)$ representa el número de raíces de f en el subconjunto A.

La proposición que presentamos a continuación es conocida como la fórmula de Kac (vea [14]). Hemos incluido un resultado obtenido en [6] en el primer punto de la proposición.

Proposición 3.

I. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función conveniente, entonces*

$$N(f, [a, b]) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{|f(t)|<\varepsilon} |f'(t)| dt.$$

Más aún, para $0 < \varepsilon < \min\left(|f(a)|, |f(b)|, \min_{t\in[a,b]} |f(t)| + |f'(t)|\right)$, se tiene

$$N(f, [a, b]) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{|f(t)|<\varepsilon} |f'(t)| dt.$$

II. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función conveniente, entonces se satisface que*

$$N(f, \mathbb{R}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} I_{|f(t)|<\varepsilon} |f'(t)| dt.$$

III. *Sea $A \in \{[a, b], \mathbb{R}\}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función conveniente con $v < \infty$ raíces y $c < \infty$ puntos críticos. Entonces para $\varepsilon > 0$, se cumple*

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_A I_{\{t\in A:|f(t)|<\varepsilon\}} |f'(t)| dt \leq v + 2c.$$

Demostración.

I. Consideremos la función $g(t) = |f(t)| + |f'(t)|$ que es una función continua sobre un conjunto compacto, entonces alcanza un valor mínimo, es decir, existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $|f(t_0)| + |f'(t_0)| = \min_{t\in[a,b]} |f(t)| + |f'(t)| > 0$, este mínimo es positivo porque las raíces de f no son degeneradas. Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < |f(t_0)| + |f'(t_0)|$. Vamos a demostrar ahora que $N(f, [a, b]) < \infty$, procedemos por contradicción como en [6]. Supongamos que existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ tal que $t_n < t_m$ si $n < m$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y $f(t_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Dado que $[a, b]$ es un compacto, siempre podemos extraer una subsucesión convergente de la sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sea esta $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge a $T \in [a, b]$, para simplificar la notación, definimos $r_k := t_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema del Valor Medio, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $s_k \in (r_k, r_{k+1})$ tal que:

$$f'(s_k) = \frac{f(r_{k+1}) - f(r_k)}{r_{k+1} - r_k} = 0.$$

Como $s_k \in (r_k, r_{k+1})$ y $\lim_{k\to\infty} r_k = T$ entonces $\lim_{k\to\infty} s_k = T$, la continuidad de las funciones f y f' implica que $f(T) = f'(T) = 0$, de esta manera, $T \in \{t \in [a, b] : f(t) = 0 \text{ y } f'(t) = 0\}$, lo cual es una contradicción. Se sigue entonces que $N(f, [a, b]) < \infty$. Notemos la validez de la fórmula de Kac si $N(f, [a, b]) = 0$, en este caso $f(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ entonces $|f(t)| > 0, \forall t \in [a, b]$, por la continuidad de f, se tiene que el valor mínimo de la función es también mayor que 0, sea este $|f(s_0)| = \min_{t\in[a,b]} |f(t)| > 0$, para $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < |f(s_0)|$ se sigue que $\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\} = \emptyset$ por lo que $\int_a^b I_{\{t\in[a,b]:|f(t)|<\varepsilon\}} |f'(t)| dt = 0$, y así

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{\{t\in[a,b]:|f(t)|<\varepsilon\}} |f'(t)| dt = 0.$$

Supongamos ahora que f tiene al menos una raíz en $[a, b]$, consideramos entonces $\{s_1, \ldots, s_n\}$ el conjunto de raíces de f en $[a, b]$, tal que $s_k < s_{k+1}$ con $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ y sea $\varepsilon < \min\left(|f(a)|, |f(b)|, \frac{1}{2} \min_{t\in[a,b]} |f(t)| + |f'(t)|\right)$. Observemos que la componente conexa de s_k en el conjunto $\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\}$ es un intervalo de la forma (a_k, b_k) por la continuidad de la función, de manera que las componentes de s_k y s_{k+1} son disjuntas entre sí, si se intersectaran, tendrémos que dicha intersección es un intervalo de la forma (a_{k+1}, b_k), que contiene a ambas raíces, de ser así, $|f|$ restringida a este, es continuamente diferenciable, por el Teorema del Valor Medio, existe un punto crítico en la componente conexa, lo cual es una contradicción a la elección de ε, pues al elegir $\varepsilon < \min_{t\in[a,b]} |f(t)| + |f'(t)|$, si existiera un punto crítico en tal conjunto, digamos c_0, necesariamente

$$|f(c_0)| = |f(c_0)| + |f'(c_0)| < \min_{t\in[a,b]} |f(t)| + |f'(t)|.$$

Esto último no puede pasar. De esta manera, las componentes conexas de raíces distintas son disjuntas entre sí, además, por la continuidad de f se cumple $|f(a_k)| = |f(b_k)| = \varepsilon$, como ya vimos que no puede haber puntos críticos en la componente conexa (a_k, b_k), entonces f' no cambia de signo, lo que implica que $f(a_k)f(b_k) < 0$, además f es biyectiva en tal intervalo y s_k es la única raíz contenida ahí, por lo tanto:

$$|f(b_k) - f(a_k)| = \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt = 2\varepsilon.$$

Vemos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$;

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt = 1.$$

Luego,

$$\{t \in [a, b], |f(t)| < \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k).$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$, tal que

$$\varepsilon < \delta = \min\left(|f(a)|, |f(b)|, \frac{1}{2} \min_{t\in[a,b]} |f(t)| + |f'(t)|\right)$$

se sigue

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{\{t\in[a,b]:|f(t)|<\varepsilon\}} |f'(t)|dt = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| = N(f, [a, b]).$$

II. Como f es una función propia, se tiene que $f^{-1}([-1, 1]) = [c, d]$ para algunos $c, d \in \mathbb{R}$, la función restringida a ese intervalo es una función conveniente siempre que $f(c)f(d) \neq 0$, si ocurriera que alguno o ambos de los extremos fueran tales que la función se anule, basta considerar un intervalo de la forma $[-x, x]$ tal que $f^{-1}([-x, x]) = [c, d]$ cumpla lo necesario para que la función f sea conveniente, esto es posible por el teorema del valor intermedio. Más aún, $N(f, [c, d]) = N(f, \mathbb{R})$, utilizando el primer punto anterior, se sigue el punto (2) de la proposición.

III. Ya se ha mostrado que, para $0 < \varepsilon < \delta$ se satisface

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_A I_{\{t\in A:|f(t)|<\varepsilon\}} |f'(t)|dt = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{v} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt = v \leq v + 2c.$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, como la función f tiene c puntos críticos, por el Teorema de Rolle, $f(t) = \varepsilon$ tiene una cantidad finita de soluciones, por lo tanto, el conjunto $\{t \in A : |f(t)| < \varepsilon\}$ tiene una cantidad finita de componentes conexas. Digamos entonces que el número de componentes conexas es n, dichas componentes tienen la forma (a_k, b_k), son disjuntas y cumplen que $|f(a_k)| = |f(b_k)| = \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3 \dots, n$. Note que si (a_k, b_k) no tiene puntos donde la derivada cambia de signo, entonces f es creciente, o bien, decreciente sobre la componente (a_k, b_k), entonces $f(a_k)f(b_k) < 0$, la continuidad de f implica que hay una única raíz en la componente (a_k, b_k).

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}K_1 = &\{i \in \{1, \ldots, n\} : (a_i, b_i) \text{ contiene puntos donde} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{la derivada cambia de signo}\}, \\ K_2 = &\{i \in \{1, \ldots, n\} : (a_i, b_i) \text{ no contiene puntos donde} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{la derivada cambia de signo}\},\end{aligned}$$

Por lo observado anteriormente $|K_2| = v$, además, $|K_1| \leq c$. Luego, para cada $k \in K_1$ sean $t_1 < t_2 < \ldots < t_{l_k}$ los puntos de cambio de signo de la derivada sobre la componente (a_k, b_k), entonces

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt &= \int_{a_k}^{t_1} |f'(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|dt + \cdots + \int_{t_{l_k}}^{b_k} |f'(t)|dt \\ &= |f(t_1) - f(a_k)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \cdots + |f(b_k) - f(t_{l_k})| \\ &\leq 2\varepsilon(l_k + 1).\end{aligned}$$

Escribimos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon} \int_A I_{\{t \in A : |f(t)| < \varepsilon\}} |f'(t)|dt &= \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\sum_{K_1} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt + \sum_{K_2} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt \right) \\ &= |K_2| + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{K_1} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt \\ &= v + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{K_1} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)|dt \\ &\leq v + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{K_1} 2\varepsilon(l_k + 1) \\ &\leq v + c + \sum_{k \in K_1} l_k \\ &\leq v + 2c.\end{aligned}$$

Note que en el caso en que $f(t) = \varepsilon$ no tiene soluciones, la componente conexa de $\{t \in A : |f(t)| < \varepsilon\}$ es el intervalo (a, b), el cual tiene a lo más c puntos donde la derivada cambia de signo, entonces, sean estos $t_1, t_2, \ldots, t_c$, por lo que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b |f'(t)|dt &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{a_k}^{t_1} |f'(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|dt + \cdots \int_{t_c}^{b_k} |f'(t)|dt \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(|f(t_1) - f(a_k)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \cdots + |f(b) - f(t_c)| \right) \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon(c + 1) \leq v + 2c.\end{aligned}$$

Por lo que obtenemos el resultado deseado.

□

Antes de establecer el principal resultado de esta sección, introducimos la siguiente defininción.

Definición 4. Una función aleatoria de variable real $t \in A \subseteq \mathbb{R}$ es una función tal que para cada t, el valor que toma la función es una variable aleatoria. Es decir, una función aleatoria es un proceso estocástico.

En este análisis centraremos la atención en funciones aleatorias de la siguiente forma

$$F(t) = F_\omega(t) = \sum_{k=0}^{n} X_k(\omega) f_k(t), \tag{3}$$

donde $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n : A \to \mathbb{R}$ son funciones continuamente diferenciables y $\{X_k : k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza v_k.

La funciones de covarianza y media de (3), respectivamente, estan determinadas por

$$K(s,t) = \sum_{k=0}^{n} v_k f_k(t) f_k(s). \tag{4}$$

y

$$\mu_t = \mathbb{E}(F(t)) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(X_k) f_k(t).$$

2.2. Fórmula de Kac-Rice. Stephen Oswald Rice (1907 - 1986), fue un informático estadounidense que tuvo una gran influencia en la teoría de la información y las telecomunicaciones. Rice es a quien se le atribuye parte del nombre de la fómula subyacente de la teoría de polinomios aleatorios, es decir, la llamada fórmula de Kac-Rice.

Ahora aplicaremos la fórmula de Kac, presentada en la Proposición 3, a la función F definida en la ecuación (3). Además, necesitaremos hacer uso de las siguientes hipótesis.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

- **Hipótesis 1:** La función aleatoria F es casi seguramente conveniente, es decir, el conjunto de puntos donde F no es conveniente tiene probabilidad cero.
- **Hipótesis 2:** $\exists M > 0$ en los reales, tal que $N(F, A) + N(F', A) < M$, donde $N(F, A)$ y $N(F', A)$ son como en (2). Aquí $A = \mathbb{R}$ ó A es un intervalo compacto.

El número de raíces reales de la función aleatoria F es una variable aleatoria discreta, así que encontrar el valor esperado de esta variable aleatoria es equivalente a contar las raíces de F haciendo uso de la Proposición 3, para cada $\omega \in \Omega$.

Supongamos que F satisface la Hipótesis 1, por lo tanto, la fórmula de conteo de Kac implica que

$$N(F_w, A) = \lim_{\epsilon \searrow 0} N_\varepsilon(F_w, A).$$

Y en consecuencia

$$\mathbb{E}[N(F,A)] = \int_\Omega N(F,A)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \lim_{\epsilon \searrow 0} N_\varepsilon(F_\omega, A)\mathbb{P}(d\omega).$$

El teorema de la convergencia dominada nos permite intercambiar la integral con el límite en la ecuación anterior. Para aplicarlo se requiere que para $m \in \mathbb{N}$, $N_\varepsilon(F_w, A)$ converja puntualmente y este acotado. En efecto, considerando $\varepsilon = \frac{1}{m}$, vemos que converge a $N(F, A)$ y por la Hipótesis 2, tenemos que $N(F, A)$ es acotada. Además, por el punto III de la Proposición 3 podemos asegurar que $N_\varepsilon(F_\omega, A) \leq v_w + 2c_w < 2M$, para todo $m \in \mathbb{N}$, así que utilizando el teorema de Fubini podemos intercambiar la esperanza con la integral, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \lim_{\epsilon \searrow 0} N_\varepsilon(F_\omega, A)\mathbb{P}(d\omega) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\Omega N_\varepsilon(F_\omega, A)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbb{E}\left(N_\varepsilon(F, A)\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{E}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_A I_{\{t \in A : |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)| dt\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_A \mathbb{E}\left[I_{\{t \in A : |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|\right] dt.
\end{aligned}$$

En resumen

$$\mathbb{E}[N(F,A)] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_A \mathbb{E}\left[I_{\{t\in A: |F(t)|<\varepsilon\}} |F'(t)| \right] dt. \tag{5}$$

Observación 5. *Note que todo lo que se ha realizado a partir de las hipótesis 1 y 2 se ha hecho sin hacer alguna suposición adicional sobre las variables aleatorias involucradas en la definición de la función F.*

Ahora supondremos que $X_k \sim N(0, v_k)$, la razón de hacer esta suposición adicional es que conocemos varias propiedades de variables y vectores aleatorios Gaussianos que simplifican considerablemente los cálculos.

Al querer calcular la esperanza en (5), buscamos entonces la densidad conjunta del vector aleatorio $(F(t), F'(t))$, pues $\mathbb{E}\left[I_{\{t\in A: |F(t)|<\varepsilon\}} |F'(t)| \right]$ es el valor esperado de una función H que depende de las variables aleatorias $X = F(t)$ y $Y = F'(t)$, H está definida por $H(x,y) = I_{|x|<\varepsilon}|y|$.

Para cada t, $F(t)$ y $F'(t)$ son una combinación lineal de variables aleatorias normales, entonces tienen distribución normal; mostraremos que el vector $(F(t), F'(t))$ es un vector Gaussiano, en efecto, basta probar que cualquier combinación lineal de las componentes del vector se distribuye normal, así que consideramos $a, b \in \mathbb{R}$, tales que

$$aF(t) + bF'(t) = a\sum_{k=0}^{n} X_k(w) f_k(t) + b\sum_{k=0}^{n} X_k(w) f_k'(t) = \sum_{k=0}^{n} X_k(w)(af_k(t) + bf_k'(t)). \tag{6}$$

La función definida en la ecuación (6) se distribuye normal, ya que es una combinación lineal de variables aleatorias independientes normales, lo cual es suficiente para afirmar que $(F(t), F'(t))$ es un vector aleatorio Gaussiano. Su matriz de covarianza $\mathcal{M}_t$ está determinada por:

$$\mathcal{M}_t = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ B_t & C_t \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbb{E}(X_k) = 0$ para toda k, entonces $\mathbb{E}(F(t)) = \mathbb{E}(F'(t)) = 0$ y por tanto:

$$\begin{aligned} A_t &= \operatorname{Cov}(F(t), F(t)) = \mathbb{E}\left[(F(t) - \mu_t)(F(t) - \mu_t)\right] = \mathbb{E}[F(t)^2]. \\ B_t &= \operatorname{Cov}(F(t), F'(t)) = \mathbb{E}\left[(F(t) - \mu_t)(F'(t) - \mu_t')\right] = \mathbb{E}[F(t)F'(t)]. \\ C_t &= \operatorname{Cov}(F'(t), F'(t)) = \mathbb{E}\left[(F'(t) - \mu_t')(F'(t) - \mu_t')\right] = \mathbb{E}[F'(t)^2]. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $A_t > 0$ así que definimos $U_t := \frac{\Delta_t}{A_t}$ donde $\Delta_t := \det \mathcal{M}_t = A_t C_t - B_t^2$, $\forall t \in A$. Note que si $\Delta_t > 0$ y $A_t > 0$ entonces $C_t > 0$.

Es momento de hacer una hipótesis adicional:

Hipótesis 3: $\Delta_t > 0, \forall t \in A$.

La intención de esta tercera hipótesis es asegurar la existencia de la función de densidad conjunta de $(F(t), F'(t))$, la cual, en este caso es normal bivariada.

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[I_{\{t\in A: |F(t)|<\varepsilon\}} |F'(t)| \right] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_{|x|<\varepsilon} |y| g(x,y)\, dx dy. \tag{7}$$

Donde,

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x,y)\mathcal{M}_t^{-1}(x,y)^{\intercal} \right\}$$

es la densidad conjunta del vector aleatorio $(F(t), F'(t))$. Completando cuadrados en el argumento de la exponencial que se encuentra en la definición en g se obtiene:

$$\begin{aligned}
(x,y)\mathcal{M}_t^{-1}(x,y)^{\intercal} &= \frac{1}{\Delta_t}\left(C_t x^2 - 2B_t xy + A_t y^2\right)\\
&= \frac{1}{\Delta_t}\left(A_t y^2 - 2B_t xy + \frac{B_t^2}{A_t}x^2 + \left(C_t - \frac{B_t^2}{A_t}\right)x^2\right)\\
&= \frac{1}{\Delta_t}\left(A_t\left(y - \frac{B_t}{A_t}x\right)^2 + \left(C_t - \frac{B_t^2}{A_t}\right)x^2\right)\\
&= \frac{1}{\Delta_t}\left(A_t\left(y - \frac{B_t}{A_t}x\right)^2 + \frac{\Delta_t}{A_t}x^2\right)\\
&= \frac{A_t}{\Delta_t}\left(y - \frac{B_t}{A_t}x\right)^2 + \frac{x^2}{A_t}.
\end{aligned}$$

Con lo anterior,

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}}\exp\left\{-\frac{A_t}{2\Delta_t}\left(y - \frac{B_t}{A_t}x\right)^2 - \frac{x^2}{2A_t}\right\}.$$

Así que, sustituyendo en la ecuación (7), se tiene:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[I_{\{t\in A:|F(t)|<\varepsilon\}}|F'(t)|\right]\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} I_{|x|<\varepsilon}|y|\frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}}\exp\left\{-\frac{A_t}{2\Delta_t}\left(y - \frac{B_t}{A_t}x\right)^2 - \frac{x^2}{2A_t}\right\}dxdy\\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}}I_{|x|<\varepsilon}\left(\int_{\mathbb{R}}|y|\exp\left\{-\frac{A_t}{2\Delta_t}\left(y - \frac{B_t}{A_t}x\right)^2 - \frac{x^2}{2A_t}\right\}dy\right)dx\\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2A_t}\right\}\left(\int_{\mathbb{R}}|y|\exp\left\{-\frac{A_t}{2\Delta_t}\left(y - \frac{B_t}{A_t}x\right)^2\right\}dy\right)dx\\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Phi_t(x)dx.
\end{aligned}$$

Usando la notación

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}}\exp\left\{\frac{-x^2}{2A_t}\right\}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\Delta_t}{A_t}}}\int_{\mathbb{R}}|y|\exp\left\{-\frac{A_t}{2\Delta_t}\left(y - \frac{B_t x}{A_t}\right)^2\right\}dy\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}}\exp\left\{\frac{-x^2}{2A_t}\right\}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi U_t}}|y|\exp\left\{-\frac{1}{2U_t}\left(y - \frac{B_t x}{A_t}\right)^2\right\}dy.
\end{aligned}$$

Definimos $\psi_{\left(\frac{B_t x}{A_t}, U_t\right)}(y)$ como la función de densidad de la variable aleatoria $Y \sim N\left(\frac{B_t x}{A_t}, U_t\right)$, de esta manera

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}}\exp\left\{\frac{-x^2}{2A_t}\right\}\int_{\mathbb{R}}|y|\psi_{\left(\frac{B_t x}{A_t}, U_t\right)}(y)dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2A_t}\right\}\mathbb{E}[|Y|].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\left[I_{\{t\in A:|F(t)|<\varepsilon\}}|F'(t)|\right] = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Phi_t(x)dx = \Phi_t(0). \tag{8}$$

La última igualdad se da por la aproximación a la Delta de Dirac, ya que podemos pensar a la función Φ_t como una función de prueba que se anula fuera del intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, debido a que $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño (vea por ejemplo [15]).

Ahora, queremos utilizar el resultado obtenido en (8) para calcular el valor esperado del número de raíces de F con la fórmula en (5), por lo que debemos intercambiar la integral con el límite, para esto, se sabe por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\mathbb{E}(|Y|) \leq \sqrt{\operatorname{Var}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2}.$$

Como la $\operatorname{Var}(Y) = U_t$ y $\mathbb{E}[Y] = \frac{B_t}{A_t}x$, se sigue que

$$\mathbb{E}[|Y|] \leq \sqrt{U_t + \left(\frac{B_t}{A_t}x\right)^2} \leq \sqrt{U_t} + \frac{|B_t x|}{A_t}.$$

Se observa que $\Phi_t(x)$ es siempre positiva, más aún, si consideramos $|x| \leq 1$, que $\exp\left\{-\frac{x^2}{2A_t}\right\} \leq 1$ y definimos $\varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sqrt{\Delta_t}}{A_t} + \frac{|B_t|}{A_t^{\frac{3}{2}}}\right)$, entonces

$$\Phi_t(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2A_t}\right\}\left(\sqrt{U_t} + \frac{|B_t x|}{A_t}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sqrt{\Delta_t}}{A_t} + \frac{|B_t|}{A_t^{\frac{3}{2}}}\right) = \varphi(t).$$

Es decir, para $|x| \leq 1$, $\Phi_t(x) \leq \varphi(t)$, notemos que la condición $|x| \leq 1$ no afecta al resultado que queremos obtener, puesto que $X = F(t)$ la cual en la Fórmula de que Kac (vea Proposición 3) está acotada por ε. Ahora, como queremos utilizar nuevamente el Teorema de la convergencia Dominada de Lebesgue para intercambiar el límite y la integral en cuestión, necesitamos agregar la siguiente hipótesis:

Hipótesis 4: La función $\varphi(t)$ es integrable sobre el conjunto A, lo cual significa que, $\int_A \varphi(t)dt < \infty$.

De esta manera, $\mathbb{E}[I_{|F(t)<\varepsilon|}|F'(t)|] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_t(x)dx \leq \int_A \varphi(t)dt$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(F, A)] &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_A \mathbb{E}[I_{\{t \in A : |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|] dt \\
&= \int_A \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_t(x)dx \\
&= \int_A \Phi_t(0) \\
&= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \int_{\mathbb{R}} |y| \psi_{0,U_t}(y)dy.
\end{aligned}$$

Por la simetría de la distribución normal, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Phi_t(0) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi A_t}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi U_t}} y \exp\left\{-\frac{y^2}{2U_t}\right\} dy \\
&= \frac{U_t}{\pi\sqrt{A_t U_t}} \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{U_t}{A_t}} \\
&= \frac{\sqrt{\Delta_t}}{\pi A_t}.
\end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$K_t'(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{n} v_k f_k(s) f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k f_k(s) f_k'(t) = \mathbb{E}[F(s)F'(t)],$$

por lo que $B_t = K_t'(t,t)$. Así mismo,

$$K''_{st}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \sum_{k=0}^{n} v_k f_k(s) f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k f'_k(s) f'_k(t) = \mathbb{E}[F'(s)F'(t)],$$

de este modo, $C_t = K''_{st}(t,t)$ y $A_t = K(t,t)$.

Finalmente,

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(logK(t,t)) = \frac{K(t,t)K''_{st}(t,t) - K'_t(t,t)^2}{K(t,t)^2} = \frac{A_t C_t - B_t^2}{A_t^2} = \frac{\Delta_t}{A_t^2}.$$

De esta manera, concluimos que

$$\mathbb{E}[N(F,A)] = \frac{1}{\pi} \int_A \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \log(K(t,t))} dt.$$

Así hemos demostrado el siguiente Teorema que lleva por nombre "Fórmula de Kac-Rice"(Vea Teorema 2.3 de [14]).

Teorema 6. *Sea F una función aleatoria definida como en* (3) *con $X_k \sim N(0, v_k)$, tal que cumple las Hipótesis 1, 2, 3 y 4. Entonces se satisface lo siguiente*

$$\mathbb{E}[N(F,A)] = \frac{1}{\pi} \int_A \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \log(K(t,t))} dt,$$

donde $N(F,A)$ y $K(s,t)$ estan definidos en (2) *y* (4)*, respectivamente.*

3. Polinomios aleatorios trigonométricos

Si en la función definida en la ecuación (3) se toma $f_k(t) = \cos(kt)$ ó $f_k(t) = \text{sen}(kt)$, entonces F es un polinomio trigonométrico con coeficientes aleatorios. En esta sección vamos a considerar las funciones $f_0, f_1, \ldots, f_{2n} : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma: $f_0 = 0$ y

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{rt}{n}\right), & si \quad k = 2r, \\ \cos(\frac{rt}{n}), & si \quad k = 2r+1, \end{cases}$$

donde $r \in \mathbb{N}$. Además, vamos a considerar $X_k = a_k$ si k es par y $X_k = b_k$ si es impar, para $k = 1, 2, \ldots, 2n$ con $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ variables aleatorios independientes e identicamente distribuidas con distribución normal estándar. De esta manera, F_n tiene la forma de un *polinomio aleatorio trigonométrico de grado n normalizado*:

$$F_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \,\text{sen}\left(\frac{jt}{n}\right) + b_j \cos\left(\frac{jt}{n}\right)\right). \tag{9}$$

3.1. Valor esperado del número de raíces. Vamos a calcular el valor esperado del número de raíces de F_n utilizando el Teorema 6, para lo cual debemos verificar las cuatro hipótesis que se plantean en el teorema.

Comenzamos observando que F_n *es casi seguramente conveniente en el intervalo* $[0,1]$. Para esto es necesario enunciar el siguiente resultado de E. V. Bulinskaya [4, Teorema 1] el cual proporciona condiciones generales para asegurar que un proceso estocástico no tenga puntos críticos en ciertos puntos.

Proposición 7. *Sea $\{X(t) : t \in [a,b]\}$ un proceso estocástico con trayectorias de clase C^1. Suponga que para cada $t \in [a,b]$ la variable aleatoria $X(t)$ es absolutamente continua con densidad uniformemente acotada en $t \in [a,b]$. Entonces*

$$P\left(\{t : t \in [a,b],\, X(t) = 0, X'(t) = 0\} \neq \emptyset\right) = 0.$$

Como a_j y b_j son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar el resultado se sigue directamente de la Proposición 7 (el lector interesado puede ver el trabajo de Ylvisaker [18] para ver una prueba complementaria de esta afirmación).

Ahora veamos que se satisface la *hipótesis 2*. Los polinomios trigonométricos no normalizados, es decir, $F(t) = \sum_{j=1}^{n} (a_j \operatorname{sen}(jt) + b_j \cos(jt))$ tiene a lo más $2n$ ceros (vea [14, pp. 7]). Por lo anterior, como el polinomio que estamos trabajando sí es normalizado, el número de raíces es a lo más n ya que los argumentos de las funciones sin y cos están divididos por n, más aún $F_n'(t)$ es también un polinomio trigonométrico de grado n entonces F_n tienen a lo más n puntos críticos, de esta manera $N(F_n, [0,1]) + N(F_n', [0,1]) < 2n + 1$.

Para la *hipótesis 3* debemos verificar que el determinante $\Delta_t = A_t C_t - B_t > 0$. Recordando que $A_t = K(t,t)$, $B_t = K_t'(t,t)$ y $C_t = K_{st}''(t,t)$, es necesario establecer la función de covarianza para el polinomio trigonométrico F_n, entonces

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{jt}{n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{js}{n}\right) + \cos\left(\frac{jt}{n}\right) \cos\left(\frac{js}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{j(s-t)}{n}\right). \end{aligned}$$

Cabe mencionar que la función de covarianza depende solamente de la diferencia $s - t$, es decir, los polinomios trigonométricos son procesos estacionarios. Calculamos las parciales de K, lo cual nos permite determinar A_t, B_t y C_t

$$\begin{aligned} K_s'(s,t) &= -\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j \operatorname{sen}\left(\frac{j(s-t)}{n}\right), \\ K_{st}''(s,t) &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 \cos\left(\frac{j(s-t)}{n}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned} A_t &= K(t,t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{jt}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{jt}{n}\right) \right) = 1, \\ B_t &= K_t'(t,t) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j \operatorname{sen}(0) = 0, \\ C_t &= K_{st}''(t,t) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 \cos(0) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que el determinante en cuestión es $\Delta_t = C_t$, es decir,

$$\Delta_t = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} > 0.$$

De esta manera, se satisface la Hipótesis 3.

Resta comprobar la *hipótesis 4*. Sea

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{\Delta_t}}{A_t} + \frac{|B_t|}{A_t^{\frac{3}{2}}} \right) = \sqrt{\frac{\Delta_t}{2\pi}} = \frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{2n\sqrt{3\pi}},$$

entonces φ es una función constante que sobre el intervalo $[0,1]$ es integrable.

Como consecuencia de lo anterior podemos usar la fórmula de Kac-Rice (vea Teorema 6), recordemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (\log K(t,t)) = \frac{\Delta_t}{A_t^2}.$$

En el caso de polinomios trigonométicos, resulta entonces que

$$\frac{\Delta_t}{A_t^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[N(F_n,[0,1])] = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}dt = \frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{\sqrt{6}\pi n}.$$

Observemos que

$$\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{n} = \sqrt{\frac{2n^2+3n+1}{n^2}} = \sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Luego, cuando $n\to\infty$, se tiene que $\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{n} = \sqrt{2}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[N(F_n,[0,1])] = \frac{\sqrt{3}}{3\pi} < 1.$$

En realidad, si analizamos la expresión obtenida para el valor esperado del número de raíces de F_n:

$$\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{\sqrt{6}\pi n}$$

notamos que siempre es un número estrictamente menor que 1. Esto se verifica al realizar algunos cálculos y observar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se satisface que $(2-6\pi^2)n^2+3n+1<0$; esto último es cierto ya que al considerar la parábola descrita por $y=(2-6\pi^2)x^2+3x+1$ se puede mostrar que es una parábola vertical que abre hacía abajo con sólo una raíz positiva $\frac{(3\pm\sqrt{1+24\pi})}{-4+12\pi}<1$, entonces todo $x>1$ cumple $(2-6\pi^2)x^2+3x+1<0$ y de manera particular $\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{\sqrt{6}\pi n}<1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Dicho de otra manera, para cualquier grado del polinomio trigonométrico, el valor esperado del número de raíces reales tiende al valor constante $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$, es decir, se esperaría que no haya raíces en el intervalo $[0,1]$.

Observación 8. *La varianza del número de raíces reales de polinomios trigonométricos ya se ha estudiado en* [10]. *En este trabajo se puede encontrar una estimación de la varianza para polinomios de la forma* $\sum_{j=1}^n a_j\cos(jt)$, *en el intervalo* $(0,2\pi)$, *si bien, la forma del los polinomios y el intervalo no son los que estamos considerando en este trabajo, se puede realizar un cambio de variable para ajustar los resultados.*

3.2. Regularidad L^p. El objetivo de esta sección es probar la siguiente proposición.

Proposición 9. *Sea* $N(F_n,I)$ *el número de raíces sobre el intervalo* $I=[0,1]$ *del polinomio trigonométrico* F_n *definido en* (9). *Entonces*

$$\mathbb{E}[N(F_n,I)^p]<\infty,$$

para toda $p\geq 1$.

Para esto, vamos a utilizar, entre otros resultados, el siguiente lema que generaliza el Teorema de Rolle y el error de interpolación polinomial de Lagrange (vea por ejemplo [5]).

Lema 10. *Suponga que* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *es de clase* $\mathcal{C}^k$ *con* $k\geq 1$, *y que existen* $x_1,x_2,\ldots,x_k\in[a,b]$ *tales que* $f(x_i)=0$ *para* $i=0,1,2,\ldots,k$. *Entonces para* $j<k$ *existen* $y_1,\ldots,y_{k-j}\in[a,b]$ *en los cuales* $f'(y_i)=0$ *con* $i=0,1,2,\ldots,k-j$, *más aún, para todo* $x\in[a,b]$ *existen* $\xi,\eta\in(a,b)$ *que satisfacen:*

$$f(x)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi)\prod_{i=1}^{k}(x-x_j) \qquad y \qquad f^{(j)}(x)=\frac{1}{(k-j)!}f^{(k)}(\eta)\prod_{i=1}^{k-1}(x-y_i).$$

Demostración. Se hará un argumento inductivo para probar la afirmación anterior, si $j = 0$, sólo se debe probar que $f(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi) \prod_{i=1}^{k}(x - x_j)$, lo cual se sigue de usar el polinomio de interpolación de Lagrange (vea [5]), el cual establece que si conocemos los valores que toma la función f en k puntos, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \prod_{i=1}^{k}(x - x_i),$$

donde $P(x) = \sum_{s=0}^{k} f(x_s) \prod_{s=1, s\neq i}^{k} \frac{x - x_s}{x_i - x_s}$, como $f(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ se sigue que $P(x) = 0$ y así

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \prod_{i=1}^{k}(x - x_i).$$

Ahora, para $j = 1$, consideramos los $k - 1$ intervalos de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, 2, \ldots, k - 1$, en cada uno de estos intervalos f es continuamente diferenciable y se anula en los extremos, por lo que podemos hacer uso del Teorema de Rolle, lo que significa que para cada $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ existe $y_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $f'(y_i) = 0$, entonces conocemos el valor de f' en $k - 1$ puntos, dicho valor es cero y tal como se hizo arriba, por el teorema de interpolación de Lagrange, existe $\tau \in (a, b)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f^{(k)}(\tau)}{(k - 1)!} \prod_{i=1}^{k-1}(x - y_i).$$

Supongamos válido el caso $k = n$, es decir, existen $w_i \in (a, b)$ tales que $f^{(n)}(w_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k - n$, de manera que

$$f^{(n)}(x) = \frac{f^{(k)}(\tau)}{(k - n)!} \prod_{i=1}^{k-n}(x - w_i),$$

Para algún $\tau \in (a, b)$. Consideramos ahora los $k-n-1$ intervalos de la forma $[w_i, w_{i+1}]$ con $i = 1, 2, \ldots, k - n - 1$, en los cuales es válido el teorema de Rolle para $f^{(n)}$, así que existe $y_i \in [w_i, w_{i+1}]$ tal que $f^{(n+1)}(y_i) = 0$ con $n + 1 \leq k$, utilizando el mismo argumento que en el caso anterior, existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{f^{(k)}(\eta)}{(k - n - 1)!} \prod_{i=1}^{k-n-1} (x - y_i),$$

con lo cual queda probado el resultado.

□

También haremos uso del siguiente resultado obtenido de [2].

Lema 11. *Sea I un intervalo fijo de longitud $|I|$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)|^2\right] \leq \frac{2}{|I|}(1 + |I|^2).$$

donde F_n^k representa la derivada $k-$ésima de F_n.

Demostración. Haremos la demostración utilizando los siguientes dos puntos.

1. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$, escribimos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{b - a}\left(\int_a^b f(s)ds - \int_a^t f(s)ds - \int_t^b f(s)ds + (b - a)f(t)\right) \\ &= \frac{1}{b - a}\int_a^b f(s)ds + \frac{1}{b - a}\left(\int_t^b (s - a)f'(s)ds + \int_a^t (s - b)f'(s)ds\right). \end{aligned}$$

A partir de esto, se tiene

$$|f(t)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(s)|ds + \frac{1}{b-a}\left(\int_a^t |b-a||f'(s)|ds + \int_t^b |a-b||f'(s)|ds\right)$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(s)|ds + \int_a^b |f'(s)|ds.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{t\in I}|f(t)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds + \int_a^b |f'(s)|ds.$$

Recordamos que para $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$, entonces, consideramos $x = \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(s)|ds$ y $y = \int_a^b |f'(s)|ds$, así

$$\left(\sup_{t\in I}|f(t)|\right)^2 \leq \frac{2}{(b-a)^2}\left(\int_a^b |f(s)|ds\right)^2 + 2\left(\int_a^b |f'(s)|ds\right)^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left(\int_a^b |f(s)|ds\right)^2 + 2\left(\int_a^b |f'(s)|ds\right)^2$$
$$\leq \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(s)^2 ds + 2\int_a^b f'(s)^2 ds.$$

De esta manera, por transitividad

$$\sup_{t\in I}|f(t)|^2 \leq \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(s)^2 ds + 2\int_a^b f'(s)^2 ds.$$

2. Para $n, m \in \mathbb{N}$, se observa que

$$F_n^{(2m)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} a_j(-1)^m\left(\frac{j}{n}\right)^{2m}\cos\left(\frac{j}{n}t\right)$$
$$+ b_j(-1)^m\left(\frac{j}{n}\right)^{2m}\sin\left(\frac{j}{n}t\right)$$
$$F_n^{(2m+1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} a_j(-1)^{m+1}\left(\frac{j}{n}\right)^{2m}\sin\left(\frac{j}{n}t\right)$$
$$+ b_j(-1)^{m+1}\left(\frac{j}{n}\right)^{2m+1}\cos\left(\frac{j}{n}t\right).$$

Entonces, por las suposiciones sobre a_j y b_j se sigue que:

$$\mathbb{E}[F_n^{(k)}(t)^2] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2k} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2k} + \cdots\right) \leq 1. \tag{10}$$

La desigualdad (10) nos permite utilizar el teorema de Fubini de manera que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in I}|F_n^{(k)}(t)|^2\right) \leq \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \mathbb{E}(F_n^{(k)}(s)^2)ds + 2\int_a^b \mathbb{E}(F_n^{(k+1)}(s)^2)ds$$
$$\leq \frac{2}{b-a} + 2(b-a),$$

concluyendo así la prueba. □

Demostración de la Proposición 9. La variable aleatoria $N = N(F_n, I)$ es discreta, ya que cuenta el número de raíces reales en el intervalo I, entonces

$$\mathbb{E}(N^p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^p P(N = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^p P(N \geq k).$$

Para acotar la suma del lado derecho de la desigualdad anterior vamos a trabajar con $P(N \geq k)$ usando el Lema 10. Resulta que si suponemos que $\sup_{t\in I} |F^{(k)}(t)| \leq M$ con $M > 0$ se satisface lo siguiente

$$|F_n(c)| \leq \frac{M|I|^k}{k!} \quad \text{y} \quad |F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}$$

con $c = \frac{a+b}{2}$. Así, podemos descomponer esta probabilidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(N \geq k) &= P(N \geq k, \sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M) + P(N \geq k, \sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| > M) \\ &\leq P(N \geq k, \sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M) + P(\sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| > M) \\ &= T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Analizamos primero T_1, se observa que $\{N \geq k, \sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M\}$ implica que estamos considerando que existan al menos k raíces y que $\sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M$, así que por lo discutido antes, tenemos

$$\begin{aligned} T_1 = P(N \geq k, \sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M) &\leq P\left(|F_n(c)| \leq \frac{M|I|^k}{k!}, |F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right) \\ &\leq P\left(|F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right). \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Markov, que establece que para una variable aleatoria X y $a \in \mathbb{R}$ se cumple $a^2 P(|X| \geq a) \leq \mathbb{E}(X^2)$, se sigue que:

$$T_2 = P\left(\sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| > M\right) \leq \frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)|^2\right).$$

Además por el Lema 11, $\mathbb{E}(\sup_{t\in I} |F_n(t)|^2) \leq \frac{2}{|I|}(1+|I|^2)$, de esta manera

$$P\left(\sup_{t\in I} |F_n^{(k)}(t)| > M\right) \leq \frac{2}{M^2|I|}(1+|I|^2).$$

Entonces,

$$P(N \geq k) \leq \frac{2}{M^2|I|}(1+|I|^2) + P\left(|F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right).$$

Para trabajar con la última expresión, enunciamos el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [11]:

Lema 12. *Sea $j \in \mathbb{N}_0$ fijo. Existe una constante $C = C(j) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ y $\beta \in [0, 2\pi]$ se cumple*

$$P\left(\left|\frac{X_n^{(j)}(\beta)}{n^j}\right| \leq T\right) \leq C(T + T^{-1/2} n^{-\frac{2j+1}{,}4})$$

donde $X_n = \sum_{k=1}^{n} a_t sin(kt) + b_t cos(kt)$.

El lema anterior es válido para $\beta \in [0, 2\pi]$, en particular es válido para $\beta = \frac{c}{n}$, de manera que, $\frac{X_n^{(j)}(\beta)}{n^j} = F_n^{(j)}(c)$, y considerando $T = \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}$ resulta que

$$P\left(F_n^{(j)}(c) \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right) \leq C\left(\frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M|I|^{k-j}}} n^{-\frac{2j+1}{4}}\right)$$

Entonces,

$$P(N \geq k) \leq C\left(\frac{1}{M^2} + \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M|I|^{k-j}}} n^{-\frac{2j+1}{4}}\right)$$

Estamos considerando $I = [0,1]$ entonces la expresión anterior se reduce a

$$P(N \leq k) \leq C\left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M} n^{-\frac{2j+1}{4}}}\right). \tag{11}$$

Lo que sigue es acotar $(k-j)!$ inferiormente, para esto se utiliza una aproximación del factorial. En [3] se menciona que, para cualquier natural, en particular $k-j$ se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\frac{(k-j)^{k-j}}{e^{k-j}}\sqrt{2\pi\left(k-j+\frac{1}{6}\right)} < (k-j)! \leq \frac{(k-j)^{k-j}}{e^{k-j}}\sqrt{2\pi\left(k-j+\frac{e^2}{2\pi}-1\right)} \tag{12}$$

Entonces, podemos considerar que

$$(k-j)! \geq (k-j)^{k-j}e^{-(k-j)}c(k-j)^{1/2}.$$

Donde c es alguna constante que puede ir cambiando a lo largo del siguiente análisis, pero que no deja de ser constante.

Supongamos que $j = \lfloor \beta k \rfloor$ para $\beta > 0$, donde estamos considerando $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, de esta manera, como $\lfloor \beta k \rfloor \leq \beta k$ entonces $(k - \lfloor \beta k \rfloor)^{1/2} \geq (k-\beta k)^{1/2}$, por lo tanto $(k-j)^{1/2} \geq (1-\beta)^{1/2}k^{1/2}$. Así

$$(k-j)! \geq c(k-j)^{k-j}e^{-(k-j)}(1-\beta)^{1/2}k^{1/2}.$$

Como $\beta k - 1 \leq \lfloor \beta k \rfloor$ y $k \geq 1$ se sigue que

$$k - j = k - \lfloor \beta k \rfloor \leq k - \beta k + 1 \leq k - \beta k + k = (2-\beta)k.$$

Por lo tanto $e^{-(k-j)} \geq e^{-(2-\beta)k}$. Así, $(k-j)! \geq (k-j)^{k-j}e^{-(2-\beta)k}(1-\beta)^{1/2}k^{1/2}$.

En cuanto a $(k-j)^{k-j}$, vemos que como $\lfloor \beta k \rfloor \leq \beta k$ entonces $k - \lfloor \beta k \rfloor \geq (1-\beta)k$, además, si consideramos $\beta \in (0,1)$ vemos que $(1-\beta)^{k-j} \geq (1-\beta)^k$, por tanto, para $k > 1$

$$\begin{aligned}(k-j)^{k-j} &= (k - \lfloor \beta k \rfloor)^{k-j}\\ &\geq (k-\beta k)^{k-j}\\ &= (1-\beta)^{k-j}k^{k-j}\\ &\geq (1-\beta)^k k^{(1-\beta)k}.\end{aligned}$$

Hemos encontrado entonces la siguiente cota inferior para $(k-j)!$

$$(k-j)! \geq c(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k}(1-\beta)^{1/2}k^{(1-\beta)k+1/2}.$$

Como $(1-\beta)^{1/2}$ es una constante que depende sólo de β podemos reescribir la cota como sigue

$$(k-j)! \geq C_\beta(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k}k^{(1-\beta)k+1/2}$$

Ahora, como la desigualdad (11) también requiere que acotemos $(k-j)!$ superiormente, entonces para alguna constante c, por la ecuación (12) se tiene

$$(k-j)! \leq c(k-j)^{k-j}e^{-(k-j)}\sqrt{2\pi(k-j)},$$

como antes, $j = \lfloor \beta k \rfloor$ con $\beta \in (0,1)$, sabemos entonces que $-\lfloor \beta k \rfloor = -j \leq 1 - \beta k$, lo que implica

$$k - j \leq k + 1 - \beta k = (1-\beta)k + 1 \leq (1-\beta)k + k,$$

en consecuencia

$$(k-j)^{1/2} \leq \sqrt{(1-\beta)k + k} = (2-\beta)^{1/2}k^{1/2}.$$

Entonces

$$(k-j)! \leq c(k-j)^{k-j}e^{-(k-j)}(2-\beta)^{1/2}k^{1/2}.$$

Además, $k-j \geq (1-\beta)k$, por lo que $e^{-(k-j)} \leq e^{-(1-\beta)k}$, de manera que

$$(k-j)! \leq c(k-j)^{k-j} e^{-(1-\beta)k}(2-\beta)^{1/2}k^{1/2}.$$

Luego, sabemos que $\lfloor \beta k \rfloor \geq \beta k - 1$, por tanto $k - \lfloor \beta k \rfloor \leq 1 + (1-\beta)k$, así que

$$\begin{aligned}
(k-j)^{k-j} &= (k - \lfloor \beta k \rfloor)^{k-j} \\
&\leq (1 + (1-\beta)k)^{k-j} \\
&\leq (k + (1-\beta)k)^{k-j} \\
&\leq (2-\beta)^{k-j} k^{k-j} \\
&\leq (2-\beta)^{k} k^{1+(1-\beta)k} \text{ pues } 2-\beta > 1.
\end{aligned}$$

Resultando que

$$(k-j)! \leq c_\beta (2-\beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}.$$

Tenemos así, las siguientes desigualdades:

$$C_\beta (1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k} k^{(1-\beta)k+1/2} \leq (k-j)! \leq c_\beta (2-\beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}.$$

Dado que $P(N \geq k) \leq C\left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M}} n^{-(2j+1)/4}\right)$ donde n es el grado del polinomio, entonces necesariamente, $k \leq n$, por tanto $n^{-(2j+1)/4} \leq k^{-(2j+1)/4}$. A su vez, como $j = \lfloor \beta k \rfloor \geq \beta k - 1$, se satisface que $k^{-(2j+1)/4} \leq k^{(-2\beta k+1)/4}$. Entonces

$$P(N \geq k) \leq C\left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M}} k^{-2\beta k+1)/4}\right).$$

Con las cotas encontradas, tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} k^p P(N \geq k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} C a_k$, donde estamos considerando $C = \text{máx}\{c_\beta, \frac{1}{C_\beta}\}$ y

$$\begin{aligned}
a_k =& k^p \left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k} k^{(1-\beta)k+1/2}}\right. \\
&\left. + \sqrt{\frac{(2-\beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}}{M}} k^{-2\beta k+1)/4}\right).
\end{aligned}$$

Así que, descomponemos $a_k = b_k + c_k + d_k$, donde

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{k^p}{M^2}, \\
c_k &= \frac{M k^p}{(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k} k^{(1-\beta)k+1/2}}, \\
d_k &= \sqrt{\frac{(2-\beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}}{M}} k^{-2\beta k+1)/4},
\end{aligned}$$

de manera que, si vemos que las series de b_k, c_k y d_k convergen, entonces la de a_k también. Para ello, por simplicidad, vamos a considerar $M = k^{k\alpha}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ se determinará de manera adecuada para que las series en cuestión converjan. Así pues comenzamos analizando la suma de c_k, utilizamos el criterio del cociente de d'Alembert, que establece que es suficiente con que $\text{lím}_{k\to\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} < 1$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Hacemos $a = 1 - \beta - \alpha$

$$
\begin{aligned}
\frac{c_{k+1}}{c_k} &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^p \frac{(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k}}{(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)(k+1)}} \frac{k^{ak+1/2}}{(k+1)^{a(k+1)+1/2}} \\
&= \left(1+\frac{1}{k}\right)^p \frac{1}{(1-\beta)e^{-(2-\beta)}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{ak+1/2} \left(\frac{1}{k+1}\right)^a \\
&= \left(1+\frac{1}{k}\right)^p \frac{1}{(1-\beta)e^{-(2-\beta)}} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{ak+1/2} \left(\frac{1}{k+1}\right)^a .
\end{aligned}
$$

Cuando $k \to \infty$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{k}\right)^p \to 1, \\
&\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{ak+1/2} = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^a \left(1+\frac{1}{k}\right)^{1/2} \to e^a, \\
&\left(\frac{1}{k+1}\right)^a \to 0, \quad \text{si y sólo si } a > 0.
\end{aligned}
$$

Así que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converge si $\alpha < 1-\beta$.

Procedemos a verificar la suma para d_k, nuevamente, usando el criterio del cociente:

$$
\begin{aligned}
\frac{d_{k+1}}{d_k} &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^p \frac{[(2-\beta)e^{-(1-\beta)}]^{(k+1)/2}}{[(2-\beta)e^{-(1-\beta)}]^{k/2}} \frac{k^{(\alpha-1)k/2+\beta k-1}}{(k+1)^{(\alpha-1)(k+1)/2+\beta(k+1)-1}} \\
&= \left(1+\frac{1}{k}\right)^p [(2-\beta)e^{-(1-\beta)}]^{1/2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{(\alpha-1)k/2+\beta k-1} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{(\alpha-1)/2+\beta} .
\end{aligned}
$$

Haciendo $k \to \infty$ se verifica que:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{k}\right)^p \to 1, \\
&\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{(\alpha-1)k/2+\beta k-1} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{(\alpha-1)k/2} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\beta k} \left(1+\frac{1}{k}\right) \to e^{(\alpha-1)/2-\beta}, \\
&\left(\frac{1}{k+1}\right)^{(\alpha-1)/2+\beta} \to 0, \quad \text{si y sólo si } \alpha > 1-2\beta.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ converge si $\alpha > 1-2\beta$. Resta verificar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{b_{k+1}}{b_k} &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^p \frac{k^{2\alpha k}}{(k+1)^{2\alpha k+2\alpha}} \\
&= \left(1+\frac{1}{k}\right)^p \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{2\alpha k} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{2\alpha}
\end{aligned}
$$

De la última igualdad vemos que cuando $k \to \infty$ el cociente $\frac{b_{k+1}}{b_k} \to 0$ siempre que $\alpha > 0$. Hemos necesitado que la constante α sea positiva y $1-2\beta < \alpha < 1-\beta$, por lo tanto, si elegimos $\alpha = 1-\frac{3}{2}\beta$ siempre que $\beta < \frac{2}{3}$ podemos concluir que $\mathbb{E}(N^p) < \infty$. □

AGRADECIMIENTOS. Las autoras agradecen los cometarios hechos por el(la) revisor(a) anónimo(a) que ayudaron a mejorar sustancialmente este trabajo. El trabajo de la primera autora fue apoyado por el programa "Becas Nacionales para estudios de posgrado" del CONAHCYT.

Referencias

[1] Angst J., Pham V.-H. and Poly G., *Universality of the nodal length of bivariate random trigonometric polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc. 370 8331-8357, (2018).

[2] Azaïs J.-M. , Dalmao F., León J., Nourdin I. y Poly G., *Local universality of the number of zeros of random trigonometric polynomials with continuous coefficients,* preprint at http://arxiv.org/abs/1512.05583

[3] Batir N. *An approximation formula for n! Proyecciones* (Antofagasta, Online), 32(2):173-181, 2013.

[4] Bulinskaya, E. V., *On the mean number of crossings of a level by a stationary Gaussian process*, Theory Probab. Appl. 6 (1962), 435-438.

[5] Burden R. L., Douglas Faires J. *Análisis numérico.* Décima edición, 2017.

[6] Coutin L. Peralta L., *Rates of convergence for the number of zeros of random trigonometric polynomials*, to appear in *Bernoulli*, 2022.

[7] Dunnage, J. E. A., *The number of real zeros of a random trigonometric polynomial.* Proc. London Math. Soc. (3) 16 53-84. (1966).

[8] Farahmand, K., *On the number of real zeros of a random trigonometric polynomial: coefficients with nonzero infinite mean.* Stochastic Anal. Appl. 5 379-386. (1987).

[9] Farahmand, K., *Level crossings of a random trigonometric polynomial with dependent coefficients.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A 58 39-46. (1995).

[10] Farahmand K. *On the variance of the number of real zeros of a random trigonometric polynomial.* Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 10(1):57-66, 1997.

[11] Flasche H., *Expected number of real roots of random trigonometric polynomials.* Stochastic Processes and their Applications, 127(12):3928-3742, 2017.

[12] Kac, M., *On the average number of real roots of a random algebraic equation.* II. Proc. London Math. Soc. (2) 50 390-408. MR30713, (1949).

[13] Littlewood, J. E. and Offord, A. C. *On the Number of Real Roots of a Random Algebraic Equation.* J. London Math. Soc. 13 288-295. (1938).

[14] Nicolaescu, L., *On the kac–rice formula*, *Notes*, 1, 2014.

[15] Salsa S. *Partial differential equations in action. From modelling to theory.* Third edition. Unitext, 99. La Matematica per il 3+2. Springer, [Cham], 2016. xviii+686 pp. ISBN: 978-3-319-31237-8; 978-3-319-31238-5

[16] Sard, A. *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society 48 (1942), 883-890.

[17] Bogomolny, E., Bohigas, O. and Leboeuf, P., *Quantum chaotic dynamics and random polynomials.* J. Statist. Phys. 85 639-679. (1996).

[18] Ylvisaker, N. D., *A note on the absence of tangencies in Gaussian sample paths*, Ann. Math. Statist. 39 (1968), 261-262. MR-0226725

Verania Hernández Orgaz:
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Circuito Exterior, C.U.,
Del. Coyoacan, C.P. 04510, CDMX, México.
e-mail: `vhdez12@comunidad.unam.mx`

Liliana Peralta:
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, C.U.,
Del. Coyoacan, C.P. 04510, CDMX, México.
e-mail: `lylyaanaa@ciencias.unam.mx`